

MLCM 85/474

FT MEADE
GenColl

Beitrag zur konformen Abbildung
von Großräumen in der Geodäsie

Von

Fritz Hunger

Mit 3 Beilagen

3 - MAY 14
COPY 0, 1942



Verlag des Reichsamts für Landesaufnahme, Berlin

Sonderheft 26

zu den „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst
Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme“ 1943

LIBRARY OF CONGRESS



0 012 110 656 5



Heeresplankammer

Fa 88, 1

Beitrag zur konformen Abbildung von Großräumen in der Geodäsie

Von

Fritz Hunger

Mit 3 Beilagen



Verlag des Reichsamts für Landesaufnahme, Berlin

Sonderheft 26

zu den „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst
Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme“ 1943



~~A-QB~~
312

MLCM 85/474

Von der Technischen Hochschule Berlin

am 4. Mai 1942

genehmigte Dissertation

Gedruckt bei Wilhelm Limpert, Berlin

85-854 170

Inhalt

	Seite
I. Einleitung	5
II. Reihenentwicklungen.....	7
III. Die konforme Abbildung im Falle der geradlinigen Abbildung einer geodätischen Linie. Grundformeln zur Aufstellung von Gebrauchsformeln für die Koordinatenübertragung und für das Vergrößerungsverhältnis.	
1. Vorbemerkung.....	13
2. Geradlinige Abbildung eines Meridians	13
3. Beispiele für die Anwendung der Grundformeln	23
4. Geradlinige Abbildung einer beliebigen geodätischen Linie	27
IV. Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids und ihre Grenzfälle.	
1. Die Grundgleichung der konformen Lambertabbildung bei einer beliebigen Fläche	34
2. Sonderfall der Kugel.....	37
3. Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids	39
4. Die verallgemeinerte stereographische Abbildung des Erdellipsoids	50
5. Die verallgemeinerte Mercatorabbildung des Erdellipsoids	53
V. Die querachsige Abbildung des Erdellipsoids für den Fall, daß der Meridian die Hauptachse ist.....	55
VI. Die Richtungs- und Längenreduktionen.	
1. Allgemeines	56
2. Die Reduktionen bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung ...	59
3. Die Reduktionen bei der verallgemeinerten stereographischen Abbildung ...	63
VII. Bemerkungen zu der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung und insbesondere zur verallgemeinerten stereographischen Abbildung des Erdellipsoids.	
1. Untersuchung über die Formtreue der Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels	65
2. Vergleichung verschiedener „stereographischer“ Abbildungen des Erdellipsoids	69
VIII. Sonderfall der Kugel.	
1. Die Übertragungsformeln	76
2. Umformungen von Koordinaten eines Systems in Koordinaten eines anderen Systems	79
IX. Zur Abbildung von Großräumen.	
1. Unmittelbare Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene oder Doppelabbildung	83
2. Zur Abbildung der Fläche des Deutschen Reiches	84
3. Zur Abbildung von Großräumen	86
X. Zusammenfassung	91

12 Mrz 85

I. Einleitung

Die konforme Abbildung hat sich in der Landesvermessung als Mittel zur Berechnung rechtwinklig-ebener Koordinaten durchgesetzt. Die besondere Art der jeweils verwendeten Abbildung hängt meistens von der Form der Grenzen des Landes ab, welches abgebildet werden soll; denn die Abbildung ist im allgemeinen derart zu wählen, daß die durch sie bedingten unvermeidlichen Verzerrungen möglichst gering bleiben. Die Abbildungsart ist also nach geometrischen Gesichtspunkten auszuwählen; z. B. längentreue Abbildung eines Meridians (Gauß-Krüger-Abbildung) für Länder von nordsüdlicher, längentreue Abbildung eines Breitenkreises (konforme Lambertabbildung — Kegelprojektion —) für Länder ostwestlicher Erstreckung und kreisförmige Linien konstanten Vergrößerungsverhältnisses (stereographische Abbildung) für Gebiete mit kreisförmiger Begrenzung.

Die Gebrauchsformeln zur Berechnung der rechtwinklig-ebenen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten (und umgekehrt) und zur Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses bei der gewählten Abbildung sind bisher wohl stets aus differentiellen Beziehungen, die für die einzelne Abbildung gelten, von Grund auf hergeleitet worden, ohne daß man die Verwandtschaft aller konformen Abbildungen dazu ausgenutzt hätte, nach einem einheitlichen Verfahren vorzugehen und damit schneller zum Ziel zu kommen.

Im ersten Teil dieser Arbeit sollen daher Grundformeln aufgestellt werden, mit Hilfe deren man auf einheitliche Weise die Abbildungsgleichungen und die Formeln für das Vergrößerungsverhältnis finden kann.

Von den konformen Abbildungen der Erdoberfläche in die Ebene gilt die stereographische Projektion der Kugel (s. Wagner-Meinardus [21] S. 312) als die erste, die bekanntgeworden ist. Hipparch soll sie bereits vor mehr als 2000 Jahren angewandt haben. Außer der Winkeltreue weist sie mehrere Eigenschaften auf, die andere konforme Abbildungen nicht besitzen: Man kann die Abbildung durch perspektive Projektion herstellen; sämtliche Kreise auf der Kugel werden in der Ebene wieder als Kreise abgebildet, und die durch den Normalpunkt der Abbildung auf der Kugel gehenden Größtkreise werden zu Geraden. Die Größtkreise durch den Normalpunkt bilden ein Büschel geodätischer Linien („geodätisches Strahlenbüschel“) mit dem Normalpunkt als Scheitel. Weil dieses geodätische Strahlenbüschel in der Ebene als ein Büschel von Geraden abgebildet wird, wollen wir die Abbildung in Anlehnung an den von Laborde ([14] S. 38) geprägten Ausdruck „isomorphe“ als „formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels“ bezeichnen. Die Strahlen seines Abbildes schneiden sich unter den gleichen Winkeln wie die Strahlen des Urbildes (azimutale Projektion).

Ein zweites Beispiel für die konforme und zugleich formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels bietet die altbekannte Mercatorabbildung der Kugel, die wahrscheinlich schon vor Mercator (Veröffentlichung 1569) von dem Nürnberger Kartographen Etzlaub (um 1510), vielleicht sogar noch eher, durchgeführt worden ist (s. Wagner-Meinardus [21] S. 291). Bei ihr wird

ein Größtkreis längentreu und geradlinig abgebildet. Die Abbilder der zu diesem Größtkreis senkrechten Größtkreise, die hier das geodätische Strahlenbüschel bilden, sind wieder gerade Linien. Im Gegensatz zur stereographischen Projektion schneiden sich aber die Strahlen des Abbildes nicht unter dem gleichen Winkel wie die Größtkreise des Urbildes, sondern unter einem Winkel von 0° : die Strahlen sind einander parallel. Der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels ist für die konforme Abbildung ein singulärer Punkt.

Von diesen gegensätzlichen Eigenschaften der stereographischen Projektion und der Mercatorabbildung ging Lambert aus und stellte sich die Aufgabe, eine konforme Abbildung zu finden, bei der die Schnittwinkel der Strahlen des ebenen Abbildes des Büschels in einem beliebigen, aber konstanten Verhältnis zu den Schnittwinkeln der geodätischen Strahlen auf der Kugel stehen (Lambert [1] S. 134 § 47 ff.). Er betrachtete dabei als geodätisches Strahlenbüschel auf der Kugel die Gesamtheit der Meridiane. Als Ergebnis fand er eine Abbildung, die wir konforme Lambertabbildung nennen wollen und die oft als konforme „Kegelprojektion“ bezeichnet wird. Sie ist das dritte Beispiel für die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels. Auch bei ihr ist der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels für die konforme Abbildung ein singulärer Punkt. Die Bezeichnung „Kegelprojektion“ ist mißverständlich und sachlich kaum begründet. Sie stammt weder von Lambert, noch hat sie C. F. Gauß angewendet.

Bezeichnet man das Verhältnis der Schnittwinkel der Strahlen des ebenen Abbildes zu den Schnittwinkeln der geodätischen Strahlen des betrachteten Büschels auf der Kugel mit n , so ist bei der konformen Lambertabbildung $0 < n < 1$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ergeben sich als Grenzfälle die Mercatorabbildung und die stereographische Projektion. Gemeinsam ist allen drei Abbildungen die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden Formeln für eine konforme Abbildung des Erdellipsoids entwickelt, die soweit als möglich denen der konformen Lambertabbildung der Kugel entsprechen sollen. Die Abbildung soll als „verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids“ bezeichnet werden. Auch bei ihr wird es Grenzfälle geben, die der Mercatorabbildung und der stereographischen Projektion der Kugel entsprechen.

Nach der Entwicklung der Formeln für die erwähnten Abbildungsarten soll erörtert werden, in welcher Weise sie sich praktisch anwenden lassen. Diese Betrachtung soll an dem Beispiel Großdeutschlands und des Erdellipsoids zeigen, welche Möglichkeiten für die rationelle Abbildung von Großräumen in der Geodäsie bestehen. Dabei ist vorweg auf die Frage einzugehen, ob die unmittelbare Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene oder die Doppelabbildung auf dem Wege über eine Kugel vorzuziehen ist.

Die Anregung zu dieser Arbeit danke ich Herrn Professor Dr. Dr.-Ing. h. c. Eggert, der in seiner Arbeit „Die stereographische Abbildung des Erdellipsoids“ ([18] S. 153) als erster eine geometrische Eigenschaft der stereographischen Projektion der Kugel, nämlich die Azimutalität, dem Ansatz für die Entwicklung von Formeln zu einer analogen stereographischen Abbildung des Erdellipsoids zugrunde legte. Herrn Professor Dr. Brennecke, der insbesondere die Untersuchung über die Möglichkeiten für die Abbildung von Großräumen anregte, danke ich ebenfalls für seine die Arbeit fördernden Hinweise.

II. Reihenentwicklungen

Zur Erleichterung der Übersicht sollen zunächst die wichtigsten Reihen zusammengestellt werden, die später zu benutzen sind.

Bezeichnungen

- φ = geographische Breite,
 q = isometrische Breite,
 l = geographische Länge,
 α = Azimut,
 x und y = rechtwinklig-ebene Koordinaten,
 M = Meridiankrümmungshalbmesser,
 N = Querkrümmungshalbmesser,
 $N/M = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2$; $t = \operatorname{tg} \varphi$,
 $m = dS/ds$ = Vergrößerungsverhältnis bei der konformen Abbildung,
 m = reduzierte Länge der geodätischen Linie,
 g = geodätische Krümmung,
 $\rho = 1/g$ = geodätischer Krümmungshalbmesser,
 $K = 1/MN$ = Krümmungsmaß der Fläche.

Reihen

$$1. \quad V^2 = 1 + \eta^2; \quad V^4 = 1 + 2\eta^2 + \eta^4; \quad V^6 = 1 + 3\eta^2 + 3\eta^4 + \eta^6; \\
V^8 = 1 + 4\eta^2 + \dots \\
\frac{1}{V^2} = 1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6 + \dots; \quad \frac{1}{V^4} = 1 - 2\eta^2 + 3\eta^4 + \dots; \quad (1) \\
\frac{1}{V^6} = 1 - 3\eta^2 + 6\eta^4 + \dots; \quad \frac{1}{V^8} = 1 - 4\eta^2 + \dots$$

2. Beziehungen zwischen einander entsprechenden Unterschieden in der geographischen und der isometrischen Breite:

a) Berechnung des isometrischen Breitenunterschieds Δq aus dem geographischen Breitenunterschied $\Delta \varphi$:

In Übereinstimmung mit Großmann ([16] S. 483) und Hristow ([17] S. 649) ist:

$$\Delta q = \frac{1}{\cos \varphi} (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi + \frac{1}{2} \frac{t}{\cos \varphi} (1 + \eta^2 - 3\eta^4) \Delta \varphi^2 \\
+ \frac{1}{6} \frac{1}{\cos \varphi} (1 + 2t^2 + \eta^2 - 3\eta^4 + 6t^2 \eta^4) \Delta \varphi^3 \\
+ \frac{1}{24} \frac{t}{\cos \varphi} (5 + 6t^2 - \eta^2) \Delta \varphi^4 + \frac{1}{120} \frac{1}{\cos \varphi} (5 + 24t^4 \\
+ 28t^2) \Delta \varphi^5 + \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta q^2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} (1 - 2\eta^2 + 3\eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{t}{\cos^2 \varphi} (1 - 3\eta^4) \Delta \varphi^3 \\ &+ \frac{1}{24} \frac{1}{\cos^2 \varphi} (8 + 22t^2 - 4\eta^2 t^2) \Delta \varphi^4 \\ &+ \frac{1}{24} \frac{t}{\cos^2 \varphi} (14 + 20t^2) \Delta \varphi^5 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta q^3 &= \frac{1}{\cos^3 \varphi} (1 - 3\eta^2 + 6\eta^4) \Delta \varphi^3 + \frac{3}{2} \frac{t}{\cos^3 \varphi} (1 - \eta^2) \Delta \varphi^4 \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^3 \varphi} (2 + 7t^2) \Delta \varphi^5 + \dots \end{aligned}$$

$$\Delta q^4 = \frac{1}{\cos^4 \varphi} (1 - 4\eta^2) \Delta \varphi^4 + 2 \frac{t}{\cos^4 \varphi} \Delta \varphi^5 + \dots$$

$$\Delta q^5 = \frac{1}{\cos^5 \varphi} \Delta \varphi^5 + \dots$$

b) Berechnung des geographischen Breitenunterschieds $\Delta \varphi$ aus dem isometrischen Breitenunterschied Δq :

In Übereinstimmung mit den zu a) angeführten Stellen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \cos \varphi (1 + \eta^2) \Delta q - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t (1 + 4\eta^2 + 3\eta^4) \Delta q^2 \\ &- \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 - 13\eta^2 t^2 + 5\eta^2 - 27\eta^4 t^2 \\ &+ 7\eta^4) \Delta q^3 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi t (5 - t^2 - 40\eta^2 t^2 \\ &+ 56\eta^2) \Delta q^4 + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (5 + t^4 - 18t^2) \Delta q^5 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

3. Nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 442) ist

— mit $u = \frac{s}{N} \cos \alpha$, $v = \frac{s}{N} \sin \alpha$ —

$$\begin{aligned} \frac{\varphi' - \varphi}{V^2} &= u - \frac{1}{2} t v^2 - \frac{3}{2} \eta^2 t u^2 - \frac{1}{6} (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) v^2 u \\ &- \frac{1}{2} \eta^2 (1 - t^2) u^3 \\ &+ \frac{1}{24} t (1 + 3t^2 + \eta^2 - 9\eta^2 t^2) v^4 \\ &- \frac{1}{12} t (4 + 6t^2 - 13\eta^2 - 9\eta^2 t^2) v^2 u^2 \\ &+ \frac{1}{2} \eta^2 t u^4 + \frac{1}{120} (1 + 30t^2 + 45t^4) v^4 u \\ &- \frac{1}{30} (2 + 15t^2 + 15t^4) v^2 u^3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} l \cos \varphi &= v + t v u - \frac{1}{3} t^2 v^3 + \frac{1}{3} (1 + 3t^2 + \eta^2) v u^2 \\ &- \frac{1}{3} t (1 + 3t^2 + \eta^2) v^3 u \\ &+ \frac{1}{3} t (2 + 3t^2 + \eta^2) v u^3 + \frac{1}{15} t^2 (1 + 3t^2) v^5 \\ &+ \frac{1}{15} (2 + 15t^2 + 15t^4) v u^4 - \frac{1}{15} (1 + 20t^2 + 30t^4) v^3 u^2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

4. Für den Meridian wird

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi' - \varphi = u (1 + \eta^2) - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) u^2 \\ &- \frac{1}{2} \eta^2 (1 - t^2) u^3 + \frac{1}{2} \eta^2 t u^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi^2 = (1 + 2\eta^2 + \eta^4) u^2 - 3\eta^2 t u^3 - \eta^2 (1 - t^2) u^4 + \dots \quad (6)$$

$$\Delta \varphi^3 = (1 + 3\eta^2) u^3 - \frac{9}{2} \eta^2 t u^4 + \dots$$

$$\Delta \varphi^4 = (1 + 4\eta^2) u^4 + \dots$$

$$\Delta \varphi^5 = u^5 + \dots$$

5. Aus Gleichung (4) erhalten wir durch Umkehrung die Meridianbogenlänge und Funktionen von ihr als Funktion des Breitenunterschieds, wenn wir $v = 0$ setzen. Zur Abkürzung schreiben wir $\frac{\varphi' - \varphi}{V^2} = \beta$.

Es wird

$$\begin{aligned} u &= \beta + \frac{3}{2} \eta^2 t \beta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4\eta^2 t^2) \beta^3 \\ &- \frac{1}{2} \eta^2 t \beta^4 - \frac{1}{10} \eta^2 (1 - t^2) \beta^5 + \dots \end{aligned}$$

$$u^2 = \beta^2 + 3\eta^2 t \beta^3 + \eta^2 (1 - t^2) \beta^4 - \eta^2 t \beta^5 + \dots$$

$$u^3 = \beta^3 + \frac{9}{2} \eta^2 t \beta^4 + \frac{3}{2} \eta^2 (1 - t^2) \beta^5 + \dots$$

$$u^4 = \beta^4 + 6\eta^2 t \beta^5 + \dots$$

$$u^5 = \beta^5 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2} \eta^2 t - \frac{1}{4} \eta^2 (2 - 2t^2 + 2\eta^2 - \eta^2 t^2) \beta + \frac{1}{2} \eta^2 t \beta^2 \\ &+ \frac{1}{10} \eta^2 (1 - t^2) \beta^3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} &= \frac{1}{\beta^2} - 3\eta^2 t \frac{1}{\beta} - \frac{1}{4} \eta^2 (4 - 4t^2 + 4\eta^2 - 11\eta^2 t^2) + \eta^2 t \beta \\ &+ \frac{1}{5} \eta^2 (1 - t^2) \beta^2 + \dots \end{aligned}$$

6. Der isometrische Breitenunterschied Δq in Abhängigkeit von der Meridianbogenlänge s und s als Funktion von Δq .

Durch Einsetzen der Gleichungen (6) in die erste Gleichung (2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \Delta q &= u + \frac{1}{2} t u^2 + \frac{1}{6} (1 + 2t^2 + \eta^2) u^3 \\ &+ \frac{1}{24} t (5 + 6t^2 + \eta^2) u^4 + \frac{1}{120} (5 + 24t^4 + 28t^2) u^5 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Reihenumkehrung ergibt die Meridianbogenlänge in Abhängigkeit von der isometrischen Breite:

$$\begin{aligned} u &= \frac{s}{N} \cos \alpha = \cos \varphi \Delta q - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi \Delta q^2 - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (1 - t^2 \\ &+ \eta^2) \Delta q^3 + \frac{1}{24} t \cos^4 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2) \Delta q^4 \\ &+ \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (5 + t^4 - 18t^2) \Delta q^5 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Dieselben Vorzeichen zu $\Delta q, \Delta q^2, \dots$ erhält man, wenn man die Ableitungen der Meridianbogenlänge nach dem isometrischen Breitenunterschied bildet und für die Bogenlänge die Taylorsche Reihe aufstellt. Diese Ableitungen sind in Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 498) vollständig angegeben, als sie sich aus der Reihe in Gleichung (4) errechnen lassen. Sie sollen daher von dort übernommen werden. Die hier gebrachte Ableitung sollte nur zeigen, in welcher Weise das Azimut α der Richtung, in der s positiv gemessen wird, zu berücksichtigen ist.

Es wird

$$s = b_1 \Delta q + b_2 \Delta q^2 + b_3 \Delta q^3 + b_4 \Delta q^4 + b_5 \Delta q^5 + \dots \text{ mit}$$

$$b_1 = \frac{N}{\cos \alpha} \cos \varphi; \quad b_2 = -\frac{1}{2} \frac{N}{\cos \alpha} t \cos^2 \varphi;$$

$$b_3 = -\frac{1}{6} \frac{N}{\cos \alpha} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2); \quad (10)$$

$$b_4 = \frac{1}{24} \frac{N}{\cos \alpha} t \cos^4 \varphi (5 - t^2 + 9 \eta^2 + 4 \eta^4);$$

$$b_5 = \frac{1}{120} \frac{N}{\cos \alpha} \cos^5 \varphi (5 + t^4 - 18 t^2 + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 t^2).$$

7. Entwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{N \cos \varphi}$ als Funktion von Δq .

Wir setzen

$$\frac{1}{N \cos \varphi} = p(q). \text{ Dann ist}$$

$$p(q) = \frac{1}{N \cos \varphi} = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0} + p'(q)_0 \Delta q + \frac{1}{2} p''(q)_0 \Delta q^2$$

$$+ \frac{1}{6} p'''(q)_0 \Delta q^3 + \frac{1}{24} p^{IV}(q)_0 \Delta q^4 + \dots \quad (11)$$

Es ist $p'(q) = \frac{dp}{dq} \cdot \frac{dq}{d\varphi}$. Hierin ist $\frac{dq}{d\varphi} = \frac{N}{M} \cos \varphi = V^2 \cos \varphi$. Ferner beachten wir, daß $V^2 = 1 + \eta^2$, $N = \frac{c}{V}$ und $\frac{d\eta^2}{d\varphi} = -2 \eta^2 t$ ist. Es wird dann

$$p'(q) = \frac{1}{c \cos^2 \varphi} \left(\frac{dV}{d\varphi} \cos \varphi + V \sin \varphi \right) V^2 \cos \varphi$$

$$= \frac{V}{c \cos \varphi} \left(\frac{dV}{d\varphi} V \cos \varphi + V^2 \sin \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{N \cos \varphi} [-e^{-2} \sin \varphi \cos^2 \varphi + (1 + e^{-2} \cos^2 \varphi) \sin \varphi]$$

$$= \frac{1}{N \cos \varphi} \sin \varphi. \text{ Entsprechend wird} \quad (12)$$

$$p''(q) = \frac{1}{N \cos \varphi} (1 + \eta^2 \cos^2 \varphi)$$

$$p'''(q) = \frac{1}{N \cos \varphi} \sin \varphi [1 - \eta^2 \cos^2 \varphi (3 + 4 \eta^2)]$$

$$p^{IV}(q) = \frac{1}{N \cos \varphi} (1 - 2 \eta^2 \cos^2 \varphi + 12 \eta^2 t^2 \cos^4 \varphi)$$

Durch Einsetzen der Ableitungen (12) in die Gleichung (11) erhält man $p(q)$. Wir bilden noch $p(q)^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi}$. Der Index 0 wird der Einfachheit halber weggelassen.

$$p(q)^2 = \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} \left[1 + 2 \sin \varphi \Delta q + (1 + \sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi) \Delta q^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sin \varphi (4 - 4 \eta^4 \cos^2 \varphi) \Delta q^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (1 + \sin^2 \varphi - \eta^2 \cos^2 \varphi) \Delta q^4 + \dots \right] \quad (13)$$

8. Übergang von den Ausdrücken N', η'^2 und t' und den aus ihnen gebildeten Funktionen für eine Breite φ' zu Ausdrücken N, η^2, t usw. für eine Breite φ .

Nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 217 Gleichung (o)) ist mit $\Delta \varphi = \varphi' - \varphi$

$$\frac{1}{N'} = \frac{1}{N} - \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N} - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N} + \frac{2}{3} \frac{\eta^2 t \Delta \varphi^3}{V^6 N}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\eta^2}{V^8} (1 - t^2) \frac{\Delta \varphi^4}{N} + \dots$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{N'^2} = \frac{1}{N^2} - 2 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^2} - \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 - \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^2}$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\eta^2 t \Delta \varphi^3}{V^6 N^2} + \dots \quad (14)$$

$$\frac{1}{N'^3} = \frac{1}{N^3} - 3 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^3} - \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 - 2 \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^3}$$

$$+ 2 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi^3}{V^6 N^3} + \dots$$

$$\frac{1}{N'^4} = \frac{1}{N^4} - 4 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^4} - 2 \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^4}$$

$$+ \frac{8}{3} \frac{\eta^2 t \Delta \varphi^3}{V^6 N^4} + \dots$$

$$\frac{1}{N'^5} = \frac{1}{N^5} - 5 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^5} + \dots$$

Nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 216 Gleichung (m)) ist

$$\eta'^2 = \eta^2 - 2 \eta^2 t \Delta \varphi - (1 - t^2) \eta^2 \Delta \varphi^2 + \frac{4}{3} \eta^2 t \Delta \varphi^3 + \dots$$

Hieraus folgt

$$\frac{\eta'^2}{N'^2} = \frac{\eta^2}{N^2} - 2 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^2} - \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + 3 \eta^2 - 7 \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^2}$$

$$+ \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{\Delta \varphi^3}{N^2} + \dots$$

$$\frac{\eta'^2}{N'^3} = \frac{\eta^2}{N^3} - \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^3} - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^4} (2 - 2 t^2 + 7 \eta^2 - 19 \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^3}$$

$$+ \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{\Delta \varphi^3}{N^3} + \dots \quad (15)$$

$$\frac{\eta'^2}{N'^4} = \frac{\eta^2}{N^4} - 2 \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^4} - \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + 4 \eta^2 - 12 \eta^2 t^2) \frac{\Delta \varphi^2}{N^4}$$

$$+ \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{\Delta \varphi^3}{N^4} + \dots$$

$$\frac{\eta'^2}{N'^5} = \frac{\eta^2}{N^5} - \frac{\eta^2 t \Delta \varphi}{V^2 N^5} + \dots$$

Es ist nach Taylor

$$t' = t + \frac{dt}{d\varphi} \Delta\varphi + \frac{1}{2} \frac{d^2t}{d\varphi^2} \Delta\varphi^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3t}{d\varphi^3} \Delta\varphi^3 + \dots$$

mit $\frac{dt}{d\varphi} = 1 + t^2$; $\frac{d^2t}{d\varphi^2} = 2t(1 + t^2)$; $\frac{d^3t}{d\varphi^3} = 2 + 8t^2 + 6t^4$. Also wird

$$t' = t + (1 + t^2) \Delta\varphi + t(1 + t^2) \Delta\varphi^2 + \frac{1}{3} (1 + 4t^2 + 3t^4) \Delta\varphi^3 + \dots \quad (16)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\eta'^2}{N'^3} t' &= \frac{\eta^2 t}{N^3} + \frac{\eta^2}{V^2} (1 - t^2 + \eta^2 - 4\eta^2 t^2) \frac{\Delta\varphi}{N^3} - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 t}{V^4} (4 + 17\eta^2 \\ &\quad - 9\eta^2 t^2) \frac{\Delta\varphi^2}{N^3} - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2) \frac{\Delta\varphi^3}{N^3} + \dots \\ \frac{\eta'^4}{N'^3} t' &= \frac{\eta^4 t}{N^3} + \eta^4 (1 - 3t^2) \frac{\Delta\varphi}{N^3} - \eta^4 t (5 - 3t^2) \frac{\Delta\varphi^2}{N^3} + \dots \\ \frac{\eta'^2}{N'^5} t' &= \frac{\eta^2 t}{N^5} + \frac{\eta^2}{V^2} (1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) \frac{\Delta\varphi}{N^5} + \dots \\ t'^2 &= t^2 + 2t(1 + t^2) \Delta\varphi + (1 + 4t^2 + 3t^4) \Delta\varphi^2 + \frac{2}{3} t (4 + 10t^2 \\ &\quad + 6t^4) \Delta\varphi^3 + \dots \\ \frac{\eta'^2 t'^2}{N'^4} &= \frac{\eta^2 t^2}{N^4} + 2 \frac{\eta^2 t}{V^2} (1 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2) \frac{\Delta\varphi}{N^4} + \frac{\eta^2}{V^4} (1 - t^2 + 2\eta^2 \\ &\quad - 12\eta^2 t^2 + 2\eta^2 t^4) \frac{\Delta\varphi^2}{N^4} - \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{\Delta\varphi^3}{N^4} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Beschränken wir uns auf eine Bewegung des betrachteten Punktes längs des Meridians, so können wir mit Hilfe der Gleichungen (6) den Breitenunterschied $\Delta\varphi$ durch die Meridianbogenlänge $N \cdot u = s \cdot \cos \alpha$ ersetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{N'^2} &= \frac{1}{N^2} - 2\eta^2 t \frac{s}{N^3} \cos \alpha - (\eta^2 - \eta^2 t^2 + \eta^4 - 4\eta^4 t^2) \frac{s^2}{N^4} \cos^2 \alpha \\ &\quad + \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{s^3}{N^5} \cos^3 \alpha + \dots \\ \frac{\eta'^2}{N'^2} &= \frac{\eta^2}{N^2} - (2\eta^2 t + 4\eta^4 t) \frac{s}{N^3} \cos \alpha \\ &\quad - (\eta^2 - \eta^2 t^2 - 10\eta^4 t^2 + 3\eta^4) \frac{s^2}{N^4} \cos^2 \alpha + \frac{4}{3} \eta^2 t \frac{s^3}{N^5} \cos^3 \alpha + \dots \\ \frac{\eta'^2 t'}{N'^3} &= \frac{\eta^2 t}{N^3} + (\eta^2 - \eta^2 t^2 - 4\eta^4 t^2 + \eta^4) \frac{s}{N^4} \cos \alpha - 2\eta^2 t \frac{s^2}{N^5} \cos^2 \alpha + \dots \\ \frac{\eta'^4 t'}{N'^3} &= \frac{\eta^4 t}{N^3} + (\eta^4 - 3\eta^4 t^2) \frac{s}{N^4} + \dots \\ \frac{1}{N'^4} &= \frac{1}{N^4} - 4\eta^2 t \frac{s}{N^5} \cos \alpha + \dots \\ \frac{\eta'^2}{N'^4} &= \frac{\eta^2}{N^4} - 2\eta^2 t (1 + 3\eta^2) \frac{s}{N^5} \cos \alpha \\ \frac{\eta'^2 t'^2}{N'^4} &= \frac{\eta^2 t^2}{N^4} + 2\eta^2 t (1 + \eta^2 - 2\eta^2 t^2) \frac{s}{N^5} \cos \alpha \\ \frac{\eta'^2}{N'^5} &= \frac{\eta^2}{N^5} - \eta^2 t (2 + 7\eta^2) \frac{s}{N^6} \cos \alpha \\ \frac{\eta'^2 t'}{N'^5} &= \frac{\eta^2 t}{N^5} + \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) \frac{s}{N^6} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

III. Die konforme Abbildung im Falle der geradlinigen Abbildung einer geodätischen Linie

1. Vorbemerkung

Als Grundlage der folgenden Entwicklungen benutzen wir zwei Sätze, die wir als bekannt voraussetzen.

- Sind x und y isotherme Parameter auf einer Fläche und u und v isotherme Parameter auf einer zweiten Fläche, so bewirkt die analytische Funktion $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$ stets eine konforme Abbildung der einen Fläche auf die andere. Diese Beziehung ist eindeutig umkehrbar.
- Wird durch eine derartige konforme Abbildung eine Linie der einen Fläche nach einem bestimmten Gesetz auf die andere Fläche abgebildet, so gibt es keine andere analytische Funktion, etwa $\omega = \varphi(z)$, die eine konforme Abbildung derart bewirkt, daß die Abbildung der betrachteten Linie nach demselben Gesetz erfolgt (Laborde [14] S.150).

Wir stellen nun die Forderung auf, daß eine geodätische Linie nach einem gegebenen Gesetz in die Ebene abgebildet wird. Das ebene Abbild der geodätischen Linie soll eine gerade Linie und zugleich die x -Achse eines Systems ebener rechtwinkliger Koordinaten x und y sein.

Das Gesetz sei als Funktion der Bogenlänge Δs der geodätischen Linie gegeben. Δs zählt von dem Normalpunkt der Abbildung aus, in welchem das Vergrößerungsverhältnis $m = 1$ ist. Es sei also

$$x = \Delta s + a_2 \Delta s^2 + a_3 \Delta s^3 + a_4 \Delta s^4 + a_5 \Delta s^5 + \dots$$

Es ist aber die Vorzahl a_2 bei jeder konformen Abbildung gleich Null. Entwickelt man nämlich m in eine Reihe, die von dem Werte im Normalpunkt ausgeht:

$$m = \frac{dx}{d\Delta s} = 1 + 2a_2 \Delta s + 3a_3 \Delta s^2 + 4a_4 \Delta s^3 + \dots,$$

so muß für $\Delta s = 0$ die erste Ableitung

$$\frac{dm}{d\Delta s} = 2a_2 + \dots = 0$$

sein; denn im Normalpunkt hat m ein Minimum. Wir müssen also ansetzen

$$x = \Delta s + a_3 \Delta s^3 + a_4 \Delta s^4 + a_5 \Delta s^5 + \dots \quad (19)$$

Das gilt für jede vom Normalpunkt ausgehende Richtung. Hierin liegt der Grund, daß bei zwei gegebenen Koordinatensystemen auf den beiden Flächen (z. B. geographische Koordinaten auf dem Ellipsoid und rechtwinklig-ebene Koordinaten in der Ebene) die Umwandlungsformeln bis zur zweiten Ordnung einschließlich unabhängig von der besonderen Art der gewählten Abbildung sind (Laborde [14] S.48).

2. Geradlinige Abbildung eines Meridians

a) Allgemeines

Wir beziehen die Gleichung (19) auf den Meridian und gehen von der Bogenlänge Δs auf dem Meridian zu einem isothermen Parameter, und zwar zum isometrischen Breitenunterschied Δq über.

Wir benutzen hierzu die Reihe in den Gleichungen (10).

$$\Delta s = b_1 \Delta q + b_2 \Delta q^2 + b_3 \Delta q^3 + b_4 \Delta q^4 + b_5 \Delta q^5 + \dots \quad (20)$$

In den Vorzahlen b_1, b_2, \dots gibt a das Azimut der positiven Richtung der x -Achse an. Wir werden daher $\cos a_{0..x}$ statt $\cos a$ schreiben. φ, η und N sind an der Stelle des Normalpunkts der Abbildung (Koordinatennullpunkt) zu nehmen.

Die Verbindung der Reihen (19) und (20) ergebe:

$$x = c_1 \Delta q + c_2 \Delta q^2 + c_3 \Delta q^3 + c_4 \Delta q^4 + c_5 \Delta q^5 + \dots = f(\Delta q). \quad (21)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1; \quad c_2 = b_2; \quad c_3 = a_3 b_1^3 + b_3; \quad c_4 = a_4 b_1^4 + 3 a_3 b_1^2 b_2 + b_4; \\ c_5 &= a_5 b_1^5 + 4 a_4 b_1^3 b_2 + 3 a_3 b_1^2 b_3 + 3 a_3 b_1 b_2^2 + b_5. \end{aligned} \quad (21a)$$

Von der Gleichung (21) gelangt man zur gesuchten Gleichung für $x + iy$ dadurch, daß man in ihr Δq durch $\Delta q + il$ ersetzt:

$$x + iy = f(\Delta q + il). \quad (22)$$

Da für $l = 0$ auch $y = 0$ ist, erhält man für $l = 0$ wieder die Gleichung (21). Die Funktion $x + iy = f(\Delta q + il)$ ist die einzige Funktion, die für $l = 0$ die Gleichung (21) ergibt, denn, wie bereits erwähnt, können zwei analytische Funktionen längs einer Linie nur dann übereinstimmen, wenn sie in ihrem ganzen Existenzbereich übereinstimmen.

Die Anwendung möge zunächst an dem Beispiel der Gauß-Krüger-Koordinaten gezeigt werden. In diesem Fall ist $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$ und $\cos a_{0..x} = 1$. Also wird $c_i = b_i$ und damit wegen der Gleichungen (22), (21) und (10)

$$\begin{aligned} x + iy &= N_0 \cos \varphi_0 (\Delta q + il) - \frac{1}{2} N_0 t_0 \cos^2 \varphi_0 (\Delta q + il)^2 \\ &\quad - \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) (\Delta q + il)^3 + \dots \end{aligned}$$

in Übereinstimmung z. B. mit Großmann ([16] S. 534).

Hieraus erhält man die Koordinaten der Gauß-Krügerschen Abbildung, indem man die reellen und imaginären Bestandteile trennt und den Abszissen x die Meridianbogenlänge B_0 vom Äquator bis zum Normalpunkt hinzufügt:

$$\begin{aligned} x &= B_0 + N_0 \cos \varphi_0 \Delta q - \frac{1}{2} N_0 t_0 \cos^2 \varphi_0 (\Delta q^2 - l^2) \\ &\quad - \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) (\Delta q^3 - 3 \Delta q l^2) + \dots \\ y &= N_0 \cos \varphi_0 l - N_0 t_0 \cos^2 \varphi_0 \Delta q l \\ &\quad - \frac{1}{6} N_0 \cos^3 \varphi_0 (1 - t_0^2 + \eta_0^2) (3 \Delta q^2 l - l^3) + \dots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen nehmen die im Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 498 Gleichungen (19) und (20)) angegebene Form an, wenn man $\Delta q = 0$ setzt und dementsprechend B und φ als veränderlich ansieht:

$$\begin{aligned} x &= B + \frac{1}{2} N t \cos^2 \varphi l^2 + \dots \\ y &= N \cos \varphi l + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \dots \end{aligned}$$

Um allgemein von den rechtwinklig-ebenen Koordinaten x, y zu den isothermen Koordinaten $\Delta q, l$ überzugehen, führen wir die Abkürzungen $x + iy = z$ und $c_1 (\Delta q + il) = c_1 w$ ein und bringen Gleichung (22) in die Form

$$\begin{aligned} z &= (c_1 w) + \frac{c_2}{c_1^2} (c_1 w)^2 + \frac{c_3}{c_1^3} (c_1 w)^3 + \frac{c_4}{c_1^4} (c_1 w)^4 \\ &\quad + \frac{c_5}{c_1^5} (c_1 w)^5 + \dots = f(\Delta q + il). \end{aligned} \quad (22a)$$

Setzen wir

$$\frac{c_2}{c_1^2} = d_2, \quad \frac{c_3}{c_1^3} = d_3, \quad \frac{c_4}{c_1^4} = d_4, \quad \frac{c_5}{c_1^5} = d_5 \quad (23)$$

und betrachten wir als Umkehrung der Reihe für z die Reihe

$$w = \Delta q + il = e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + e_4 z^4 + e_5 z^5 + \dots = g(x + iy), \quad (24)$$

so muß sein

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{c_1}; \quad e_2 = -\frac{d_2}{c_1}; \quad e_3 = \frac{1}{c_1} (2 d_2^2 - d_3); \\ e_4 &= -\frac{1}{c_1} (5 d_2^3 - 5 d_2 d_3 + d_4); \\ e_5 &= \frac{1}{c_1} (14 d_2^4 - 21 d_2^2 d_3 + 3 d_3^2 + 6 d_2 d_4 - d_5). \end{aligned} \quad (25)$$

Die Gleichungen (22a) und (24) sind die Ausdrücke, von denen meist ausgegangen wird, um die Formeln für die Übertragung der geographischen Koordinaten $\Delta \varphi, l$ in rechtwinklig-ebene Koordinaten x, y und für die Übertragung der rechtwinklig-ebenen Koordinaten in geographische Koordinaten zu entwickeln. Es ist in den Gleichungen (22a) und (24) nur noch der Parameter Δq durch den Parameter $\Delta \varphi$ zu ersetzen. Das hat in allgemeiner Form bereits 1937 Hristow gemacht ([19] S. 86 Gleichungen (8), (9), (12) und (13)), indem er die Vorzahlen in den Gleichungen (2) und (3) durch Buchstaben kennzeichnete. Wir gehen noch einen Schritt weiter und setzen die Ausdrücke für die Vorzahlen selbst ein. Hierzu sind die Gleichungen (2) bzw. (3) in die Gleichungen (22a) bzw. (24) einzusetzen, so daß an Abkürzungen nur die Buchstaben c_i und e_i vorkommen, die von der besonderen Art der Abbildung abhängig sind, die durch die Vorzahlen a_i in Gleichung (19) charakterisiert wird.

b) x und y als Funktion von $\Delta \varphi$ und l

Aus den Gleichungen (22) und (21) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= c_1 \Delta q + c_2 (\Delta q^2 - l^2) + c_3 (\Delta q^3 - 3 \Delta q l^2) \\ &\quad + c_4 (\Delta q^4 - 6 \Delta q^2 l^2 + l^4) + c_5 (\Delta q^5 - 10 \Delta q^3 l^2 + 5 \Delta q l^4) + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} y &= c_1 l + 2 c_2 \Delta q l + c_3 (3 \Delta q^2 l - l^3) \\ &\quad + c_4 (4 \Delta q^3 l - 4 \Delta q l^3) + c_5 (5 \Delta q^4 l - 10 \Delta q^2 l^3 + l^5) + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$\Delta q, \Delta q^2, \dots$ ersetzen wir durch die Gleichungen (2) und berücksichtigen zugleich, daß nach Gleichungen (21a)

$$c_1 = b_1 = \frac{N}{\cos a_{0..x}} \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad c_2 = b_2 = -\frac{1}{2} \frac{N}{\cos a_{0..x}} t \cos^2 \varphi \quad (28)$$

ist. Da $\cos a_{0..x}$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist, ist es gleichgültig, ob $\cos a_{0..x}$ im Zähler oder Nenner steht. Ebenso können die erste Potenz für jede ungerade Potenz und der Wert 1 für jede gerade Potenz von $\cos a_{0..x}$ treten.

Führen wir zur Abkürzung noch die Bezeichnungen c_i' , c_i'' , c_i''' , c_i^{IV} und c_i^V ein, deren Bedeutungen durch die Gleichung

$$c_i = N \cos \varphi c_i' = N \cos^2 \varphi c_i'' = N \cos^3 \varphi c_i''' = N \cos^4 \varphi c_i^{IV} = N \cos^5 \varphi c_i^V \quad (29)$$

festgelegt sind, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} &= (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi + \frac{3}{2} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t \cos \alpha_{0 \cdot x} l^2 + \frac{1}{6} [1 - t^2 + \eta^2 + 15 \eta^4 t^2 - 3 \eta^4 \\ &+ 6 c_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 - 3 \eta^2 + 6 \eta^4)] \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^3 - 3 c_3' (1 - \eta^2 \\ &+ \eta^4) \Delta \varphi l^2 - \frac{1}{24} [5 t^3 - t - 2 \eta^2 t^3 + \eta^2 t - 36 c_3''' t \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 - \eta^2) \\ &- 24 c_4^{IV} \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 - 4 \eta^2)] \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^4 - \frac{3}{2} [c_3' t (1 + \eta^2) \quad (30) \\ &+ 4 c_4'' (1 - 2 \eta^2)] \Delta \varphi^2 l^2 + \frac{c_4}{N} l^4 + \dots \\ &+ \frac{1}{120} [5 - 26 t^4 - 7 t^2 + 6 c_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (10 + 35 t^2) + 240 c_4^{IV} t \cos \alpha_{0 \cdot x} \\ &+ 120 c_5^V \cos \alpha_{0 \cdot x}] \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^5 - \frac{1}{2} [c_3' (1 + 2 t^2) + 12 c_4'' t \\ &+ 20 c_5'''] \Delta \varphi^3 l^2 + 5 c_5' \Delta \varphi l^4 + \dots \end{aligned}$$

Entsprechend wird

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} &= \cos \varphi \cos \alpha_{0 \cdot x} l - \sin \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi l \\ &- \frac{1}{2} \cos \varphi [t^2 + \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 t^2 - 6 c_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 - 2 \eta^2 + 3 \eta^4)] \\ &\cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^2 l - \frac{c_3}{N} l^3 - \frac{1}{6} \cos \varphi [2 t^3 + t + \eta^2 t - 18 c_3''' t \cos \alpha_{0 \cdot x} \\ &- 24 c_4^{IV} \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 - 3 \eta^2)] \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^3 l - 4 c_4' (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^3 \quad (31) \\ &- \frac{1}{24} \cos \varphi [6 t^4 + 5 t^2 - 6 c_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (4 + 11 t^2) - 144 c_4^{IV} \cos \alpha_{0 \cdot x} t \\ &- 120 c_5^V \cos \alpha_{0 \cdot x}] \cos \alpha_{0 \cdot x} \Delta \varphi^4 l - [2 c_4' t + 10 c_5'''] \Delta \varphi^2 l^3 \\ &+ \frac{c_5}{N} l^5 + \dots \end{aligned}$$

c) $\Delta \varphi$ und l als Funktion von x und y

Aus der Gleichung (24) folgen die Gleichungen

$$\Delta q = e_1 x + e_2 (x^2 - y^2) + e_3 (x^3 - 3 x y^2) + e_4 (x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4) \\ + e_5 (x^5 - 10 x^3 y^2 + 5 x y^4) + \dots \quad (32)$$

$$l = e_1 y + 2 e_2 x y + e_3 (3 x^2 y - y^3) + e_4 (4 x^3 y - 4 x y^3) \\ + e_5 (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) + \dots \quad (33)$$

Von Δq gehen wir mittels der Gleichung (3) zu $\Delta \varphi$ über und bilden hierzu

$$\begin{aligned} \Delta q^2 &= e_1^2 x^2 + 2 e_1 e_2 x^3 - 2 e_1 e_2 x y^2 + (e_2^2 + 2 e_1 e_3) x^4 \\ &- (2 e_2^2 + 6 e_1 e_3) x^2 y^2 + e_2^2 y^4 + (2 e_1 e_4 + 2 e_2 e_3) x^5 \\ &- (12 e_1 e_4 + 8 e_2 e_3) x^3 y^2 + (2 e_1 e_4 + 6 e_2 e_3) x y^4 + \dots \quad (34) \\ \Delta q^3 &= e_1^3 x^3 + 3 e_1^2 e_2 x^4 - 3 e_1^2 e_2 x^2 y^2 + (3 e_1 e_2^2 + 3 e_1^2 e_3) x^5 \\ &- (6 e_1 e_2^2 + 9 e_1^2 e_3) x^3 y^2 + 3 e_1 e_2^2 x y^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\Delta q^4 = e_1^4 x^4 + 4 e_1^3 e_2 x^5 - 4 e_1^3 e_2 x^3 y^2 + \dots$$

$$\Delta q^5 = e_1^5 x^5 + \dots$$

$$\begin{aligned} l^2 &= e_1^2 y^2 + 4 e_1 e_2 x y^2 + (6 e_1 e_3 + 4 e_2^2) x^2 y^2 - 2 e_1 e_3 y^4 \\ &+ (8 e_1 e_4 + 12 e_2 e_3) x^3 y^2 - (8 e_1 e_4 + 4 e_2 e_3) x y^4 + \dots \\ l^3 &= e_1^3 y^3 + 6 e_1^2 e_2 x y^3 + (9 e_1^2 e_3 + 12 e_1 e_2^2) x^2 y^3 - 3 e_1^2 e_3 y^5 + \dots \quad (34) \\ l^4 &= e_1^4 y^4 + 8 e_1^3 e_2 x y^4 + \dots \text{ und für spätere Rechnungen gleichnoch} \end{aligned}$$

$$\Delta q l^2 = e_1^3 x y^2 + 5 e_1^2 e_2 x^2 y^2 - e_1^2 e_2 y^4 + (7 e_1^2 e_3 + 8 e_1 e_2^2) x^3 y^2 \\ - (5 e_1^2 e_3 + 4 e_1 e_2^2) x y^4 + \dots$$

$$\Delta q^2 l^2 = e_1^4 x^2 y^2 + 6 e_1^3 e_2 x^3 y^2 - 2 e_1^3 e_2 x y^4 + \dots$$

Wir setzen die Gleichungen (32) und (34) in die Gleichung (3) ein und beachten, daß nach Gleichungen (25)

$$e_1 = \frac{1}{c_1} = \frac{\cos \alpha_{0 \cdot x}}{N \cos \varphi} \text{ und } e_2 = -\frac{d_2}{c_1} = -\frac{c_2}{c_1^3} = \frac{1}{2} \frac{N t \cos^2 \varphi}{\cos \alpha_{0 \cdot x}} \cdot \frac{\cos^3 \alpha_{0 \cdot x}}{N^3 \cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} \frac{t}{N^2 \cos \varphi} \quad (35)$$

ist. Führen wir zur Abkürzung noch die Bezeichnungen e_i' , e_i'' , e_i''' , e_i^{IV} und e_i^V ein, deren Bedeutungen durch die Gleichung

$$e_i = \frac{e_i'}{N \cos \varphi} = \frac{e_i''}{N^2 \cos \varphi} = \frac{e_i'''}{N^3 \cos \varphi} = \frac{e_i^{IV}}{N^4 \cos \varphi} = \frac{e_i^V}{N^5 \cos \varphi} \quad (36)$$

festgelegt sind, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= (1 + \eta^2) \cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x}{N} - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) \frac{x^2}{N^2} - \frac{1}{2} t (1 + \eta^2) \frac{y^2}{N^2} \\ &- \frac{1}{6} [1 + 2 t^2 - \eta^2 t^2 + 5 \eta^2 - 18 \eta^4 t^2 + 7 \eta^4 \\ &- 6 e_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 + \eta^2)] \cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x^3}{N^3} \\ &+ \frac{1}{2} [t^2 + 4 \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 t^2 - 6 e_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 + \eta^2)] \cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} \\ &- \frac{1}{24} [t (1 - 2 t^2 - 26 \eta^2 t^2 - 26 \eta^2) + 24 e_3''' t \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 + 4 \eta^2) \\ &- 24 e_4^{IV} (1 + \eta^2)] \frac{x^4}{N^4} \\ &+ \frac{1}{4} [t (1 - 9 \eta^2 t^2 + 5 \eta^2) + 12 e_3''' t \cos \alpha_{0 \cdot x} (1 + 4 \eta^2) \\ &- 24 e_4^{IV} (1 + \eta^2)] \frac{x^2 y^2}{N^4} \quad (37) \\ &- \frac{1}{8} [t^3 (1 + 4 \eta^2) - 8 e_4^{IV} (1 + \eta^2)] \frac{y^4}{N^4} \\ &+ \frac{1}{120} [5 + 6 t^4 + 17 t^2 - 60 e_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} - 120 e_4^{IV} t \\ &+ 120 e_5^V \cos \alpha_{0 \cdot x}] \cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x^5}{N^5} \\ &+ \frac{1}{8} [t^4 - t^2 - 12 e_3''' t^2 \cos \alpha_{0 \cdot x} - 8 e_4^{IV} t \\ &+ 40 e_5^V \cos \alpha_{0 \cdot x}] \cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{N^5} \\ &- \frac{1}{12} [2 t^4 + 2 t^2 - 6 e_3''' \cos \alpha_{0 \cdot x} (3 + t^2) - 72 e_4^{IV} t + 120 e_5^V \cos \alpha_{0 \cdot x}] \\ &\cos \alpha_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{N^5} + \dots \end{aligned}$$

Aus Gleichung (33) folgt:

$$l = \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{\cos \varphi} \frac{y}{N} + \frac{t}{\cos \varphi} \frac{x y}{N^2} + e_3 (3 x^2 y - y^3) + e_4 (4 x^3 y - 4 x y^3) + e_5 (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) + \dots \quad (38)$$

Entsprechend Gleichung (19) sind in den Gleichungen (30), (31), (37) und (38) die Glieder 1. und 2. Ordnung von dem jeweils für den Meridian gewählten Abbildungsgesetz unabhängig.

d) Das Vergrößerungsverhältnis

a. Das Vergrößerungsverhältnis als Funktion von Δq und l

Ist ds ein Linienelement auf dem Ellipsoid und dS sein konformes Abbild in der Ebene, so ist das Vergrößerungsverhältnis

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{N \cos \varphi \sqrt{dq^2 + dl^2}} = \frac{1}{N \cos \varphi} |f'(w)|. \quad (39)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} |f'(w)| &= \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta q}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta q}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta l}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta l}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta q}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{\delta l}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta y}{\delta q}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta l}\right)^2} \end{aligned} \quad (40)$$

(vgl. Rothe [13] Teil I S. 183 § 31, 2 Gleichung (5) und S. 178 § 30, 2 Gleichung (2), (3) und (4)).

Zur Errechnung von $|f'(w)|^2$ benutzen wir den Radikanden der dritten Wurzel. Es folgt dann aus Gleichung (26)

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta q} &= c_1 + 2 c_2 \Delta q + 3 c_3 (\Delta q^2 - l^2) + 4 c_4 \Delta q (\Delta q^2 - 3 l^2) \\ &\quad + 5 c_5 \Delta q^2 (\Delta q^2 - 6 l^2) + 5 c_5 l^4 + \dots \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta l} &= -2 c_2 l - 6 c_3 \Delta q l - 12 c_4 \Delta q^2 l + 4 c_4 l^3 - 20 c_5 \Delta q^3 l \\ &\quad + 20 c_5 \Delta q l^3 + \dots \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta x}{\delta q}\right)^2 &= c_1^2 + 4 c_1 c_2 \Delta q + 2 (2 c_2^2 + 3 c_1 c_3) \Delta q^2 - 6 c_1 c_3 l^2 \\ &\quad + 4 (2 c_1 c_4 + 3 c_2 c_3) \Delta q^3 - 12 (c_2 c_3 + 2 c_1 c_4) \Delta q l^2 \\ &\quad + (10 c_1 c_5 + 16 c_2 c_4 + 9 c_3^2) \Delta q^4 - (60 c_1 c_5 + 48 c_2 c_4 \\ &\quad + 18 c_3^2) \Delta q^2 l^2 + (10 c_1 c_5 + 9 c_3^2) l^4 + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta x}{\delta l}\right)^2 &= 4 c_2^2 l^2 + 24 c_2 c_3 \Delta q l^2 + 48 c_2 c_4 \Delta q^2 l^2 - 16 c_2 c_4 l^4 \\ &\quad + 36 c_3^2 \Delta q^2 l^2 + \dots \end{aligned}$$

und es wird unter Beachtung von $c_1 = b_1$ und $c_2 = b_2$

$$\begin{aligned} |f'(w)|^2 &= b_1^2 + 4 b_1 b_2 \Delta q + (4 b_2^2 + 6 b_1 c_3) \Delta q^2 + (4 b_2^2 - 6 b_1 c_3) l^2 \\ &\quad + (8 b_1 c_4 + 12 b_2 c_3) \Delta q^3 + (12 b_2 c_3 - 24 b_1 c_4) \Delta q l^2 \\ &\quad + (10 b_1 c_5 + 16 b_2 c_4 + 9 c_3^2) \Delta q^4 + (18 c_3^2 - 60 b_1 c_5) \Delta q^2 l^2 \\ &\quad + 10 b_1 c_5 + 9 c_3^2 - 16 b_2 c_4) l^4 + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Das Produkt aus dieser Gleichung (43) und der Gleichung (13) gibt:

$$\begin{aligned} m^2 &= 1 + \left(1 - 2 \sin^2 \varphi + \eta^2 \cos^2 \varphi + 6 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_3\right) \Delta q^2 \\ &\quad + \left(\sin^2 \varphi - 6 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_3\right) l^2 \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} \sin \varphi + 2 \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{4}{3} \eta^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi\right. \\ &\quad \left. - 6 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 - 8 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_4\right) \Delta q^3 \\ &\quad + \left(2 \sin^3 \varphi - 18 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 - 24 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_4\right) \Delta q l^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + 6 \frac{\cos \varphi}{N} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 + 9 \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} c_3^2\right. \\ &\quad \left.+ 8 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 + 10 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right] \Delta q^4 \\ &\quad + \left(\sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + 18 \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} c_3^2 - 18 \frac{\sin^2 \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3\right. \\ &\quad \left.- 6 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_3 - 48 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 - 60 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right) \Delta q^2 l^2 \\ &\quad + \left(9 \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} c_3^2 + 8 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 + 10 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right) l^4 + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Diese Gleichung hat die Form $m^2 = 1 + x$. Es ist also $m = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} m &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \eta^2 \cos^2 \varphi + 3 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_3\right) \Delta q^2 + \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - 3 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_3\right) l^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} \sin \varphi + \eta^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \frac{2}{3} \eta^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 3 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 - 4 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_4\right) \Delta q^3 \\ &\quad + \left(\sin^3 \varphi - 9 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 - 12 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_4\right) \Delta q l^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6} \sin^2 \varphi + \frac{3 \cos \alpha_0 \cdot x}{2 N \cos \varphi} c_3 + 4 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 + 5 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right) \Delta q^4 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi + 18 \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} c_3^2 - \frac{27 \sin^2 \varphi}{2 N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3\right. \\ &\quad \left.- \frac{3 \cos \alpha_0 \cdot x}{2 N \cos \varphi} c_3 - 24 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 - 30 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right) \Delta q^2 l^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{8} \sin^4 \varphi - \frac{3 \sin^2 \varphi}{2 N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_3 - 4 \frac{\sin \varphi}{N \cos \varphi} \cos \alpha_0 \cdot x c_4 - 5 \frac{\cos \alpha_0 \cdot x}{N \cos \varphi} c_5\right) l^4 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

β. Das Vergrößerungsverhältnis als Funktion von $\Delta \varphi$ und l

Wir gehen mittels der Gleichungen (2) von Δq zu $\Delta \varphi$ über und erhalten

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2} [1 - t^2 + 2 \eta^2 t^2 - \eta^2 - 3 \eta^4 t^2 + \eta^4 \\ &\quad + 6 c_3''' \cos \alpha_0 \cdot x (1 - 2 \eta^2 + 3 \eta^4)] \Delta \varphi^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - 3 c_3' \cos \alpha_0 \cdot x\right) l^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} [-5 t^3 + t + 6 \eta^2 t^3 + 3 \eta^2 t - 3 \eta^4 t^3 - 7 \eta^4 t + 18 c_3''' t \cos \alpha_0 \cdot x (2 - 3 \eta^2 + 3 \eta^4) \\ &\quad + 24 c_4^{IV} \cos \alpha_0 \cdot x (1 - 3 \eta^2 + 6 \eta^4)] \Delta \varphi^3 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
& + [\sin^2 \varphi t (1 - \eta^2 + \eta^4) - 9 c_3' t \cos a_{0 \cdot x} (1 - \eta^2 + \eta^4) \\
& \quad - 12 c_4'' \cos a_{0 \cdot x} (1 - \eta^2 + \eta^4)] \Delta \varphi l^2 \\
& + \frac{1}{24} [5 - 26 t^4 - 7 t^2 + 6 c_3''' \cos a_{0 \cdot x} (10 + 35 t^2) \\
& \quad + 240 c_4^{IV} t \cos a_{0 \cdot x} + 120 c_5^V \cos a_{0 \cdot x}] \Delta \varphi^4 \quad (46) \\
& + \frac{1}{4} [6 \sin^2 \varphi t^2 + t^2 - 6 c_3' \cos a_{0 \cdot x} (1 + 13 t^2) + 72 c_3''^2 \\
& \quad - 120 c_4'' t \cos a_{0 \cdot x} - 120 c_5''' \cos a_{0 \cdot x}] \Delta \varphi^2 l^2 \\
& + \frac{1}{8} (-\sin^4 \varphi + 12 \sin^2 \varphi c_3' \cos a_{0 \cdot x} \\
& \quad + 32 \sin \varphi c_4' \cos a_{0 \cdot x} + 40 c_5' \cos a_{0 \cdot x}) l^4.
\end{aligned}$$

γ . Das Vergrößerungsverhältnis als Funktion von x und y

Man erhält m als Funktion von x und y , wenn man in die Gleichung (45) die Gleichungen (34) einsetzt. Die in den Gleichungen (35) angegebenen Werte für e_1 und e_2 werden dabei benutzt. Außerdem wird an Stelle von e_3 ein Ausdruck mit c_3 eingeführt. Nach Gleichung (25) ist

$$e_3 = \frac{1}{c_1} (2 d_2^2 - d_3) = 2 \frac{c_2^2}{c_1^5} - \frac{c_3}{c_1^4}.$$

Es wird damit

$$e_3 = \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^3 \cos \varphi} \left(\frac{1}{2} t^2 - \cos a_{0 \cdot x} c_3''' \right). \quad (47)$$

Für das Vergrößerungsverhältnis ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
m &= 1 + \frac{1}{2 N^2} (1 - t^2 + \eta^2 + 6 c_3''' \cos a_{0 \cdot x}) x^2 + \frac{1}{2 N^2} (t^2 - 6 c_3''' \cos a_{0 \cdot x}) y^2 \\
& + \frac{1}{6 N^3} (-5 t^3 + t - 3 \eta^2 t - 4 \eta^4 t + 36 t c_3''' \cos a_{0 \cdot x} + 24 c_4^{IV} \cos a_{0 \cdot x}) \cos a_{0 \cdot x} x^3 \\
& + \frac{1}{2 N^3} (5 t^3 - t - \eta^2 t - 36 t c_3''' \cos a_{0 \cdot x} - 24 c_4^{IV} \cos a_{0 \cdot x}) \cos a_{0 \cdot x} x y^2 \\
& + \frac{1}{24 N^4} [1 - 30 t^4 + t^2 + 6 c_3''' \cos a_{0 \cdot x} (2 + 43 t^2) - 144 c_3'''^2 \\
& \quad + 240 t c_4^{IV} \cos a_{0 \cdot x} + 120 c_5^V \cos a_{0 \cdot x}] x^4 \quad (48) \\
& + \frac{1}{2 N^4} [16 t^4 - 2 t^2 + 3 c_3''' \cos a_{0 \cdot x} (1 - 47 t^2) + 108 c_3'''^2 \\
& \quad - 120 t c_4^{IV} \cos a_{0 \cdot x} - 60 c_5^V \cos a_{0 \cdot x}] x^2 y^2 \\
& + \frac{1}{8 N^4} (-10 t^4 + t^2 + 86 t^2 c_3''' \cos a_{0 \cdot x} - 48 c_3'''^2 \\
& \quad + 80 t c_4^{IV} \cos a_{0 \cdot x} + 40 c_5^V \cos a_{0 \cdot x}) y^4.
\end{aligned}$$

Zur Prüfung der Formeln (30), (31), (37), (38), (46) und (48) sind mit den von Großmann ([16] S. 489 Gleichungen (20), (21) und (23)) angegebenen, den Ausdrücken c_i und e_i entsprechenden Vorzahlen die Umwandlungsformeln und Formeln für das Vergrößerungsverhältnis bei der konformen querachsigen

Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene nochmals aufgestellt worden. Es zeigt sich Übereinstimmung. Nur für die Vorzahl a_{04} (S. 498 a. a. O.) findet sich

$$a_{04} = + \frac{\varrho}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2 + \varepsilon_0^2 - 9 \varepsilon_0^2 t_0^2) \text{ statt } a_{04} = + \frac{\varrho}{24 N_0^4} t_0 (1 + 3 t_0^2 - 8 \varepsilon_0^2).$$

Der hier gefundene Ausdruck ist richtig.

e) Die Grundformeln für die Aufstellung der Abbildungsgleichungen und der Formeln für das Vergrößerungsverhältnis

Ersetzen wir in den Gleichungen (30), (31), (37), (38), (46) und (48) die Vorzahlen c_i und e_i gemäß den Gleichungen (21a), (29), (25), (23) und (36) durch Ausdrücke, die nur die Vorzahlen a_i enthalten, so bekommen wir die gewünschten Abbildungsgleichungen und Formeln für das Vergrößerungsverhältnis, die für sämtliche konformen Abbildungen gelten, bei denen ein Meridian geradlinig als x -Achse nach dem Gesetz

$$x = \Delta s + a_3 \Delta s^3 + a_4 \Delta s^4 + a_5 \Delta s^5 + \dots \quad (19)$$

abgebildet wird.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{x}{N} &= (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi + \frac{3}{2} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t \cos a_{0 \cdot x} l^2 \\
& + \left[-\frac{1}{2} \eta^2 t^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{7}{2} \eta^4 t^2 - \eta^4 + a_3 N^2 (1 - 3 \eta^2 + 6 \eta^4) \right] \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi^3 \\
& + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 - \frac{1}{2} \eta^4 t^2 \right. \\
& \quad \left. - 3 a_3 N^2 (1 - \eta^2 + \eta^4) \right] \cos^2 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi l^2 \\
& + \left[-\frac{1}{2} \eta^2 t + \frac{9}{2} a_3 N^2 \eta^2 t + a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - 4 \eta^2) \right] \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi^4 \\
& + \left[-t + \frac{3}{4} \eta^2 t - \frac{3}{4} \eta^2 t^3 + \frac{3}{2} a_3 N^2 t (5 - 13 \eta^2) \right. \\
& \quad \left. - 6 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - 2 \eta^2) \right] \cos^2 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi^2 l^2 \\
& + \left[\frac{5}{24} t - \frac{1}{24} t^3 + \frac{3}{8} \eta^2 t - \frac{3}{2} a_3 N^2 t \right. \\
& \quad \left. + a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} \right] \cos^4 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot l^4 \\
& + a_5 N^4 \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi^5 \\
& + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} t^2 + \frac{9}{2} a_3 N^2 (1 - t^2) + 14 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} \right. \\
& \quad \left. - 10 a_5 N^4 \right] \cos^2 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi^3 l^2 \\
& + \left[\frac{5}{24} - \frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{24} t^4 - \frac{5}{4} a_3 N^2 (2 - 5 t^2) - 10 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} \right. \\
& \quad \left. + 5 a_5 N^4 \right] \cos^4 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi l^4. \quad (30^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y}{N} &= \cos \varphi \cos a_{0 \cdot x} l - \sin \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi l \\
&+ \left[-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \eta^2 t^2 + 3 \eta^4 t^2 + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta^4 \right. \\
&\quad \left. + 3 a_3 N^2 (1 - 2 \eta^2 + 3 \eta^4) \right] \cos \varphi \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi^2 l \\
&+ \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6} t^2 + \frac{1}{6} \eta^2 - a_3 N^2 \right] \cos^3 \varphi \cos a_{0 \cdot x} l^3 \\
&+ \left[\frac{1}{6} t - \frac{5}{3} \eta^2 t + \frac{1}{2} \eta^2 t^3 - 3 a_3 N^2 t (1 - 6 \eta^2) \right. \\
&\quad \left. + 4 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - 3 \eta^2) \right] \cos \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi^3 l \\
&+ \left[-\frac{5}{6} t + \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{6} \eta^2 t^3 - \frac{2}{3} \eta^2 t + 6 a_3 N^2 t (1 - \eta^2) \right. \\
&\quad \left. - 4 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - \eta^2) \right] \cos^3 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \Delta \varphi l^3 \quad (31^*) \\
&+ \left[\frac{1}{24} - \frac{3}{2} a_3 N^2 - 4 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} + 5 a_5 N^4 \right] \cos \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi^4 l \\
&+ \left[-\frac{5}{12} + \frac{13}{12} t^2 + \frac{1}{2} a_3 N^2 (10 - 19 t^2) + 18 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} \right. \\
&\quad \left. - 10 a_5 N^4 \right] \cos^3 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot \Delta \varphi^2 l^3 \\
&+ \left[\frac{1}{24} - \frac{3}{20} t^2 + \frac{1}{120} t^4 - \frac{1}{4} a_3 N^2 (2 - 5 t^2) \right. \\
&\quad \left. - 2 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} + a_5 N^4 \right] \cos^5 \varphi \cos a_{0 \cdot x} \cdot l^5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi &= (1 + \eta^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x}{N} - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) \frac{x^2}{N^2} - \frac{1}{2} t (1 + \eta^2) \frac{y^2}{N^2} \\
&+ \left[\frac{1}{2} \eta^2 t^2 - \frac{1}{2} \eta^2 + 3 \eta^4 t^2 - \eta^4 - a_3 N^2 (1 + \eta^2) \right] \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{N^3} \\
&+ \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} t^2 + \eta^2 t^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t^2 - \eta^2 - \frac{1}{2} \eta^4 \right. \\
&\quad \left. + 3 a_3 N^2 (1 + \eta^2) \right] \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} \\
&+ \left[\frac{1}{2} \eta^2 t + 3 a_3 N^2 \eta^2 t - a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 + \eta^2) \right] \frac{x^4}{N^4} \\
&+ \left[-\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} t^3 + \frac{9}{4} \eta^2 t + \frac{1}{4} \eta^2 t^3 + 3 a_3 N^2 t (1 - 2 \eta^2) \right. \\
&\quad \left. + 6 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 + \eta^2) \right] \frac{x^2 y^2}{N^4} \\
&+ \left[\frac{1}{8} t^3 + \frac{5}{24} t + \frac{1}{4} \eta^2 t - \frac{1}{4} \eta^2 t^3 - a_3 N^2 t (1 + \eta^2) \right. \\
&\quad \left. - a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 + \eta^2) \right] \frac{y^4}{N^4} \quad (37^*) \\
&+ (3 a_3^2 N^4 - a_5 N^4) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^5}{N^5} \\
&+ \left[\frac{5}{24} + \frac{3}{8} t^4 + \frac{7}{12} t^2 - \frac{5}{2} a_3 N^2 (1 + t^2) + 15 a_3^2 N^4 \right. \\
&\quad \left. - 4 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} - 5 a_5 N^4 \right] \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{N^5} \\
&+ \left[-\frac{1}{6} - \frac{2}{3} t^2 - \frac{1}{2} t^4 + \frac{7}{2} a_3 N^2 (1 + t^2) - 30 a_3^2 N^4 \right. \\
&\quad \left. + 4 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} + 10 a_5 N^4 \right] \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{N^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l \cos \varphi &= \cos a_{0 \cdot x} \frac{y}{N} + t \frac{x y}{N^2} \\
&+ \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{6} \eta^2 - a_3 N^2 \right] \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^3} (3 x^2 y - y^3) \\
&+ \left(\frac{5}{24} t + \frac{1}{4} t^3 + \frac{1}{24} \eta^2 t - a_3 N^2 t \right. \\
&\quad \left. - a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} \right) \frac{1}{N^4} (4 x^3 y - 4 x y^3) \quad (38^*) \\
&+ \left[\frac{1}{24} + \frac{7}{30} t^2 + \frac{1}{5} t^4 - \frac{1}{2} a_3 N^2 (1 + 2 t^2) + 3 a_3^2 N^4 \right. \\
&\quad \left. - a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} - a_5 N^4 \right] \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^5} (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= 1 + 3 a_3 N^2 (1 - 2 \eta^2 + 3 \eta^4) \Delta \varphi^2 + \left[\frac{1}{2} (1 + \eta^2) - 3 a_3 N^2 \right] l^2 \cos^2 \varphi \\
&+ [9 a_3 N^2 t \eta^2 (1 - 3 \eta^2) + 4 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - 3 \eta^2 + 6 \eta^4)] \Delta^3 \varphi \\
&+ [-t - 2 \eta^2 t + 9 a_3 N^2 t (1 - \eta^2 + \eta^4) \\
&\quad - 12 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x} (1 - \eta^2 + \eta^4)] \cos^2 \varphi \Delta \varphi l^2 \\
&+ 5 a_5 N^4 \Delta \varphi^4 \quad (46^*) \\
&+ \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} a_3 N^2 (5 - 4 t^2) + 18 a_3^2 N^4 \right. \\
&\quad \left. + 30 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} - 30 a_5 N^4 \right] \cos^2 \varphi \Delta \varphi^2 l^2 \\
&+ \left[\frac{5}{24} - \frac{1}{6} t^2 + \frac{1}{4} a_3 N^2 (7 t^2 - 10) \right. \\
&\quad \left. - 6 a_4 N^3 t \cos a_{0 \cdot x} + 5 a_5 N^4 \right] \cos^4 \varphi l^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= 1 + 3 a_3 N^2 \frac{x^2}{N^2} + \left[\frac{1}{2} (1 + \eta^2) - 3 a_3 N^2 \right] \frac{y^2}{N^2} + 4 a_4 N^3 \frac{x^3}{N^3} \\
&+ [-2 \eta^2 t (1 + \eta^2) - 12 a_4 N^3 \cos a_{0 \cdot x}] \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} \quad (48^*) \\
&+ (-6 a_3^2 N^4 + 5 a_5 N^4) \frac{x^4}{N^4} + \left[-\frac{3}{2} a_3 N^2 + 54 a_3^2 N^4 - 30 a_5 N^4 \right] \frac{x^2 y^2}{N^4} \\
&+ \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2} a_3 N^2 - 6 a_3^2 N^4 + 5 a_5 N^4 \right) \frac{y^4}{N^4}.
\end{aligned}$$

3. Beispiele für die Anwendung der Grundformeln

Sind für eine bestimmte Abbildung die Vorzahlen a_i bekannt, so braucht man sie nur in die vorstehenden Grundformeln einzusetzen, um die Abbildungsgleichungen und die Formeln für das Vergrößerungsverhältnis zu gewinnen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden einige Beispiele dafür gebracht. Dort werden auch auf Grund der jeweiligen Forderungen an die Abbildung die entsprechenden Vorzahlen a_i berechnet. In vielen Fällen können aber auch die Grundformeln selbst, insbesondere die Formeln (46*) und (48*) für das Vergrößerungsverhältnis, dazu dienen, die Vorzahlen a_i zu ermitteln. Das gilt z. B. für die wichtigsten in der Landesvermessung gebräuchlichen konformen Abbildungen. An einigen Beispielen soll das gezeigt werden.

a) Längentreue Abbildung des Hauptmeridians, d. h. des Urbildes der x -Achse (das Vergrößerungsverhältnis ist unabhängig von x und $\Delta\varphi$)

Bei längentreuer Abbildung des Hauptmeridians muß $x = \Delta s$ sein, d. h. aus Gleichung (19) folgt

$$a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0.$$

Außerdem muß bei längentreuer Abbildung des Hauptmeridians das Vergrößerungsverhältnis für den ganzen Meridian gleich 1 sein und ebenso für das Abbild des Meridians, die x -Achse. Auf Grund dieser Bedingungen finden wir auch aus Gleichung (46*) vorstehende Werte für a_3, a_4, a_5 , wenn wir in ihr $l = 0$ setzen, und auch aus Gleichung (48*), wenn wir in ihr $y = 0$ setzen.

Die entsprechenden Übertragungsformeln und die Formeln für das Vergrößerungsverhältnis erhalten wir demnach aus den Gleichungen (30*), (31*), (37*), (38*), (46*) und (48*), wenn wir in ihnen $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ setzen. Sie stimmen überein mit den Formeln für die Gauß-Krüger-Koordinaten, wie es sein muß, weil bei der Gauß-Krüger-Abbildung die x -Achse das längentreue Abbild des Hauptmeridians ist.

Setzen wir in den Gleichungen (30*), (31*) und (46*) $\Delta\varphi = 0$ und sehen wir dafür das Argument φ als veränderlich an, so erhalten wir Gleichungen, die im Rahmen der mitgeführten Glieder den Gleichungen (19), (20) auf S. 498 und der Gleichung (20) auf S. 510 in Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde 1923 ([8]), entsprechen. Dabei ist in Gleichung (30*) für x rechts noch die Meridianbogenlänge B bis zur Breite φ hinzuzusetzen. In entsprechender Weise erhalten wir aus den Gleichungen (37*), (38*) und (48*) Gleichungen, die den Gleichungen (21) und (22) auf S. 503 a. a. O. und der Gleichung (21) auf S. 510 a. a. O. entsprechen, wenn wir $x = 0$ setzen, wobei dann $\Delta\varphi$ den Unterschied $\varphi - \varphi_1$ zwischen der gesuchten Breite φ und der Fußpunktbreite φ_1 bedeutet und die Fußpunktbreite φ_1 als Argument zu nehmen ist.

b) Längentreue Abbildung des Urbildes der y -Achse (das Vergrößerungsverhältnis ist unabhängig von y)

Bei längentreuer Abbildung des Urbildes der y -Achse ist das Vergrößerungsverhältnis zunächst auf dieser Achse unabhängig von y . Das bedeutet aber, daß es überhaupt unabhängig von y sein muß, weil diese Voraussetzung die erstgenannte mit einschließt. Wäre dem nicht so, so müßte es zwei verschiedene konforme Abbildungen mit längentreuer Abbildung der y -Achse geben, nämlich eine solche, bei der nur auf der y -Achse das Vergrößerungsverhältnis unabhängig von y ist, und eine solche, bei der es überall von y unabhängig ist. Das ist aber nicht möglich (vgl. III. 1. Satz b).

Auf Grund der Bedingung, daß das Vergrößerungsverhältnis überall von y unabhängig sein muß, lassen sich aus der Grundformel (48*) die Vorzahlen a_i ermitteln, indem wir alle Vorzahlen in den Gliedern, die y enthalten, gleich 0 setzen.

Dabei ergibt sich

$$a_3 = \frac{1}{6N^2}(1 + \eta^2) \quad a_4 = -\frac{1}{6N^3}\eta^2 t(1 + \eta^2) \cos a_0 \cdot x \quad a_5 = \frac{1}{24N^4}$$

Durch Einsetzen dieser Vorzahlen in die Grundformeln erhalten wir die Gebrauchsformeln für die Koordinatenübertragung und für das Vergrößerungsverhältnis. Diese Vorzahlen stimmen mit denen überein, die Großmann für die ebenen querachsigen Koordinaten gefunden hat ([16] S. 488 Umkehrung der Gleichung (16)); die Meridianbogenlänge Δs ist dort mit ξ_0 bezeichnet.

Die hier für die längentreue Abbildung des Urbildes der y -Achse gefundene konforme Abbildung ist also bis zur mitgeführten Ordnung identisch mit der sogenannten querachsigen Abbildung. Beide Abbildungen müssen aber überhaupt identisch sein; denn erstens weist Großmann a. a. O. ([16] S. 494/495) nach, daß bei der querachsigen Abbildung des Erdellipsoids auch bei der Entwicklung höherer Glieder im Falle $x = 0$, d. h. auf der y -Achse, das Vergrößerungsverhältnis stets gleich 1 ist, und zweitens wird auch bei der querachsigen Abbildung der Hauptmeridian geradlinig als x -Achse abgebildet. Aus der Identität beider Abbildungen folgt, daß bei der hier gefundenen Abbildung das Urbild der y -Achse die geodätische Linie sein muß, die auf dem Hauptmeridian im Normalpunkt der Abbildung senkrecht steht; denn auf Grund der Forderung nach längentreuer Abbildung dieser geodätischen Linie werden ja die Formeln der querachsigen Abbildung abgeleitet.

Eine besondere Ableitung der Formeln zur Berechnung der rechtwinkligen aus den geographischen Koordinaten für die querachsige Abbildung aus der Bedingung heraus, daß die zum Hauptmeridian senkrechte geodätische Linie längentreu abgebildet wird, wird in Abschnitt V dieser Arbeit gegeben.

c) Längentreue Abbildung des Hauptbreitenkreises (das Vergrößerungsverhältnis ist unabhängig von der geographischen Länge l)

Wird der Hauptbreitenkreis, d. h. der Breitenkreis, der durch den Normalpunkt der Abbildung geht, längentreu abgebildet, so bedeutet das, daß das Vergrößerungsverhältnis überhaupt von der geographischen Länge unabhängig sein muß, weil damit auch die längentreue Abbildung des Hauptbreitenkreises erreicht wird. Wäre dem nicht so, so müßte es zwei verschiedene konforme Abbildungen mit längentreuer Abbildung des Hauptbreitenkreises geben, nämlich eine solche, bei der das Vergrößerungsverhältnis nur auf dem Hauptbreitenkreis unabhängig von der geographischen Länge ist, und eine solche, bei der es überhaupt von der geographischen Länge unabhängig ist. Das ist aber nicht möglich (vgl. III. 1. Satz b).

Auf Grund der Bedingung, daß das Vergrößerungsverhältnis überall von l unabhängig sein muß, lassen sich aus der Grundformel (46*) die Vorzahlen a_i ermitteln, indem wir alle Vorzahlen in den Gliedern, die l enthalten, gleich 0 setzen.

Dabei ergibt sich

$$a_3 = \frac{1}{6N^2}(1 + \eta^2) \quad a_4 = \frac{1}{24N^3}t(1 - 3\eta^2 - 4\eta^4) \cos a_0 \cdot x \quad a_5 = \frac{1}{120N^4}(5 + 3t^2).$$

Durch Einsetzen dieser Vorzahlen in die Grundformeln erhalten wir die Gebrauchsformeln für die Koordinatenübertragung und für das Vergrößerungsverhältnis. Sie stimmen mit denen für die konforme Lambert-Abbildung

(„Kegelprojektion“) des Erdellipsoids überein ([6] S. 19 Gleichungen (4) und (3), S. 23 Gleichungen (9) und (9a), S. 22 Gleichungen (5) und (5a), S. 16 Gleichung (8), S. 26 Gleichung (4)).

d) Das Vergrößerungsverhältnis ist konstant auf Kreisen um das Abbild des Normalpunktes, d. h. auf Kreisen um den Koordinatenursprung in der Ebene

Es soll also sein $m - 1 = c(x^2 + y^2)$, andererseits ist nach Gleichung (48*)

$$m - 1 = 3 a_3 N^2 \frac{x^2}{N^2} + \left[\frac{1}{2}(1 + \eta^2) - 3 a_3 N^2 \right] \frac{y^2}{N^2} + 4 a_4 N^3 \frac{x^3}{N^3} + [-2 \eta^2 t (1 + \eta^2) - 12 a_4 N^3 \cos a_0 \cdot x] \cos a_0 \cdot x \frac{xy^2}{N^3} + \dots$$

Aus der geforderten Identität beider Gleichungen folgt zunächst

$$3 a_3 N^2 = \frac{1}{2} (1 + \eta^2) - 3 a_3 N^2 \quad \text{oder} \quad a_3 = \frac{1}{12 N^2} (1 + \eta^2).$$

Die Vorzahlen von x^3 und xy^2 können aber wegen des Ausdrucks $-2 \eta^2 t (1 + \eta^2)$ in der Vorzahl von xy^2 nicht gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden. Daraus folgt, daß eine Abbildung von der hier für das Vergrößerungsverhältnis geforderten Eigenschaft beim Erdellipsoid nicht möglich ist, jedenfalls nicht unter der hier gemachten Voraussetzung, daß ein Meridian geradlinig als x -Achse abgebildet wird.

Bei der Kugel dagegen ist eine derartige Abbildung möglich, weil bei ihr $\eta^2 = 0$ ist. Bei der Kugel wird

$$a_3 = \frac{1}{12 N^2} \quad a_4 = 0 \quad a_5 = \frac{1}{120 N^4}.$$

Durch Einsetzen dieser Vorzahlen in die Grundformeln erhalten wir die Gebrauchsformeln für die Koordinatenübertragung und für das Vergrößerungsverhältnis. U. a. wird

$$x = \Delta s + \frac{1}{12} \frac{\Delta s^3}{N^2} + \frac{1}{120} \frac{\Delta s^5}{N^4} + \dots \quad \text{und} \quad m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4 N^2}.$$

Diese Ausdrücke sind bereits von der „stereographischen Projektion“ der Kugel her bekannt.

e) Das Vergrößerungsverhältnis ist konstant auf einer beliebigen Geraden durch den Ursprung des ebenen Koordinatensystems

Ist die Gerade durch die Gleichung $y = nx$ gegeben, so müßte man aus Gleichung (48*) die Werte a_i ermitteln können, wenn in ihr nx für y eingesetzt wird und dann die Vorzahlen der Potenzen von x gleich 0 gesetzt werden. Das aber ist wiederum nicht gleichzeitig für alle Vorzahlen möglich, und zwar diesmal nicht nur beim Ellipsoid, sondern auch bei der Kugel. Auch diese Feststellung gilt nur unter der bei der Ableitung der Formeln (30*), (31*), (37*), (38*), (46*) und (48*) gemachten Voraussetzung, daß ein Meridian als x -Achse in die Ebene abgebildet wird.

Hiervon abgesehen kann aber das geradlinige Abbild jeder beliebigen geodätischen Linie x -Achse eines ebenen Koordinatensystems werden. Und für eine solche x -Achse können wiederum beliebige Vergrößerungsverhältnisse gelten. Nur kann man dann nicht auch erwarten, daß zugleich ein Meridian geradlinig abgebildet wird.

Anschließend werden für einen derartigen Fall die den Formeln (30*) und (31*) entsprechenden Formeln (71) und (72) zur Berechnung der ebenen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten abgeleitet.

Der Abschnitt IV bringt weitere Anwendungen der Grundformeln.

4. Geradlinige Abbildung einer beliebigen geodätischen Linie

a) Allgemeines

Eine geodätische Linie auf dem Erdellipsoid sei das Urbild der x -Achse eines Systems rechtwinklig-ebener Koordinaten x und y . Die geodätische Linie sei bestimmt durch die laufenden Koordinaten Δq und l . Es müssen für die betrachtete geodätische Linie, der in der Ebene der Wert $y = 0$ entspricht, Δq und l je eine Funktion von x sein:

$$\Delta q_{(y=0)} = \Delta q(x) \quad l_{(y=0)} = l(x). \quad (49)$$

Setzen wir

$$\Delta q_{(y=0)} + i l_{(y=0)} = \Delta q(x) + i l(x) = \Phi(x), \quad (50)$$

so kennzeichnet die Gleichung

$$\Delta q + i l = \Phi(x + i y) \quad (51)$$

eine konforme Abbildung der Ebene auf das Erdellipsoid, bei der das Abbild der x -Achse die betrachtete geodätische Linie auf dem Erdellipsoid wird. Denn aus Gleichung (51) erhalten wir für $y = 0$ die Gleichung (50), die wieder in die Gleichungen (49) zerfällt; d. h. wir bekommen für $y = 0$ die Gleichung der betrachteten geodätischen Linie, des Urbildes der x -Achse.

Die Umkehrung der Gleichung (51) kennzeichnet diejenige konforme Abbildung, bei der das Abbild der gegebenen geodätischen Linie x -Achse des ebenen Systems ist. Auch hier ist diese Abbildung wieder die einzig mögliche, weil es eben nicht zwei verschiedene konforme Abbildungen gibt, bei denen eine Linie beide Male nach dem gleichen Gesetz abgebildet wird.

b) Durchführung der konformen Abbildung

Wir bilden zunächst die Gleichung (49):

Die Abbildung der geodätischen Linie erfolge nach dem Gesetz

$$x = \Delta s + a_3 \Delta s^3 + a_4 \Delta s^4 + a_5 \Delta s^5 + \dots \quad (52)$$

Die Umkehrung dieser Reihe ergebe

$$\begin{aligned} \Delta s &= x + h_3 x^3 + h_4 x^4 + h_5 x^5 + \dots \\ \Delta s^2 &= x^2 + 2 h_3 x^4 + 2 h_4 x^5 + \dots \\ \Delta s^3 &= x^3 + 3 h_3 x^5 + \dots \\ \Delta s^4 &= x^4 + \dots \\ \Delta s^5 &= x^5 + \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Die Gleichungen (53) setzen wir in die Gleichung (4) ein:

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi &= (1 + \eta^2) \cos a \frac{x}{N} - \frac{1}{2} t [(1 + \eta^2) \sin^2 a + 3 \eta^2 (1 + \eta^2) \cos^2 a] \frac{x^2}{N^2} \\ &\quad - \frac{1}{6} \cos a [-6 N^2 h_3 (1 + \eta^2) + (1 + 3 t^2 + 2 \eta^2 - 6 \eta^2 t^2) \sin^2 a \\ &\quad\quad + 3 \eta^2 (1 - t^2) \cos^2 a] \frac{x^3}{N^3} \\ &\quad + \frac{1}{24} \left\{ 24 N^3 h_4 (1 + \eta^2) \cos a - 24 N^2 h_3 t [(1 + \eta^2) \sin^2 a + 3 \eta^2 \cos^2 a] \right. \\ &\quad\quad + t (1 + 3 t^2 + 2 \eta^2 - 6 \eta^2 t^2) \sin^4 a - 2 \sin^2 a \cos^2 a t (4 + 6 t^2 \\ &\quad\quad\quad - 9 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) + 12 \eta^2 t \cos^4 a \left. \right\} \frac{x^4}{N^4} \\ &\quad + \frac{1}{120} \left\{ 120 N^4 h_5 \cos a - 60 N^2 h_3 \cos a \sin^2 a (1 + 3 t^2) \right. \\ &\quad\quad + \cos a [(1 + 30 t^2 + 45 t^4) \sin^4 a - 4 (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \sin^2 a \cos^2 a \\ &\quad\quad\quad - 120 N^3 h_4 t \sin^2 a \left. \right\} \frac{x^5}{N^5} + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Von $\Delta \varphi = \varphi' - \varphi$ gehen wir unter Beachtung der Gleichungen (2) zu Δq über und bilden dazu

$$\begin{aligned} \Delta \varphi^2 &= (1 + 2 \eta^2 + \eta^4) \cos^2 a \frac{x^2}{N^2} - t \cos a [(1 + 2 \eta^2) \sin^2 a + 3 \eta^2 \cos^2 a] \frac{x^3}{N^3} \\ &\quad - \frac{1}{12} \left\{ \cos^2 a [-24 N^2 h_3 (1 + 2 \eta^2) + 2 (2 + 6 t^2 + 6 \eta^2 - 15 \eta^2 t^2) \sin^2 a \right. \\ &\quad\quad + 12 \eta^2 (1 - t^2) \cos^2 a] - 3 (1 + 2 \eta^2) t^2 \sin^4 a \left. \right\} \frac{x^4}{N^4} \\ &\quad + \frac{1}{12} \cos a [-36 N^2 h_3 t \sin^2 a + 24 N^3 h_4 \cos a + 3 t (1 + 3 t^2) \sin^4 a \\ &\quad\quad - 4 t (2 + 3 t^2) \sin^2 a \cos^2 a] \frac{x^5}{N^5} + \dots \quad (55) \\ \Delta \varphi^3 &= (1 + 3 \eta^2) \cos^3 a \frac{x^3}{N^3} - \frac{1}{2} t \cos^2 a [3 (1 + 3 \eta^2) \sin^2 a + 9 \eta^2 \cos^2 a] \frac{x^4}{N^4} \\ &\quad - \frac{1}{12} \cos a [-36 N^2 h_3 \cos^2 a + 6 (1 + 3 t^2) \sin^2 a \cos^2 a \\ &\quad\quad - 9 t^2 \sin^4 a] \frac{x^5}{N^5} + \dots \\ \Delta \varphi^4 &= (1 + 4 \eta^2) \cos^4 a \frac{x^4}{N^4} - 2 t \cos^3 a \sin^2 a \frac{x^5}{N^5} + \dots \\ \Delta \varphi^5 &= \cos^5 a \frac{x^5}{N^5} + \dots \end{aligned}$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} \Delta q_{(y=0)} &= \frac{\cos a}{\cos \varphi} \frac{x}{N} + \frac{1}{2} \frac{t}{\cos \varphi} (\cos^2 a - \sin^2 a) \frac{x^2}{N^2} - \frac{1}{6} \frac{\cos a}{\cos \varphi} \\ &\quad [-6 N^2 h_3 + (1 + 6 t^2 + \eta^2) \sin^2 a - (1 + 2 t^2 + \eta^2) \cos^2 a] \frac{x^3}{N^3} \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{1}{\cos \varphi} [24 N^3 h_4 \cos a + 24 N^2 h_3 t (\cos^2 a - \sin^2 a) \\ &\quad\quad + t (1 + 6 t^2 + \eta^2) \sin^4 a - 2 t (9 + 18 t^2 \\ &\quad\quad\quad + 7 \eta^2) \sin^2 a \cos^2 a + t (5 + 6 t^2 + \eta^2) \cos^4 a] \frac{x^4}{N^4} \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{120} \frac{1}{\cos \varphi} \left\{ \cos a [120 N^4 h_5 + 120 N^3 h_4 t \cos a \right. \\ &\quad + 60 N^2 h_3 [\cos^2 a (1 + 2 t^2) - \sin^2 a (1 + 6 t^2)] \\ &\quad + (1 + 60 t^2 + 120 t^4) \sin^4 a - 2 (9 + 100 t^2 + 120 t^4) \sin^2 a \cos^2 a \\ &\quad \left. + (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \cos^4 a \right\} - 120 N^3 h_4 t \sin^2 a \left. \right\} \frac{x^5}{N^5} + \dots \quad (56) \end{aligned}$$

Die Gleichung (5) für $l \cdot \cos \varphi$ ergibt in Verbindung mit den Gleichungen (53):

$$\begin{aligned} l_{(y=0)} &= \frac{\sin a}{\cos \varphi} \frac{x}{N} + \frac{t}{\cos \varphi} \sin a \cos a \frac{x^2}{N^2} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{\sin a}{\cos \varphi} [-3 N^2 h_3 + t^2 \sin^2 a - (1 + 3 t^2 + \eta^2) \cos^2 a] \frac{x^3}{N^3} \\ &\quad - \frac{1}{3} \frac{\sin a}{\cos \varphi} \left\{ -3 N^3 h_4 - 6 t \cos a N^2 h_3 \right. \\ &\quad\quad + t \cos a [(1 + 3 t^2 + \eta^2) \sin^2 a - (2 + 3 t^2 + \eta^2) \cos^2 a] \left. \right\} \frac{x^4}{N^4} \quad (57) \\ &\quad + \frac{1}{15} \frac{\sin a}{\cos \varphi} \left\{ 15 N^4 h_5 + 30 t \cos a N^3 h_4 \right. \\ &\quad\quad - 15 [\sin^2 a t^2 - (1 + 3 t^2) \cos^2 a] N^2 h_3 + t^2 (1 + 3 t^2) \sin^4 a \\ &\quad\quad \left. + (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \cos^4 a - (1 + 20 t^2 + 30 t^4) \sin^2 a \cos^2 a \right\} \frac{x^5}{N^5} + \dots \end{aligned}$$

Aus Gleichungen (56) und (57) wird gemäß Gleichung (50) $\Phi(x) = \Delta q_{(y=0)} + i l_{(y=0)}$ gebildet. Man erhält daraus $w = \Delta q + i l$, wenn man in $\Phi(x)$ gemäß Gleichung (51) überall x durch $z = x + iy$ ersetzt. In den Gliedern von höherer Ordnung als z^2 werden bei den Vorkoeffizienten allgemeine Bezeichnungen angewendet, deren Bedeutung sich durch Vergleichung leicht ergibt und in Gleichungen (73) angegeben ist.

$$\begin{aligned} w = \Delta q + i l &= \frac{1}{N \cos \varphi} (\cos a + i \sin a) z + \frac{t}{N^2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} (\cos^2 a - \sin^2 a) \right. \\ &\quad \left. + i \sin a \cos a \right] z^2 - \frac{1}{6} \frac{1}{N^3 \cos \varphi} (w_{r3} + i w_{i3}) z^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{1}{N^4 \cos \varphi} (w_{r4} + i w_{i4}) z^4 + \frac{1}{120} \frac{1}{N^5 \cos \varphi} (w_{r5} + i w_{i5}) z^5 + \dots \quad (58) \end{aligned}$$

Eine Trennung der reellen und imaginären Teile ergibt Formeln für die Berechnung von Δq und l aus x und y . Unter Benutzung der Reihe für $\Delta \varphi$ in Gleichung (3) kann man von Δq zu $\Delta \varphi$ übergehen. Wir wollen hier davon absehen und beschränken uns auf die Herleitung von Formeln zur Berechnung von x und y aus $\Delta \varphi$ und l . Die Reihe für w in Gleichung (58), die die Form

$$w = e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + e_4 z^4 + e_5 z^5 + \dots \quad (59)$$

hat, kehren wir um. Setzen wir

$$d_2 = \frac{e_2}{e_1^2}, \quad d_3 = \frac{e_3}{e_1^3}, \quad d_4 = \frac{e_4}{e_1^4}, \quad d_5 = \frac{e_5}{e_1^5}, \quad \text{so wird} \quad (60)$$

$$z = c_1 w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + c_4 w^4 + c_5 w^5 + \dots, \quad (61)$$

wobei für die c_i die Gleichungen

$$\begin{aligned} e_1 c_1 &= 1, \quad e_1 c_2 = -d_2, \quad e_1 c_3 = 2 d_2^2 - d_3, \quad e_1 c_4 = -5 d_2^3 + 5 d_2 d_3 - d_4, \\ e_1 c_5 &= 14 d_2^4 - 21 d_2^2 d_3 + 3 d_3^2 + 6 d_2 d_4 - d_5 \quad (62) \end{aligned}$$

gelten.

Es ist

$$e_1 = \frac{1}{N \cos \varphi} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{N \cos \varphi} e^{i\alpha}, \quad (63)$$

also wird

$$\frac{1}{e_1} = N \cos \varphi \cdot e^{-i\alpha}; \frac{1}{e_1^2} = N^2 \cos^2 \varphi \cdot e^{-2i\alpha}; \frac{1}{e_1^3} = N^3 \cos^3 \varphi \cdot e^{-3i\alpha}; \dots \quad (64)$$

und wegen der Gleichungen (60):

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{2} t \cos \varphi, \quad d_3 = -\frac{1}{6} \cos^2 \varphi \cdot e^{-3i\alpha} (w_{r_3} + i w_{i_3}), \\ d_4 &= \frac{1}{24} \cos^3 \varphi \cdot e^{-4i\alpha} (w_{r_4} + i w_{i_4}), \quad d_5 = \frac{1}{120} \cos^4 \varphi \cdot e^{-5i\alpha} (w_{r_5} + i w_{i_5}). \end{aligned} \quad (65)$$

Aus den Gleichungen (62) folgt dann unter Einführung weiterer Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_1 &= N \cos \varphi (\cos \alpha - i \sin \alpha) \\ c_2 &= -\frac{1}{2} N t \cos^2 \varphi (\cos \alpha - i \sin \alpha) \\ c_3 &= N \cos \varphi \cdot e^{-i\alpha} \left[\frac{1}{2} t^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{6} \cos^2 \varphi \cdot e^{-3i\alpha} (w_{r_3} + i w_{i_3}) \right] \\ &= \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi \cdot e^{-i\alpha} [3t^2 + w_{r_3} \cos 3\alpha + w_{i_3} \sin 3\alpha + i(w_{i_3} \cos 3\alpha - w_{r_3} \sin 3\alpha)] \\ &= \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi [\kappa_1 \cos \alpha + \kappa_2 \sin \alpha + i(\kappa_2 \cos \alpha - \kappa_1 \sin \alpha)] \\ &= \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (z_{r_3} + i z_{i_3}). \quad \text{In ähnlicher Weise wird} \\ c_4 &= -\frac{1}{24} N \cos^4 \varphi [\lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha + i(\lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1 \sin \alpha)] \\ &= -\frac{1}{24} N \cos^4 \varphi (z_{r_4} + i z_{i_4}) \\ c_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi [\nu_1 \cos \alpha + \nu_2 \sin \alpha + i(\nu_2 \cos \alpha - \nu_1 \sin \alpha)] \\ &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (z_{r_5} + i z_{i_5}). \end{aligned} \quad (66)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 3t^2 + w_{r_3} \cos 3\alpha + w_{i_3} \sin 3\alpha & \kappa_2 &= w_{i_3} \cos 3\alpha - w_{r_3} \sin 3\alpha \\ \lambda_1 &= 15t^3 + 10t(w_{r_3} \cos 3\alpha + w_{i_3} \sin 3\alpha) + w_{r_4} \cos 4\alpha + w_{i_4} \sin 4\alpha \\ \lambda_2 &= 10t(w_{i_3} \cos 3\alpha - w_{r_3} \sin 3\alpha) + w_{i_4} \cos 4\alpha - w_{r_4} \sin 4\alpha \\ \nu_1 &= 105t^4 + 105t^2(w_{r_3} \cos 3\alpha + w_{i_3} \sin 3\alpha) + 10(w_{r_3}^2 - w_{i_3}^2) \cos 6\alpha \\ &\quad + 20w_{r_3} w_{i_3} \sin 6\alpha + 15t(w_{r_4} \cos 4\alpha + w_{i_4} \sin 4\alpha) \\ &\quad - w_{r_5} \cos 5\alpha - w_{i_5} \sin 5\alpha \\ \nu_2 &= 105t^2(w_{i_3} \cos 3\alpha - w_{r_3} \sin 3\alpha) + 20w_{r_3} w_{i_3} \cos 6\alpha \\ &\quad - 10(w_{r_3}^2 - w_{i_3}^2) \sin 6\alpha + 15t(w_{i_4} \cos 4\alpha - w_{r_4} \sin 4\alpha) \\ &\quad - w_{i_5} \cos 5\alpha + w_{r_5} \sin 5\alpha. \end{aligned} \quad (67)$$

Wegen Gleichungen (61) und (66) wird

$$\begin{aligned} x + iy &= N \cos \varphi (\cos \alpha - i \sin \alpha) (\Delta q + i l) \\ &\quad - \frac{1}{2} N t \cos^2 \varphi (\cos \alpha - i \sin \alpha) (\Delta q^2 - l^2 + i 2 \Delta q l) \\ &\quad + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (z_{r_3} + i z_{i_3}) [\Delta q^3 - 3 \Delta q l^2 + i(3 \Delta q^2 l - l^3)] \\ &\quad - \frac{1}{24} N \cos^4 \varphi (z_{r_4} + i z_{i_4}) [\Delta q^4 - 6 \Delta q^2 l^2 + l^4 + i(4 \Delta q^3 l - 4 \Delta q l^3)] \\ &\quad + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (z_{r_5} + i z_{i_5}) [\Delta q^5 - 10 \Delta q^3 l^2 + 5 \Delta q l^4 \\ &\quad \quad + i(5 \Delta q^4 l - 10 \Delta q^2 l^3 + l^5)] - + \dots \end{aligned} \quad (68)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} &= \cos \varphi (\cos \alpha \Delta q + \sin \alpha l) \\ &\quad - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi (\cos \alpha \Delta q^2 - \cos \alpha l^2 + 2 \sin \alpha \Delta q l) \\ &\quad + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (z_{r_3} \Delta q^3 - 3 z_{r_3} \Delta q l^2 - 3 z_{i_3} \Delta q^2 l + z_{i_3} l^3) \\ &\quad - \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (z_{r_4} \Delta q^4 - 6 z_{r_4} \Delta q^2 l^2 + z_{r_4} l^4 - 4 z_{i_4} \Delta q^3 l + 4 z_{i_4} \Delta q l^3) \\ &\quad + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (z_{r_5} \Delta q^5 - 10 z_{r_5} \Delta q^3 l^2 + 5 z_{r_5} \Delta q l^4 - 5 z_{i_5} \Delta q^4 l \\ &\quad \quad + 10 z_{i_5} \Delta q^2 l^3 - z_{i_5} l^5) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} &= \cos \varphi (\cos \alpha l - \sin \alpha \Delta q) \\ &\quad - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi (2 \cos \alpha \Delta q l - \sin \alpha \Delta q^2 + \sin \alpha l^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (3 z_{r_3} \Delta q^2 l - z_{r_3} l^3 + z_{i_3} \Delta q^3 - 3 z_{i_3} \Delta q l^2) \\ &\quad - \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (4 z_{r_4} \Delta q^3 l - 4 z_{r_4} \Delta q l^3 + z_{i_4} \Delta q^4 - 6 z_{i_4} \Delta q^2 l^2 + z_{i_4} l^4) \\ &\quad + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (5 z_{r_5} \Delta q^4 l - 10 z_{r_5} \Delta q^2 l^3 + z_{r_5} l^5 + z_{i_5} \Delta q^5 \\ &\quad \quad - 10 z_{i_5} \Delta q^3 l^2 + 5 z_{i_5} \Delta q l^4) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) ersetzen wir Δq durch $\Delta \varphi$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} &= \cos \alpha (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi + \frac{3}{2} \eta^2 t \cos \alpha (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} [\cos \alpha (1 - t^2 + \eta^2) + z_{r_3} (1 - 3 \eta^2)] \Delta \varphi^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi \cos \alpha l^2 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 - \eta^2) z_{r_3} \Delta \varphi l^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} [t \cos \alpha (1 - 5 t^2 - \eta^2 + 2 \eta^2 t^2) + 6 t z_{r_3} (1 - \eta^2) - z_{r_4} (1 - 4 \eta^2)] \Delta \varphi^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \cos^2 \varphi [t z_{r_3} (1 + \eta^2) - z_{r_4} (1 - 2 \eta^2)] \Delta \varphi^2 l^2 - \frac{1}{24} \cos^4 \varphi z_{r_4} l^4 \\
& + \frac{1}{120} [\cos \alpha (5 - 26 t^4 - 7 t^2) + 5 z_{r_3} (2 + 7 t^2) - 10 z_{r_4} t + z_{r_5}] \Delta \varphi^5 \\
& - \frac{1}{12} \cos^2 \varphi [z_{r_3} (1 + 2 t^2) - 3 t z_{r_4} + z_{r_5}] \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{24} z_{r_5} \cos^4 \varphi \Delta \varphi l^4 \\
& + \cos \varphi \sin \alpha l - t \cos \varphi \sin \alpha (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l \\
& \quad - \frac{1}{2} \cos \varphi [t^2 \sin \alpha (1 + \eta^2) + z_{i_3} (1 - 2 \eta^2)] \Delta \varphi^2 l \\
& + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi z_{i_3} l^3 - \frac{1}{6} \cos \varphi [t \sin \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\
& \quad + 3 t z_{i_3} - z_{i_4} (1 - 3 \eta^2)] \Delta \varphi^3 l - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi z_{i_4} (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^3 \\
& - \frac{1}{24} \cos \varphi [t^2 \sin \alpha (5 + 6 t^2) + z_{i_3} (4 + 11 t^2) - 6 t z_{i_4} + z_{i_5}] \Delta \varphi^4 l \\
& \quad - \frac{1}{12} \cos^3 \varphi (t z_{i_4} - z_{i_5}) \Delta \varphi^2 l^3 \\
& - \frac{1}{120} \cos^5 \varphi z_{i_5} l^5 + \dots
\end{aligned} \tag{71}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{y}{N} &= \cos \varphi \cos \alpha l - t \cos \varphi \cos \alpha (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l \\
& \quad - \frac{1}{2} \cos \varphi [t^2 \cos \alpha (1 + \eta^2) - z_{r_3} (1 - 2 \eta^2)] \Delta \varphi^2 l \\
& - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi z_{r_3} l^3 - \frac{1}{6} \cos \varphi [t \cos \alpha (1 + 2 t^2 + \eta^2) \\
& \quad - 3 t z_{r_3} + z_{r_4} (1 - 3 \eta^2)] \Delta \varphi^3 l \\
& + \frac{1}{6} \cos^3 \varphi z_{r_4} (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^3 \\
& \quad - \frac{1}{24} \cos \varphi [t^2 \cos \alpha (5 + 6 t^2) - z_{r_3} (4 + 11 t^2) + 6 t z_{r_4} - z_{r_5}] \Delta \varphi^4 l \\
& + \frac{1}{12} \cos^3 \varphi (t z_{r_4} - z_{r_5}) \Delta \varphi^2 l^3 + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi z_{r_5} l^5 \\
& - \sin \alpha (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi - \frac{3}{2} \eta^2 t \sin \alpha (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 \\
& \quad - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi \sin \alpha l^2 \\
& - \frac{1}{6} [\sin \alpha (1 - t^2 + \eta^2) - z_{i_3} (1 - 3 \eta^2)] \Delta \varphi^3 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi z_{i_3} (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^2 \\
& - \frac{1}{4} \cos^2 \varphi [t z_{i_3} (1 + \eta^2) - z_{i_4} (1 - 2 \eta^2)] \Delta \varphi^2 l^2 - \frac{1}{24} \cos^4 \varphi z_{i_4} l^4 \\
& - \frac{1}{24} [t \sin \alpha (1 - 5 t^2 - \eta^2 + 2 \eta^2 t^2) - 6 t z_{i_3} (1 - \eta^2) + z_{i_4} (1 - 4 \eta^2)] \Delta \varphi^4 \\
& - \frac{1}{120} [\sin \alpha (5 - 26 t^4 - 7 t^2) - 5 z_{i_3} (2 + 7 t^2) + 10 t z_{i_4} - z_{i_5}] \Delta \varphi^5 \\
& - \frac{1}{12} \cos^2 \varphi [z_{i_3} (1 + 2 t^2) - 3 t z_{i_4} + z_{i_5}] \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi z_{i_5} \Delta \varphi l^4 + \dots
\end{aligned} \tag{72}$$

Eine Anwendung dieser Formeln wird in Abschnitt V gebracht.

Die einzelnen Abkürzungen bedeuten:

$$\begin{aligned}
w_{r_3} &= \cos \alpha [-6 N^2 h_3 + (1 + 6 t^2 + \eta^2) \sin^2 \alpha - (1 + 2 t^2 + \eta^2) \cos^2 \alpha] \\
w_{r_4} &= 24 N^3 h_4 \cos \alpha + 24 N^2 h_3 t (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + t (1 + 6 t^2 + \eta^2) \sin^4 \alpha \\
& \quad - 2 t (9 + 18 t^2 + 7 \eta^2) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + t (5 + 6 t^2 + \eta^2) \cos^4 \alpha \\
w_{r_5} &= \cos \alpha \{120 N^4 h_5 + 120 N^3 h_4 t \cos \alpha + 60 N^2 h_3 [\cos^2 \alpha (1 + 2 t^2) \\
& \quad - \sin^2 \alpha (1 + 6 t^2)] + (1 + 60 t^2 + 120 t^4) \sin^4 \alpha - 2 (9 + 100 t^2 \\
& \quad + 120 t^4) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (5 + 28 t^2 + 24 t^4) \cos^4 \alpha\} - 120 N^3 h_4 t \sin^2 \alpha \\
w_{i_3} &= 2 \sin \alpha [-3 N^2 h_3 + t^2 \sin^2 \alpha - (1 + 3 t^2 + \eta^2) \cos^2 \alpha] \\
w_{i_4} &= -8 \sin \alpha \{-3 N^3 h_4 - 6 t \cos \alpha N^2 h_3 \\
& \quad + t \cos \alpha [(1 + 3 t^2 + \eta^2) \sin^2 \alpha - t (2 + 3 t^2 + \eta^2) \cos^2 \alpha]\} \\
w_{i_5} &= +8 \sin \alpha \{15 N^4 h_5 + 30 t \cos \alpha N^3 h_4 \\
& \quad - 15 [\sin^2 \alpha t^2 - (1 + 3 t^2) \cos^2 \alpha] N^2 h_3 + t^2 (1 + 3 t^2) \sin^4 \alpha \\
& \quad + (2 + 15 t^2 + 15 t^4) \cos^4 \alpha - (1 + 20 t^2 + 30 t^4) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\} \\
z_{r_3} &= \kappa_1 \cos \alpha + \kappa_2 \sin \alpha & z_{i_3} &= \kappa_2 \cos \alpha - \kappa_1 \sin \alpha \\
z_{r_4} &= \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha & z_{i_4} &= \lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1 \sin \alpha \\
z_{r_5} &= \nu_1 \cos \alpha + \nu_2 \sin \alpha & z_{i_5} &= \nu_2 \cos \alpha - \nu_1 \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{73}$$

Die Bedeutung der κ , λ und ν ist in den Gleichungen (67) angegeben.

Wir betrachten zwei Sonderfälle, nämlich

$$a) \sin \alpha = 0; \quad \beta) \cos \alpha = 0.$$

a) $\sin \alpha = 0$; d. h. ein Meridian wird geradlinig abgebildet:

Es wird

$$\begin{aligned}
w_{i_3} &= w_{i_4} = w_{i_5} = 0 \\
\kappa_1 &= 3 t^2 + w_{r_3} \cos 3 \alpha & \kappa_2 &= 0 \\
\lambda_1 &= 15 t^3 + 10 t w_{r_3} \cos 3 \alpha + w_{r_4} \cos 4 \alpha & \lambda_2 &= 0 \\
\nu_1 &= 105 t^4 + 105 t^2 w_{r_3} \cos 3 \alpha + 10 w_{r_3}^2 \cos 6 \alpha \\
& \quad + 15 t w_{r_4} \cos 4 \alpha - w_{r_5} \cos 5 \alpha & \nu_2 &= 0 \\
z_{r_3} &= \kappa_1 \cos \alpha, \quad z_{r_4} = \lambda_1 \cos \alpha, \quad z_{r_5} = \nu_1 \cos \alpha & z_{i_3} = z_{i_4} = z_{i_5} &= 0.
\end{aligned} \tag{74}$$

Hieraus folgt, daß die in den zwei Gleichungen (71) und (72) für x/N und y/N als zweite Gruppe zusammengefaßten Glieder null werden, wenn $\sin \alpha = 0$ ist.

$\beta) \cos \alpha = 0$; d. h. die geodätische Linie hat das Azimut $+90^\circ$ oder -90° .

Es wird

$$\begin{aligned}
w_{r_3} &= 0; \quad w_{r_4} = -24 N^2 h_3 t \sin^2 \alpha + t (1 + 6 t^2 + \eta^2) \sin^4 \alpha; \\
w_{r_5} &= -120 N^3 h_4 t \sin^2 \alpha \\
\kappa_1 &= 3 t^2 + w_{i_3} \sin 3 \alpha & \kappa_2 &= 0 \\
\lambda_1 &= 15 t^3 + 10 t w_{i_3} \sin 3 \alpha + w_{r_4} \cos 4 \alpha & \lambda_2 &= +w_{i_4} \cos 4 \alpha \\
\nu_1 &= 105 t^4 + 105 t^2 w_{i_3} \sin 3 \alpha - 10 w_{i_3}^2 \cos 6 \alpha + 15 t w_{r_4} \cos 4 \alpha \\
& \quad - w_{i_5} \sin 5 \alpha & \nu_2 &= 0 \\
\nu_2 &= +15 t w_{i_4} \cos 4 \alpha + w_{r_5} \sin 5 \alpha \\
z_{r_3} &= 0, \quad z_{r_4} = \lambda_2 \sin \alpha, \quad z_{r_5} = \nu_2 \sin \alpha \\
z_{i_3} &= -\kappa_1 \sin \alpha, \quad z_{i_4} = -\lambda_1 \sin \alpha, \quad z_{i_5} = -\nu_1 \sin \alpha.
\end{aligned} \tag{75}$$

IV. Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids und ihre Grenzfälle

1. Die Grundgleichung der konformen Lambertabbildung bei einer beliebigen Fläche

a) Allgemeines

Wir wollen eine konforme Abbildung des Erdellipsoids finden, die der konformen Lambertabbildung soweit als möglich entspricht. Als Haupteigenschaft dieser Abbildung haben wir in der Einleitung die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels festgestellt. Wir gehen daher von der Betrachtung eines geodätischen Strahlenbüschels aus.

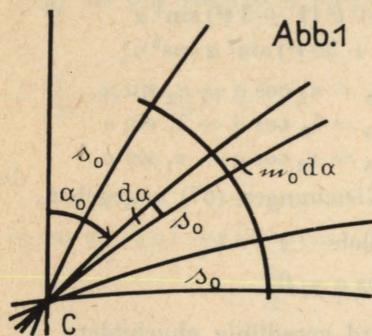


Abb. 1 zeigt ein geodätisches Strahlenbüschel auf einer beliebigen Fläche. Wir wollen einen Strahl dieses Büschels betrachten, der mit einem anderen gegebenen Strahl den Winkel α_0 bildet. Ändern wir den Winkel α_0 um den Betrag $d\alpha$, so entspricht dieser Änderung eine Länge $m_0 d\alpha$ auf der orthogonalen Trajektorie (geodätischer Entfernungskreis) des Büschels im Abstand s_0 vom Scheitel C des Büschels. Hierbei bedeutet m die reduzierte Länge der geodätischen Linie. Es ist zu beachten, daß m außer von der Bogenlänge s auch vom Winkel α abhängig ist.

Der betrachteten geodätischen Linie entspreche in der Ebene ein Strahl $C'R$ (Abb. 2). Der Länge s_0 entspreche die Länge R_0 und dem Winkel $d\alpha$ entspreche die Änderung $d\psi$. Dann entspricht dem Bogenstück $m_0 d\alpha$ der orthogonalen Trajektorie das Stück $R_0 d\psi$ des Kreises mit dem Radius R_0 um C' .

Der Strahl $C'R$ sei Abszissenachse eines Systems rechtwinklig-ebener Koordinaten x, y .

Setzen wir nun fest, daß

$$R_0 d\psi = m_0 d\alpha \quad (76)$$

ist, so haben wir eine der konformen Lambertabbildung entsprechende Abbildung im Differentiellen vor uns. Aus Gleichung (76) folgt für das Verhältnis des Winkels $d\psi$ zu dem Winkel $d\alpha$

$$n = \frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{m_0}{R_0} \quad (77)$$

Über die Größe von R_0 ist noch nichts gesagt. Um auch diese festzusetzen, gehen wir davon aus, daß bei der konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids, bei der die abzubildende orthogonale Trajektorie ein Parallelkreis ist, $R_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0$ ist. Das ist die Länge der Mantelseite des Berührungskegels von der Kegelspitze bis zum berührten Parallelkreis, der nach der Abwicklung des Kegels in die Ebene diesen Radius hat. Wegen der Invarianz der geodätischen Krümmungen bei Abwicklungen ist $R_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0$ der geodätische Krümmungsradius des Parallelkreises. Dementsprechend soll auch in unserem Falle R_0 der geodätische Krümmungsradius der orthogonalen Trajektorie an der betrachteten Stelle sein.

Aus der Bedingung in Gleichung (76) wollen wir das Vergrößerungsverhältnis auf dem Abbild der betrachteten geodätischen Linie, d. h. auf der Abszissenachse, ableiten. Es seien dR das Linienelement des Abbildes und ds das Linienelement der betrachteten geodätischen Linie. Weil diese Linie mit dem Ausgangsstrahl den Winkel α_0 bildet, nennen wir das Vergrößerungsverhältnis m_0 . Es ist

$$m_0 = \frac{dR}{ds} \quad (78)$$

b) Das Vergrößerungsverhältnis auf der Abszissenachse

Wir können s und α als geodätische Polarkoordinaten auf der jeweils betrachteten krummen Fläche ansehen. In diesem System gilt für das Linienelement

$$d\sigma^2 = ds^2 + m^2 d\alpha^2.$$

Die Gauß'schen Fundamentalgrößen erster Ordnung sind also $E = 1$, $F = 0$ und $G = m^2$. Die Gleichung für das Linienelement zeigt, daß s und α keine isothermen Parameter sind, weil sie sich nicht auf die isotherme Form

$$d\sigma^2 = \lambda(s, \alpha) (ds^2 + d\alpha^2)$$

bringen läßt. Wir gehen daher mit Hilfe der Formeln (vgl. z. B. Blaschke [12] S. 178 Gleichung (148))

$$\xi_s = -\frac{F\eta_s - E\eta_\alpha}{T} \quad \xi_\alpha = -\frac{G\eta_s - F\eta_\alpha}{T} \quad T = \sqrt{EG - F^2}$$

zu den isothermen Parametern ξ und η über. Im vorliegenden Falle wird

$$\xi_s = -\frac{-\eta_\alpha}{m} = \frac{1}{m} \cdot \eta_\alpha \quad \xi_\alpha = -\frac{m^2 \eta_s}{m} = -m \cdot \eta_s \quad (79)$$

In der Ebene berechnen wir das Linienelement aus den Parametern R und ψ , die als ebene Polarkoordinaten angesehen werden können:

$$dS^2 = dR^2 + R^2 d\psi^2.$$

Auch R und ψ sind keine isothermen Parameter. Bezeichnen wir mit y' die Bogenlänge des Kreises mit dem Radius R_0 und rechnen wir y' von dem Schnitt des Kreises mit dem Strahl R ab, so können wir zu isothermen Parametern x' und y' übergehen, indem wir bilden (vgl. Abb. 2)

$$dS^2 = dR^2 + R^2 \left(\frac{dy'}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{R_0^2}{R^2} dR^2 + dy'^2\right).$$

Wir haben jetzt eine isotherme Form des Linienelements. Setzen wir

$$\frac{R_0}{R} dR = dx', \quad (80)$$

so sind x' und y' die gesuchten isothermen Parameter.

Eine konforme ebene Abbildung des betrachteten Bereichs der Fläche erhalten wir, wenn wir die Isothermen beider Flächen, d. h. der gegebenen Fläche und der Ebene, einander entsprechen lassen. Wir setzen also

$$x' = \xi \quad \text{und} \quad y' = \eta$$

und erhalten entsprechend Gleichung (79) für den Strahl R

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{1}{m} \frac{dy'}{da}.$$

Berücksichtigen wir die in Gleichung (76) enthaltene Bedingung

$$m_0 da = R_0 d\psi = dy' \quad \text{oder} \quad \frac{dy'}{da} = m_0, \quad \text{so wird}$$

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{m_0}{m}. \quad (81)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (78), (80), (81) erhalten wir für das gesuchte Vergrößerungsverhältnis

$$m_0 = \frac{dR}{ds} = \frac{m_0}{R_0} \frac{R}{m} \quad (82)$$

oder auch, wegen Gleichung (77),

$$m_0 = \frac{dR}{ds} = n \frac{R}{m}. \quad (83)$$

Besteht dieses Vergrößerungsverhältnis für den Strahl R , so wird dem Bogenstück $m_0 da$ der orthogonalen Trajektorie der betrachteten geodätischen Linie das gleich lange Stück $R_0 d\psi$ des Kreises mit dem Radius R_0 um C' entsprechen.

Es ist noch R_0 als geodätischer Krümmungsradius der orthogonalen Trajektorie an der betrachteten Stelle zu bestimmen. Für die geodätischen Krümmungen in dem orthogonalen Netz der geodätischen Linien (s -Linien) und ihrer orthogonalen Trajektorien (a -Linien) hat man (vgl. z. B. Blaschke [12] S. 150 (Gleichung 12))

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\delta \sqrt{E}}{\delta a} \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\delta \sqrt{G}}{\delta s}.$$

Für die geodätischen Linien ergibt sich, wie es sein muß, $g_1 = 0$, weil $E = 1 = \text{konst}$ ist. Für die geodätische Krümmung der orthogonalen Trajektorie erhalten wir

$$g_2 = \frac{1}{m} \frac{\delta m}{\delta s}.$$

Führen wir für die Ableitungen der reduzierten Länge m der geodätischen Linie nach der Bogenlänge s die Abkürzungen

$$\frac{dm}{ds} = m'; \quad \frac{d^2 m}{ds^2} = m''; \quad \frac{d^3 m}{ds^3} = m''' \quad \text{usw.} \quad (84)$$

ein, so wird also

$$g_2 = \frac{m'}{m} \quad \text{und damit} \quad R_0 = \frac{1}{(g_2)_0} = \frac{m_0}{(m')_0} \quad \text{und} \quad n = \frac{m_0}{R_0} = (m')_0. \quad (85)$$

Statt der Gleichung (83) können wir also für das Vergrößerungsverhältnis auf dem Strahl R auch schreiben

$$m_0 = \frac{dR}{ds} = (m')_0 \frac{R}{m}. \quad (86)$$

Die Gleichungen (82), (83) und (86) sind als verschiedene Formen der Grundgleichung der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung einer beliebigen Fläche anzusehen.

2. Sonderfall der Kugel

Vor der Durchführung der eigentlichen konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids unter Benutzung der Grundgleichung soll diese an Hand eines Beispiels näher betrachtet werden. Wir benutzen hierzu den Sonderfall der Kugel, bei der die reduzierte Länge m der geodätischen Linie (Größtkreis) unabhängig vom Winkel α ist. In diesem Fall können wir m statt m_0 schreiben. Als die geodätische Linie, von der aus der Winkel α gezählt wird, wollen wir hier, wie auch später beim Erdellipsoid, den Meridian durch den Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels wählen. Der Winkel α bedeutet dann das Azimut.

a) Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung

Für die reduzierte Länge einer geodätischen Linie auf einer Kugel mit dem Radius r gilt nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 411 Gleichung (14))

$$m = r \sin \frac{s}{r}. \quad (87)$$

Damit wird

$$m_0 = r \sin \frac{s_0}{r}; \quad n = (m')_0 = \cos \frac{s_0}{r}; \quad R_0 = r \operatorname{tg} \frac{s_0}{r}; \quad m = \cos \frac{s_0}{r} \frac{R}{r \sin \frac{s}{r}}. \quad (88)$$

Für $s = s_0$ wird $m = 1$.

Liegt der Scheitel des Büschels im Pol, so ist $s/r = 90 - \varphi$, und wir erhalten

$$R_0 = r \operatorname{ctg} \varphi_0 \quad \text{und} \quad m = \frac{R \sin \varphi_0}{r \cos \varphi} \quad (89)$$

in Übereinstimmung mit Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 529 Gleichung (1) und S. 531 Gleichung (3)), wo P für φ_0 geschrieben ist.

b) Die stereographische Projektion

Setzen wir in Gleichung (88) $s_0 = 0$, so erhalten wir Ausdrücke, die der stereographischen Projektion der Kugel entsprechen. Es wird

$$m_0 = 0 \quad n = (m')_0 = 1 \quad R_0 = 0 \quad m = \frac{R}{r \sin \frac{s}{r}} \quad (88a)$$

Führen wir in die letzte der Gleichungen (88a) für R den Ausdruck ein, der der stereographischen Projektion entspricht, nämlich

$$R = 2r \operatorname{tg} \frac{s}{2r}, \quad (90)$$

und formen wir etwas um, so wird

$$m = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2r}}{2 \sin \frac{s}{2r} \cos \frac{s}{2r}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2r}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2r} = 1 + \frac{R^2}{4r^2}.$$

Bildet man zur Probe für die Gültigkeit der Gleichung (90) die erste Ableitung von R nach s , so erhält man $\frac{dR}{ds} = m = \frac{R}{r \sin \frac{s}{r}}$. In einem System

rechtwinklig-ebener Koordinaten x und y ist $R^2 = x^2 + y^2$. Wir erhalten also die bekannte Formel für das Vergrößerungsverhältnis bei der stereographischen Projektion

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4r^2}. \quad (91)$$

Für $s = s_0$ folgt aus Gleichung (90) und der letzten Gleichung (88a) durch Grenzübergang $m = 1$. Der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels ist also zugleich Normalpunkt der Abbildung.

Liegt der Normalpunkt im Pol, so wird

$$m = \frac{R}{r \cos \varphi} \quad (89a)$$

c) Die verallgemeinerte Mercatorabbildung

Setzen wir in Gleichung (88) $\frac{s_0}{r} = \frac{\pi}{2}$ und $s = s_0 + \Delta s$, so erhalten wir Ausdrücke, die der Mercatorabbildung der Kugel (mit beliebigem Größtkreis als Äquator) entsprechen. Es wird

$$m_0 = r; \quad n = (m')_0 = 0; \quad R_0 = \infty; \quad m = 0 \cdot \infty = \frac{1}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\cos \frac{\Delta s}{r}}. \quad (88b)$$

Bei der Ermittlung des Vergrößerungsverhältnisses versagen die Gleichungen (83) und (86). Wir benutzen statt ihrer die Gleichung (82) und setzen zugleich $R = R_0 + \Delta R$. Es wird dann

$$m = \frac{m_0 R}{R_0 m} = \frac{m_0 R_0 + \Delta R}{R_0 m} = \frac{m_0}{m} = \frac{r}{r \sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\cos \frac{\Delta s}{r}}.$$

Für $s = s_0$ wird $m = 1$.

Wir können den Ausdruck in Gleichung (88b) für das Vergrößerungsverhältnis noch in einer anderen Form schreiben, wenn wir auch die reduzierte Länge der geodätischen Linie vom Endpunkte der Strecke s_0 aus messen, d. h. wenn wir m als Funktion von Δs ansehen. Wir wollen in diesem Fall $m_{\Delta s}$, statt m schreiben. Es ist $m_{\Delta s} = r \sin \frac{\Delta s}{r}$. Die Ableitung dieser reduzierten

Länge nach der Bogenlänge bezeichnen wir mit n . Es ist $n = \frac{d m_{\Delta s}}{d s} = \cos \frac{\Delta s}{r}$, also ist

$$m = \frac{1}{n}. \quad (88c)$$

Die Gleichung (88c) bestätigt, daß die verallgemeinerte Mercatorabbildung der Kugel und die querachsige Abbildung identisch sind. Denn bei der querachsigen Abbildung des Ellipsoids gilt nach Großmann ([16] S. 487 Gleichung (14)) für das Vergrößerungsverhältnis auf der Ordinatenachse eines Systems geodätischer Parallelkoordinaten $m_0 = \frac{1}{n_0}$, wenn Abszissenachse das geradlinige und längentreue Abbild einer geodätischen Linie ist, welche senkrecht auf der von uns betrachteten geodätischen Linie steht. Auch in unserem Fall $\frac{s_0}{r} = \frac{\pi}{2}$ haben wir es mit einem System geodätischer Parallelkoordinaten zu tun, nämlich dem Größtkreis, der die betrachtete geodätische Linie des Büschels senkrecht schneidet, als der einen Achse und der geodätischen Linie selbst als der anderen Achse. Es ist also auch der Ausdruck „querachsig“ hier allgemein aufzufassen, d. h. ohne Beschränkung auf den Meridian als Hauptachse.

Liegt der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels im Pol, so erhalten wir

$$m = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad (89b)$$

das bekannte Vergrößerungsverhältnis bei der eigentlichen Mercatorabbildung (Seekarte).

3. Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids

a) Die Abbildungsgleichung für das geradlinige Abbild einer geodätischen Linie

Wir betrachten eine Linie des geodätischen Strahlenbüschels auf dem Erdellipsoid. Bei der konformen Abbildung auf die Ebene soll ihr Abbild geradlinig sein und x -Achse eines Systems rechtwinklig-ebener Koordinaten x und y werden. Für das Vergrößerungsverhältnis auf der x -Achse gelte die Grundgleichung (82) der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung. Aus ihr ist x als Funktion der Bogenlänge s der betrachteten geodätischen Linie zu bestimmen. Wir rechnen x von dem Punkt ab, in welchem das Vergrößerungsverhältnis $m_0 = 1$ ist, d. h. vom Endpunkte der Strecke R_0 ab. Dementsprechend messen wir die Bogenlänge von dem Endpunkte der geodätischen Linie mit der Länge s_0 ab. Wir setzen also

$$s = s_0 + \Delta s \quad R = R_0 + x. \quad (92)$$

Für $\Delta s = 0$ wird auch $x = 0$. Wir erhalten x als Funktion von Δs mittels der Taylorschen Reihe:

$$x = f'(s_0) \Delta s + \frac{1}{2} f''(s_0) \Delta s^2 + \frac{1}{6} f'''(s_0) \Delta s^3 + \frac{1}{24} f^{IV}(s_0) \Delta s^4 + \frac{1}{120} f^V(s_0) \Delta s^5 + \dots \quad (93)$$

Führen wir in die letzte der Gleichungen (88a) für R den Ausdruck ein, der der stereographischen Projektion entspricht, nämlich

$$R = 2 r \operatorname{tg} \frac{s}{2r}, \quad (90)$$

und formen wir etwas um, so wird

$$m = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2r}}{2 \sin \frac{s}{2r} \cos \frac{s}{2r}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2r}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2r} = 1 + \frac{R^2}{4r^2}.$$

Bildet man zur Probe für die Gültigkeit der Gleichung (90) die erste Ableitung von R nach s , so erhält man $\frac{dR}{ds} = m = \frac{R}{r \sin \frac{s}{r}}$. In einem System

rechtwinklig-ebener Koordinaten x und y ist $R^2 = x^2 + y^2$. Wir erhalten also die bekannte Formel für das Vergrößerungsverhältnis bei der stereographischen Projektion

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4r^2}. \quad (91)$$

Für $s = s_0$ folgt aus Gleichung (90) und der letzten Gleichung (88a) durch Grenzübergang $m = 1$. Der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels ist also zugleich Normalpunkt der Abbildung.

Liegt der Normalpunkt im Pol, so wird

$$m = \frac{R}{r \cos \varphi} \quad (89a)$$

c) Die verallgemeinerte Mercatorabbildung

Setzen wir in Gleichung (88) $\frac{s_0}{r} = \frac{\pi}{2}$ und $s = s_0 + \Delta s$, so erhalten wir Ausdrücke, die der Mercatorabbildung der Kugel (mit beliebigem Größtkreis als Äquator) entsprechen. Es wird

$$m_0 = r; \quad n = (m')_0 = 0; \quad R_0 = \infty; \quad m = 0 \cdot \infty = \frac{1}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\cos \frac{\Delta s}{r}}. \quad (88b)$$

Bei der Ermittlung des Vergrößerungsverhältnisses versagen die Gleichungen (83) und (86). Wir benutzen statt ihrer die Gleichung (82) und setzen zugleich $R = R_0 + \Delta R$. Es wird dann

$$m = \frac{m_0 R}{R_0 m} = \frac{m_0 R_0 + \Delta R}{R_0 m} = \frac{m_0}{m} = \frac{r}{r \sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\sin \frac{s}{r}} = \frac{1}{\cos \frac{\Delta s}{r}}.$$

Für $s = s_0$ wird $m = 1$.

Wir können den Ausdruck in Gleichung (88b) für das Vergrößerungsverhältnis noch in einer anderen Form schreiben, wenn wir auch die reduzierte Länge der geodätischen Linie vom Endpunkte der Strecke s_0 aus messen, d. h. wenn wir m als Funktion von Δs ansehen. Wir wollen in diesem Fall $m_{\Delta s}$, statt m schreiben. Es ist $m_{\Delta s} = r \sin \frac{\Delta s}{r}$. Die Ableitung dieser reduzierten

Länge nach der Bogenlänge bezeichnen wir mit n . Es ist $n = \frac{d m_{\Delta s}}{d s} = \cos \frac{\Delta s}{r}$, also ist

$$m = \frac{1}{n}. \quad (88c)$$

Die Gleichung (88c) bestätigt, daß die verallgemeinerte Mercatorabbildung der Kugel und die querachsige Abbildung identisch sind. Denn bei der querachsigen Abbildung des Ellipsoids gilt nach Großmann ([16] S. 487 Gleichung (14)) für das Vergrößerungsverhältnis auf der Ordinatenachse eines Systems geodätischer Parallelkoordinaten $m_0 = \frac{1}{n_0}$, wenn Abszissenachse das geradlinige und längentreue Abbild einer geodätischen Linie ist, welche senkrecht auf der von uns betrachteten geodätischen Linie steht. Auch in unserem Fall $\frac{s_0}{r} = \frac{\pi}{2}$ haben wir es mit einem System geodätischer Parallelkoordinaten zu tun, nämlich dem Größtkreis, der die betrachtete geodätische Linie des Büschels senkrecht schneidet, als der einen Achse und der geodätischen Linie selbst als der anderen Achse. Es ist also auch der Ausdruck „querachsige“ hier allgemein aufzufassen, d. h. ohne Beschränkung auf den Meridian als Hauptachse.

Liegt der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels im Pol, so erhalten wir

$$m = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad (89b)$$

das bekannte Vergrößerungsverhältnis bei der eigentlichen Mercatorabbildung (Seekarte).

3. Die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids

a) Die Abbildungsgleichung für das geradlinige Abbild einer geodätischen Linie

Wir betrachten eine Linie des geodätischen Strahlenbüschels auf dem Erdellipsoid. Bei der konformen Abbildung auf die Ebene soll ihr Abbild geradlinig sein und x -Achse eines Systems rechtwinklig-ebener Koordinaten x und y werden. Für das Vergrößerungsverhältnis auf der x -Achse gelte die Grundgleichung (82) der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung. Aus ihr ist x als Funktion der Bogenlänge s der betrachteten geodätischen Linie zu bestimmen. Wir rechnen x von dem Punkt ab, in welchem das Vergrößerungsverhältnis $m_0 = 1$ ist, d. h. vom Endpunkte der Strecke R_0 ab. Dementsprechend messen wir die Bogenlänge von dem Endpunkte der geodätischen Linie mit der Länge s_0 ab. Wir setzen also

$$s = s_0 + \Delta s \quad R = R_0 + x. \quad (92)$$

Für $\Delta s = 0$ wird auch $x = 0$. Wir erhalten x als Funktion von Δs mittels der Taylorschen Reihe:

$$x = f'(s_0) \Delta s + \frac{1}{2} f''(s_0) \Delta s^2 + \frac{1}{6} f'''(s_0) \Delta s^3 + \frac{1}{24} f^{IV}(s_0) \Delta s^4 + \frac{1}{120} f^V(s_0) \Delta s^5 + \dots \quad (93)$$

Es ist $f'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{dR}{ds}$, also nach Gleichung (82) $f'(s) = m_0 = \frac{m_0 R}{R_0 m}$.

Zum Zeichen dafür, daß R_0 der geodätische Krümmungsradius der orthogonalen Trajektorie der geodätischen Linie an der Stelle s_0 ist, wollen wir für R_0 von jetzt ab ϱ schreiben; außerdem schreiben wir μ statt m_0 . Es wird also

$$f'(s) = \frac{\mu}{\varrho} \frac{R}{m} \quad \text{mit} \quad R = \varrho + x \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{\mu}{(m')_0}. \quad (94)$$

μ und ϱ sind für eine bestimmte Abbildung konstant. Aus Gleichung (94) für $f'(s)$ bilden wir — unter Beachtung von Gleichung (84) — die höheren Ableitungen. Zur Abkürzung schreiben wir f' statt $f'(s)$, f'' statt $f''(s)$, f''' statt $f'''(s)$ usw. Es wird

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{1}{m} (\varrho + x) \\ f'' &= \frac{\mu}{\varrho} \frac{1}{m^2} [f' m - m' (\varrho + x)] = \frac{\mu}{\varrho} \left[\frac{1}{m} f' - \frac{m'}{m^2} (\varrho + x) \right] \\ f''' &= \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \frac{1}{m^2} (f'' m - m' f') - \frac{1}{m^4} [m^2 (m'' (\varrho + x) + m' f') - 2 m m'^2 (\varrho + x)] \right\} \\ &= \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \frac{1}{m^2} f'' - \frac{m'}{m^3} f' - \frac{m''}{m^2} (\varrho + x) - \frac{m'}{m^2} f' + 2 \frac{m'^2}{m^3} (\varrho + x) \right\} \\ &= \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \frac{1}{m^2} f'' - 2 \frac{m'}{m^3} f' - \frac{m''}{m^2} (\varrho + x) + 2 \frac{m'^2}{m^3} (\varrho + x) \right\}. \quad \text{Entsprechend wird} \\ f^{IV} &= \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \frac{1}{m^3} f''' - 3 \frac{m'}{m^2} f'' - 3 \frac{m''}{m^2} f' + 6 \frac{m'^2}{m^3} f' - 6 \frac{m'^3}{m^4} (\varrho + x) \right. \\ &\quad \left. + 6 \frac{m' m''}{m^3} (\varrho + x) - \frac{m'''}{m^2} (\varrho + x) \right\} \\ f^V &= \frac{\mu}{\varrho} \left\{ \frac{1}{m^4} f^{IV} - 4 \frac{m'}{m^2} f''' - 6 \frac{m''}{m^2} f'' + 12 \frac{m'^2}{m^3} f'' - 4 \frac{m'''}{m^2} f' \right. \\ &\quad \left. + 24 \frac{m' m''}{m^3} f' - 24 \frac{m'^3}{m^4} f' - 36 \frac{m'^2 m''}{m^4} (\varrho + x) + 24 \frac{m'^4}{m^5} (\varrho + x) \right. \\ &\quad \left. + 8 \frac{m' m'''}{m^3} (\varrho + x) + 6 \frac{m''^2}{m^3} (\varrho + x) - \frac{m^{IV}}{m^2} (\varrho + x) \right\}. \end{aligned} \quad (95)$$

An der Stelle $s = s_0$ wird $x = 0$, $m = m_0 = \mu$; $\frac{m}{m'} = \varrho$ usw. und damit unter

Beachtung von $\frac{\mu}{\varrho} = (m')_0$

$$\begin{aligned} f'(s_0) &= \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{\mu} = 1 \\ f''(s_0) &= \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{1}{\mu} - \frac{\mu}{\varrho} \frac{(m')_0}{\mu^2} \cdot \varrho = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} = 0 \quad \text{und entsprechend} \\ f'''(s_0) &= -\frac{(m'')_0}{m_0} \\ f^{IV}(s_0) &= 2 \frac{(m')_0 (m'')_0}{m_0^2} - \frac{(m''')_0}{m_0} \\ f^V(s_0) &= -6 \frac{(m')_0^2 (m'')_0}{m_0^3} + 3 \frac{(m')_0 (m''')_0}{m_0^2} + 6 \frac{(m'')_0^2}{m_0^2} - \frac{(m^{IV})_0}{m_0}. \end{aligned} \quad (96)$$

Zur Kontrolle sollen die Gleichungen (96) noch auf einem Wege hergeleitet werden, der dem entspricht, den Jordan bei der Ableitung der sphärischen

konformen Kegelprojektion ([8] S. 532) und in ([6] S. 10) bei der Ableitung der Formeln für die mecklenburgische Landesvermessung eingeschlagen hat.

Wir setzen $\frac{R}{R_0} = \frac{F}{F_0}$; d. h. es ist $dR = \frac{R_0}{F_0} dF$.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (83) wird

$$\frac{dR}{ds} = \frac{R_0}{F_0} \frac{dF}{ds} = n \cdot \frac{R}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{ds} = n \frac{F_0 R}{R_0 m} = n F \frac{1}{m}. \quad (97)$$

Setzen wir $1/m = F_1$, so wird $\frac{dF}{ds} = n F F_1$.

Hierin ist n konstant. Wir entwickeln R/R_0 in eine Taylor'sche Reihe nach Potenzen von Δs . Da für $R = R_0$ auch $F = F_0$ sein muß, hat sie die Form:

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= 1 + \frac{1}{F_0} \frac{dF}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{1}{F_0} \frac{d^2 F}{ds^2} \Delta s^2 + \frac{1}{6} \frac{1}{F_0} \frac{d^3 F}{ds^3} \Delta s^3 + \frac{1}{24} \frac{1}{F_0} \frac{d^4 F}{ds^4} \Delta s^4 \\ &\quad + \frac{1}{120} \frac{1}{F_0} \frac{d^5 F}{ds^5} \Delta s^5 + \dots \end{aligned} \quad (98)$$

Die Ableitungen dF/ds usw. sind an der Stelle $s = s_0$ zu nehmen. Deutet das Zeichen ' wieder die Ableitung nach s an, so wird

$$\begin{aligned} F' &= n F F_1 \\ F'' &= n F (n F_1^2 + F_1') \\ F''' &= n F (n^2 F_1^3 + 3 n F_1 F_1' + F_1'') \\ F^{IV} &= n F (n^3 F_1^4 + 6 n^2 F_1^2 F_1' + 3 n F_1 F_1'^2 + 4 n F_1 F_1'' + F_1''') \\ F^V &= n F (n^4 F_1^5 + 10 n^3 F_1^3 F_1' + 15 n^2 F_1 F_1'^2 + 10 n^2 F_1^2 F_1'' \\ &\quad + 5 n F_1 F_1''' + 10 n F_1' F_1'' + F_1^{IV}). \end{aligned} \quad (99)$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{m} \\ F_1' &= -\frac{m'}{m^2} \\ F_1'' &= -\frac{m''}{m^2} + 2 \frac{m'^2}{m^3} \\ F_1''' &= -\frac{m'''}{m^2} + 6 \frac{m' m''}{m^3} - 6 \frac{m'^3}{m^4} \\ F_1^{IV} &= -\frac{m^{IV}}{m^2} + 8 \frac{m' m'''}{m^3} + 6 \frac{m''^2}{m^3} - 36 \frac{m'^2 m''}{m^4} + 24 \frac{m'^4}{m^5} \end{aligned} \quad (100)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} F' &= n F \frac{1}{m} \\ F'' &= n F \left(\frac{n}{m^2} - \frac{m'}{m^2} \right) \\ F''' &= n F \left(\frac{n^2}{m^3} - 3 n \frac{m'}{m^3} + 2 \frac{m'^2}{m^3} - \frac{m''}{m^2} \right) \\ F^{IV} &= n F \left(\frac{n^3}{m^4} - 6 n^2 \frac{m'}{m^4} + 11 n \frac{m'^2}{m^4} - 4 n \frac{m''}{m^3} - \frac{m'''}{m^2} + 6 \frac{m' m''}{m^3} - 6 \frac{m'^3}{m^4} \right) \\ F^V &= n F \left(\frac{n^4}{m^5} - 10 n^3 \frac{m'}{m^5} + 35 n^2 \frac{m'^2}{m^5} - 10 n^2 \frac{m''}{m^4} - 5 n \frac{m'''}{m^3} + 40 n \frac{m' m''}{m^4} \right. \\ &\quad \left. - 50 n \frac{m'^3}{m^5} - \frac{m^{IV}}{m^2} + 8 \frac{m' m'''}{m^3} + 6 \frac{m''^2}{m^3} - 36 \frac{m'^2 m''}{m^4} + 24 \frac{m'^4}{m^5} \right). \end{aligned} \quad (101)$$

Bilden wir die Ableitungen (99) und (100) an der Stelle s_0 , so wird $F = F_0$, und wir erhalten wegen $\frac{R}{R_0} = \frac{R_0 + x}{R_0} = 1 + \frac{x}{R_0}$ und $n = \frac{\mu}{\rho} = (m')_0$ durch Vergleich mit Gleichung (98)

$$x = \Delta s + a_2 \Delta s^2 + a_3 \Delta s^3 + a_4 \Delta s^4 + a_5 \Delta s^5 + \dots \quad \text{mit} \quad (102)$$

$$a_1 = 1$$

$$2a_2 = n \frac{n - (m')_0}{m_0^2} = 0$$

$$6a_3 = -R_0 \frac{(m')_0 (m'')_0}{m_0^2} = -\frac{(m'')_0}{m_0}$$

$$24a_4 = R_0 \left[2 \frac{(m')_0^2 (m''')_0}{m_0^3} - \frac{(m')_0 (m'')_0 (m''')_0}{m_0^2} \right] = 2 \frac{(m')_0 (m'')_0}{m_0^2} - \frac{(m''')_0}{m_0} \quad (96a)$$

$$120a_5 = R_0 \left[-6 \frac{(m')_0^3 (m''')_0}{m_0^4} + 3 \frac{(m')_0^2 (m'')_0 (m''')_0}{m_0^3} - \frac{(m')_0 (m'')_0 (m''')_0}{m_0^2} + 6 \frac{(m')_0 (m'')_0 (m''')_0^2}{m_0^3} \right] \\ = -6 \frac{(m')_0^2 (m'')_0}{m_0^3} + 3 \frac{(m')_0 (m'')_0 (m''')_0}{m_0^2} + 6 \frac{(m'')_0^2}{m_0^2} - \frac{(m''')_0}{m_0}$$

Die Vergleichung der Reihen Gleichungen (93) und (102) zeigt Übereinstimmung entsprechender Gleichungen in Gleichungen (96) und (96a). Wir betrachten noch die Vorzahl a_3 des Gliedes dritter Ordnung. Sie ist gleich $1/6$ des Gauß'schen Krümmungsmaßes K der Fläche an der Stelle s_0 (vgl. Jordan-Eggert Bd. III [8] S. 412 Gleichung 16). Hieraus folgt, daß noch das Glied dritter Ordnung in der Abbildungsgleichung (102) unabhängig von der Bogenlänge s_0 ist; es ist nur abhängig von der Stelle s_0 , d. h. von der Lage des Normalpunktes der Abbildung.

b) Berechnung der Ableitungen in Gleichungen (96) bzw. (96a)

Für die reduzierte Länge m der geodätischen Linie in Abhängigkeit von der Bogenlänge s besteht die Reihenentwicklung (Großmann [15] S. 419 Gleichung (63))

$$m = s - \frac{s^3}{6N^2} (1 + \eta^2) + \frac{s^4}{3N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \quad (103) \\ + \frac{s^5}{120N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) - \frac{11s^6}{90N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1s^7}{5040N^6} + \dots$$

Alle Konstanten sind für die geographische Breite des Ausgangspunktes C der geodätischen Linie zu berechnen. α ist das Azimut der geodätischen Linie im Ausgangspunkt.

Für die Ableitungen von m nach s ergibt sich

$$m' = 1 - \frac{1}{2} \frac{s^2}{N^2} (1 + \eta^2) + \frac{4}{3} \frac{s^3}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \\ + \frac{1}{24} \frac{s^4}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) - \frac{11}{15} \frac{s^5}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{720} \frac{s^6}{N^6} + \dots$$

$$m'' = -\frac{s}{N^2} (1 + \eta^2) + 4 \frac{s^2}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \quad (104) \\ + \frac{1}{6} \frac{s^3}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) - \frac{11}{3} \frac{s^4}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{120} \frac{s^5}{N^6} + \dots$$

$$m''' = -\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 8 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \\ + \frac{1}{2} \frac{s^2}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) - \frac{44}{3} \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{24} \frac{s^4}{N^6} + \dots$$

$$m^{IV} = +8 \frac{1}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \\ + \frac{s}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) - 44 \frac{s^2}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{6} \frac{s^3}{N^6} + \dots \quad (104)$$

Ferner wird

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{s} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{s^2}{N^2} (1 + \eta^2) - \frac{1}{3} \frac{s^3}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{360} \frac{s^4}{N^4} (7 + 14\eta^2 - 36\eta^2 \cos^2 \alpha + 36\eta^2 t^2) + \frac{1}{90} \frac{s^5}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \frac{31}{15120} \frac{s^6}{N^6} \right]$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{s^2}{N^2} (1 + \eta^2) + \frac{s^3}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{45} \frac{s^4}{N^4} (1 + 2\eta^2 - 18\eta^2 \cos^2 \alpha + 18\eta^2 t^2) - \frac{1}{3} \frac{s^5}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{2}{945} \frac{s^6}{N^6} \right]$$

$$R_0 = \rho = s + \frac{1}{3} \frac{s^3}{N^2} (1 + \eta^2) - \frac{s^4}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \\ + \frac{1}{45} \frac{s^5}{N^4} (6 + 12\eta^2 - 18\eta^2 \cos^2 \alpha + 18\eta^2 t^2) - \frac{1}{3} \frac{s^6}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \frac{51}{945} \frac{s^7}{N^6}$$

$$\frac{m''}{m} = -\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 4 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \quad (105) \\ + 2 \frac{s^2}{N^4} (\eta^2 \cos^2 \alpha - \eta^2 t^2) - \frac{8}{3} \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \text{Gl. mit } \eta^4 \frac{s^4}{N^6}$$

$$\frac{m'''}{m} = \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 8 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 18\eta^2 \cos^2 \alpha - 18\eta^2 t^2) - 13 \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \frac{1}{45} \frac{s^4}{N^6} \right]$$

$$\frac{m^{IV}}{m} = \frac{1}{s} \left[8 \frac{1}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) + \frac{s}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 12\eta^2 \cos^2 \alpha - 12\eta^2 t^2) \right. \\ \left. - \frac{128}{3} \frac{s^2}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \text{Gl. mit } \eta^4 \cdot \frac{s^3}{N^6} \right]$$

$$\frac{m'}{m} \frac{m''}{m} = \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 4 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N^4} (1 + 2\eta^2 + 6\eta^2 \cos^2 \alpha - 6\eta^2 t^2) - 5 \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha + \frac{1}{45} \frac{s^4}{N^6} \right]$$

$$\left(\frac{m'}{m} \right)^2 \frac{m''}{m} = \frac{1}{s^2} \left[-\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 4 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N^4} (2 + 4\eta^2 + 6\eta^2 \cos^2 \alpha - 6\eta^2 t^2) - \frac{22}{3} \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{15} \frac{s^4}{N^6} \right]$$

$$\frac{m'}{m} \frac{m'''}{m} = \frac{1}{s^2} \left[-\frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) + 8 \frac{s}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N^4} (2 + 4\eta^2 + 18\eta^2 \cos^2 \alpha - 18\eta^2 t^2) - \frac{50}{3} \frac{s^3}{N^5} \eta^2 t \cos \alpha - \frac{1}{15} \frac{s^4}{N^6} \right] \quad (106)$$

$$\left(\frac{m''}{m} \right)^2 = \frac{1}{N^4} (1 + 2\eta^2) - 8 \frac{s}{N^6} \eta^2 t \cos \alpha.$$

Mit den Gleichungen (105) und (106) ergibt sich für die Ableitungen Gleichungen (96) bzw. (96a)

$$\begin{aligned} f'(s_0) &= 1 \\ 2 a_2 = f''(s_0) &= 0 \\ 6 a_3 = f'''(s_0) &= \frac{1}{N_c^2} (1 + \eta_c^2) - 4 \frac{s_0}{N_c^3} \eta_c^2 t_c \cos a_{c \cdot 0} (1 + \eta_c^2) \\ &\quad - 2 \frac{s_0^2}{N_c^4} (\eta_c^2 \cos^2 a_{c \cdot 0} - \eta_c^2 t_c^2) + \frac{8}{3} \frac{s_0^3}{N_c^5} \eta_c^2 t_c \cos a_{c \cdot 0} \\ 24 a_4 = f^{IV}(s_0) &= \frac{1}{s_0} \left[-\frac{1}{N_c^2} (1 + \eta_c^2) + \frac{1}{3} \frac{s_0^2}{N_c^4} (1 + 2\eta_c^2 - 6\eta_c^2 \cos^2 a_{c \cdot 0} + 6\eta_c^2 t_c^2) \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{s_0^3}{N_c^5} \eta_c^2 t_c \cos a_{c \cdot 0} + \frac{1}{45} \frac{s_0^4}{N_c^6} \right] \quad (96b) \\ 120 a_5 = f^V(s_0) &= 3 \frac{1}{s_0^2 N_c^2} (1 + \eta_c^2) - 8 \frac{1}{s_0 N_c^3} \eta_c^2 t_c \cos a_{c \cdot 0} (1 + \eta_c^2) \\ &\quad + \frac{1}{N_c^4} (3 + 6\eta_c^2 - 6\eta_c^2 \cos^2 a_{c \cdot 0} + 6\eta_c^2 t_c^2) \\ &\quad - \frac{34}{3} \frac{s_0}{N_c^5} \eta_c^2 t_c \cos a_{c \cdot 0} + \frac{1}{5} \frac{s_0^2}{N_c^6}. \end{aligned}$$

Diese Vorzahlen a_i müssen später zur Berechnung der Vorzahlen c_i gemäß Gleichungen (21a) mit den Vorzahlen b_i (Gleichungen 10) verbunden werden, bei denen die Konstanten für den Ausgangspunkt der Strecke Δs in Gleichung (19) gelten, der die Gleichung (102) entspricht, d. h. für den Normalpunkt 0 der Abbildung. Auch die Konstanten in den Grundformeln (30*), (31*), (37*), (38*) und (48*) gelten für den Normalpunkt. Es ist daher zweckmäßig, auch in den Ableitungen (96b) die Konstanten von dem Punkt C auf den Punkt 0 umzurechnen.

Ist die betrachtete geodätische Linie ein Meridian — und auf diesen Fall wollen wir uns jetzt beschränken —, so können wir zu diesem Zweck in die Gleichungen (96b) die Gleichungen (14) bis (18) einsetzen. In diesen Gleichungen ist für die folgende Anwendung der Index ' durch den Index c zu ersetzen und den indexfreien Werten ist der Index 0 beizufügen. Es muß in ihnen also z. B. heißen $1/N_c^2$ statt $1/N^2$ und $1/N_0^2$ statt $1/N^2$. Statt $\cos a$ wollen wir ausführlich schreiben: $\cos a_{c \cdot 0}$ bzw. $\cos a_{0 \cdot c}$.

Führen wir die Umrechnung durch und beachten wir, daß auf dem Meridian $\cos a_{c \cdot 0} = -\cos a_{0 \cdot c}$, $\cos^2 a = \cos^2 a = +1$, $\cos a = \cos^3 a = \cos^5 a$ (bei gleichem Index von a) und $\cos a_{0 \cdot c} \cdot \cos a_{c \cdot 0} = -1$ ist, so ergibt sich für den Meridian

$$\begin{aligned} f'(s_0) &= 1 \\ 2 a_2 = f''(s_0) &= 0 \\ 6 a_3 = f'''(s_0) &= \frac{1}{N_0^2} (1 + \eta_0^2) \\ 24 a_4 = f^{IV}(s_0) &= -\frac{1}{N_0^3} \left[(1 + \eta_0^2) \frac{N_0}{s_0} - 4 \eta_0^2 t_0 (1 + \eta_0^2) \cos a_{0 \cdot c} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (1 + 2\eta_0^2) \frac{s_0}{N_0} + \frac{1}{3} \eta_0^2 t_0 \frac{s_0^2}{N_0^2} \cos a_{0 \cdot c} - \frac{1}{45} \frac{s_0^3}{N_0^3} \right] \quad (107) \\ 120 a_5 = f^V(s_0) &= \frac{1}{N_0^4} \left[3 (1 + \eta_0^2) \frac{N_0^2}{s_0^2} - 4 \eta_0^2 t_0 (1 + \eta_0^2) \frac{N_0}{s_0} \cos a_{0 \cdot c} \right. \\ &\quad \left. + (3 + 2\eta_0^2 + 4\eta_0^2 t_0^2) + \frac{10}{3} \eta_0^2 t_0 \frac{s_0}{N_0} \cos a_{0 \cdot c} + \frac{1}{5} \frac{s_0^2}{N_0^2} \right]. \end{aligned}$$

Es tritt hierbei offen zutage, daß $f'''(s_0)$ nur von der Stelle s_0 , nicht aber von der Größe von s_0 abhängig ist.

Wir wollen jetzt die Meridianbogenlänge s_0 durch den Breitenunterschied $\Delta \varphi_0 = \varphi_c - \varphi_0$ ersetzen und benutzen dazu die Gleichungen (7). Beachten wir, daß $u = \frac{s_0}{N_0} \cos a_{0 \cdot c}$ und $\beta = \frac{\Delta \varphi_0}{V_0^2}$ zu setzen ist, und berücksichtigen wir wiederum, daß $\cos a_{0 \cdot c}$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist, woraus z. B. $\frac{1}{\cos a_{0 \cdot c}} = \cos a_{0 \cdot c}$ folgt, so wird aus den Gleichungen (107)

$$\begin{aligned} \text{für den Meridian} \quad \Delta \varphi_0 &= \varphi_c - \varphi_0 \\ f'(s_0) &= 1 \\ 2 a_2 = f''(s_0) &= 0 \\ 6 a_3 = f'''(s_0) &= \frac{1}{N_0^2} (1 + \eta_0^2) \\ 24 a_4 = f^{IV}(s_0) &= -\frac{\cos a_{0 \cdot c}}{N_0^3} \left[\frac{V_0^4}{\Delta \varphi_0} - \frac{11}{2} \eta_0^2 t_0 V_0^2 - \frac{1}{6} (2 + 5\eta_0^2 - 3\eta_0^2 t_0^2) \Delta \varphi_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \eta_0^2 t_0 \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \\ 120 a_5 = f^V(s_0) &= \frac{1}{N_0^4} \left[3 \frac{V_0^6}{\Delta \varphi_0^2} - 13 \eta_0^2 t_0 \frac{V_0^4}{\Delta \varphi_0} + 3 - \eta_0^2 + 7 \eta_0^2 t_0^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{3} \eta_0^2 t_0 \Delta \varphi_0 + \frac{1}{5} \Delta \varphi_0^2 \right]. \end{aligned} \quad (107a)$$

Ähnliche Ausdrücke erhält man, wenn die betrachtete geodätische Linie, die als x -Achse in der Ebene abgebildet wird, nicht das Azimut 0° oder 180° , sondern das Azimut 90° oder 270° hat. Für ein beliebiges Azimut dagegen dürften die entsprechenden Ausdrücke ziemlich umständlich werden. Wir wollen uns hier auf den behandelten Fall, in welchem die geodätische Linie mit dem Meridian zusammenfällt, beschränken.

c) Zwischenbetrachtung

In Abschnitt IV. 2. a) ist nachgewiesen worden, daß das Vergrößerungsverhältnis Gleichung (86) $m_0 = (m')_0 R/m$ der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung dem Vergrößerungsverhältnis bei der üblichen konformen Lambertabbildung der Kugel genau gleich ist. Es müssen bei der Kugel also auch die Abbildungen identisch sein. Für die entsprechende konforme Lambertabbildung des Ellipsoids, die nur für den Fall der längentreuen Abbildung eines Breitenkreises bekannt ist, ist dieser Nachweis damit noch nicht geführt. Er soll jetzt erbracht werden. Nach Gleichung (103) ist für den Pol als Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels, also mit $\eta^2 = 0$ und $\eta^2 t^2 = e'^2$, bis einschließlich der Glieder 5. Ordnung, bei denen e'^2 noch mitgenommen wird,

$$m = s - \frac{1}{6} \frac{s^3}{N_c^2} + \frac{1}{120} (1 - 12e'^2) \frac{s^5}{N_c^4}. \quad (108)$$

Nach Gleichungen (7) wird hierin

$$\begin{aligned} s &= N_c \frac{1}{\cos a_{c \cdot 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} e'^2 \beta^3 + \frac{1}{10} e'^2 \beta^5 \right) \\ - \frac{1}{6} \frac{s^3}{N_c^2} &= N_c \frac{1}{\cos a_{c \cdot 0}} \left(-\frac{1}{6} \beta^3 + \frac{3}{12} e'^2 \beta^5 \right) \quad (108a) \\ + \frac{1}{120} (1 - 12e'^2) \frac{s^5}{N_c^4} &= N_c \frac{1}{\cos a_{c \cdot 0}} \left(\quad + \frac{1}{120} \beta^5 - \frac{1}{10} e'^2 \beta^5 \right) \text{ d. h. es wird} \\ m &= N_c \cos a_{c \cdot 0} \left[\beta - \frac{1}{6} (1 + 3e'^2) \beta^3 + \frac{1}{120} (1 + 30e'^2) \beta^5 \right]. \end{aligned}$$

Hierin ist $\beta = \Delta \varphi = \varphi - \varphi_c = \varphi - \frac{\pi}{2}$ und $\cos a_{c \cdot 0} = \cos \pi = -1$. N_c ersetzen wir mit Hilfe der ersten Gleichung (14) durch N für die Breite φ :

$$N_c = N \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \Delta \varphi^2 - \frac{1}{6} e'^2 \Delta \varphi^4 \right). \quad (109)$$

Hiermit wird

$$m = -N \left(\Delta \varphi - \frac{1}{6} \Delta \varphi^3 + \frac{1}{120} \Delta \varphi^5 - \dots \right) = -N \sin \Delta \varphi = +N \cos \varphi. \quad (108b)$$

In derselben Weise ergibt sich aus der dritten Gleichung (105) für ϱ :

$$\varrho = N \operatorname{ctg} \varphi$$

und damit

$$m' = \frac{m}{\varrho} = \sin \varphi. \quad (110)$$

Wir erhalten also für das Vergrößerungsverhältnis

$$m_0 = (m')_0 \frac{R}{m} = \frac{R}{N \cos \varphi} \sin \varphi_0 \quad (111)$$

bis zu der mitgeführten Ordnung in Übereinstimmung mit dem entsprechenden Ausdruck bei der bekannten konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids.

Wir wollen noch feststellen, ob man dieses Vergrößerungsverhältnis auch durch eine „Doppelprojektion“ erhalten kann. Wir wollen also vom Ellipsoid zuerst auf eine Kugel und dann von der Kugel auf die Ebene übergehen, und zwar derart, daß den Meridianen und Breitenkreisen des Ellipsoids die Meridiane und Breitenkreise der Kugel entsprechen. Ist A der Kugelradius und u die geographische Breite auf der Kugel, so gilt in dem angegebenen Fall nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 572 Gleichung (9)) das Vergrößerungsverhältnis

$$m_1 = a \frac{A \cos u}{N \cos \varphi}$$

Für den Übergang von der Kugel zur Ebene soll entsprechend Gleichung (89) das Vergrößerungsverhältnis

$$m_2 = \frac{R}{A \cos u} \sin u_0$$

gelten. Für das Verhältnis der Linienelemente in der Ebene zu denen auf dem Ellipsoid gilt dann

$$m_0 = m_1 m_2 = a \frac{A \cos u}{N \cos \varphi} \frac{R}{A \cos u} \sin u_0 = a \frac{R}{N \cos \varphi} \sin u_0.$$

Soll dieser Ausdruck, wie gewünscht, mit Gleichung (111) übereinstimmen, so muß $a = \frac{\sin \varphi_0}{\sin u_0}$ sein. Für den Normalpunkt muß ferner $m_0 = 1$ sein und außerdem $R = R_0 = A \operatorname{ctg} u_0$; d. h. es wird

$$m_0 = 1 = \frac{\sin \varphi_0 A \cos u_0}{\sin u_0 N_0 \cos \varphi_0} \quad \text{oder} \quad A = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 \operatorname{tg} u_0.$$

Wenn diese Gleichung auch für $\varphi_0 = 0$ und für $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ einen Sinn haben soll, so muß

$$u_0 = \varphi_0 \quad \text{und damit} \quad A = N_0 \quad \text{und} \quad a = 1 \quad (112)$$

Wir sehen also, daß die übliche konforme Lambertabbildung des Ellipsoids als eine Doppelprojektion aufgefaßt werden kann, bei der das Ellipsoid zunächst auf eine Kugel abgebildet wird, deren Radius gleich dem Querkrümmungsradius des Ellipsoids im Normalpunkt ist und deren Normalbreitenkreis dieselbe Breite hat wie der Normalbreitenkreis des Ellipsoids. Darauf folgt dann die konforme Lambertabbildung der Kugel auf die Ebene. Zu diesem Ergebnis ist bereits G. Lehmann auf einem anderen Wege gelangt ([22] S. 337).

d) Berechnung der Vorzahlen c_i und e_i für den Fall der geradlinigen Abbildung eines Meridians

Durch Anwendung der Formeln (21a) auf die Vorzahlen a_i in Gleichungen (107a) und b_i in Gleichungen (10) erhalten wir die Vorzahlen c_i für die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung. Nach Gleichung (93) ist x in derselben Richtung positiv zu messen wie Δs . Δs wiederum wird positiv gemessen in Richtung der vom Scheitel C zum Normalpunkt 0 gehenden geodätischen Linie, d. h. in Richtung $c \cdot o$. Diese Richtung ist also gleich der positiven x -Richtung, die wir entsprechend der Erläuterung zu Gleichung (20) mit $a_{0 \cdot x}$ bezeichnen. Für den Meridian ist

$$\cos a_{0 \cdot x} = \cos a_{c \cdot 0} = -\cos a_{0 \cdot c} \quad \Delta \varphi_0 = \varphi_c - \varphi_0. \quad (113)$$

Bei Beachtung dieser Tatsache erhalten wir mit Weglassung des Index 0 bei N , η , t und φ

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{N}{\cos a_{0 \cdot x}} \cos \varphi \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \frac{N}{\cos a_{0 \cdot x}} t \cos^2 \varphi \\ c_3 &= \frac{1}{6} \frac{N}{\cos a_{0 \cdot x}} t^2 \cos^3 \varphi \\ c_4 &= \frac{1}{24} \frac{N}{\cos a_{0 \cdot x}} \cos^4 \varphi \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - \frac{1}{2} t (2 + 2t^2 + 5\eta^2 + 3\eta^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} (2 + 5\eta^2 - 3\eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \\ c_5 &= \frac{1}{120} \frac{N \cos^5 \varphi}{\cos a_{0 \cdot x}} \left[3 \frac{V^6}{\Delta \varphi_0^2} - (10 + 13\eta^2) t \frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - 2 + 7t^2 + t^4 - 7\eta^2 + 29\eta^2 t^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} t (10 + 44\eta^2 - 15\eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{5} \Delta \varphi_0^2 + \frac{2}{9} t \Delta \varphi_0^3 \right]. \end{aligned} \quad (114)$$

Aus den Werten c_i erhalten wir mit Hilfe der Formeln (23) und (25) die Vorzahlen e_i :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N \cos \varphi} \\ e_2 &= \frac{1}{2} \frac{t}{N^2 \cos \varphi} \\ e_3 &= \frac{1}{3} \frac{t^2 \cos a_{0 \cdot x}}{N^3 \cos \varphi} \\ e_4 &= -\frac{1}{24} \frac{1}{N^4 \cos \varphi} \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - \frac{1}{2} t (2 + 12t^2 + 5\eta^2 + 3\eta^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} (2 + 5\eta^2 - 3\eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \end{aligned} \quad (115)$$

$$e_3 = -\frac{1}{120} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^5 \cos \varphi} \left[3 \frac{V^6}{\Delta \varphi_0^2} + (5 - 13 \eta^2) t \frac{V^4}{\Delta \varphi_0} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (4 + 16 t^2 + 48 t^4 + 14 \eta^2 + 17 \eta^2 t^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (10 - 13 \eta^2 - 15 \eta^2 t^2) t \Delta \varphi_0 + \frac{1}{5} \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{9} t \Delta \varphi_0^3 \right]. \quad (115)$$

e) Die Übertragungsformeln und das Vergrößerungsverhältnis

Durch Einsetzen der Gleichungen (107a) in die Gleichungen (30*), (31*), (37*), (38*), (46*) und (48*) und — zur Kontrolle — der Gleichungen (114) und (115) in die Gleichungen (30), (31), (37), (38), (46) und (48) erhält man

$$\frac{x}{N} \cos a_{0 \cdot x} = (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi + \frac{3}{2} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t l^2 \\ + \frac{1}{6} (1 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2 - 3 \eta^4 + 21 \eta^4 t^2) \Delta \varphi^3 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l^2 \\ - \frac{1}{24} \left\{ -\frac{1}{2} \eta^2 t - \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - 4 \eta^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{6} (2 - 3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \Delta \varphi^4 \\ + \frac{1}{8} \cos^2 \varphi \left\{ 2 t - 6 \eta^2 t^3 + \eta^2 t - 2 \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - 2 \eta^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{6} (2 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \Delta \varphi^2 l^2 \\ + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - t - t^3 - \frac{5}{2} \eta^2 t \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (2 + 5 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] l^4 \\ + \frac{1}{120} (5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^5 \\ - \frac{1}{12} \cos^2 \varphi (5 t^2 - 7 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^3 l^2 \\ + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0 - 10 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + 7 t^2 + t^4) \Delta \varphi l^4 \quad (116)$$

$$\frac{y}{N} \cos a_{0 \cdot x} = \cos \varphi l - \sin \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l \\ - \frac{1}{6} t^2 \cos^3 \varphi l^3 - \frac{3}{2} \cos \varphi \eta^2 t^2 (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 l \\ - \frac{1}{6} \cos \varphi \left\{ 2 t + \frac{1}{2} \eta^2 t - 3 \eta^2 t^3 - \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - 3 \eta^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{6} (2 - \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \Delta \varphi^3 l \\ - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - \eta^2) - t - t^3 - \frac{3}{2} \eta^2 t + \eta^2 t^3 \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (2 + 5 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \Delta \varphi l^3 \\ - \frac{1}{24} \cos \varphi (4 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^4 l \\ - \frac{1}{4} \cos^3 \varphi (2 t^3 - 3 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^2 l^3 \\ + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0 - 10 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + 7 t^2 + t^4) l^5 \quad (117)$$

$$\Delta \varphi = (1 + \eta^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x}{N} - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) \frac{x^2}{N^2} - \frac{1}{2} t (1 + \eta^2) \frac{y^2}{N^2} \\ - \frac{1}{6} (1 - 3 \eta^2 t^2 + 5 \eta^2 - 18 \eta^4 t^2 + 7 \eta^4) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{N^3} \\ - \frac{1}{2} t^2 (1 - 2 \eta^2 - 3 \eta^4) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} - \frac{1}{24} \left\{ -\frac{59}{2} \eta^2 t \right. \\ \left. + \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 + \eta^2) - \frac{1}{6} (2 + 7 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \frac{x^4}{N^4} \\ + \frac{1}{4} \left\{ \eta^2 t^3 + \frac{3}{2} \eta^2 t - 2 t^3 \right. \\ \left. + \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 + \eta^2) - \frac{1}{6} (2 + 7 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \frac{x^2 y^2}{N^4} \\ + \frac{1}{24} \left\{ 3 t^3 + t - 6 \eta^2 t^3 + \frac{7}{2} \eta^2 t \right. \\ \left. - \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 + \eta^2) - \frac{1}{6} (2 + 7 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \frac{y^4}{N^4} \\ + \frac{1}{120} (5 - 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^5}{N^5} \\ + \frac{1}{24} (9 t^4 + 4 t^2 - 4 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{N^5} \\ - \frac{1}{12} (6 t^4 + t^2 - 2 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{N^5} \quad (118)$$

$$l = \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{\cos \varphi} \frac{y}{N} + \frac{t}{\cos \varphi} \frac{x y}{N^2} + \frac{1}{3} \frac{t^2 \cos a_{0 \cdot x}}{N^3 \cos \varphi} (3 x^2 y - y^3) \\ - \frac{1}{6} \frac{1}{N^4 \cos \varphi} \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - t - 6 t^3 - \frac{5}{2} \eta^2 t \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (2 + 5 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] (x^3 y - x y^3) \\ - \frac{1}{120} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^5 \cos \varphi} (3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0 + 5 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 - 8 t^2 - 24 t^4) (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) \quad (119)$$

$$m = 1 + \frac{1}{2} (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{7}{2} \eta^2 t - 7 \eta^4 t \right. \\ \left. + \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - 3 \eta^2 + 6 \eta^4) - \frac{1}{6} (2 - \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \Delta \varphi^3 \\ + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \left\{ t (2 + 3 \eta^2) - 2 \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} (1 - \eta^2 + \eta^4) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{6} (2 + 3 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \Delta \varphi l^2 \\ + \frac{1}{24} (5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^4 - \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (2 t^2 - 5 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^2 l^2 \\ + \frac{1}{8} \cos^4 \varphi (t^2 - 2 t \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0 + \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) l^4 \quad (120)$$

$$m = 1 + \frac{1}{2} (1 + \eta^2) \frac{x^2}{N^2} + \frac{1}{6} \left\{ -\frac{11}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) \right. \\ \left. + \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - \frac{1}{6} (2 + 5 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{N^3} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) - \left[\frac{V^4}{\Delta \varphi_0} - \frac{1}{6} (2 + 5 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \eta^2 t \Delta \varphi_0^2 - \frac{1}{45} \Delta \varphi_0^3 \right] \right\} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} \\ + \frac{1}{24} (1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \frac{x^4}{N^4} - \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0 \frac{x^2 y^2}{N^4} + \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0 \frac{y^4}{N^4} \quad (121)$$

In allen Gleichungen (116) bis (121) ist die Schreibweise „ctg $\Delta \varphi_0$ “ und „ctg² $\Delta \varphi_0$ “ nur als Abkürzung aufzufassen. Nachgewiesen ist ihre Richtigkeit nur bis zu den Gliedern 3. Ordnung der für diese Funktionen gültigen Reihen.

4. Die verallgemeinerte stereographische Abbildung des Erdellipsoids

a) Die Abbildungsgleichung für das geradlinige Abbild einer geodätischen Linie

Bei der stereographischen Projektion der Kugel fallen der Normalpunkt der Abbildung und der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels zusammen; es ist $s_0 = 0$. Den entsprechenden Fall beim Erdellipsoid wollen wir als die verallgemeinerte stereographische Abbildung des Erdellipsoids bezeichnen. Für $s_0 = 0$ werden nach Gleichungen (103), (104) und (105)

$$m_0 = 0, (m')_0 = 1 \quad \text{und} \quad R_0 = \varrho = 0. \quad (122)$$

Dann erhalten wir nach Gleichung (86) als Vergrößerungsverhältnis auf dem Abbild der betrachteten geodätischen Linie

$$m_0 = \frac{dR}{ds} = \frac{R}{m}. \quad (123)$$

In dem Grenzfall $R \rightarrow 0$ und $m \rightarrow 0$ wird $m_0 = 1$. Das ergibt sich, wenn man in Gleichung (86)

$R : m$ durch $R_0 : m_0 = 1 : (m')_0$ ersetzt, worin für $R_0 = 0$ und $m_0 = 0$;
d. h. für $s_0 = 0, (m')_0 = 1$

wird. Es fallen also auch bei der hier vorgenommenen stereographischen Abbildung des Erdellipsoids der Normalpunkt der Abbildung und der Scheitel des geodätischen Strahlenbüschels zusammen. Das geradlinige Abbild der geodätischen Linie sei wieder x -Achse. Die Abszissen $x = R$ werden vom Normalpunkt aus gezählt. Dann ist

$$m_0 = \frac{dx}{ds} = \frac{x}{m} \quad (124)$$

die Grundgleichung der verallgemeinerten stereographischen Abbildung des Erdellipsoids.

Wir bestimmen x als Funktion der von C aus gemessenen Bogenlänge s der betrachteten geodätischen Linie in derselben Weise wie Professor Eggert (in [18] S. 161). Aus Gleichung (124) folgt:

$$\ln x = \int \frac{ds}{m}. \quad (125)$$

Wegen der ersten Gleichung (105) wird

$$\ln x = \ln s + \frac{1}{12} (1 + \eta^2) \frac{s^2}{N^2} - \frac{1}{9} \eta^2 t \cos a (1 + \eta^2) \frac{s^3}{N^3} + \frac{1}{1440} (7 + 14 \eta^2 - 36 \eta^2 \cos^2 a + 36 \eta^2 t^2) \frac{s^4}{N^4} + \dots$$

Setzen wir $\ln x = \ln s + \ln(1 + z)$, so wird $x = s(1 + z)$. (126)

Hierin ist

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \dots = \frac{1}{12} (1 + \eta^2) \frac{s^2}{N^2} - \frac{1}{9} \eta^2 t \cos a (1 + \eta^2) \frac{s^3}{N^3} + \frac{1}{1440} (7 + 14 \eta^2 - 36 \eta^2 \cos^2 a + 36 \eta^2 t^2) \frac{s^4}{N^4} + \dots$$

Hieraus ergibt sich

$$z = \frac{1}{12} (1 + \eta^2) \frac{s^2}{N^2} - \frac{1}{9} \eta^2 t \cos a (1 + \eta^2) \frac{s^3}{N^3} + \frac{1}{120} (1 + 2 \eta^2 - 3 \eta^2 \cos^2 a + 3 \eta^2 t^2) \frac{s^4}{N^4} + \dots \quad (127)$$

und damit wegen der ersten Gleichung (126)

$$x = s + \frac{1}{12} (1 + \eta^2) \frac{s^3}{N^2} - \frac{1}{9} \eta^2 t \cos a_0 \cdot x (1 + \eta^2) \frac{s^4}{N^3} + \frac{1}{120} (1 + 2 \eta^2 - 3 \eta^2 \cos^2 a_0 \cdot x + 3 \eta^2 t^2) \frac{s^5}{N^4} + \dots$$

a gibt das Azimut der positiven Richtung der x -Achse an. Wir haben daher $\cos a_0 \cdot x$ statt $\cos a$ geschrieben. Durch Vergleichung mit der Reihe Gleichung (19) folgt

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{12} \frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) \\ a_4 &= -\frac{1}{9} \frac{1}{N^3} \eta^2 t \cos a_0 \cdot x (1 + \eta^2) \\ a_5 &= \frac{1}{120} \frac{1}{N^4} (1 + 2 \eta^2 - 3 \eta^2 \cos^2 a_0 \cdot x + 3 \eta^2 t^2). \end{aligned} \quad (128)$$

b) Berechnung der Vorzahlen c_i und e_i für den Fall der geradlinigen Abbildung eines Meridians

Mit den Werten a_i in Gleichungen (128) und den Werten b_i in Gleichungen (10) ergeben die Formeln Gleichungen (21a) die Vorzahlen c_i für die stereographische Abbildung des Erdellipsoids.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{N}{\cos a_0 \cdot x} \cos \varphi \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \frac{N}{\cos a_0 \cdot x} t \cos^2 \varphi \\ c_3 &= -\frac{1}{12} \frac{N \cos^3 \varphi}{\cos a_0 \cdot x} (1 - 2 t^2 + \eta^2) \\ c_4 &= \frac{1}{72} \frac{N t \cos^4 \varphi}{\cos a_0 \cdot x} (6 - 3 t^2 + 10 \eta^2 + 4 \eta^4) \\ c_5 &= \frac{1}{720} \frac{N \cos^5 \varphi}{\cos a_0 \cdot x} (6 + 6 t^4 - 33 t^2 + 18 \eta^2 - 95 \eta^2 t^2) \end{aligned} \quad (129)$$

Aus den Werten c_i erhalten wir mit Hilfe der Formeln (23) und (25) die Vorzahlen e_i :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\cos a_0 \cdot x}{N \cos \varphi} \\ e_2 &= \frac{1}{2} \frac{t}{N^2 \cos \varphi} \\ e_3 &= \frac{1}{12} \frac{\cos a_0 \cdot x}{N^3 \cos \varphi} (1 + 4 t^2 + \eta^2) \\ e_4 &= \frac{1}{72} \frac{t}{N^4} (9 + 18 t^2 + 5 \eta^2 - 4 \eta^4) \\ e_5 &= \frac{1}{720} \frac{\cos a_0 \cdot x}{N^5 \cos \varphi} (9 + 144 t^4 + 108 t^2 + 50 \eta^2 t^2 + 12 \eta^2). \end{aligned} \quad (130)$$

c) Die Übertragungsformeln und das Vergrößerungsverhältnis

Setzt man die Gleichungen (128) in die Gleichungen (30*), (31*), (37*), (38*), (46*) und (48*) und — zur Kontrolle — die Gleichungen (129) und (130) in die Gleichungen (30), (31), (37), (38), (46) und (48) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} \cos a_{0 \cdot x} &= (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi + \frac{3}{2} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t l^2 + \frac{1}{12} (1 + 4 \eta^2 - 6 \eta^4 - 9 \eta^4 + 42 \eta^4 t^2) \Delta \varphi^3 \\ &+ \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (1 - 2 t^2 + 2 \eta^2 t^2 - 2 \eta^4 t^2) \Delta \varphi l^2 - \frac{17}{72} \eta^2 t \Delta \varphi^4 \\ &- \frac{1}{24} t \cos^2 \varphi (9 - 10 \eta^2 + 18 \eta^2 t^2) \Delta \varphi^2 l^2 \quad (131) \\ &+ \frac{1}{72} t \cos^4 \varphi (6 - 3 t^2 + 10 \eta^2) l^4 + \frac{1}{120} \Delta \varphi^5 \\ &- \frac{1}{24} \cos^2 \varphi (1 + t^2) \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{48} \cos^4 \varphi (2 + 2 t^4 - 11 t^2) \Delta \varphi l^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} \cos a_{0 \cdot x} &= \cos \varphi l - \sin \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l - \frac{1}{4} \cos \varphi (1 - \eta^2 + 6 \eta^2 t^2 \\ &+ \eta^4 - 12 \eta^4 t^2) \Delta \varphi^2 l - \frac{1}{24} \cos^3 \varphi (2 - 7 t^2) \Delta \varphi^2 l^3 \\ &+ \frac{1}{12} \cos^3 \varphi (1 - 2 t^2 + \eta^2) l^3 - \frac{1}{36} \sin \varphi (3 + 31 \eta^2 - 18 \eta^2 t^2) \Delta \varphi^3 l \quad (132) \\ &- \frac{1}{18} t \cos^3 \varphi (6 - 3 t^2 + 4 \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi l^3 - \frac{1}{24} \cos \varphi \Delta \varphi^4 l \\ &- \frac{1}{24} \cos^3 \varphi (2 - 7 t^2) \Delta \varphi^2 l^3 + \frac{1}{240} \cos^5 \varphi (2 + 2 t^4 - 11 t^2) l^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= (1 + \eta^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x}{N} - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 + \eta^2) \frac{x^2}{N^2} \\ &- \frac{1}{2} t (1 + \eta^2) \frac{y^2}{N^2} - \frac{1}{12} (1 - 6 \eta^2 t^2 + 8 \eta^2 - 36 \eta^4 t^2 + 13 \eta^4) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{N^3} \\ &- \frac{1}{4} (1 + 2 t^2 + 2 \eta^2 - 4 \eta^2 t^2 - 6 \eta^4 t^2 + \eta^4) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{N^3} \\ &+ \frac{31}{36} \eta^2 t \frac{x^4}{N^4} - \frac{1}{12} t (3 + 6 t^2 - 16 \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \frac{x^2 y^2}{N^4} \quad (133) \\ &+ \frac{1}{72} t (9 + 9 t^2 - 18 \eta^2 t^2 + 14 \eta^2) \frac{y^4}{N^4} + \frac{1}{80} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^5}{N^5} \\ &+ \frac{1}{16} (1 + 6 t^4 + 6 t^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{N^5} - \frac{1}{8} t^2 (3 + 4 t^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{N^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{\cos a_{0 \cdot x} y}{\cos \varphi N} + \frac{t x y}{\cos \varphi N^2} + \frac{1}{12} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^3 \cos \varphi} (1 + 4 t^2 + \eta^2) (3 x^2 y - y^3) \\ &+ \frac{1}{18} \frac{t}{N^4 \cos \varphi} (9 + 18 t^2 + 5 \eta^2) (x^3 y - x y^3) \quad (134) \\ &+ \frac{1}{80} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{N^5 \cos \varphi} (1 + 16 t^4 + 12 t^2) (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 \\ &+ \frac{11}{36} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^3 - \frac{1}{12} t \cos^2 \varphi (3 + 8 \eta^2) \Delta \varphi l^2 \quad (135) \\ &+ \frac{1}{24} \Delta \varphi^4 + \frac{1}{48} \cos^4 \varphi (2 - t^2) l^4 \end{aligned}$$

$$m = 1 + (1 + \eta^2) \frac{x^2 + y^2}{4 N^2} - \frac{2 \eta^2 t}{9 N^3} (1 + \eta^2) \cos a_{0 \cdot x} (2 x^3 + 3 x y^2) - \eta^2 G_1. \quad (136)$$

5. Die verallgemeinerte Mercatorabbildung des Erdellipsoids

a) Die Abbildungsgleichung für das geradlinige Abbild einer geodätischen Linie

Die Mercatorabbildung der Kugel ist als Grenzfall der Lambertabbildung dadurch gekennzeichnet, daß an Stelle eines Kleinkreises ein Größtkreis längen- und formtreu, d. h. als Gerade mit dem Vergrößerungsverhältnis 1 abgebildet wird. Dementsprechend wollen wir beim Erdellipsoid den Fall der Abbildung als verallgemeinerte Mercatorabbildung bezeichnen, bei der in Gleichung (82)

$$R_0 = \infty \quad (137)$$

wird. Wir setzen $R = R_0 + x$, so daß sich für $x = 0$ das Vergrößerungsverhältnis 1 ergibt (zu $R = R_0$ gehört stets $m = m_0$). Schreiben wir entsprechend Gleichung (94) wieder μ für m_0 und ϱ für R_0 , so kann man wegen Gleichungen (85) die Gleichung (82) in der Form $m_0 = \frac{dx}{ds} = \frac{\mu}{m} + \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{x}{m} = \frac{\mu}{m} + (m')_0 \frac{x}{m}$ schreiben. Für $\varrho = R_0 = \infty$ wird $(m')_0 = 0$ und damit μ ein Maximum oder ein Minimum. Für uns ist nur das Maximum von Bedeutung. Wir erhalten somit im Falle $R_0 = \varrho = \infty$ für das Vergrößerungsverhältnis auf der betrachteten geodätischen Linie

$$m_0 = \frac{dx}{ds} = \frac{\mu_{max}}{m}. \quad (138)$$

Diese Gleichung ist als die Grundgleichung der verallgemeinerten Mercatorabbildung des Erdellipsoids anzusehen.

Messen wir wie bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung die Bogenlänge s der geodätischen Linie vom Scheitel C des geodätischen Strahlenbüschels aus und wird $s = s_0$ für $x = 0$, so daß $s = s_0 + \Delta s$ ist, so können wir wieder nach Taylor x als Funktion von Δs entwickeln:

$$x = f'(s_0) \Delta s + \frac{1}{2} f''(s_0) \Delta s^2 + \frac{1}{6} f'''(s_0) \Delta s^3 + \dots \quad (139)$$

Setzen wir $1/m = F_1$, und bedeutet das Zeichen ' die Ableitung nach der Bogenlänge s , so wird

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{\mu_{max}}{m} = \mu_{max} \cdot F_1; \quad f''(s) = \mu_{max} \cdot F_1'; \quad f'''(s) = \mu_{max} \cdot F_1''; \quad (140) \\ f^{IV}(s) &= \mu_{max} \cdot F_1'''; \quad f^V(s) = \mu_{max} \cdot F_1^{IV}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke F_1', F_1'', F_1''' und F_1^{IV} sind in Gleichungen (100) angegeben. Für $s = s_0$ wird $m = \mu_{\max}$ und $(m')_0 = 0$ und in Verbindung mit Gleichungen (140) gibt die Gleichung (139)

$$x = \Delta s - \frac{1}{6} \frac{(m'')_0}{\mu_{\max}} \Delta s^3 - \frac{1}{24} \frac{(m''')_0}{\mu_{\max}} \Delta s^4 - \frac{1}{120} \left[\frac{(m^{IV})_0}{\mu_{\max}} - 6 \frac{(m'')_0^2}{\mu_{\max}^2} \right] \Delta s^5.$$

Man könnte daran denken, den Ausdruck für m' in den Gleichungen (104) = 0 zu setzen, aus ihm s_0 zu ermitteln und dann s_0 in die übrigen Gleichungen (104) und in die Gleichung (103) einzusetzen und damit die Vorzeichen der Reihe für x zu erhalten. Dieser Weg führt aber nicht zum Ziel, da die Reihen in Gleichungen (103) und (104) wegen der Größe von s_0 sehr schlecht konvergieren.

Wir wollen statt dessen $m = m_0 + \Delta m$ setzen und $\Delta m/m_0$ in eine Reihe entwickeln:

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{(m')_0}{m_0} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{(m'')_0}{m_0} \Delta s^2 + \dots$$

Hierin ist $(m')_0 = 0$ und $\frac{(m'')_0}{m_0} = -K_0 = -\frac{1}{N_0^2} (1 + \eta_0^2)$ (vgl. letzten Absatz des Abschnitts IV. 3. a). Dann ist unter Beachtung der Gleichung (138)

$$\frac{1}{m_0} = \frac{m}{\mu_{\max}} = 1 + \frac{\Delta m}{\mu_{\max}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{(m'')_0}{\mu_{\max}} \Delta s^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2N_0^2} (1 + \eta_0^2) \Delta s^2 + \dots \quad (141)$$

Das ist aber nichts anderes als der Beginn der Reihenentwicklung für n_0 und damit nach Großmann ([16] S. 487 Gleichung (14)) der Beginn der Reihenentwicklung für den Reziprokwert des Vergrößerungsverhältnisses bei der ebenen konformen „querachsigen“ Abbildung des Erdellipsoids.

Wir haben am Schluß des Abschnitts IV. 2. c) gesehen, daß bei der Kugel die verallgemeinerte Mercatorabbildung mit der „verallgemeinerten querachsigen“ Abbildung identisch ist, und haben jetzt den Nachweis geführt, daß diese Identität beim Erdellipsoid zumindest näherungsweise vorhanden ist. Es wird daher stets zweckmäßig an Stelle der verallgemeinerten Mercatorabbildung die verallgemeinerte querachsige Abbildung zu wählen sein, weil bei der letzteren die geodätische Linie, die im Normalpunkt auf der ursprünglich betrachteten geodätischen Linie des geodätischen Strahlenbüschels senkrecht steht, genau längen- und formtreu abgebildet wird. Liegt der Scheitel des Strahlenbüschels in einem Pol, so sind auch beim Erdellipsoid Mercatorabbildung und querachsige Abbildung identisch.

Zwecks Anwendung und Prüfung der Formeln (71) und (72) wollen wir im folgenden aus den geographischen Koordinaten die rechtwinkligen Ebenen Koordinaten für den Sonderfall der querachsigen Abbildung herleiten, bei dem die Querachse das Azimut $+90^\circ$ oder -90° hat, d. h. für den von Großmann behandelten Fall.

V. Die querachsige Abbildung des Erdellipsoids für den Fall, daß der Meridian die Hauptachse ist

Es ist $\cos a = 0$, d. h. wir haben den in III. 4. b) unter β) erwähnten Sonderfall vor uns, in welchem eine geodätische Linie geradlinig abgebildet wird, die den Meridian rechtwinklig schneidet. Es sind also die Gleichungen (75) anzuwenden.

Da die betrachtete geodätische Linie auch längentreu abgebildet werden soll, ist

$$x = \Delta s. \quad (142)$$

In Gleichungen (53) wird damit

$$h_3 = h_4 = h_5 = \dots = 0$$

und wir bekommen entsprechend den Gleichungen (75)

$$\begin{aligned} w_{r3} &= 0 & w_{r4} &= t(1 + 6t^2 + \eta^2) \sin^4 a & w_{r5} &= 0 \\ w_{i3} &= 2 \sin^3 a t^2 & w_{i4} &= 0 & w_{i5} &= 8 \sin^5 a t^2 (1 + 3t^2) \\ \kappa_1 &= 3t^2 + 2t^2 \sin^3 a \sin 3a & & & \kappa_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 15t^3 + 20t^3 \sin^3 a \sin 3a + t(1 + 6t^2 + \eta^2) \sin^4 a \cos 4a & \lambda_2 &= 0 & & \\ v_1 &= 105t^4 + 210t^4 \sin^3 a \sin 3a - 40t^4 \sin^6 a \cos 6a & & & & \\ &+ 15t^2(1 + 6t^2 + \eta^2) \sin^4 a \cos 4a - 8t^2(1 + 3t^2) \sin^5 a \sin 5a & & & & \\ v_2 &= 0 & z_{r3} &= z_{r4} = z_{r5} = 0. & & \end{aligned} \quad (143)$$

Aus der letzten Gleichung der Gleichungen (143) geht hervor, daß die erste Hälfte auf der rechten Seite der Gleichungen (71) und (72) null wird. Das ist im allgemeinen nicht so, im Gegensatz zu dem Fall a) in Abschnitt III. 4. b), in welchem stets die zweite Hälfte der rechten Seite verschwindet.

Beachtet man, daß für $a = 90^\circ$ oder $a = 270^\circ$ stets $\sin^3 a \sin 3a < 0$, $\sin^4 a \cos 4a > 0$, $\sin^5 a \sin 5a > 0$ und $\sin^6 a \cos 6a < 0$ ist, so wird

$$\kappa_1 = t^2 \quad \lambda_1 = t^3 + t + \eta^2 t \quad v_1 = t^4 + 7t^2 \quad (144)$$

und nach den Gleichungen (73)

$$z_{i3} = -t^2 \sin a, \quad z_{i4} = -(t^3 + t + \eta^2 t) \sin a, \quad z_{i5} = -(t^4 + 7t^2) \sin a. \quad (145)$$

Setzt man die Gleichungen (145) in die Gleichungen (71) und (72) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} \sin a_0 \cdot x &= \cos \varphi l - t \cos \varphi (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi l \\ &+ \frac{3}{2} \eta^2 t^2 \cos \varphi \Delta \varphi^2 l - \frac{1}{6} t^2 \cos^3 \varphi l^3 \\ &- \frac{1}{6} t \cos \varphi (2 - \eta^2 - 3\eta^2 t^2) \Delta \varphi^3 l \\ &+ \frac{1}{6} t \cos^3 \varphi (1 + t^2 - \eta^2 t^2) \Delta \varphi l^3 - \eta^2 G_1^5 \Delta \varphi^4 l \\ &- \frac{1}{2} t^2 \cos^3 \varphi \Delta \varphi^2 l^3 + \frac{1}{120} t^2 \cos^5 \varphi (7 + t^2) l^5 \quad \text{und} \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned}
\frac{y}{N} \sin a_0 \cdot x &= - (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi - \frac{3}{2} \eta^2 t (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi l^2 - \frac{1}{6} (1 + \eta^2 - 3 \eta^2 t^2) \Delta \varphi^3 \\
&\quad + \frac{1}{2} t^2 \cos^2 \varphi (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi (1 - 3 \eta^2 t^2 - \eta^2) \Delta \varphi^2 l^2 - \frac{1}{12} \eta^2 t \Delta \varphi^4 \\
&\quad + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (t^3 + t + \eta^2 t) l^4 \\
&\quad - \frac{1}{24} \Delta \varphi^5 + \frac{5}{12} t^2 \cos^2 \varphi \Delta \varphi^3 l^2 - \frac{1}{24} t^2 \cos^4 \varphi (7 + t^2).
\end{aligned} \tag{147}$$

Diese Formeln stimmen mit denen von Großmann ([16] S. 499) überein. Setzen wir hierin $\varphi = 0$, so erhalten wir die Gleichungen für die eigentliche Mercatorabbildung des Erdellipsoids, nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{x}{N} \sin a_0 \cdot x &= l \\
\frac{y}{N} \sin a_0 \cdot x &= - (1 - \eta^2 + \eta^4 - \eta^6) \Delta \varphi - \frac{1}{6} (1 + \eta^2) \Delta \varphi^3 - \frac{1}{24} \Delta \varphi^5.
\end{aligned} \tag{148}$$

Es ist zu beachten, daß in den Gleichungen (146), (147) und (148) x nach Osten bzw. Westen und y nach Süden bzw. Norden positiv gemessen wird, je nachdem, ob $a = 90^\circ$ oder $a = 270^\circ$ gewählt wird.

VI. Die Richtungs- und Längenreduktionen

I. Allgemeines

a) Die Richtungsreduktion

In diesem Abschnitt werden für die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung des Erdellipsoids (Abschnitt IV, 3.) und für einen ihrer Grenzfälle, nämlich die verallgemeinerte stereographische Abbildung des Erdellipsoids (Abschnitt IV, 4), die Formeln für die Richtungs- und Längenreduktionen aufgestellt. Sie werden in derselben Weise abgeleitet, wie es L. Krüger in seiner Arbeit „Zur stereographischen Projektion“ ([7] S. 12) getan hat.

Bezeichnen S die Bogenlänge einer Kurve in der Ebene, s die entsprechende Bogenlänge auf dem Ellipsoid und $m = dS : ds$ das Vergrößerungsverhältnis, so ist in einem System rechtwinklig-ebener Koordinaten x, y :

$$S = \int \sqrt{1 + y'^2} dx \quad s = \int \frac{1}{m} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{149}$$

Handelt es sich bei der Kurve, deren Bogenlänge zu berechnen ist, um eine geodätische Linie, so muß s ein Minimum werden. Führt man die Minimumbedingung ein, so wird nach Krüger a. a. O. § 4 Gleichung (24)

$$y'' = (1 + y'^2) \left(y' \frac{\delta \ln m}{\delta x} - \frac{\delta \ln m}{\delta y} \right). \tag{150}$$

Wir bezeichnen mit T den Richtungswinkel des ebenen Abbildes der geodätischen Linie in einem Punkt P der Bildkurve. Dann ist

$$y' = \operatorname{tg} T. \tag{151}$$

Ziehen wir von einem Punkt P_1 aus eine Sehne nach einem zweiten Punkt P_2 der Bildkurve und hat diese Sehne den Richtungswinkel t_1 , so ist

$$T_1 - t_1 = \tau_1 \tag{152}$$

die Richtungsreduktion, die man an dem Richtungswinkel t_1 der Sehne anbringen muß, um den Richtungswinkel T_1 der Bildkurve in P_1 zu erhalten. Entsprechendes gilt für den Punkt P_2 .

Führen wir statt x, y ein neues System rechtwinklig-ebener Koordinaten ξ, η ein, deren ξ -Achse mit der Sehne zusammenfällt, so bekommen wir entsprechend den Gleichungen (151) und (152)

$$\operatorname{tg} \tau_1 = (\eta')_1 \quad \operatorname{tg} \tau_2 = (\eta')_2. \tag{153}$$

Wir müssen also die Gleichung des Abbildes der geodätischen Linie, bezogen auf das System ξ, η , aufstellen. Zu diesem Zweck schlagen wir den von Krüger a. a. O. vorgezeichneten Weg ein. Zunächst legen wir den Ursprung der Koordinaten ξ, η in den Sehnenmittelpunkt. Angaben, die für $\xi = 0$ gelten, werden durch den Index m gekennzeichnet. Die Sehne habe die Länge l . Nach Taylor ist

$$\eta = \eta_m + \eta_m' \xi + \frac{1}{2} \eta_m'' \xi^2 + \frac{1}{6} \eta_m''' \xi^3 + \dots \tag{154}$$

Für $\xi = \frac{l}{2}$ und $\xi = -\frac{l}{2}$ muß $\eta = 0$ sein. Für diesen Fall folgt aus Gleichung (154)

$$\eta_m = -\frac{1}{8} l^2 \eta_m'' - \frac{1}{384} l^4 \eta_m^{IV} - \dots \quad \eta_m' = -\frac{1}{24} l^2 \eta_m''' - \frac{1}{1920} l^4 \eta_m^{V}. \tag{155}$$

Man erhält damit für Gleichung (154)

$$\begin{aligned}
\frac{\eta}{l} &= -\frac{1}{8} \left[1 - 4 \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 \right] \left\{ l \eta_m'' + \frac{1}{3} \frac{\xi}{l} l^2 \eta_m''' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{48} \left[1 + 4 \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 \right] l^3 \left(\eta_m^{IV} + \frac{1}{5} \frac{\xi}{l} l \eta_m^V \right) + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{156}$$

Für die Punkte P_1 und P_2 wird $\frac{\xi_1}{l} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{\xi_2}{l} = +\frac{1}{2}$. Wegen Gleichungen (153) und (154) wird dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \tau_1 &= -\frac{1}{2} \left[l \eta_m'' - \frac{1}{6} l^2 \eta_m''' + \frac{1}{24} l^3 \left(\eta_m^{IV} - \frac{1}{10} l \eta_m^V \right) + \dots \right] \\
\operatorname{tg} \tau_2 &= +\frac{1}{2} \left[l \eta_m'' + \frac{1}{6} l^2 \eta_m''' + \frac{1}{24} l^3 \left(\eta_m^{IV} + \frac{1}{10} l \eta_m^V \right) + \dots \right].
\end{aligned} \tag{157}$$

Zum Übergang von den Koordinaten x, y zu den Koordinaten x, y dienen die Formeln

$$\begin{aligned} x &= x_m + r \cos t - y \sin t & y &= y_m + r \sin t + y \cos t \\ \text{mit} & & & \\ x_m &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & \text{und} & y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{aligned} \quad (158)$$

Mit Krüger setzen wir

$$\begin{aligned} x_m \cos t + y_m \sin t &= a = \frac{1}{2l} [x_2^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2)] \\ x_m \sin t - y_m \cos t &= \beta = \frac{1}{l} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ x_m^2 + y_m^2 &= a^2 + \beta^2. \end{aligned} \quad (159)$$

Wir bilden ferner vorsorglich

$$\begin{aligned} x^2 &= x_m^2 + 2 x_m (r \cos t - y \sin t) + (r \cos t - y \sin t)^2 \\ y^2 &= y_m^2 + 2 y_m (r \sin t + y \cos t) + (r \sin t + y \cos t)^2 \\ x^3 &= x_m^3 + 3 x_m^2 (r \cos t - y \sin t) \\ &\quad + 3 x_m (r \cos t - y \sin t)^2 + (r \cos t - y \sin t)^3 \\ y^3 &= y_m^3 + 3 y_m^2 (r \sin t + y \cos t) \\ &\quad + 3 y_m (r \sin t + y \cos t)^2 + (r \sin t + y \cos t)^3 \\ x y^2 &= x_m y_m^2 + 2 x_m y_m (r \sin t + y \cos t) \\ &\quad + x_m (r \sin t + y \cos t)^2 + y_m^2 (r \cos t - y \sin t) \\ &\quad + 2 y_m (r \sin t + y \cos t) (r \cos t - y \sin t) \\ &\quad + (r \sin t + y \cos t)^2 (r \cos t - y \sin t) \quad (160) \\ x^4 &= x_m^4 + 4 x_m^3 (r \cos t - y \sin t) + 6 x_m^2 (r \cos t - y \sin t)^2 \\ &\quad + 4 x_m (r \cos t - y \sin t)^3 + (r \cos t - y \sin t)^4 \\ y^4 &= y_m^4 + 4 y_m^3 (r \sin t + y \cos t) + 6 y_m^2 (r \sin t + y \cos t)^2 \\ &\quad + 4 y_m (r \sin t + y \cos t)^3 + (r \sin t + y \cos t)^4 \\ x^2 y^2 &= x_m^2 y_m^2 + 2 x_m^2 y_m (r \sin t + y \cos t) + x_m^2 (r \sin t + y \cos t)^2 \\ &\quad + 2 x_m y_m^2 (r \cos t - y \sin t) + 4 x_m y_m (r \sin t + y \cos t) \\ &\quad (r \cos t - y \sin t) + 2 x_m (r \sin t + y \cos t)^2 (r \cos t - y \sin t) \\ &\quad + y_m^2 (r \cos t - y \sin t)^2 + 2 y_m (r \sin t + y \cos t) (r \cos t - y \sin t)^2 \\ &\quad + (r \sin t + y \cos t)^2 (r \cos t - y \sin t)^2. \end{aligned}$$

b) Die Längenreduktion

Die Längenreduktion erhält man durch Vergleichung der Sehnenlänge l mit der entsprechenden Länge s der geodätischen Linie. Für s gilt gemäß Gleichung (149):

$$s = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{1}{m} (1 + \frac{1}{2} y'^2 + \dots) dx. \quad (161)$$

2. Die Reduktionen bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung

a) Die Richtungsreduktion

Im Hinblick auf Gleichung (150) bilden wir zunächst $\frac{\delta \ln m}{\delta x}$ und $\frac{\delta \ln m}{\delta y}$. Hierzu formen wir die Gleichung (121) etwas um und schreiben

$$m = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2}\right) \left(1 + \gamma \frac{x^3}{N^3} + \delta \frac{x y^2}{N^3} + \varepsilon \frac{x^4}{N^4} + \zeta \frac{x^2 y^2}{N^4} + \vartheta \frac{y^4}{N^4} + \dots\right) + \eta^2 G l_4. \quad (162)$$

Vernachlässigen wir Ausdrücke von höherer Ordnung als $\eta^2 G l_3$ und sehen wir $\Delta \varphi_0$ in Gleichung (121) als eine Größe 1. Ordnung an, so ist in Gleichung (162)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{6} \left(-\frac{11}{2} \eta^2 t + V^4 \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0\right) \cos a_{0 \cdot x}; \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \eta^2 t - V^4 \operatorname{ctg} \Delta \varphi_0\right) \cos a_{0 \cdot x}; \\ \varepsilon &= \frac{1}{24} (1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0); \zeta = -\frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0; \vartheta = \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \Delta \varphi_0. \end{aligned} \quad (163)$$

$$\text{Es ist ferner } \frac{1}{r^2} = \frac{1}{M N} = \frac{1}{N^2} (1 + \eta^2).$$

Führen wir statt x und y die ersten beiden Gleichungen (158) ein, so wird unter Berücksichtigung der Gleichungen (160)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln m}{\delta x} &= \frac{1}{r^2} \cos t (x_m + r \cos t - y \sin t) \left[1 - \frac{1}{2 r^2} (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) + G l_4\right] \\ &\quad + \frac{1}{N^3} \left\{3 \gamma \cos t (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) + \delta [2 x_m y_m \sin t \right. \\ &\quad \left. + y_m^2 \cos t + 2 r (x_m \sin^2 t + 2 y_m \sin t \cos t) + 3 r^2 \sin^2 t \cos t]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{N^4} \left\{4 \varepsilon \cos t (x_m^3 + 3 x_m^2 r \cos t + 3 r^2 x_m \cos^2 t + r^3 \cos^3 t) \right. \\ &\quad \left. + 4 \vartheta \sin t (y_m^3 + 3 r y_m^2 \sin t + 3 r^2 y_m \sin^2 t + r^3 \sin^3 t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \zeta [x_m^2 y_m \sin t + x_m y_m^2 \cos t + r (x_m^2 \sin^2 t + 4 x_m y_m \sin t \cos t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y_m^2 \cos^2 t) + 3 r^2 (x_m \sin^2 t \cos t + y_m \sin t \cos^2 t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 r^3 \sin^2 t \cos^2 t\right]\right\} + \frac{1}{r} G l_4 \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \ln m}{\delta y} &= -\frac{1}{r^2} \sin t (x_m + r \cos t - y \sin t) \\ &\quad \left[1 - \frac{1}{2 r^2} (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) + G l_4\right] \\ &\quad + \frac{1}{N^3} \left\{-3 \gamma \sin t (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) \right. \\ &\quad \left. + \delta [2 x_m y_m \cos t - y_m^2 \sin t + 2 r (x_m \sin t \cos t + y_m \cos^2 t - y_m \sin^2 t) \right. \\ &\quad \left. + r^2 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t)]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{N^4} \left\{-4 \varepsilon \sin t (x_m^3 + 3 x_m^2 r \cos t + 3 x_m r^2 \cos^2 t + r^3 \cos^3 t) \right. \\ &\quad \left. + 4 \vartheta \cos t (y_m^3 + 3 y_m^2 r \sin t + 3 y_m r^2 \sin^2 t + r^3 \sin^3 t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \zeta [x_m^2 y_m \cos t - x_m y_m^2 \sin t + r (x_m^2 \sin t \cos t + 2 x_m y_m \cos^2 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 x_m y_m \sin^2 t - y_m^2 \sin t \cos t) + r^2 (2 x_m \sin t \cos^2 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - x_m \sin^3 t + y_m \cos^3 t - 2 y_m \sin^2 t \cos t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^3 (\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t)]\right\} + \frac{1}{r} G l_4. \end{aligned}$$

Es ist $\delta \ln m / \delta y$ von der Größenordnung $\frac{1}{r} Gl_1$, dasselbe gilt gemäß Gleichung (150) dann auch von y'' . Daraus folgt, daß y' eine Größe 2. Ordnung und y/r eine Größe 3. Ordnung ist.

Behalten wir die bisherige Genauigkeit bei, d. h. gehen wir nur bis zu den Gliedern der Größenordnung $\frac{1}{r} Gl_3$ einschließlich, so genügt es, für die Gleichung (150) die Gleichung

$$y'' = y' \frac{\delta \ln m}{\delta x} - \frac{\delta \ln m}{\delta y} + \frac{1}{r} Gl_5 \quad (165)$$

zu setzen. Mit Rücksicht hierauf sind auch bereits in den Gleichungen (164) die Glieder höherer Ordnung fortgelassen worden.

Gemäß Gleichung (165) erhalten wir

$$\begin{aligned} y'' = & \frac{1}{r^2} \cos t (x_m + r \cos t) y' + \frac{1}{r^2} \sin t (x_m + r \cos t - y \sin t) \\ & + \frac{1}{N^3} \{ 3 \gamma \sin t (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) - \delta [2 x_m y_m \cos t \\ & - y_m^2 \sin t + 2 r (x_m \sin t \cos t + y_m \cos^2 t - y_m \sin^2 t) \\ & + r^2 (2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t)] \} \\ & - \frac{1}{2r^4} \sin t (x_m + r \cos t) (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) \\ & + \frac{1}{N^4} \{ 4 \varepsilon \sin t (x_m^3 + 3 x_m^2 r \cos t + 3 x_m r^2 \cos^2 t + r^3 \cos^3 t) \\ & - 4 \vartheta \cos t (y_m^3 + 3 y_m^2 r \sin t + 3 y_m r^2 \sin^2 t + r^3 \sin^3 t) \\ & - 2 \zeta [x_m^2 y_m \cos t - x_m y_m^2 \sin t + r (x_m^2 \sin t \cos t \\ & + 2 x_m y_m \cos^2 t - 2 x_m y_m \sin^2 t - y_m^2 \sin t \cos t) \\ & + r^2 (2 x_m \sin t \cos^2 t - x_m \sin^3 t + y_m \cos^3 t - 2 y_m \sin^2 t \cos t) \\ & + r^3 (\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t)] \} + \frac{1}{r} Gl_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' = & \frac{1}{r^2} (\cos^2 t - \sin^2 t) y' + \frac{1}{r^2} \cos t (x_m + r \cos t) y'' + \frac{1}{r^2} \sin t \cos t \\ & + \frac{1}{N^3} \{ 6 \gamma \sin t \cos t (x_m + r \cos t) - 2 \delta [x_m \sin t \cos t \\ & + y_m (\cos^2 t - \sin^2 t) + r \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t)] \} \\ & - \frac{1}{2r^4} \sin t \cos t (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) \\ & - \frac{1}{r^4} \sin t \cos t (x_m + r \cos t)^2 \\ & + \frac{1}{N^4} \{ 12 \varepsilon \sin t \cos t (x_m^2 + 2 x_m r \cos t + r^2 \cos^2 t) \\ & - 12 \vartheta \sin t \cos t (y_m^2 + 2 y_m r \sin t + r^2 \sin^2 t) \\ & - 2 \zeta [(x_m^2 - y_m^2) \sin t \cos t + 2 x_m y_m (\cos^2 t - \sin^2 t) \\ & + 2 r (2 x_m \sin t \cos^2 t - x_m \sin^3 t + y_m \cos^3 t - 2 y_m \sin^2 t \cos t) \\ & + 3 r^2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)] \} + \frac{1}{N^2} Gl_3 \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} y^{IV} = & \frac{1}{r^2} (2 \cos^2 t - \sin^2 t) y'' + \frac{1}{r^2} \cos t (x_m + r \cos t) y''' \\ & + 2 \frac{\sin t}{N^3} \{ 3 \gamma \cos^2 t - \delta (2 \cos^2 t - \sin^2 t) \} \\ & - \frac{3}{r^4} \sin t \cos^2 t (x_m + r \cos t) + \frac{2}{N^4} \{ 12 \varepsilon \sin t \cos^2 t (x_m + r \cos t) \\ & - 12 \vartheta \sin^2 t \cos t (y_m + r \sin t) \\ & - 2 \zeta [(2 x_m \sin t \cos^2 t - x_m \sin^3 t + y_m \cos^3 t - 2 y_m \sin^2 t \cos t) \\ & + 3 r \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t)] \} + \frac{1}{N^3} Gl_2 \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} y^V = & \frac{1}{r^2} (3 \cos^2 t - \sin^2 t) y''' - \frac{3}{r^4} \sin t \cos^3 t \\ & + \frac{12}{N^4} \sin t \cos t [2 \varepsilon \cos^2 t - 2 \vartheta \sin^2 t - \zeta (\cos^2 t - \sin^2 t)] + \frac{1}{N^4} Gl_1. \end{aligned}$$

Es ist genähert für $r = 0$:

$$y_m'' = \frac{x_m}{r^2} \sin t + \frac{1}{r} Gl_2.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} y_m''' = & \frac{1}{r^2} (\cos^2 t - \sin^2 t) y_m' + \frac{1}{r^2} \sin t \cos t \\ & + \frac{2}{N^3} [3 \gamma x_m \sin t \cos t - \delta (x_m \sin t \cos t + y_m \cos^2 t - y_m \sin^2 t)] \\ & - \frac{x_m^2}{2r^4} \sin t \cos t + \frac{2}{N^4} \{ 6 \sin t \cos t (\varepsilon x_m^2 - \vartheta y_m^2) \\ & - \zeta [\sin t \cos t (x_m^2 - y_m^2) + 2 (\cos^2 t - \sin^2 t) x_m y_m] \} + \frac{1}{N^2} Gl_3 \end{aligned} \quad (167)$$

und, wenn man den Unterschied zwischen $1/N^4$ und $1/r^4$ vernachlässigt,

$$\begin{aligned} y_m^{IV} = & \frac{2}{N^3} \sin t [3 \gamma \cos^2 t - \delta (2 \cos^2 t - \sin^2 t)] \\ & + \frac{1}{N^4} \{ -x_m \sin^3 t + 24 \sin t \cos t (\varepsilon x_m \cos t - \vartheta y_m \sin t) \\ & - 4 \zeta [2 \sin t \cos t (x_m \cos t - y_m \sin t) - x_m \sin^3 t + y_m \cos^3 t] \} + \frac{1}{N^3} Gl_2 \end{aligned} \quad (168)$$

$$\begin{aligned} y_m^V = & \frac{1}{N^4} \sin t \cos t \{ -\sin^2 t + 12 [2 \varepsilon \cos^2 t - 2 \vartheta \sin^2 t \\ & - \zeta (\cos^2 t - \sin^2 t)] \} + \frac{1}{N^4} Gl_1. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung (155) ergibt sich nach Einsetzen der Ausdrücke für y_m''' und y_m^V in die Gleichungen (167) und (168)

$$\begin{aligned} y_m' = & -\frac{1}{24} \frac{l^2}{r^2} \sin t \cos t - \frac{1}{12} \frac{l^2}{N^3} \{ 3 \gamma x_m \sin t \cos t \\ & - \delta [x_m \sin t \cos t + y_m (\cos^2 t - \sin^2 t)] \} + Gl_4 \end{aligned}$$

und damit nach der ersten Gleichung (164)

$$y_m'' = \frac{x_m}{r^2} \sin t + \frac{1}{N^3} [3 \gamma x_m^2 \sin t - \delta (2 x_m y_m \cos t - y_m^2 \sin t)] \\ + \frac{1}{N^4} \left[\frac{1}{24} l^2 x_m \sin t (3 \sin^2 t - \cos^2 t) - \frac{1}{2} x_m^3 \sin t + 4 \varepsilon x_m^3 \sin t \right. \\ \left. - 4 \vartheta y_m^3 \cos t - 2 \zeta x_m y_m (x_m \cos t - y_m \sin t) \right] + \frac{1}{N} Gl_4$$

und nach Gleichung (165)

$$(169)$$

$$y_m''' = \frac{1}{r^2} \sin t \cos t + \frac{2}{N^3} \left\{ 3 \gamma x_m \sin t \cos t \right. \\ \left. - \delta [x_m \sin t \cos t + y_m (\cos^2 t - \sin^2 t)] \right\} \\ + \frac{1}{N^4} \left\{ -\frac{1}{24} l^2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) - \frac{1}{2} x_m^2 \sin t \cos t \right. \\ \left. + 12 \sin t \cos t (\varepsilon x_m^2 - \vartheta y_m^2) \right. \\ \left. - 2 \zeta [x_m^2 \sin t \cos t + 2 x_m y_m (\cos^2 t - \sin^2 t) - y_m^2 \sin t \cos t] \right\} + \frac{1}{N^2} Gl_3.$$

Setzt man die Gleichungen (169) und (168) in die erste Gleichung (157) ein, so erhält man nach einigen Zusammenfassungen in analytischem Maß

$$\tau_1 = -\frac{\Delta y}{6 r^2} (2 x_1 + x_2) - \frac{1}{24} \frac{1}{N^3} \left\{ 3 \gamma \Delta y (12 x_m^2 - 4 x_m \Delta x + \Delta x^2) \right. \\ \left. - \delta [24 x_m y_m \Delta x - 12 y_m^2 \Delta y - 4 x_m \Delta x \Delta y - 4 y_m (\Delta x^2 - \Delta y^2) \right. \\ \left. + \Delta y (2 \Delta x^2 - \Delta y^2)] \right\} + \frac{1}{1440} \frac{1}{N^4} \left\{ \Delta y [360 x_m^3 - 60 x_m^2 \Delta x \right. \\ \left. + 30 x_m (\Delta x^2 - 2 \Delta y^2) - 5 \Delta x (\Delta x^2 - \Delta y^2) - 3 \Delta x \Delta y^2] \right. \\ \left. - 72 \varepsilon \Delta y (40 x_m^3 - 20 x_m^2 \Delta x + 10 x_m \Delta x^2 - \Delta x^3) \right. \\ \left. + 72 \vartheta \Delta x (40 y_m^3 - 20 y_m^2 \Delta y + 10 y_m \Delta y^2 - \Delta y^3) \right. \\ \left. + 12 \zeta [120 x_m^2 y_m \Delta x - 120 x_m y_m^2 \Delta y - 40 x_m y_m (\Delta x^2 - \Delta y^2) \right. \\ \left. - \Delta x \Delta y \{ 20 (x_m^2 - y_m^2) - 20 (x_m \Delta x - y_m \Delta y) \right. \\ \left. + 3 (\Delta x^2 - \Delta y^2) \} - 10 x_m \Delta y^3 + 10 y_m \Delta x^3] \right\} + Gl_5$$

mit $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$.

Man erhält τ_2 , wenn man in der Gleichung (170) die Kennziffern $_1$ und $_2$ vertauscht.

b) Die Längenreduktion

Zur Lösung des Integrals in Gleichung (161) bilden wir aus Gleichung (162)

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} - \gamma \frac{x^3}{N^3} - \delta \frac{x y^2}{N^3} - \varepsilon' \frac{x^4}{N^4} - \zeta \frac{x^2 y^2}{N^4} - \vartheta \frac{y^4}{N^4}. \quad (171)$$

Hierin ist $\varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{4}$.

In Gleichung (171) setzen wir die Gleichungen (160) ein. In den Gleichungen (160) ersetzen wir y durch Ausdrücke mit x und benutzen dazu die Gleichung (156). Es wird

$$y = -\frac{1}{24} \frac{\sin t}{r^2} (3 x_m l^2 + x l^2 \cos t - 12 x^2 x_m - 4 x^3 \cos t) + l Gl_3. \quad (172)$$

Wir bilden noch

$$y' = -\frac{1}{24} \frac{\sin t}{r^2} (l^2 \cos t - 24 x x_m - 12 x^2 \cos t) + Gl_3 \quad (173)$$

und erhalten nach einigen Zwischenrechnungen

$$s = \int + \frac{1}{2} l \frac{1}{m} (1 + \frac{1}{2} y'^2) dx \\ = l \left\{ 1 - \frac{x_m^2}{2 r^2} - \frac{1}{24} \frac{\Delta x^2}{r^2} - \frac{1}{12} \frac{1}{N^3} [3 \gamma x_m (4 x_m^2 + \Delta x^2) \right. \\ \left. + \delta (12 x_m y_m^2 + x_m \Delta y^2 + 2 y_m \Delta x \Delta y)] \right. \\ \left. - \frac{1}{1440} \frac{1}{N^4} [60 x_m^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y^2 + 18 \varepsilon' (80 x_m^4 + 40 x_m^2 \Delta x^2 + \Delta x^4) \right. \\ \left. + 18 \vartheta (80 y_m^4 + 40 y_m^2 \Delta y^2 + \Delta y^4) \right. \\ \left. + 6 \zeta (240 x_m^2 y_m^2 + 20 x_m^2 \Delta y^2 + 20 y_m^2 \Delta x^2 \right. \\ \left. + 80 x_m y_m \Delta x \Delta y + 3 \Delta x^2 \Delta y^2)] \right\} + N Gl_6.$$

3. Die Reduktionen bei der verallgemeinerten stereographischen Abbildung

a) Die Richtungsreduktion

Aus Gleichung (136) folgt

$$m = \left[1 + \frac{1}{4 r^2} (x^2 + y^2) \right] \left[1 - \frac{2}{9} \frac{\eta^2 t}{r^2 N} (2 x^3 + 3 x y^2) + \eta^2 Gl_4 \right]. \quad (175)$$

Ersetzen wir x und y durch x und y unter Beachtung der Gleichungen (158) bis (160) und vernachlässigen wir den Unterschied zwischen $r^2 \cdot N$ und r^3 , so wird

$$\frac{\delta \ln m}{\delta x} = \frac{1}{2 r^2} (x + a) \left[1 - \frac{1}{4 r^2} (x_m^2 + y_m^2 + x^2 + 2 a x) + Gl_4 \right] \\ - \frac{2}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} [2 x_m^2 \cos t + 2 x_m y_m \sin t + y_m^2 \cos t + 2 x (2 x_m \cos^2 t \\ + x_m \sin^2 t + 2 y_m \sin t \cos t) + x^2 (2 \cos^3 t + 3 \sin^2 t \cos t)] \\ + \eta^2 \frac{1}{N} Gl_3 \quad (176)$$

$$\frac{\delta \ln m}{\delta y} = \frac{1}{2 r^2} (y - \beta) \left[1 - \frac{1}{4 r^2} (x_m^2 + y_m^2 + x^2 + 2 a x) + Gl_4 \right] \\ + \frac{2}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} [2 x_m^2 \sin t - 2 x_m y_m \cos t + y_m^2 \sin t \\ + 2 x (x_m \sin t \cos t - y_m \cos^2 t + y_m \sin^2 t) + x^2 \sin^3 t] + \eta^2 \frac{1}{N} Gl_3.$$

Unter Hinweis auf die auch hier gültigen Bemerkungen vor Gleichung (165) bilden wir

$$y'' = y' \frac{\delta \ln m}{\delta x} - \frac{\delta \ln m}{\delta y} + \frac{1}{r} Gl_5.$$

Es wird

$$y'' = \frac{1}{2r^2} (x+a) y' - \frac{1}{2r^2} (y-\beta) \left[1 - \frac{1}{4r^2} (x_m^2 + y_m^2 + x^2 + 2ax) + Gl_4 \right] - \frac{2}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} [2x_m^2 \sin t - 2x_m y_m \cos t + y_m^2 \sin t + 2x(x_m \sin t \cos t - y_m \cos^2 t + y_m \sin^2 t) + x^2 \sin^3 t] + \eta^2 \frac{1}{N} Gl_3 \text{ bzw. } \frac{1}{r} Gl_4$$

$$y''' = \frac{1}{2r^2} (x+a) y'' - \frac{1}{4r^4} (x+a) - \frac{4}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} [x_m \sin t \cos t - y_m (\cos^2 t - \sin^2 t) + x \sin^3 t] + \eta^2 \frac{1}{N^2} Gl_2 \text{ bzw. } \frac{1}{r^2} Gl_3 \quad (177)$$

$$y^{IV} = \frac{1}{2r^2} y''' - \frac{1}{4r^4} - \frac{4}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} \sin^3 t + \eta^2 \frac{1}{N^3} Gl_1 \text{ bzw. } \frac{1}{r^3} Gl_2$$

$$y^V = \frac{1}{r^2} y^{IV} + \frac{1}{N^4} Gl_3.$$

Genähert ist $y'' = \frac{\beta}{2r^2} + \frac{1}{r} Gl_3$. Damit wird

$$y_m''' = -\frac{4}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} [x_m \sin t \cos t - y_m (\cos^2 t - \sin^2 t)] + \eta^2 \frac{1}{N^2} Gl_2$$

$$y_m^{IV} = -\frac{4}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} \sin^3 t + \eta^2 \frac{1}{N^3} Gl_2 \quad (178)$$

$$y_m^V = \eta^2 \frac{1}{N^4} Gl_1.$$

Nach der zweiten Gleichung (155) ergibt sich sodann

$$y_m' = -\frac{1}{24} l^2 y_m''' = +\frac{1}{18} \frac{\eta^2 t}{r^3} [x_m l^2 \sin t \cos t - y_m l^2 (\cos^2 t - \sin^2 t)] + \eta^2 Gl_2.$$

Damit wird nach der ersten Gleichung (177)

$$y_m'' = \frac{\beta}{2r^2} - \frac{\beta}{32r^4} (4x_m^2 + 4y_m^2 - l^2) - \frac{2}{3} \frac{\eta^2 t}{r^3} (2x_m^2 \sin t - 2x_m y_m \cos t + y_m^2 \sin t) + \eta^2 \frac{1}{r} Gl_3. \quad (179)$$

Setzt man die Gleichungen (179) und (178) in die erste Gleichung (157) ein, so erhält man nach einigen Zusammenfassungen in analytischem Maß

$$\tau_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{4r^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2} - \frac{1}{36} \frac{\eta^2 t}{r^3} [4(x_2 y_1 - x_1 y_2) (6x_m - \Delta x) - \Delta y (12y_m^2 - 4y_m \Delta y + \Delta y^2)] + \eta^2 Gl_4 \quad (180)$$

mit $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$.

Man erhält τ_2 , wenn man in den Gleichungen (180) die Kennziffern $_1$ und $_2$ vertauscht.

b) Die Längenreduktion

Aus Gleichung (136) folgt

$$\frac{1}{m} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{4r^2} + \frac{(x^2 + y^2)^2}{16r^4} + \frac{2}{9} \frac{\eta^2 t}{r^3} (2x^3 + 3xy^2) + \eta^2 Gl_4. \quad (181)$$

Wir ersetzen mit Hilfe der Gleichungen (158) bis (160) x und y durch r und y . Aus Gleichung (156) ergibt sich

$$y = -\frac{1}{16} \frac{l^2}{r^2} \beta + \frac{1}{4} \frac{\beta}{r^2} r^2 + r Gl_5 \text{ und daraus } y' = \frac{1}{2r^2} \beta r + Gl_4. \quad (182)$$

Damit erhalten wir nach einigen Umformungen für Gleichung (161)

$$s = \int \frac{l}{2} \frac{1}{m} \left[1 + \frac{1}{2} y'^2 \right] dx$$

$$= \frac{l}{mm} + l \left\{ -\frac{1}{48} \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{32r^4} (x_m \Delta x + y_m \Delta y)^2 + \frac{1}{1280} \frac{l^4}{r^4} + \frac{1}{18} \frac{\eta^2 t}{r^3} (2x_m \Delta x^2 + x_m \Delta y^2 + 2y_m \Delta x \Delta y) \right\} \quad (183)$$

$$= l \left\{ 1 - \frac{x_m^2 + y_m^2}{4r^2} - \frac{1}{48} \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{1280} \frac{l^4}{r^4} + \frac{(x_m^2 + y_m^2)^2}{16r^4} + \frac{1}{32r^4} (x_m \Delta x + y_m \Delta y)^2 + \frac{1}{18} \frac{\eta^2 t}{r^3} (8x_m^3 + 12x_m y_m^2 + 2x_m \Delta x^2 + x_m \Delta y^2 + 2y_m \Delta x \Delta y) + \eta^2 Gl_4 \right\}.$$

VII. Bemerkungen zu der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung und insbesondere zur verallgemeinerten stereographischen Abbildung des Erdellipsoids

1. Untersuchung über die Formtreue der Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels

Es ist zu untersuchen, ob auch bei der im Abschnitt IV durchgeführten verallgemeinerten konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids ein geodätischer Strahlenbüschel formtreu abgebildet wird. Diese geometrische Eigenschaft ist ja, wie in der Einleitung ausgeführt worden ist, der konformen Lambertabbildung der Kugel und ihren beiden Grenzfällen, der Mercatorabbildung und der stereographischen Projektion, gemeinsam.

Aus Gleichung (150) folgt für die Krümmung k des ebenen Abbildes einer geodätischen Linie bei der konformen Abbildung

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left(y' \frac{\delta \ln m}{\delta x} - \frac{\delta \ln m}{\delta y} \right) \text{ oder, wegen } y' = \operatorname{tg} T, \quad (184)$$

$$k = \frac{\delta \ln m}{\delta x} \sin T - \frac{\delta \ln m}{\delta y} \cos T = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta m}{\delta x} \sin T - \frac{\delta m}{\delta y} \cos T \right).$$

Dieselbe Formel hat Laborde ([14] S. 62 Gleichung (41)) auf einem anderen Wege abgeleitet. T ist der Richtungswinkel des ebenen Abbildes der geodätischen Linie.

Angenommen, der Koordinatenursprung liege im Abbild des Scheitels des betrachteten geodätischen Strahlenbüschels und dieses Büschel werde in der Ebene als Geradenbüschel, also formtreu, abgebildet, so müßte

$$k = \frac{1}{m} \left(\frac{\delta m}{\delta x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\delta m}{\delta y} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad y \frac{\delta m}{\delta x} - x \frac{\delta m}{\delta y} = 0 \quad (185)$$

sein. Betrachtet man das Vergrößerungsverhältnis m als die dritte Koordinate zu x und y und steht die m -Achse im Koordinatenursprung senkrecht auf der xy -Ebene, so stellt die Gleichung (185) die partielle Differentialgleichung für alle Umdrehungsflächen mit der m -Achse als Drehachse dar (Rothe [13] III. S. 132 Gleichung (25)). Das bedeutet, daß die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses m Kreise um das Abbild des Scheitels des geodätischen Strahlenbüschels sein müssen. Diese Kreise schneiden die einzelnen Strahlen des ebenen Geradenbüschels rechtwinklig. Hieraus folgt — wegen der Konformität —, daß die Urbilder dieser Kreise die orthogonalen Trajektorien des betrachteten geodätischen Strahlenbüschels sind.

Wir wenden die Gleichung (185) auf die verallgemeinerte stereographische Abbildung des Erdellipsoids an. Es folgt aus Gleichung (136)

$$y \frac{\delta m}{\delta x} - x \frac{\delta m}{\delta y} = -\frac{2}{3} \frac{\eta^2 t}{r^2 N} y^3 + \eta^2 G l_4. \quad (186)$$

Die linke Seite der Gleichung (185) wird also nicht null; es ist also die Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels durch den Normalpunkt nicht formtreu.

Man kann diese Tatsache auch aus der Gleichung (180) für die Winkelreduktion schließen. Im Fall $x_1 = y_1 = 0$ müßte sich bei der formtreuen Abbildung $\tau_1 = 0$ ergeben. Es wird aber

$$\tau_1 = \frac{1}{18} \frac{\eta^2 t}{r^3} y_2^3 + y^2 G l_4. \quad (187)$$

Wir wollen schließlich noch den Wert von η_m für den Fall der stereographischen Abbildung berechnen. Es wird nach der ersten Gleichung (155)

$$\eta_m = -\frac{1}{16} \frac{l^2}{r^2} \beta + \frac{\beta l^2}{256 r^4} (4 x_m^2 + 4 y_m^2 - l^2) + \frac{1}{12} \frac{\eta^2 t}{r^3} l (2 x_m^2 \Delta y - 2 x_m y_m \Delta x + y_m^2 \Delta y) + \frac{l}{288} \frac{\eta^2 t}{r^3} \Delta y^3.$$

Für $x_1 = y_1 = 0$ wird $\beta = 0$ und damit

$$\eta_m = \frac{7}{288} \frac{\eta^2 t}{r^3} l y_2^3 + \eta^2 l G l_4. \quad (188)$$

Auch hier zeigt sich, daß die geodätischen Linien durch den Normalpunkt sich nicht als Gerade abbilden. Bemerkenswert ist, daß bis zur angegebenen Ordnung η_m nur von y , nicht aber von x abhängig ist. Im allgemeinen wird η_m ungefähr den größten Abstand des Abbildes der geodätischen Linie von der Sehne zwischen den Abbildern ihrer Endpunkte darstellen. Aus diesem Grunde soll ein Zahlenwert für η_m gegeben werden: Es sei $y = 450\,000$ m; $l = 500\,000$ m; $\varphi = 50^\circ$. Dann wird $\eta_m = 0,014$ m.

Zur Ermittlung der tatsächlichen maximalen Werte von η wäre eine genauere Untersuchung der Abbilder von geodätischen Linien erforderlich, eine Untersuchung, die bei der stereographischen Abbildung zweifellos sehr lehrreich und wichtig wäre. Hier soll jedoch davon abgesehen werden.

Daß es eine stereographische Abbildung mit formtreuer Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels, das den Normalpunkt als Scheitel hat, überhaupt nicht geben kann, hätte schon aus dem vergeblichen Versuch im Abschnitt III zu 3. d) geschlossen werden können, eine konforme Abbildung des Erdellipsoids mit geradliniger Abbildung eines Meridians zu finden, bei der im Abbild die Linien konstanten Vergrößerungsverhältnisses Kreise um den Koordinatenursprung sind. Denn damit war zugleich die Unmöglichkeit erwiesen, der Gleichung (185) gerecht zu werden.

Die bisherigen Betrachtungen haben ergeben, daß bei der verallgemeinerten stereographischen Abbildung des Erdellipsoids das geodätische Strahlenbüschel nicht formtreu abgebildet wird, wenn man von Sonderfällen (Normalpunkt im Pol) absieht.

Bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids läßt sich dieser Nachweis nicht so einfach führen. Es läßt sich keine Gleichung aufstellen, die der Gleichung (186) entspricht und nur Glieder mit η^2 enthält, weil sich auch bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung der Kugel kein strenger geschlossener Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis m in Abhängigkeit von x und y ergibt, wie das bei der stereographischen Projektion der Fall ist. Die Gleichung (121) stellt nämlich — auch bei Vernachlässigung der von der Abplattung abhängigen Glieder mit η^2 und η^4 , d. h. für den Fall der Kugel — nur den Beginn einer Reihenentwicklung nach Potenzen von x und y dar, bei der es nicht ohne weiteres nachweisbar ist, daß die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses m Kreise um das Abbild des Scheitels des geodätischen Strahlenbüschels sind, wie es bei der konformen Lambertabbildung der Kugel der Fall ist. Aus diesem Grunde läßt sich ohne besondere Umstände auch nicht nachweisen, daß die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses m — gemäß Gleichung (121) — bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids nicht Kreise sind. Wir beschränken uns daher darauf, dieses aus der Tatsache zu schließen, daß auch bei dem Grenzfall der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung, nämlich der verallgemeinerten stereographischen Abbildung des Erdellipsoids, die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses m nicht Kreise sind. Wie bei der stereographischen Abbildung wird auch bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung durch das Hinzutreten der von der Abplattung abhängigen Glieder die Kreisform zerstört. Das gleiche gilt für die verallgemeinerte Mercatorabbildung des Erdellipsoids.

Es erhebt sich nun die Frage, ob es überhaupt eine konforme Abbildung des Erdellipsoids gibt, welche zugleich die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels ermöglicht. Die Antwort muß „nein“ lauten; wobei wiederum von Ausnahmefällen (mit den Polen als Scheitel des Büschels) abzusehen ist. Wollte man nämlich die Formeln für eine solche Abbildung aufstellen, so müßte man den Ansatz dazu derart machen, daß der Gleichung (185) genügt wird. Das heißt, man müßte ihn so machen, daß eine geodätische Linie des Büschels formtreu, d. h. als Gerade, abgebildet wird und daß in der Abbildung der Kreis um das Abbild des Scheitels des geodä-

tischen Strahlenbüschels sein Urbild, eine orthogonale Trajektorie des Büschels, in ein und demselben Maßstab darstellt, so daß dieser Kreis eine Linie gleichen Vergrößerungsverhältnisses m ist.

Genau dieser Ansatz ist aber im Abschnitt IV, 1. a) Gleichung (76) gemacht worden. Es hat sich jetzt gezeigt, daß sich aus diesem Ansatz keine formtreue Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels ergeben hat. Aus dieser Tatsache ist nun zu folgern, daß die formtreue Abbildung überhaupt nicht möglich ist, weil es — wie bereits mehrmals gesagt (vgl. Abschnitt III 1. b) und 4. a) — nicht zwei verschiedene konforme Abbildungen gibt, bei denen eine Linie beide Male nach dem gleichen Gesetz abgebildet wird. Zugleich ist anzunehmen, daß bei den hier durchgeführten Abbildungen die größte Annäherung an die Formtreue erreicht wird, die überhaupt möglich ist.

Wenn die formtreue Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels möglich wäre, so müßten die Abbilder der orthogonalen Trajektorien des Büschels Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses und zugleich konzentrische Kreise sein. Das bedeutet, daß sich die Stücke der einzelnen geodätischen Linien vom Büschelscheitel bis zu einer ihrer orthogonalen Trajektorien sämtlich geradlinig und damit gleich lang abbilden müßten oder, mit anderen Worten, daß das Vergrößerungsverhältnis auf den einzelnen Strahlen nur von ihrer Länge abhängig sein dürfte. Das ist aber bei dem von uns in Gleichung (82) gefundenen Vergrößerungsverhältnis $m_0 = m_0 \cdot R : R_0 \cdot m$ nicht der Fall, weil m und m_0 beim Erdellipsoid außer von der Länge s noch von dem Azimut α der geodätischen Linien abhängig sind, wie aus der Gleichung (103) hervorgeht. Diese Abhängigkeit der reduzierten Länge m vom Azimut α bedingt zugleich, daß sich auch die geodätische Krümmung einer orthogonalen Trajektorie — vgl. Gleichung (85) — mit dem Azimut ändert und nicht — wie bei der Kugel — konstant ist. Wir müssen also beim Erdellipsoid zwischen geodätischen Entfernungskreisen (das sind eben die orthogonalen Trajektorien des geodätischen Strahlenbüschels, die von dem Scheitel des Büschels konstanten Abstand haben) und geodätischen Krümmungskreisen (das sind die Linien gleicher geodätischer Krümmung) unterscheiden. In der Differentialgeometrie wird nachgewiesen, daß beide Arten von Kreisen nur bei Flächen konstanter Krümmung ($K = \text{konst}$) zusammenfallen können (Blaschke [12] S. 154 § 72). Es besteht daher Grund zu der Annahme, daß die konforme und zugleich formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels ebenfalls nur bei Flächen konstanter Krümmung möglich ist.

Es sei noch erwähnt, daß die aus der Gleichung (185) gezogene Folgerung (daß die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses Kreise sein müssen, wenn sich die geodätischen Linien des Büschels formtreu, also geradlinig abbilden) in Übereinstimmung mit den von Laborde festgestellten Beziehungen zwischen den „Isometern“ und „Isomorphen“ steht (Laborde [14] S. 38 Nr. 12): Danach wird bei der konformen Abbildung die Änderung der geodätischen Krümmung ein Maximum für solche Bildkurven von Linien der ursprünglichen Fläche, die tangential zu den Linien konstanten Vergrößerungsverhältnisses, den „Isometern“, verlaufen, und die Änderung der geodätischen Krümmung wird zu null für die Bildkurven, die senkrecht auf den Isometern stehen. Die orthogonalen Trajektorien der Isometer, d. h. der Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses oder gleichen Maßstabs, sind also „Isomorphen“, d. h. formtreue Linien. Sind die Isometer konzentrische Kreise, so müssen demnach die Isomorphen ein Strahlenbüschel bilden.

2. Vergleichung verschiedener „stereographischer“ Abbildungen des Erdellipsoids

Lambert hatte sich bei der Ableitung seiner Formeln für die stereographische Abbildung auf den Fall beschränkt, daß einer der Pole (der Kugel und des Ellipsoids) Normalpunkt der Abbildung ist.

Bereits im Jahre 1779 veröffentlichte Lagrange eine Abhandlung ([5] S. 3), in der er eine der in der Einleitung erwähnten Eigenschaften der stereographischen Projektion der Kugel, nämlich die der Abbildung der Kugelnkreise als ebene Kreise, teilweise auf eine Abbildung des Erdellipsoids mit beliebiger Lage des Normalpunkts übertrug. Er entwickelte eine allgemeine Formel für sämtliche konformen Abbildungen des Erdellipsoids, bei denen die Meridiane und Breitenkreise als Kreise abgebildet werden. Es gibt hierbei unendlich viele Möglichkeiten, die in der von ihm abgeleiteten Abbildungsformel durch die verschiedenen Werte einer Konstanten c gekennzeichnet werden. Für $c = 1$ erhält er eine Abbildung, die der stereographischen Projektion der Kugel bei beliebiger Lage des Normalpunkts entspricht.

Als Beantwortung einer von der königlichen Sozietät der Wissenschaften in Kopenhagen für 1822 aufgegebenen Preisfrage brachte dann C. F. Gauß seine „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“ ([2] S. 189). Er entwickelte hierin u. a. zwecks konformer Darstellung der Oberfläche des Erdellipsoids in der Ebene x und y als Funktion von φ und l . Aus der besonderen Wahl dieser Funktion ergeben sich verschiedenartige Abbildungen. U. a. erhält er — nach seinen Worten — „eine der stereographischen Polarprojektion analoge“ Abbildung mit beliebiger Lage des Normalpunkts. L. Krüger [7] hat diesen Fall eingehender behandelt und dabei festgestellt, daß sich bei ihm die Meridiane und Parallelkreise als ebene Kreise abbilden ([7] S. 10). Professor Eggert ([18] S. 158) hat die bereits von Grabowski ([11] S. 4) erwähnte Tatsache bestätigt, daß diese Abbildung auch als konforme Doppelabbildung aufgefaßt werden kann, bei der zunächst das Ellipsoid konform auf eine Kugel mit dem Radius N_0 im Normalpunkt und gleich großer Normalbreite übertragen wird und dann die Kugel unter Beibehaltung des Normalpunkts durch stereographische Projektion auf die Ebene abgebildet wird (d. h. $A = N_0$ und $\alpha = 1$; vgl. Abschnitt IV. 3. c). G. Lehmann hat gezeigt, daß die „stereographischen“ Abbildungen von Gauß und von Lagrange identisch sind ([22] S. 339).

Eine andere stereographische Abbildung des Erdellipsoids erhält man, wenn man bei der Doppelabbildung an die Stelle der Kugel mit dem Radius $A = N_0$ die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{N_0 M_0}$ treten läßt (statt $\alpha = 1$ hat man $\alpha^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ — vgl. z. B. [8] S. 574 Gleichung (15) —). Weil sich diese Kugel in dem Normalpunkt besser an das Ellipsoid anschmiegt als die erste Kugel, erhält man günstigere Werte für das Vergrößerungsverhältnis. Diese Art der Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist zuerst 1844 von Gauß angegeben worden ([2] S. 259 ff).

Es soll noch nachgewiesen werden, daß das Ergebnis, das man erhält, wenn man diese Kugel mittels stereographischer Projektion unter Beibehaltung des Normalpunkts auf die Ebene abbildet, identisch mit derjenigen Abbildung ist, die sich ergibt, wenn man in der erwähnten Lagrange'schen

Abbildungsformel $c^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ setzt. Diese Identität ist auch von G. Lehmann festgestellt worden.

Für das Vergrößerungsverhältnis bei den Lagrange'schen Abbildungen des Ellipsoids auf die Ebene gilt nach G. Lehmann ([22] Gleichung 14d)

$$m = \frac{2 N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} \frac{2 c^2 e^{\Delta q}}{(c - \sin \varphi_0)^2 + 2 e^{\Delta q} (c^2 - \sin^2 \varphi_0) \cos c l + e^{2 \Delta q} (c + \sin \varphi_0)^2}.$$

$$\text{Es ist } e^{\Delta q} = \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} : \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e}{2}}.$$

Ist das Ellipsoid auf eine Kugel mit den geographischen Koordinaten u und λ nach dem Gesetz (vgl. Jordan-Eggert Bd. III [8] §§ 102, 103)

$$\operatorname{tg} \left(45 + \frac{u}{2} \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}^a \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{a e}{2}}; \lambda = a l$$

abgebildet worden, wobei

$a^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ und damit $a \cos u_0 = V_0 \cos \varphi_0$, $a \sin u_0 = \sin \varphi_0$, $r = \sqrt{M_0 N_0}$ sein soll, so wird, wenn $w = \ln \operatorname{tg} (45 + u/2)$ die isometrische Breite der Kugel ist,

$$e^{\Delta w} = \operatorname{tg} \left(45 + \frac{u}{2} \right) : \operatorname{tg} \left(45 + \frac{u_0}{2} \right) \\ = \operatorname{tg}^a \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{a e}{2}} : \operatorname{tg}^a \left(45 + \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{a e}{2}},$$

$$\text{d. h. } e^{\Delta w} = e^{a \Delta q}.$$

Das Vergrößerungsverhältnis bei dieser Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel ist

$$m_1 = a \frac{\sqrt{M_0 N_0} \cos u}{N \cos \varphi}.$$

Bilden wir die Kugel auf die Ebene nach der Lagrange'schen Formel mit der Konstanten c_1 ab, so erhalten wir als Vergrößerungsverhältnis

$$m_k = \frac{2 A \cos u_0}{A \cos u} \frac{2 c_1 e^{c_1 \Delta w}}{(c_1 - \sin u_0)^2 + 2 e^{c_1 \Delta w} (c_1^2 - \sin^2 u_0) \cos c_1 \lambda + e^{2 c_1 \Delta w} (c_1 + \sin u_0)^2} \\ = \frac{2 V_0 \cos \varphi_0}{a \cos u} \frac{2 a^2 c_1^2 e^{a c_1 \Delta q}}{(a c_1 - \sin \varphi_0)^2 + 2 e^{a c_1 \Delta q} (a^2 c_1^2 - \sin^2 \varphi_0) \cos a c_1 l + e^{2 a c_1 \Delta q} (a c_1 + \sin \varphi_0)^2}.$$

Für den gesamten Übergang vom Ellipsoid zur Ebene gilt dann

$$m = m_1 m_k.$$

Setzen wir $a c_1 = c$, so ergibt sich für m der oben angegebene Wert. Bilden wir die Kugel stereographisch auf die Ebene ab, so muß $c_1 = 1$ sein, und es wird

$$c^2 = a^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0.$$

Es ist also die Lagrange'sche Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene bei Benutzung der Konstanten $c^2 = a^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ identisch mit derjenigen Doppelabbildung, bei der das Ellipsoid zunächst auf die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$ und dann die Kugel unter Beibehaltung des Normalpunkts „stereographisch“ auf die Ebene abgebildet wird.

Eine dritte Art von stereographischer Abbildung hat Roussilhe angegeben ([9] S. 330). Irgendwelche Erwägungen geometrischer Art stellt er nicht an. Er beabsichtigt lediglich, Formeln aufzustellen, in denen x und y als Funktionen der geographischen Breite und Länge des Erdellipsoids erscheinen und die eine der stereographischen Projektion der Kugel analoge Abbildung ergeben. Zu diesem Zweck geht er von der für die Kugel gültigen Formel $x = 2 r \operatorname{tg} (s/2 r)$ aus und entwickelt sie für den Meridian, der geradlinig abgebildet werden soll, in eine Reihe. Er setzt $r = \sqrt{NM}$.

Im Gegensatz dazu legt Professor Eggert ([18] S. 160) dem Ansatz seiner Formelentwicklung die Forderung zugrunde, daß die erzielte Abbildung „azimutal“ sein soll. Hierbei versteht er unter „azimutal“ nicht nur, daß in der Abbildung die Azimute der von dem Normalpunkt ausgehenden Richtungen erhalten bleiben — das ist bei konformen Abbildungen stets der Fall —, sondern es sollen insbesondere die Vertikalschnittbögen durch den Normalpunkt als Gerade in der Ebene abgebildet werden. Zum Schluß seiner Arbeit gibt Professor Eggert noch einen Weg an, der einzuschlagen wäre, wenn man statt der Vertikalschnittbögen die geodätischen Linien durch den Normalpunkt geradlinig abbilden wollte.

In der vorliegenden Arbeit schließlich ist die stereographische Abbildung des Erdellipsoids als Grenzfall der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung durchgeführt worden, deren Grundgleichung mit dem Ziel entwickelt worden ist, in möglichst großer Annäherung die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels zu erlangen. Als Grundgleichung dieser Abbildung hat sich für das Vergrößerungsverhältnis einer geradlinig abgebildeten geodätischen Linie der Ausdruck $m_0 = x/m$ — vgl. Gleichung (124) — ergeben. Denselben Ausdruck erhält man, wenn man den eben erwähnten von Professor Eggert angegebenen Weg einschlägt.

Die genannten Arten der stereographischen Abbildung wollen wir jetzt miteinander vergleichen. Als Vergleichungsmittel soll das Vergrößerungsverhältnis dienen. Wir müssen daher die Vergrößerungsverhältnisse der einzelnen Abbildungen aufstellen. Wir beginnen mit der Doppelabbildung auf dem Weg über die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$. Für die Vergleichung genügt es, nur bis zu den Gliedern $\eta^2 \cdot Gl_3$ einschließlich zu gehen.

a) Vergrößerungsverhältnis m_a für den Fall der Abbildung des Erdellipsoids auf die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$ und darauffolgender stereographischer Projektion der Kugel auf die Ebene. Hiermit identisch ist die Lagrange'sche Abbildung mit der Konstanten $c^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$

Nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 583 Gleichung (15)) besteht für das Vergrößerungsverhältnis bei der Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$:

$$m_{a_1} = 1 - \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V^4} t \Delta \varphi^3. \quad (189)$$

Bezeichnen wir die geographische Breite und Länge der Kugel mit u und λ , so gilt nach Gleichung (135) für die stereographische Projektion der Kugel auf die Ebene

$$m_{a_2} = 1 + \frac{1}{4} \Delta u^2 + \frac{1}{4} \cos^2 u_0 \lambda^2 - \frac{1}{4} t \cos^2 u_0 \Delta u \lambda^2 \text{ mit } \Delta u = u - u_0. \quad (190)$$

Nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 572 Gleichung (11), S. 575 Gleichungen (17), (17a) und S. 579 Gleichung (18)) ist

$$\lambda = a l, \quad a \cos u_0 = V \cos \varphi_0, \quad V \operatorname{tg} u_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$$

und

$$\Delta u = \frac{1}{V} \Delta \varphi + \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^3} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^3} (1 - t^2) \Delta \varphi^3. \text{ Damit wird}$$

$$\Delta u^2 = \frac{1}{V^2} \Delta \varphi^2 + 3 \eta^2 t \Delta \varphi^3, \quad \Delta u^3 = \frac{1}{V^3} \Delta \varphi^3 \quad \text{und} \quad (191)$$

$$\cos^2 u_0 \lambda^2 = \cos^2 \varphi_0 V^2 l^2$$

und

$$m_{a_2} = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{V^2} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} V^2 \cos^2 \varphi_0 l^2 + \frac{3}{4} \eta^2 t \Delta \varphi^3 - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi_0 \Delta \varphi l^2. \quad (192)$$

Somit wird

$$m_a = m_{a_1} m_{a_2} = 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi^2$$

$$+ \frac{1}{4} (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi_0 l^2 + \frac{1}{12} \eta^2 t \Delta \varphi^3 - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi_0 \Delta \varphi l^2. \quad (193)$$

b) Vergrößerungsverhältnis m_b für den Fall der Abbildung des Erdellipsoids auf die Kugel mit dem Radius $A = N_0$ und darauffolgender stereographischer Projektion der Kugel auf die Ebene. Hiermit sind identisch die „stereographischen“ Abbildungen von Lagrange — $c = 1$ — und Gauß (Krüger)

Nach C. F. Gauß ([3] S. 111 [4]) gilt für das Vergrößerungsverhältnis m_{b_1} bei der Abbildung des Erdellipsoids auf die Kugel mit dem Radius $A = N_0$

$$\ln m_{b_1} = \ln n = \frac{1}{2} h \cos P^2 \frac{x x (1 - e e \sin P^2)}{a a}$$

$$+ \frac{1}{2} h \sin P \cos P (1 + \frac{4}{3} h \cos P^2) \frac{x^3 (1 - e e \sin P^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}.$$

Hierin ist

$$h = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad P = \varphi_0; \quad x = (\psi - P) \frac{a}{\sqrt{1 - e e \sin P^2}}; \quad \psi = u;$$

es ist x nach Süden positiv.

Ferner ist nach S. 112 [6] a. a. O.

$$\Delta u = \psi - P = \frac{1 - e e}{1 - e e \sin P^2} \delta + \frac{3}{4} \frac{e e (1 - e e) \sin 2 P}{(1 - e e \sin P^2)^2} \delta \delta \text{ mit } \delta = \Delta \varphi = \varphi - \varphi_0.$$

Berücksichtigen wir noch, daß nach Jordan-Eggert Bd. III ([8] S. 197 Gleichung (5), S. 204 Gleichung (15) und S. 205 Gleichung (25))

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = e'^2; \quad 1 - e^2 \sin^2 \varphi = W^2; \quad \frac{1 - e^2}{W^2} = \frac{1}{V^2} \text{ und } \frac{e^2}{W^2} = \frac{e'^2}{V^2} \text{ ist,}$$

so wird

$$\Delta u = \frac{1}{V^2} \Delta \varphi + \frac{3}{2} \frac{\eta^2 t}{V^4} \Delta \varphi^2; \quad \Delta u^2 = \frac{1}{V^4} \Delta \varphi^2 + 3 \eta^2 t \Delta \varphi^3; \quad \Delta u^3 = \frac{1}{V^6} \Delta \varphi^3 \quad (194)$$

und damit

$$m_{b_1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{V^4} \Delta \varphi^2 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2 t}{V^6} \Delta \varphi^3. \quad (195)$$

Bei der stereographischen Projektion der Kugel auf die Ebene wird nach Gleichung (135) das Vergrößerungsverhältnis

$$m_{b_2} = 1 + \frac{1}{4} \Delta u^2 + \frac{1}{4} \cos^2 u_0 \lambda^2 - \frac{1}{4} t \cos^2 u_0 \Delta u \lambda^2$$

und wegen der Gleichungen (194) wird mit $\lambda = l$ und $u_0 = \varphi_0$

$$m_{b_2} = 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{V^4} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_0 l^2 + \frac{3}{4} \eta^2 t \Delta \varphi^3 - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi_0 \frac{1}{V^2} \Delta \varphi l^2 \quad (196)$$

und damit

$$m_b = m_{b_1} m_{b_2} = 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_0 l^2 + \frac{1}{4} \eta^2 t \Delta \varphi^3$$

$$- \frac{1}{4} t (1 - \eta^2) \cos^2 \varphi_0 \Delta \varphi l^2. \quad (197)$$

c) Vergrößerungsverhältnis m_c bei der Eggert'schen stereographischen Abbildung des Erdellipsoids

Entsprechend Lehmann ([22] S. 426 Gleichung (36c)) ergibt sich als Abbildungsgesetz für den Meridian

$$x = s + \frac{1}{12} \frac{1}{N^2} (1 + 2 \eta^2 \cos^2 \alpha + \eta^4 \cos^4 \alpha) s^3 - \frac{1}{8} \frac{1}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha s^4$$

$$+ \frac{1}{120} \frac{1}{N^4} s^5 + \dots \quad (198)$$

Im Hinblick auf die Gleichung (19) ist demnach, wenn wir nur bis zu den Gliedern 4. Ordnung einschließlich gehen,

$$a_3 = \frac{1}{12} \frac{1}{N^2} (1 + 2 \eta^2 \cos^2 \alpha + \eta^4 \cos^4 \alpha) \quad \text{und} \quad a_4 = -\frac{1}{8} \frac{1}{N^3} \eta^2 t \cos \alpha. \quad (199^*)$$

Nach Gleichungen (21a) wird dann

$$c_3 = -\frac{1}{12} \frac{N \cos^3 \varphi}{\cos \alpha} (1 - 2 t^2 - \eta^4) \quad \text{und} \quad c_4 = \frac{1}{24} \frac{N t \cos^4 \varphi}{\cos \alpha} (2 - t^2 - \eta^4). \quad (199)$$

Setzen wir die Gleichungen (199*) in die Gleichung (46*) und — zur Kontrolle — die Gleichungen (199) in die Gleichung (46) ein, so bekommen wir als Vergrößerungsverhältnis für die konforme Abbildung

$$m_c = 1 + \frac{1}{4} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi_0 (1 - \eta^4) l^2 + \frac{1}{4} \eta^2 t \Delta \varphi^3$$

$$- \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi_0 (1 - \eta^2) \Delta \varphi l^2. \quad (200)$$

Dieses Vergrößerungsverhältnis gilt für eine konforme Abbildung, bei der der Meridian nach dem durch Gleichung (198) angegebenen Gesetz abgebildet wird. Hierzu ist zu bemerken, daß bei der Art der von Professor Eggert gewählten Herleitung der Übertragungsformeln die strenge Konformität nicht gewährleistet ist (vgl. Lehmann [22] S. 430).

d) Vergrößerungsverhältnis m_d bei der Roussilhe'schen stereographischen Abbildung des Erdellipsoids

Roussilhe ([9] S. 330 Gleichung (327)) hat für die Abbildung des Meridians entsprechend der für die Kugel gültigen Formel $x = 2 r_0 \operatorname{tg} \left(\frac{s}{2 r_0} \right)$ die Gleichung

$$x = s + \frac{1}{12 M N} s^3 + \frac{1}{120 M^2 N^2} s^5 + \dots \quad (201)$$

angesetzt. Wegen Gleichung (19) wird also

$$a_3 = \frac{1}{12 M N} = \frac{1}{12 N^2} (1 + \eta^2) \quad \text{und} \quad a_4 = 0 \quad (202^*)$$

und damit wegen Gleichungen (21a)

$$c_3 = -\frac{1}{12} \frac{N \cos^3 \varphi}{\cos \alpha} (1 - 2 t^2 + \eta^2) \quad \text{und} \quad c_4 = \frac{1}{24} \frac{N t \cos^4 \varphi}{\cos \alpha} (2 - t^2 + 6 \eta^2). \quad (202)$$

Setzen wir die Gleichungen (202*) in die Gleichung (46*) und — zur Kontrolle — die Gleichungen (202) in die Gleichung (46) ein, so erhalten wir für das Vergrößerungsverhältnis den Ausdruck

$$m_d = 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{3}{4} \eta^2 t \Delta \varphi^3 - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi (1 + 8 \eta^2) \Delta \varphi l^2. \quad (203)$$

e) Vergrößerungsverhältnis m_e bei der hier abgeleiteten verallgemeinerten stereographischen Abbildung

Nach Gleichung (135) ist

$$m_e = 1 + \frac{1}{4} (1 - \eta^2 + \eta^4) \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) l^2 + \frac{11}{36} \eta^2 t \Delta \varphi^3 - \frac{1}{12} t \cos^2 \varphi (3 + 8 \eta^2) \Delta \varphi l^2. \quad (204)$$

Die verschiedenen hier betrachteten ebenen konformen Abbildungen des Erdellipsoids sind auch voneinander konforme Abbildungen. Denken wir uns z. B. die durch die Doppelabbildung über die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$ erzielte Darstellung in die anderen Darstellungen konform abgebildet, so erhalten wir als Vergrößerungsverhältnisse

$$\begin{aligned} m_b' &= \frac{m_b}{m_a} = 1 + \frac{1}{4} \eta^2 (1 - 2 \eta^2) \Delta \varphi^2 - \frac{1}{4} \eta^2 \cos^2 \varphi_0 l^2 \\ &\quad + \frac{1}{72} \eta^2 t \Delta \varphi (12 \Delta \varphi^2 + 27 \cos^2 \varphi_0 l^2) \\ m_c' &= \frac{m_c}{m_a} = 1 + \frac{1}{4} \eta^2 (1 - \eta^2) \Delta \varphi^2 - \frac{1}{4} \eta^2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi_0 l^2 \\ &\quad + \frac{1}{72} \eta^2 t \Delta \varphi (12 \Delta \varphi^2 + 27 \cos^2 \varphi_0 l^2) \\ m_d' &= \frac{m_d}{m_a} = 1 + \frac{1}{72} \eta^2 t \Delta \varphi (48 \Delta \varphi^2 - 135 \cos^2 \varphi_0 l^2) \\ m_e' &= \frac{m_e}{m_a} = 1 + \frac{1}{72} \eta^2 t \Delta \varphi (16 \Delta \varphi^2 - 39 \cos^2 \varphi_0 l^2). \end{aligned} \quad (205)$$

Die Gleichungen (205) bestätigen uns, daß hinsichtlich der Verzerrungen die Unterschiede zwischen den betrachteten fünf „stereographischen“ Abbildungen des Erdellipsoids äußerst gering sind. Das liegt daran, daß die Abplattung des Erdellipsoids äußerst gering ist. Ausschlaggebend bei der Auswahl unter den fünf Abbildungen werden daher etwa gewünschte geometrische Eigenschaften der Abbildung, wie z. B. die kreisförmige Abbildung der Meridiane und Breitenkreise oder die möglichst große Formtreue in dem Abbild eines geodätischen Strahlenbüschels, oder überhaupt nur lediglich rechen-technische Erwägungen sein.

Es soll noch erörtert werden, in welchem Fall das geodätische Strahlenbüschel mit dem Scheitel im Normalpunkt ($x_1 = y_1 = 0$) am formtreuesten abgebildet wird. Bei der Eggert'schen Abbildung ist das zweifellos nicht der Fall, bei ihr werden vielmehr — entsprechend ihrer Herleitung, wenn wir sie streng konform durchführen — die Vertikalschnitte durch den Normalpunkt nahezu geradlinig abgebildet. Nahezu das gleiche läßt sich, wie G. Lehmann nachgewiesen hat ([22] S. 431), von der Lagrange'schen Abbildung mit der Konstanten $c = 1$ (identisch mit der stereographischen Doppelabbildung über die Kugel mit dem Radius $A = N_0$ und mit der Gauß-Krüger'schen stereographischen Projektion) sagen.

Unter den Lagrange'schen Abbildungen ist nach G. Lehmann ([22] S. 376) die Abbildung mit der Konstanten $c^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ (identisch mit der stereographischen Doppelabbildung über die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$) diejenige, bei der die Abbilder der Strahlen des geodätischen Strahlenbüschels durch den Normalpunkt die geringsten Abweichungen von geraden Linien zeigen. Es ist in diesem Fall ([22] S. 376) die Richtungsreduktion im Normalpunkt

$$\tau_1 = \frac{1}{6} \eta^2 t \frac{x_2^2 y_2}{r^3}. \quad (a)$$

Hristow ([23] S. 468) vermutet, daß die Roussilhe'sche stereographische Abbildung des Erdellipsoids, für die er die Formeln neu abgeleitet hat, die beste Annäherung an den Fall der formtreuen Abbildung des geodätischen Strahlenbüschels durch den Normalpunkt darstellt. Für die Richtungsreduktion im Normalpunkt ergibt sich bei der Roussilhe'schen Abbildung

$$\tau_1 = \frac{1}{6} \eta^2 t \frac{y_2}{r^3} (y_2^2 - 2 x_2^2). \quad (b)$$

Bei der hier abgeleiteten verallgemeinerten stereographischen Abbildung ergibt sich — vgl. Gleichung (187) —

$$\tau_1 = \frac{1}{18} \eta^2 t \frac{y_2^3}{r^3}. \quad (c)$$

In allen drei Gleichungen ist im Nenner r^3 für den genaueren Wert $r^2 \cdot N_0$ gesetzt.

Zur Vergleichung der drei Werte (a), (b) und (c) für die Richtungsreduktionen berechnen wir ihre Maximalwerte für die Länge l der Verbindungsgeraden zwischen Anfangs- und Endpunkt der ebenen Abbilder der vom Normalpunkt ausgehenden geodätischen Linien. Berücksichtigen wir, daß für $x_1 = y_1 = 0$ $y_2 = l \cdot \sin t$ und $x_2 = l \cdot \cos t$ ist, so erhalten wir bei der stereographischen Doppelabbildung über die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$

$$\tau_{\max} = 0,064 \eta^2 t \frac{l^3}{r^3}, \quad (a')$$

bei der Roussilhe'schen stereographischen Abbildung

$$\tau_{\max} = 0,167 \eta^2 t \frac{l^3}{r^3} \quad (b')$$

und bei der verallgemeinerten stereographischen Abbildung

$$\tau_{\max} = 0,056 \eta^2 t \frac{l^3}{r^3}. \quad (c')$$

Für die entgegengesetzte Richtung zum Normalpunkt hin, also für $x_2 = y_2 = 0$, erhalten wir als entsprechende Absolutbeträge der Richtungsreduktionen jeweils das Dreifache der vorgenannten Beträge.

Aus Vorstehendem geht hervor, daß die hier abgeleitete verallgemeinerte stereographische Abbildung das geodätische Strahlenbüschel mit dem Scheitel im Normalpunkt am formtreuesten abbildet, was ja dem Ziel der Ableitung entspricht.

VIII. Sonderfall der Kugel

1. Die Übertragungsformeln

Sämtliche in dieser Arbeit erhaltenen Formeln gelten für die Kugel, wenn man in ihnen $\eta = 0$ setzt. Wir wollen uns hier darauf beschränken, die Formeln für die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung und die stereographische Projektion der Kugel anzugeben (vgl. auch Abschnitt IV. 2.).

a) Verallgemeinerte konforme Lambertabbildung der Kugel

Entsprechend den Gleichungen (116) bis (121) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} \cos a_{0 \cdot x} = & \Delta \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t l^2 + \frac{1}{6} \Delta \varphi^3 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Delta \varphi l^2 \\ & + \frac{1}{24} \text{ctg} \Delta \varphi_0 \Delta \varphi^4 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (t - \text{ctg} \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^2 l^2 \\ & + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (\text{ctg} \Delta \varphi_0 - t - t^3) l^4 + \frac{1}{120} (5 + 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^5 \quad (206) \\ & - \frac{1}{12} \cos^2 \varphi (5 t^2 - 7 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^3 l^2 \\ & + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0 - 10 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + 7 t^2 + t^4) \Delta \varphi l^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} \cos a_{0 \cdot x} = & \cos \varphi l - \sin \varphi \Delta \varphi l - \frac{1}{6} t^2 \cos^3 \varphi l^3 \\ & - \frac{1}{6} \cos \varphi (2 t - \text{ctg} \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^3 l \\ & - \frac{1}{6} \cos^3 \varphi (\text{ctg} \Delta \varphi_0 - t - t^3) \Delta \varphi l^3 \quad (207) \\ & - \frac{1}{24} \cos \varphi (4 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^4 l \\ & - \frac{1}{4} \cos^3 \varphi (2 t^2 - 3 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^2 l^3 \\ & + \frac{1}{120} \cos^5 \varphi (3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0 - 10 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + 7 t^2 + t^4) l^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = & \cos a_{0 \cdot x} \frac{x}{N} - \frac{1}{2} t \frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{6} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{2} t^2 \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{r^3} \\ & - \frac{1}{24} \text{ctg} \Delta \varphi_0 \frac{x^4}{r^4} + \frac{1}{4} (\text{ctg} \Delta \varphi_0 - 2 t^3) \frac{x^2 y^2}{r^4} \\ & + \frac{1}{24} (3 t^2 + t - \text{ctg} \Delta \varphi_0) \frac{y^4}{r^4} + \frac{1}{120} (5 - 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^5}{r^5} \quad (208) \\ & + \frac{1}{24} (9 t^4 + 4 t^2 - 4 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{r^5} \\ & - \frac{1}{12} (6 t^4 + t^2 - 2 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 - 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{r^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l = & \frac{\cos a_{0 \cdot x} y}{\cos \varphi r} + \frac{t}{\cos \varphi} \frac{x y}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{t^2 \cos a_{0 \cdot x}}{r^3 \cos \varphi} (3 x^2 y - y^3) \\ & - \frac{1}{6} \frac{1}{r^2 \cos \varphi} (\text{ctg} \Delta \varphi_0 - t - 6 t^3) (x^3 y - x y^3) \quad (209) \\ & - \frac{1}{120} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{r^5 \cos \varphi} (3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0 + 5 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 - 8 t^2 \\ & - 24 t^4) (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = & 1 + \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{6} \text{ctg} \Delta \varphi_0 \Delta \varphi^3 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (t - \text{ctg} \Delta \varphi_0) \Delta \varphi l^2 \\ & + \frac{1}{24} (5 + 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^4 \quad (210) \\ & - \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (2 t^2 - 5 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \Delta \varphi^2 l^2 \\ & + \frac{1}{8} \cos^4 \varphi (t^2 - 2 t \text{ctg} \Delta \varphi_0 + \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) l^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = & 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{6} \text{ctg} \Delta \varphi_0 \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{2} \text{ctg} \Delta \varphi_0 \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{r^3} \quad (211) \\ & + \frac{1}{24} (1 + 3 \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0) \frac{x^4}{r^4} - \frac{3}{4} \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0 \frac{x^2 y^2}{r^4} + \frac{1}{8} \text{ctg}^2 \Delta \varphi_0 \frac{y^4}{r^4}. \end{aligned}$$

Die Bemerkung hinter Gleichung (121) über die Bedeutung der Funktionen „ctg $\Delta \varphi_0$ “ und „ctg² $\Delta \varphi_0$ “ gilt auch hier. Es ist wahrscheinlich, daß diese Ausdrücke bei der Kugel streng gelten, doch soll hier von einer Untersuchung darüber abgesehen werden.

Es ist $\Delta \varphi_0 = \varphi_c - \varphi_0$. $a_{0 \cdot x}$ ist das Azimut der geodätischen Linie vom Scheitel C des geodätischen Strahlenbüschels zum Normalpunkt O .

Die angegebenen Formeln, die auch für die Kugel noch nicht bekannt sein dürften, entsprechen denen der gewöhnlichen konformen Lambertabbildung der Kugel. Doch ist die Lage des Scheitels C des geodätischen Strahlenbüschels beliebig. Setzt man $\Delta \varphi_0 = 90^\circ - \varphi_0$, so erhält man die bekannten Formeln der konformen Lambertabbildung mit dem Scheitel C im Pol; die positive Richtung der x -Achse zeigt nach Süden.

b) Stereographische Projektion der Kugel

Entsprechend den Gleichungen (131) bis (136) wird

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} \cos a_{0 \cdot x} &= \Delta \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi t l^2 + \frac{1}{12} \Delta \varphi^3 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi (1 - 2t^2) \Delta \varphi l^2 \\ &\quad - \frac{3}{8} t \cos^2 \varphi \Delta \varphi^2 l^2 + \frac{1}{24} t \cos^4 \varphi (2 - t^2) l^4 + \frac{1}{120} \Delta \varphi^5 \\ &\quad - \frac{1}{24} \cos^2 \varphi (1 + t^2) \Delta \varphi^3 l^2 + \frac{1}{48} \cos^4 \varphi (2 + 2t^4 - 11t^2) \Delta \varphi l^4 \end{aligned} \quad (212)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} \cos a_{0 \cdot x} &= \cos \varphi l - \sin \varphi \Delta \varphi l - \frac{1}{4} \cos \varphi \Delta \varphi^2 l + \frac{1}{12} \cos^3 \varphi (1 - 2t^2) l^3 \\ &\quad - \frac{1}{12} \sin \varphi \Delta \varphi^3 l - \frac{1}{6} t \cos^3 \varphi (2 - t^2) \Delta \varphi l^3 \\ &\quad - \frac{1}{24} \cos \varphi \Delta \varphi^4 l - \frac{1}{24} \cos^3 \varphi (2 - 7t^2) \Delta \varphi^2 l^3 \\ &\quad + \frac{1}{240} \cos^5 \varphi (2 + 2t^4 - 11t^2) l^5 \end{aligned} \quad (213)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \cos a_{0 \cdot x} \frac{x}{r} - \frac{1}{2} t \frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{12} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{4} (1 + 2t^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^2}{r^3} \\ &\quad - \frac{1}{4} t (1 + 2t^2) \frac{x^2 y^2}{r^4} + \frac{1}{8} t (1 + t^2) \frac{y^4}{r^4} + \frac{1}{80} \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^5}{r^5} \\ &\quad + \frac{1}{16} (1 + 6t^4 + 6t^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x y^4}{r^5} - \frac{1}{8} t^2 (3 + 4t^2) \cos a_{0 \cdot x} \frac{x^3 y^2}{r^5} \end{aligned} \quad (214)$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{\cos a_{0 \cdot x} y}{\cos \varphi r} + \frac{t}{\cos \varphi} \frac{x y}{r^2} + \frac{1}{12} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{r^3 \cos \varphi} (1 + 4t^2) (3x^2 y - y^3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{t}{r^4 \cos \varphi} (1 + 2t^2) (x^3 y - x y^3) \\ &\quad + \frac{1}{80} \frac{\cos a_{0 \cdot x}}{r^5 \cos \varphi} (1 + 16t^4 + 12t^2) (5x^4 y - 10x^2 y^3 + y^5) \end{aligned} \quad (215)$$

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{4} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi l^2 - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi \Delta \varphi l^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \Delta \varphi^4 + \frac{1}{48} \cos^4 \varphi (2 - t^2) l^4 \end{aligned} \quad (216)$$

$$m = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4r^2}. \quad (217)$$

c) Mercatorabbildung der Kugel

Entsprechend den Gleichungen (146) und (147) wird

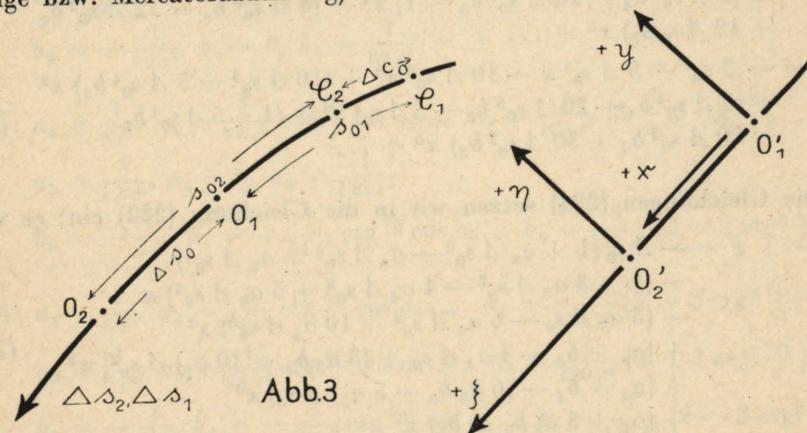
$$\begin{aligned} \frac{x}{r} \sin a_{0 \cdot x} &= \cos \varphi l - t \cos \varphi \Delta \varphi l - \frac{1}{6} t^2 \cos^3 \varphi l^3 - \frac{1}{3} t \cos \varphi \Delta \varphi^3 l \\ &\quad + \frac{1}{6} t \cos^3 \varphi (1 + t^2) \Delta \varphi l^3 - \frac{1}{2} t^2 \cos^3 \varphi \Delta \varphi^2 l^3 \\ &\quad + \frac{1}{120} t^2 \cos^5 \varphi (7 + t^2) l^5 \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} \sin a_{0 \cdot x} &= -\Delta \varphi - \frac{1}{2} t \cos^2 \varphi l^2 - \frac{1}{6} \Delta \varphi^3 + \frac{1}{2} t^2 \cos^2 \varphi \Delta \varphi l^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} t \cos^2 \varphi \Delta \varphi^2 l^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (t^3 + t) l^4 - \frac{1}{24} \Delta \varphi^5 \\ &\quad + \frac{5}{12} t^2 \cos^2 \varphi \Delta \varphi^3 l^2 - \frac{1}{24} t^2 \cos^4 \varphi (7 + t^2). \end{aligned} \quad (219)$$

2. Umformungen von Koordinaten eines Systems in Koordinaten eines anderen Systems

a) Allgemeines

Wir betrachten lediglich den Fall, in welchem die Nullpunkte der in einander zu überführenden Koordinatensysteme und die Urbilder ihrer Abszissenachsen auf ein und demselben Kugelmeridian liegen. Die Betrachtung erstreckt sich nur auf Umformungen zwischen den in dieser Arbeit behandelten Abbildungsarten (verallgemeinerte konforme Lambertabbildung, verallgemeinerte stereographische Projektion und verallgemeinerte quersachsige bzw. Mercatorabbildung).



In Abb. 3 sei der Meridian $C_1 C_2 O_1 O_2$ das Urbild der Abszissenachsen x und ξ , O_1 und O_2 seien die Urbilder der Nullpunkte O_1' und O_2' der beiden ebenen Koordinatensysteme, und es sei Δs_0 die Entfernung von O_1 nach O_2 . Δs_1 sei die von O_1 aus und Δs_2 sei die von O_2 aus in der Richtung $O_1 O_2$ gemessene Meridianbogenlänge. In der ebenen Abbildung entspreche x der Strecke Δs_1 und ξ der Strecke Δs_2 . Für den Fall, daß es sich bei der einen

oder bei beiden Abbildungen um die verallgemeinerte konforme Lambert-abbildung handelt, sind auf dem Meridian noch die Büschelscheitel C_1 und C_2 dargestellt, von denen 0_1 bzw. 0_2 um s_{01} bzw. s_{02} entfernt sein sollen, die Entfernung $C_1 C_2$ sei Δc_0 .

Es ist

$$\Delta s_2 = \Delta s_1 - \Delta s_0. \quad (220)$$

Für die Abbildung des betrachteten Meridians gelte bei den beiden Abbildungen

$$x = \Delta s_1 + a_3 \Delta s_1^3 + a_4 \Delta s_1^4 + a_5 \Delta s_1^5 + \dots \quad (221)$$

und

$$\xi = \Delta s_2 + a_3 \Delta s_2^3 + a_4 \Delta s_2^4 + a_5 \Delta s_2^5 + \dots \quad (222)$$

Es sollen die Koordinaten x und y in die Koordinaten ξ und η umgeformt werden. Hierzu kehren wir die Gleichung (221) um. Die Umkehrung ergebe

$$\Delta s_1 = x + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \dots \quad (223)$$

Die Gleichung (223) setzen wir in Gleichung (220) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta s_2 &= -\Delta s_0 + x + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \dots \\ \Delta s_2^2 &= \Delta s_0^2 - 2 \Delta s_0 x + x^2 - 2 \Delta s_0 b_3 x^3 - (2 \Delta s_0 b_4 - 2 b_3) x^4 \\ &\quad - (2 \Delta s_0 b_5 - 2 b_4) x^5 + \dots \\ \Delta s_2^3 &= -\Delta s_0^3 + 3 \Delta s_0^2 x - 3 \Delta s_0 x^2 + (1 + 3 \Delta s_0^2 b_3) x^3 \\ &\quad + (3 \Delta s_0^2 b_4 - 6 \Delta s_0 b_3) x^4 + (3 \Delta s_0^2 b_5 - 6 \Delta s_0 b_4 + 3 b_3) x^5 + \dots \\ \Delta s_2^4 &= \Delta s_0^4 - 4 \Delta s_0^3 x + 6 \Delta s_0^2 x^2 - (4 \Delta s_0^3 b_3 + 4 \Delta s_0) x^3 \\ &\quad - (4 \Delta s_0^3 b_4 - 12 \Delta s_0^2 b_3 - 1) x^4 - (4 \Delta s_0^3 b_5 - 12 \Delta s_0^2 b_4 \\ &\quad + 12 \Delta s_0 b_3) x^5 + \dots \\ \Delta s_2^5 &= -\Delta s_0^5 + 5 \Delta s_0^4 x - 10 \Delta s_0^3 x^2 + (10 \Delta s_0^2 + 5 \Delta s_0^4 b_3) x^3 \\ &\quad + (5 \Delta s_0^4 b_4 - 20 \Delta s_0^3 b_3 - 5 \Delta s_0) x^4 + (1 + 5 \Delta s_0^4 b_5 \\ &\quad - 20 \Delta s_0^3 b_4 + 30 \Delta s_0^2 b_3) x^5 + \dots \end{aligned} \quad (224)$$

Die Gleichungen (224) setzen wir in die Gleichung (222) ein; es wird

$$\begin{aligned} \xi &= -\Delta s_0 (1 + a_3 \Delta s_0^2 - a_4 \Delta s_0^3 + a_5 \Delta s_0^4) \\ &\quad + (1 + 3 a_3 \Delta s_0^2 - 4 a_4 \Delta s_0^3 + 5 a_5 \Delta s_0^4) x \\ &\quad - (3 a_3 \Delta s_0 - 6 a_4 \Delta s_0^2 + 10 a_5 \Delta s_0^3) x^2 \\ &\quad + [a_3 + b_3 - 4 a_4 \Delta s_0 + (3 a_3 b_3 + 10 a_5) \Delta s_0^2] x^3 \\ &\quad + [a_4 + b_4 - (6 a_3 b_3 + 5 a_5) \Delta s_0] x^4 \\ &\quad + (a_5 + 3 a_3 b_3 + b_5) x^5 \end{aligned} \quad (225)$$

oder, abgekürzt,

$$\xi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots = f(x) \quad (226)$$

Die Bedeutung der Vorzahlen c_i ist leicht erkennbar.

Ferner ist $\xi + i \eta = f(x + i y)$, d. h.

$$\begin{aligned} \xi &= c_0 + c_1 x + c_2 (x^2 - y^2) + c_3 (x^3 - 3 x y^2) \\ &\quad + c_4 (x^4 - 6 x^2 y^2 + y^4) + c_5 (x^5 - 10 x^3 y^2 + 5 x y^4) + \dots \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \eta &= c_1 y + 2 c_2 x y + c_3 (3 x^2 y - y^3) \\ &\quad + c_4 (4 x^3 y - 4 x y^3) + c_5 (5 x^4 y - 10 x^2 y^3 + y^5) + \dots \end{aligned} \quad (228)$$

b) Sonderfälle

Je nach den Abbildungen, auf die sich die Koordinaten x, y und ξ, η beziehen, ergeben sich die Werte a_i, a_i und b_i für die Vorzahlen in den Gleichungen (221), (222) und (223). Wir geben diese Vorzahlen für folgende sieben Umformungen an:

- a) Umformung „stereographischer“ in „Lambert'sche“ Koordinaten,
- β) Umformung „Lambert'scher“ in „stereographische“ Koordinaten,
- γ) Umformung „Lambert'scher“ in „Lambert'sche“ Koordinaten mit anderem Büschelscheitel und anderem Normalpunkt,
- δ) Umformung „Lambert'scher“ in „Mercator“ Koordinaten,
- ε) Umformung von „Mercator“ in „Lambert'sche“ Koordinaten,
- ζ) Umformung „stereographischer“ in „Mercator“ Koordinaten,
- η) Umformung von „Mercator“ in „stereographische“ Koordinaten.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{zu a): } a_3 &= \frac{1}{12 r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \\ a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = \frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_0}{r} \cos a_0 \cdot \xi, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_0}{r} \right) \\ b_3 &= -\frac{1}{12 r^2}, b_4 = 0, b_5 = \frac{1}{80 r^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \beta): a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = \frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_0}{r} \cos a_0 \cdot x, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_0}{r} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{12 r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \\ b_3 &= -\frac{1}{6 r^2}, b_4 = -\frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_0}{r} \cos a_0 \cdot x, b_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_0}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \gamma): a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = \frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{01}}{r} \cos a_0 \cdot x, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{01}}{r} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = \frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{02}}{r} \cos a_0 \cdot \xi, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{02}}{r} \right) \\ b_3 &= -\frac{1}{6 r^2}, b_4 = -\frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{01}}{r} \cos a_0 \cdot x, b_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{01}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu } \delta): a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = \frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{01}}{r} \cos a_0 \cdot x, a_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{01}}{r} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{6 r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{24 r^4} \\ b_3 &= -\frac{1}{6 r^2}, b_4 = -\frac{1}{24 r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{01}}{r} \cos a_0 \cdot x, b_5 = \frac{1}{120 r^4} \left(5 - 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{01}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{zu } \varepsilon): a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{24r^4}$$

$$a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = \frac{1}{24r^3} \operatorname{ctg} \frac{s_{02}}{r} \cos a_{0 \cdot \varepsilon}, a_5 = \frac{1}{120r^4} (5 + 3 \operatorname{ctg}^2 \frac{s_{02}}{r})$$

$$b_3 = -\frac{1}{6r^2}, b_4 = 0, b_5 = \frac{1}{24r^4}$$

$$\text{zu } \zeta): a_3 = \frac{1}{12r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120r^4}$$

$$a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{24r^4}$$

$$b_3 = -\frac{1}{12r^2}, b_4 = 0, b_5 = \frac{1}{80r^4}$$

$$\text{zu } \eta): a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{24r^4}$$

$$a_3 = \frac{1}{12r^2}, a_4 = 0, a_5 = \frac{1}{120r^4}$$

$$b_3 = -\frac{1}{6r^2}, b_4 = 0, b_5 = \frac{1}{24r^4}$$

c) Beispiel für die Berechnung der Vorzahlen c_i

Für den Fall γ), d. h. bei der Umformung „Lambert'scher“ in „Lambert-sche“ Koordinaten soll die Berechnung der Vorzahlen c_i für die Übertragungsgleichungen (227) und (228) gezeigt werden. Es soll aber vorausgesetzt werden, daß der Büschelscheitel beiden Abbildungen gemeinsam ist. Der Büschelscheitel liege für beide Abbildungen im Nordpol der Kugel; es seien also lediglich die Normalpunkte 0_1 und 0_2 bzw. $0_1'$ und $0_2'$ voneinander verschieden.

Es wird dann

$$\Delta c_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta s_0 = -s_{01} + s_{02} = \Delta \varphi_{21} \cdot r \quad \text{mit} \quad \Delta \varphi_{21} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

wenn φ_1 die Normalbreite bei der einen und φ_2 die Normalbreite bei der anderen Lambertabbildung ist.

Ferner wird

$$\frac{s_{01}}{r} = 90 - \varphi_1, \quad \frac{s_{02}}{r} = 90 - \varphi_2, \quad \operatorname{ctg} \frac{s_{01}}{r} = \operatorname{tg} \varphi_1 = t_1, \quad \operatorname{ctg} \frac{s_{02}}{r} = \operatorname{tg} \varphi_2 = t_2, \quad \text{d. h.}$$

$$a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = \frac{1}{24r^3} t_1 \cos a_{0 \cdot x}, a_5 = \frac{1}{120r^4} (5 + 3 t_1^2)$$

$$a_3 = \frac{1}{6r^2}, a_4 = \frac{1}{24r^3} t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon}, a_5 = \frac{1}{120r^4} (5 + 3 t_2^2)$$

$$b_3 = -\frac{1}{6r^2}, b_4 = -\frac{1}{24r^3} t_1 \cos a_{0 \cdot x}, b_5 = \frac{1}{120r^4} (5 - 3 t_1^2)$$

und damit entsprechend der Gleichung (225)

$$c_0 = -\Delta s_0 \left[1 + \frac{1}{6} \Delta \varphi_{21}^2 - \frac{1}{24} t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon} \Delta \varphi_{21}^3 + \frac{1}{120} (5 + 3 t_2^2) \Delta \varphi_{21}^4 \right]$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2} \Delta \varphi_{21}^2 - \frac{1}{6} t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon} \Delta \varphi_{21}^3 + \frac{1}{24} (5 + 3 t_2^2) \Delta \varphi_{21}^4$$

$$c_2 = -\frac{1}{12r} [6 \Delta \varphi_{21} - 3 t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon} \Delta \varphi_{21}^2 + (5 + 3 t_2^2) \Delta \varphi_{21}^3]$$

$$c_3 = \frac{1}{12r^2} [-2 t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon} \Delta \varphi_{21} + (4 + 3 t_2^2) \Delta \varphi_{21}^2]$$

$$c_4 = \frac{1}{24r^3} [t_2 \cos a_{0 \cdot \varepsilon} - t_1 \cos a_{0 \cdot x} - (1 + 3 t_2^2) \Delta \varphi_{21}]$$

$$c_5 = \frac{1}{40r^4} (t_2^2 - t_1^2).$$

(226 γ)

IX. Zur Abbildung von Großräumen

1. Unmittelbare Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene oder Doppelabbildung

Im Hinblick auf die bei der Vergleichung der verschiedenen stereographischen Abbildungen des Erdellipsoids erhaltenen Ergebnisse soll noch kurz die Frage erörtert werden, ob die unmittelbare Abbildung oder die Doppelabbildung des Erdellipsoids vorzuziehen ist. Die erwähnten Ergebnisse zeigen, daß es zur Erzielung günstiger Verzerrungsverhältnisse gleichgültig ist, ob man das Ellipsoid „unmittelbar“ oder auf dem Wege der sogenannten Doppelabbildung in die Ebene abbildet; weil, wie gezeigt worden ist (vgl. hierzu außer Abschnitt VII. 2. auch Abschnitt IV. 3. c) über die Eigenschaft der eigentlichen konformen Lambertabbildung des Erdellipsoids), eine und dieselbe Abbildung auf beiden Wegen erhalten werden kann. Entscheidend für die Beantwortung der Frage bleibt daher der Grad der Zweckmäßigkeit und Wirtschaftlichkeit bei beiden Abbildungsverfahren.

L. Krüger hat in seiner Arbeit „Zur stereographischen Projektion“ ([7] S. 26) in dieser Frage keinen eindeutigen Standpunkt eingenommen. Er sagt aber zum Schluß: „Indessen wird doch im allgemeinen die Doppelprojektion vor der direkten stereographischen Projektion die größere Einfachheit der Rechnung besitzen.“ Dieses dürfte nicht nur bei der stereographischen Abbildung zutreffen. Es ist zu bedenken, daß allein die mehr oder weniger einfache Form der Formeln für die Übertragung der geographischen in die rechtwinkligen Koordinaten und der rechtwinkligen in die geographischen nicht ausschlaggebend sein kann, denn bei der Benutzung von Koordinaten verursachen vor allem auch Umformungen aus älteren Systemen in das gegenwärtig gültige und umgekehrt oder zwischen zwei benachbarten Systemen umfangreiche Rechenarbeiten. Diese sind aber in der Regel bei den Doppelabbildungen einfacher und vor allem auch übersichtlicher als bei der unmittelbaren Abbildung des Ellipsoids. Hierbei ist vorausgesetzt, daß allen

Doppelabbildungen die Art der Übertragung des Ellipsoids auf die Kugel gemeinsam ist. In diesem Falle handelt es sich dann nämlich nur um Umformungen auf der Kugel. Es ließen sich z. B. für die Umformungen bei unmittelbarer Abbildung des Erdellipsoids nur in Sonderfällen so einfache Formeln aufstellen, wie es in Abschnitt VIII, 2. für die Kugel geschehen ist. Bei den Rechnungen, die mit der Anbringung der Längen- und Richtungsreduktionen verbunden sind, ist ebenfalls eine Doppelabbildung vorzuziehen. Die hierüber von O. Schreiber in den „Verhandlungen der Konferenz der permanenten Kommission der Internationalen Erdmessung in Nizza 1887“ gemachten Ausführungen, in denen er die Vorzüge des Verfahrens der Doppelabbildung schildert (vgl. Jordan [4] S. 6) dürften heute noch zutreffen.

Auch die in Deutschland eingeführte unmittelbare Abbildung in den Gauß-Krüger'schen Meridianstreifen systemen besitzt — wie Thilo ([10] S. 39) dargelegt hat — keine besonderen Vorzüge vor dem Verfahren der Doppelabbildung. Thilo stellt fest, daß die umfangreiche Arbeit der Umrechnung bei Zerlegung der bereits vorhandenen Schreiber'schen Doppelabbildung in Meridianstreifen viel schneller durchzuführen gewesen wäre.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß die Doppelabbildung der unmittelbaren Abbildung vorzuziehen ist.

2. Zur Abbildung der Fläche des Deutschen Reiches

Bei der Gauß-Krüger'schen Meridianstreifenabbildung sind die Verzerrungen am Rande der Meridianstreifen am größten. Für das Vergrößerungsverhältnis gilt hier näherungsweise $m = 1 + 1/2 \cdot y^2/r^2 + \dots$. Im Süden Deutschlands (etwa bei Graz) erreicht y einen Betrag von rund 115 km. Damit wird $m \approx 1 + 1/6160$. Dem entspricht eine Vergrößerung der wahren Längen durch die ebene konforme Abbildung um etwa 1,6 cm auf 100 m.

Wir wollen jetzt zwei andere Abbildungsarten betrachten. Beschreiben wir um Deutschland einen Kreis, so hat dieser Kreis einen Radius von etwa $e = 680 \text{ km} \approx 700 \text{ km}$. Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt südlich von Hirschberg i. Schl. in ungefähr $50^\circ 50'$ n. Br. und $15^\circ 45'$ östl. Länge. Aus den oben dargelegten Gründen wählen wir das Verfahren der Doppelabbildung, und zwar auf dem Wege über die Kugel mit dem Radius $r = \sqrt{M_0 N_0}$. Als Normalpunkt diene der Mittelpunkt des Umkreises um Deutschland. Ebenfalls mit diesem Punkt als Normalpunkt bilden wir sodann die Kugel durch stereographische Projektion in die Ebene ab. Damit das Vergrößerungsverhältnis nicht zu groß wird, sollen Punkte in größerer Entfernung vom Normalpunkt mit Hilfe der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung der Kugel in die Ebene übertragen werden. Der Scheitel des hierbei sich formtreu abbildenden Büschels von Größtkreisen falle mit dem Normalpunkt der stereographischen Projektion zusammen.

Zur überschläglichen Ermittlung der Größe der durch diese Abbildungen bedingten Längenänderungen können wir den Einfluß der Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel vernachlässigen. Ist S der Abstand eines Punktes in der Ebene vom Normalpunkt der stereographischen Projektion und ΔS der Abstand eines Punktes in der Ebene vom Normalpunkt der verallgemei-

nerten konformen Lambertabbildung, gemessen in der Richtung zum Normalpunkt der stereographischen Projektion, so gilt entsprechend den Gleichungen (211) und (217) näherungsweise für die stereographische Projektion

$$m_s = 1 + \frac{S^2}{4r^2} + \dots \quad (229)$$

und für die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung

$$m_l = 1 + \frac{\Delta S^2}{2r^2} + \dots \quad (230)$$

Die beiden Abbildungsarten sollen die Abbildung des ganzen Umkreises (mit dem Radius e) um den Normalpunkt der stereographischen Projektion bewirken. Es wird also

$$S_{\max} + 2 \Delta S_{\max} = e. \quad (231)$$

Sollen die maximalen Vergrößerungsverhältnisse bei beiden Abbildungsarten näherungsweise gleich sein, so ergibt sich

$$m_{\max} = 1 + \frac{S_{\max}^2}{4r^2} = 1 + \frac{\Delta S_{\max}^2}{2r^2}. \quad (232)$$

In Verbindung mit Gleichung (231) folgt hieraus

$$S_{\max} = e(\sqrt{2} - 1) \quad \text{und} \quad \Delta S_{\max} = \frac{e}{2}(2 - \sqrt{2}). \quad (233)$$

$$\text{Mit } e = 700 \text{ km wird } S_{\max} \approx 290 \text{ km, } \Delta S_{\max} \approx 205 \text{ km} \quad (234)$$

$$\text{und } m_{\max} = 1 + \frac{1}{1938}.$$

Würde man dieselbe Betrachtung für den Fall anstellen, daß nicht ein stereographisches und ein Lambert'sches System, sondern ein stereographisches und zwei Lambert'sche Systeme gewählt werden, d. h. daß $S_{\max} + 4 \Delta S_{\max} = e$ ist, so ergibt sich $S_{\max} \approx 183 \text{ km}$ und $\Delta S_{\max} \approx 129 \text{ km}$. In diesem Falle kommt also die maximale Verzerrung dem Werte nahe, der auch jetzt bei den sieben Meridianstreifen erreicht wird.

Dem Werte m_{\max} in Gleichung (234) entspricht eine Vergrößerung der wahren Länge um etwa 5,2 cm auf 100 m. Doch werden von dieser Maximalverzerrung flächenmäßig verhältnismäßig kleine Gebietsteile betroffen, wie aus den Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses auf Beilage 1 hervorgeht. Die Zahl der aufeinanderfolgenden Punkte in den strichpunktieren Kreisen kennzeichnet die Zahl der Zentimeter, um die 100 m wahrer Länge durch die Abbildung vergrößert werden.

Man kann auch durch Multiplikation von m mit einem Reduktionsfaktor $m_0 = 0,99975$ die durch die ebene Abbildung bewirkte Längenänderung auf die Hälfte herabdrücken. Es wird dann

$$m_0 m_{\max} = 1 + \frac{1}{3876} \quad \text{und} \quad m_0 m_{\min} = 1 - \frac{1}{3878}; \quad (235)$$

d. h. es ergibt sich eine Längenänderung von nur 2,6 cm auf 100 m. Doch hat dafür eine derartige Abbildung, wie die Beilage 2 zeigt, u. a. den Nachteil, daß die Flächen der Gebiete mit dem Vergrößerungsverhältnis 1 verhältnismäßig klein sind.

Eine Berücksichtigung des jeweiligen Vergrößerungsverhältnisses — ebenso wie der Höhenlage — bei den Katastermessungen ist in beiden Fällen erforderlich. Das ist aber streng genommen auch bei der Gauß-Krüger'schen Meridianstreifenabbildung der Fall und wird in einigen Ländern — z. B. Österreich — auch durchgeführt.

Die der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung unterworfenen Fläche ist zweckmäßig in zwei Teile — einen westlichen und einen östlichen — zu zerlegen, damit die Koordinatenwerte nicht zu groß werden. Die Koordinatennullpunkte müssen dann — etwa an den in den Beilagen 1 und 2 durch kleine Kreise bezeichneten Stellen — auf der Kugel derart ausgewählt werden, daß die durch diese Punkte gehenden Größtkreise mit dem Azimut 90° zugleich durch den Normalpunkt der stereographischen Abbildung gehen und gleiche Abstände von diesem haben. Wegen der ostwestlichen Symmetrie des Erdellipsoids sind dann für alle Punkte die Unterschiede der Koordinaten beider Lambertsysteme konstant. Durch Drehung der Achsenkreuze in dem östlichen und westlichen Nullpunkt kann erreicht werden, daß die Gitternetzlinien parallel denen der stereographischen Projektion werden.

Die Berechnungen für die Landesvermessung finden am besten für das gesamte Gebiet in der stereographischen Projektion statt, weil bei ihr die für die Berechnungen günstigsten Formeln gelten. Aus den stereographischen Koordinaten können dann in den der konformen Lambertabbildung unterworfenen Gebieten die Lambertkoordinaten der Hauptpunkte durch Umformung erhalten werden.

In den vorstehenden Ausführungen sollte andeutungsweise gezeigt werden, in welcher Weise sich die stereographische Projektion und die konforme Lambertabbildung gemeinsam für die Abbildung eines oder mehrerer Länder verwenden lassen. Auch hier ist — ebenso wie bei der Gauß-Krüger-Abbildung — eine Erweiterung in beliebigem Umfang möglich. Hat man bei der Gauß-Krüger-Abbildung ein System nebeneinanderliegender Meridianstreifen, so erhält man bei dem hier beschriebenen Verfahren ein System konzentrischer Kreisringe. Für Deutschland würde sich damit eine erhebliche Verringerung der Flächen erzielen lassen, in welchen — an der Grenze zweier Systeme — zweierlei Koordinaten zu berechnen wären.

3. Zur Abbildung von Großräumen

Ebenso wie man in Deutschland von den besonderen Abbildungssystemen für die einzelnen deutschen Länder zu den einheitlichen Meridianstreifen-systemen übergegangen ist, so wird man auch einmal in Europa oder innerhalb noch weiterer Großräume die bis dahin für die einzelnen Länder benutzten Arten der Abbildung aufgeben und an ihre Stelle einheitliche Abbildungsverfahren setzen. Diese Möglichkeit wollen wir zum Abschluß dieser Arbeit noch kurz erörtern. Auf eine gründliche und erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes muß hier verzichtet werden, weil das den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Bei der Erörterung der Frage gehen wir nur von den Bedürfnissen der Geodäsie aus, in der die konforme Abbildung als Mittel zur Berechnung rechtwinklig-ebener Koordinaten dient, die entweder als Grundlage für weitere Berechnungen oder als Hilfsmittel zur Herstellung großmaßstäblicher und topographischer Karten benutzt werden. Abbildungen als Grundlage für die Herstellung kleinmaßstäblicher Karten, z. B. von Karten für geographische Anwendungen oder von Sonderkarten in der Nautik, sind entsprechend den verschiedenartigen Zwecken dieser Karten auszuwählen. Die Benutzung rechtwinklig-ebener Koordinaten ist aber bei diesen Karten im allgemeinen nicht erforderlich und auch nicht möglich, weil sie bei der Größe der in den kleinen Maßstäben dargestellten Gebiete ihren Sinn verliert; denn die Verzerrungen bei der ebenen Abbildung so großer Teile der gekrümmten Erdoberfläche werden zu groß.

In der Geodäsie besteht die Aufgabe darin, ein bestimmtes Gebiet so abzubilden, daß bei der Anwendung der durch die Abbildung gewonnenen rechtwinklig-ebenen Koordinaten die aus der Verebnung herrührenden Fehler entweder vernachlässigt oder auf einfache Weise berechnet und in Rechnung gestellt werden können.

Der im ersten Absatz der Einleitung erwähnte Grundsatz, nach welchem die jeweils zu verwendende Abbildung so auszuwählen ist, daß die durch sie bedingten unvermeidlichen Verzerrungen für das abzubildende Land möglichst gering bleiben, läßt sich im allgemeinen nur in den Fällen befolgen, in denen das Land so klein ist, daß für die Abbildung ein einziges System oder jedenfalls sehr wenige Systeme rechtwinklig-ebener Koordinaten ausreichen, ohne daß die Verzerrungen das bei der Verwendung der Koordinaten erträgliche Maß überschreiten. Die verschiedenen Möglichkeiten für die Abbildung auch eines größeren Landes durch ein einziges System werden durch Laborde [14] eingehend behandelt. Je größer aber das abzubildende Land ist, desto schwieriger ist es, eine derartige Abbildung mit einem einzigen oder auch zwei oder drei Koordinatensystemen zu finden. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gezeigt, wie Großdeutschland mit Hilfe von nur zwei Systemen bei einer maximalen Verzerrung von 2,6 cm auf 100 m abgebildet werden kann. Bei noch größeren Ländern sollte man aber nach Möglichkeit darauf verzichten, für sie ein oder mehrere „individuelle“ Abbildungssysteme zu suchen, sondern statt dessen, weil man der Größe des Landes wegen mit ein, zwei oder drei Systemen nicht auskommen kann, die Abbildung einheitlich durch eine Reihe von möglichst schematischen und rationellen Systemen vornehmen.

Solche Systeme sind insbesondere die Meridianstreifensysteme. Ihrer Einführung für Deutschland lag zweifellos die Absicht zugrunde, diese Abbildungsart auf größere Räume anzuwenden; denn lediglich das Deutsche Reich hätte mit Hilfe einer geringeren Zahl von Systemen als jetzt abgebildet werden können, ohne daß die erträglichen Verzerrungen überschritten worden wären. Der Hauptvorteil der Meridianstreifensysteme ist ihre vollkommene Gleichartigkeit und Symmetrie. Es entsteht nun die Frage, ob es nicht auch eine andere Möglichkeit gibt, Großräume, Kontinente oder gar das ganze Erdellipsoid auf eine im vorgenannten Sinne einheitliche Weise für geodätische Zwecke zu verebnen.

Bei der Beantwortung dieser Frage müssen wir weniger vom mathematischen als vom praktischen Gesichtspunkt ausgehen. Es dürfte zweifellos

allein auf mathematischem Wege, z. B. durch Ermittlung der günstigsten das abzubildende Land einschließenden Ellipse nach Tissot, die Abbildung zu finden sein, die für ein bestimmtes Gebiet die geringste Maximalverzerrung ergibt. Doch dürfte diese mathematisch günstigste Lösung in der Regel nicht so einfache Berechnungen bei der Übertragung der Koordinaten, bei der Ermittlung des Vergrößerungsverhältnisses sowie der Winkel- und der Streckenreduktionen ermöglichen, daß ihre Anwendung in der Landesvermessung noch praktisch und zweckmäßig ist. Bei der Auswahl unter den möglichen konformen Abbildungen wird aus diesem Grunde wohl immer auf die konforme Lambertabbildung (konforme Kegelprojektion) und ihre Grenzfälle, die stereographische Projektion und die Mercatorabbildung, sowie auf die in dieser Arbeit behandelten Verallgemeinerungen dieser Abbildungen, d. h. die entsprechenden schiefachsigen Abbildungen und auf die querachsigen Abbildungen — bei beliebiger Lage der Hauptachse — zurückgegriffen werden müssen. Als querachsige Abbildung — mit dem Äquator als Hauptachse — ist auch die Abbildung, die die Gauß-Krüger-Koordinaten liefert, anzusehen. Insbesondere die verallgemeinerte konforme Lambertabbildung, bei der der längentreu abzubildende Kleinkreis und damit auch die diesem Kleinkreis parallelen Kreise maximaler Verzerrung beliebige Krümmungen annehmen können, ist äußerst anpassungsfähig. Wie an dem Beispiel Deutschlands gezeigt worden ist, wird sie in manchen Fällen zweckmäßig in Verbindung mit der stereographischen Abbildung zu verwenden sein, bei der bekanntlich die günstigsten Verzerrungsverhältnisse vorliegen. Auf die Betrachtung weiterer Beispiele wollen wir aber hier verzichten.

Statt dessen wollen wir eine Möglichkeit näher betrachten, mit deren Hilfe das ganze Erdellipsoid auf einheitliche Weise abgebildet werden kann und die ein Gegenstück zu der Abbildung in Meridianstreifensystemen bildet. Zwei Tatsachen sind hervorzuheben, die die Anwendung der Meridianstreifensysteme nachteilig erscheinen lassen: die Trennung von Erdzonen gleicher Art und Entwicklungsstufe durch die Meridianstreifensysteme, die infolge ihrer Erstreckung von Nord nach Süd die verschiedenartigsten Klimazonen und damit Kulturzonen in einem System erfassen, und die Bevorzugung der weniger erschlossenen polaren Gebiete hinsichtlich der Verzerrung infolge der Verjüngung der Streifen zu den Polen hin (vgl. Tabelle 1).

Wir suchen daher für die einheitliche Abbildung von Großräumen und insbesondere des Erdellipsoids Abbildungssysteme, die die beiden erwähnten Mängel nicht besitzen, die sich also von Ost nach West erstrecken und somit in einem System Erdzonen gleicher Art abbilden und außerdem an ihren Rändern konstante maximale Verzerrungsverhältnisse haben. Unter diesem Gesichtspunkt drängt sich nachstehende Lösung als naturgegeben auf: Die Abbildungsbereiche müssen Breitenkreiszonen sein, d. h. es wäre die konforme Lambertabbildung (die sogenannte konforme Kegelprojektion) anzuwenden. Weil die arktischen (nördlich 70° n. Br.) und antarktischen (südlich 56° s. Br.) Gebiete in absehbarer Zeit einer erheblichen Besiedlung und Bewirtschaftung nicht unterliegen werden, käme für sie die stereographische Projektion in Frage. Am Äquator könnte die Mercatorabbildung angewendet werden. Für die Verwirklichung dieser Lösung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine von ihnen sei nachstehend skizziert:

Anzuwenden wäre aus den unter Nr. 1 dieses Abschnitts angegebenen Gründen eine Doppelabbildung. Es sind dann auch die Umformungen zwi-

schen den Abbildungssystemen lediglich auf einer Kugel durchzuführen. Es wäre demnach die Abbildung der nördlichen bzw. südlichen Hälfte des Erdellipsoids auf einer einzigen Kugel vorzunehmen; hierbei könnte etwa $\varphi = 45^\circ$ als Normalbreite genommen werden. Die Konstante a (vgl. Abschnitt IV 3. c)) wäre wahrscheinlich zweckmäßig gleich 1 zu setzen, weil dann die Längenunterschiede durch die Abbildung auf die Kugel nicht verändert werden. Wenn auch zunächst die Verzerrungen auf der Kugel größer als bei der Wahl von $a^2 = 1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0$ werden, wie eine Vergleichung der Gleichungen (189) und (195) ergibt, so erweist doch eine Vergleichung der Gleichungen (193) und (197), daß sich die aus der Doppelabbildung hervorgehenden Verzerrungen bei beiden Werten a nur unerheblich unterscheiden. Diese bei der „stereographischen“ Doppelabbildung gemachte Feststellung wird auch bei der Lambertabbildung zutreffen. Über die gewählte Kugel geht man zu den rechtwinklig-ebenen Koordinaten der einzelnen Systeme über. Für die Randgebiete dieser Systeme wären — wie auch jetzt bei den Meridianstreifensystemen — die Koordinaten in beiden aneinander grenzenden Systemen zu berechnen. Formeln, z. B. für die Umformung von einer Breitenkreiszone in die benachbarte, sind in den Gleichungen (227) und (228) und (226 γ) gegeben. Für die massenweise Umformung könnten vereinfachte Verfahren benutzt werden.

Zum Anhalt bei der Untersuchung darüber, wie weit bei der Abbildung der Kugel auf die Ebene die Breitenkreiszonen in nordsüdlicher Richtung ausgedehnt werden können, sind in der nachstehenden Tabelle 1 auf Grund überschläglicher Berechnung die maximalen Verzerrungen zusammengestellt, die bei den in Deutschland eingeführten Meridianstreifensystemen von $l = 3^\circ$ ostwestlicher Erstreckung in den verschiedenen Breiten auftreten.

Abbildung in Meridianstreifensystemen
(Gauß-Krüger-Koordinaten)

Geographische Breite						
52° 30'	47°	38°	30°	20°	9°	0°
Berlin	Graz	Athen	Kairo	Port Sudan	Addis Abeba	Viktoria-See
Lineare Längenerstreckung in km für die halbe Systembreite ($1/2 l = 1,5^\circ$):						
102	114	132	144	157	165	167
Demnach beträgt die maximale Verzerrung:						
1:7800	1:6300	1:4700	1:3900	1:3300	1:3000	1:2900
d. h. auf 100 m Länge:						
1,3 cm	1,6 cm	2,1 cm	2,6 cm	3 cm	3,4 cm	3,5 cm
Bei Anwendung eines Reduktionsfaktors m_0 können diese Werte halbiert werden:						
1:15 600	1:12 600	1:9400	1:7800	1:6600	1:6000	1:5800
0,65 cm	0,8 cm	1,1 cm	1,3 cm	1,5 cm	1,7 cm	1,7 cm
Es sind erforderlich: für Großdeutschland 7, für Europa 24, für das ganze Erdellipsoid 120 Systeme						

Tabelle 1

Den vorstehenden Angaben sind in Tabelle 2 die Randverzerrungen für Breitenkreiszonen verschiedener nordsüdlicher Erstreckung gegenübergestellt.

Abbildung in Breitenkreiszonen
(Lambert-Koordinaten)

Nordsüdliche Erstreckung der Breitenkreiszone:			
2°	2,5°	3°	3 $\frac{1}{3}$ °
Lineare Längenerstreckung in km für die halbe Systembreite:			
$\frac{1}{2}b = 1^{\circ}$: 111	$\frac{1}{2}b = 1,25^{\circ}$: 139	$\frac{1}{2}b = 1,5^{\circ}$: 167	$\frac{1}{2}b = 1 \frac{2}{3}^{\circ}$: 185
Demnach beträgt die maximale Verzerrung:			
1:6600	1:4200	1:2900	1:2400
d. h. auf 100 m Länge:			
1,5 cm	2,4 cm	3,4 cm	4,2 cm
Bei Anwendung eines Reduktionsfaktors m_0 können diese Werte halbiert werden:			
1:13 200 0,8 cm	1:8400 1,2 cm	1:5800 1,7 cm	1:4800 2,1 cm
Erforderliche Zahl von Zonen für Deutschland:			
5	4	4	3
Für Europa:			
17	14	12	10
Für das Erdellipsoid ohne zwei Polkappen:			
64	51	42	38

Tabelle 2

Bis zu welchen maximalen Verzerrungen man gehen kann, hängt davon ab, ob man die Berücksichtigung von Strecken- und Winkelreduktionen auch in der Landmessung zulassen will. Diese Berücksichtigung ist in einfachster Weise (z. B. unter Benutzung graphischer Tafeln) möglich. Strenggenommen ist eine solche Berücksichtigung — ebenso wie die Berücksichtigung der Höhenlage — auch bei unseren Meridianstreifensystemen erforderlich; sie ist z. B. auch bei den Neumessungen für das Kataster der Ostmark vorgenommen worden. Wir wollen diese Frage hier nicht entscheiden; bezüglich der Größe der maximalen Verzerrung verweisen wir auf die Angaben in Tabelle 2.

Als Beispiel wollen wir lediglich die Abbildung unter Benutzung von Breitenkreiszonen mit $3\frac{1}{3}^{\circ}$ nordsüdlicher Erstreckung kurz betrachten. Bei Anwendung eines Reduktionsfaktors m_0 läßt sich hierbei die maximale Verzerrung auf 1:4800 der Länge, das sind 2,1 cm auf 100 m, herabdrücken. In der Beilage 3 ist die Auswirkung dieser Breitenkreiszonenabbildung auf Europa dargestellt, wobei in einer Zone die Abstufung der Vergrößerung in Zentimeter auf 100 m wieder durch die Zahl der Punkte in den strichpunktierten Linien angedeutet ist.

Auf je 10° Breitenunterschied entfallen drei Breitenkreiszonen. Geht man bei der Abbildung des Ellipsoids im Norden bis zu etwa 70° nördlicher Breite und im Süden bis zu $56^{\circ}40'$ südlicher Breite, so wären die restlichen Polkappen je durch die stereographische Projektion abzubilden. Für das Gebiet beiderseits des Äquators — vielleicht bis zu 2° nördlicher und 2° südlicher Breite — ist zweckmäßig die Mercatorabbildung zu wählen, die beiden nach Norden und Süden anschließenden Breitenkreiszonen könnten dann je 4° nordsüdlicher Erstreckung haben, so daß ab 10° nördlicher bzw. südlicher Breite die vorgesehene nordsüdliche Erstreckung von $3\frac{1}{3}^{\circ}$ für die Breitenkreiszonen eintreten kann. Insgesamt wären somit 1 südliche Polkappe + 16 südliche Breitenkreiszonen + 1 Mercatorzone + 20 nördliche Breitenkreiszonen + 1 nördliche Polkappe = 39 Systeme erforderlich; für Europa etwa 10 Systeme und für Großdeutschland 3 Systeme. Die entsprechenden Zahlen für Zonenerstreckungen von 2° , $2,5^{\circ}$ und 3° sind in Tabelle 2 angegeben und für die Vergleichung außerdem in Tabelle 1 die entsprechenden Zahlen für die Abbildung unter Benutzung der in Deutschland eingeführten Meridianstreifensysteme von 3° ostwestlicher Erstreckung.

X. Zusammenfassung

In der Einleitung ist als Hauptziel dieser Arbeit angegeben worden, Formeln für konforme Abbildungen des Erdellipsoids zu entwickeln, die soweit als möglich der konformen Lambertabbildung der Kugel und ihren Grenzfällen entsprechen.

Als Vorbereitung dazu werden Grundformeln zur Berechnung ebener konformer Koordinaten x, y aus den geographischen Koordinaten für den Fall hergeleitet, daß eine geodätische Linie das Urbild der geradlinigen x -Achse wird. Die Formeln enthalten Konstanten, die von dem Gesetz abhängen, nach welchem die betrachtete geodätische Linie abgebildet wird. Für den Fall, daß ein Meridian als Urbild der x -Achse gewählt wird, werden außerdem Formeln für die umgekehrte Berechnung und entsprechende Formeln für die Berechnung des Vergrößerungsverhältnisses aus den geographischen oder den ebenen Koordinaten abgeleitet. Die Konstanten dieser Grundformeln werden für die gebräuchlichsten konformen Abbildungen unmittelbar aus den Formeln für das Vergrößerungsverhältnis ermittelt.

Hierauf wird aus dem Wesen der konformen Lambertabbildung der Kugel heraus das Gesetz der geradlinigen Abbildung einer geodätischen Linie einer beliebigen Fläche entwickelt. Durchgeführt wird dann die analoge Abbildung des Erdellipsoids für den Fall, daß ein Meridian geradlinig abgebildet wird. In gleicher Weise werden Formeln für eine der stereographischen

Projektion der Kugel analoge Abbildung des Erdellipsoids hergeleitet. Dagegen wird an Stelle einer der Mercatorabbildung der Kugel analogen Abbildung des Erdellipsoids die querachsige Abbildung durchgeführt. Hiermit sind zugleich die Formeln für die in der Geodäsie gebräuchlichsten Abbildungen nach gleichartigen Grundsätzen abgeleitet worden. In einem weiteren Abschnitt werden Formeln zur Berechnung der Längen- und Richtungsreduktionen bei der verallgemeinerten konformen Lambertabbildung und der verallgemeinerten stereographischen Abbildung gebracht.

Eine Erörterung der gewonnenen Ergebnisse zeigt, daß die formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels — abgesehen von Ausnahmefällen — beim Erdellipsoid nicht möglich ist. Anschließend werden die verschiedenen bekannten „stereographischen“ Abbildungen des Erdellipsoids miteinander verglichen.

Sodann werden die Übertragungsformeln noch für die Abbildung der Kugel angegeben. Hierbei geben die Formeln auch bei der konformen Lambertabbildung mit beliebiger Lage des Büschelscheitels („schiefe Kegelpjektion“) die Koordinaten x und y unmittelbar als Funktion der geographischen Koordinaten. Außerdem werden Formeln für die Umformung der behandelten Koordinaten angegeben.

Zum Schluß wird an den Beispielen Großdeutschlands und des ganzen Erdellipsoids gezeigt, in welcher Weise sich die stereographische Projektion, die konforme Lambertabbildung und die Mercatorabbildung bzw. ihre Verallgemeinerungen gemeinsam für die Abbildung von Großräumen verwenden lassen.

Anhang

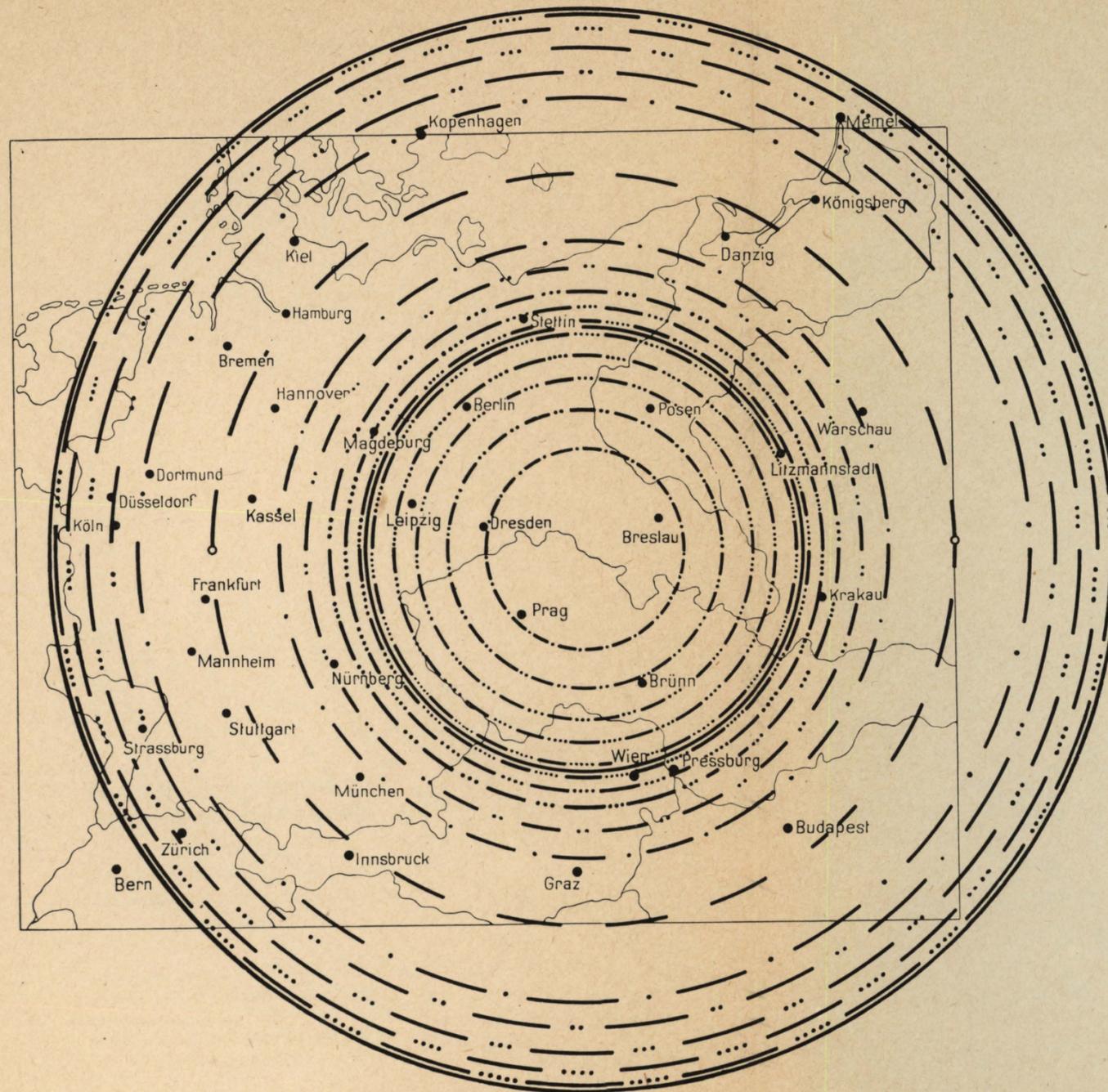
Gegenüberstellung von Bezeichnungen für Abbildungen

In der Literatur üblich:	In vorliegender Arbeit:
1. (Normale) Kegelpjektion	Konforme Lambertabbildung
2. Mercatorprojektion	Mercatorabbildung
3. (Polare) stereographische Projektion	Stereographische Projektion
4. Schiefe Kegelpjektion	Verallgemeinerte konforme Lambertabbildung
5. Abbildung durch querachsige Koordinaten (eine Koordinatenachse ist längentreues Abbild einer geodätischen Linie, die senkrecht zum Meridian verläuft)	Querachsige Abbildung oder — bei der Kugel — verallgemeinerte Mercatorabbildung
6. Schiefe stereographische Projektion	Verallgemeinerte stereographische Projektion (bei der Kugel); verallgemeinerte stereographische Abbildung (beim Ellipsoid; denn beim Ellipsoid liegt eine Projektion im eigentlichen Sinne, wie sie bei der Kugel stattfindet, nicht vor)

Zitierte Schriften

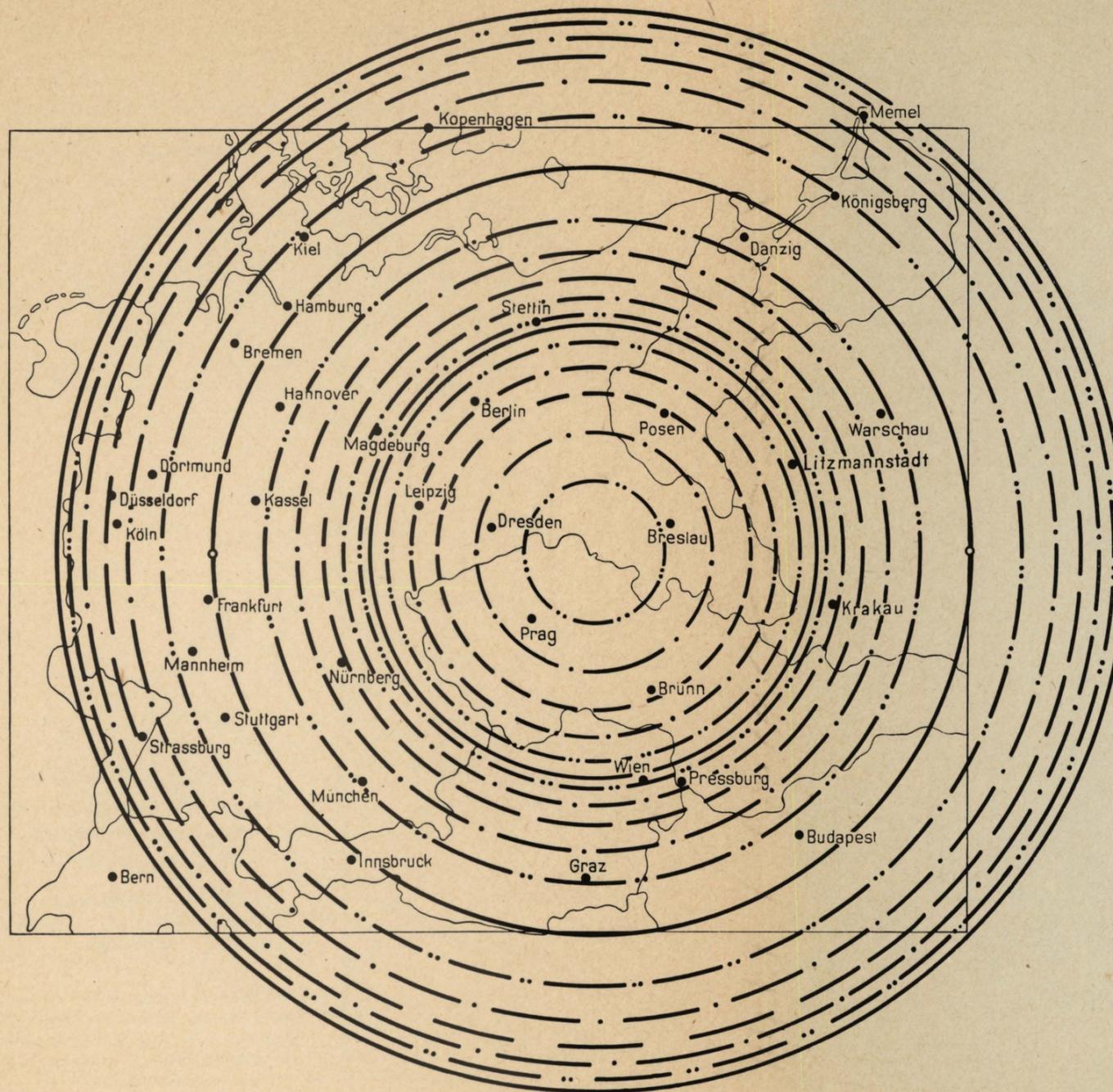
- [1] Lambert, J. H.: Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. III. Teil, Berlin 1772.
- [2] Gauß, C. F.: Werke. IV. Band. 2. Abdruck. Göttingen 1880.
- [3] Gauß, C. F.: Werke. IX. Band. Leipzig 1903.
- [4] Jordan, W.: Bestimmung eines Folgepunktes bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Zeitschrift für Vermessungswesen 1889. Stuttgart.
- [5] Lagrange de, J. L.: Über die Konstruktion geographischer Karten in „Ostwalds Klassiker“: „Über Kartenprojektion“. Leipzig 1894.
- [6] Jordan, Mauck, Vogeler: Großherzoglich Mecklenburgische Landes-Vermessung, V. Teil: Die konforme Kegelpjektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz 1. Ordnung. Schwerin 1895.
- [7] Krüger, L.: Zur stereographischen Projektion. Berlin 1922.
- [8] Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. 3. Band: Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. Stuttgart 1923.
- [9] Roussilhe, H.: Cours d'astronomie appliquée et géodésie. Paris 1924.
- [10] Thilo, G.: Unmittelbare Übertragung Schreiber'scher in Gauß-Krüger'sche Koordinaten. Sonderheft 5 zu den Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme. Berlin 1928.
- [11] Grabowski, L.: Tafel zur Berechnung der isometrischen Breite und Hilfstafel zur Gauß-Krüger'schen „stereographischen“ Abbildung des Erdellipsoids. Zeitschrift für Vermessungswesen 1929. Stuttgart.
- [12] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlin 1930.
- [13] Rothe, R.: Höhere Mathematik, Teil I, Leipzig und Berlin 1932. Teil II, Leipzig und Berlin 1931. Teil III, Leipzig und Berlin 1935.
- [14] Laborde, H.: Traité des projections des cartes géographiques; quatrième fascicule: Théorie de la représentation conforme. Paris 1932.
- [15] Großmann, W.: Die reduzierte Länge der geodätischen Linie und ihre Anwendung bei der Berechnung rechtwinkliger Koordinaten in der Geodäsie. Zeitschrift für Vermessungswesen 1933. Stuttgart.
- [16] Großmann, W.: Entwicklung und Transformation ebener querachsiger Koordinaten. Zeitschrift für Vermessungswesen 1934. Stuttgart.
- [17] Hristow, Wl. K.: Potenzreihen zwischen dem geographischen und dem isometrischen Breitenunterschied. Zeitschrift für Vermessungswesen 1935. Stuttgart.
- [18] Eggert, O.: Die stereographische Abbildung des Erdellipsoids. Zeitschrift für Vermessungswesen 1936. Stuttgart.
- [19] Hristow, Wl. K.: Potenzreihen zwischen den stereographischen und den geographischen Koordinaten und umgekehrt. Zeitschrift für Vermessungswesen 1937. Stuttgart.
- [20] Rothe, R.: Differentialgeometrie I. Berlin und Leipzig 1937.
- [21] Wagner-Meinardus: Allgemeine Erdkunde, I. Teil: Mathematische Geographie. Hannover 1938.
- [22] Lehmann, G.: Über die Lagrange'schen Projektionen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1939. Stuttgart.
- [23] Hristow, Wl. K.: Bemerkungen über die stereographische Projektion. Zeitschrift für Vermessungswesen 1940. Stuttgart.

F. Hunger:
Beitrag zur konformen Abbildung
von Großräumen in der Geodäsie



**Doppelabbildung Großdeutschlands
durch zwei Koordinatensysteme**
(Verallgemeinerte
stereographische Projektion und ver-
allgemeinerte konforme Lambertab-
bildung)

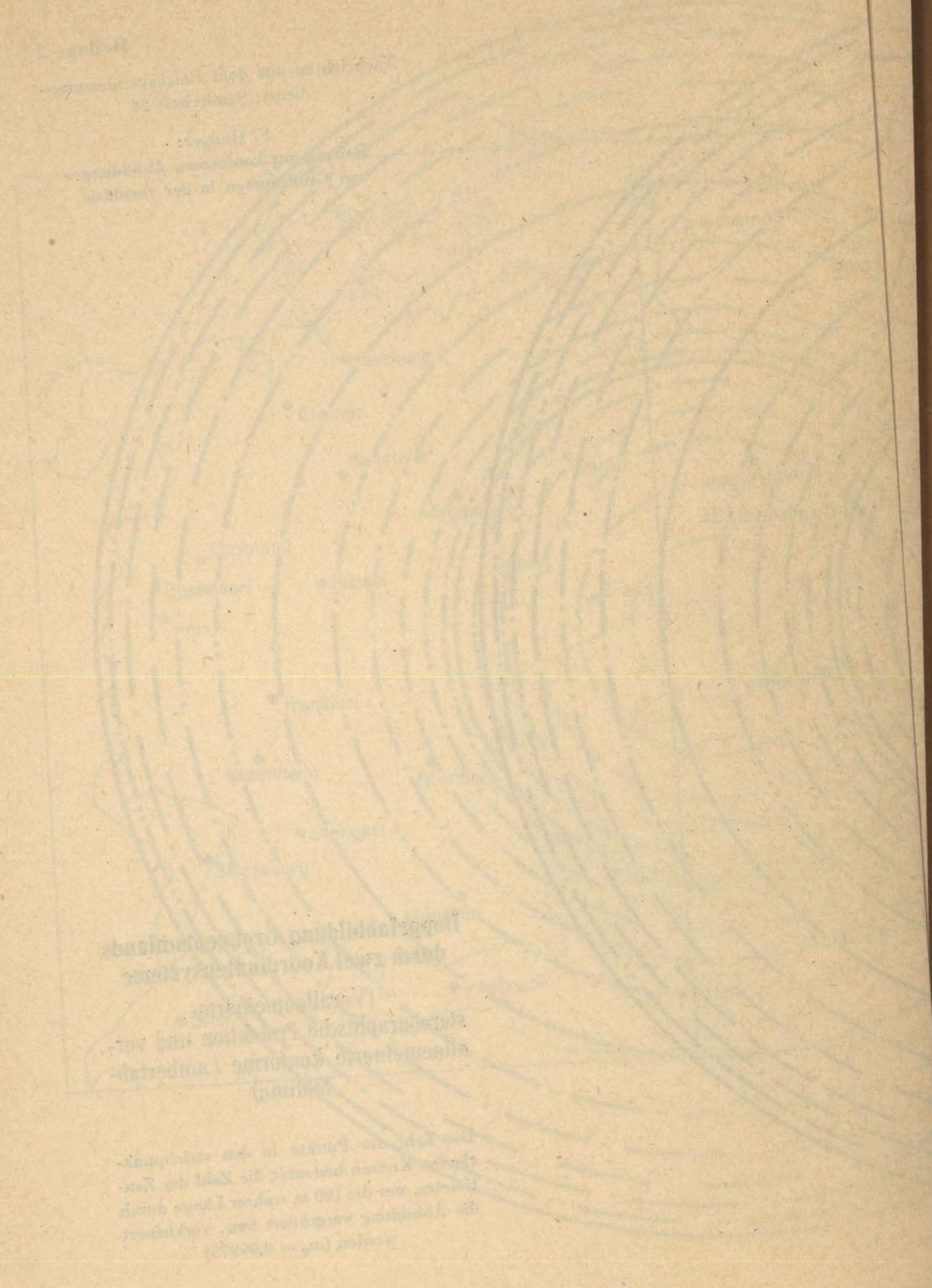
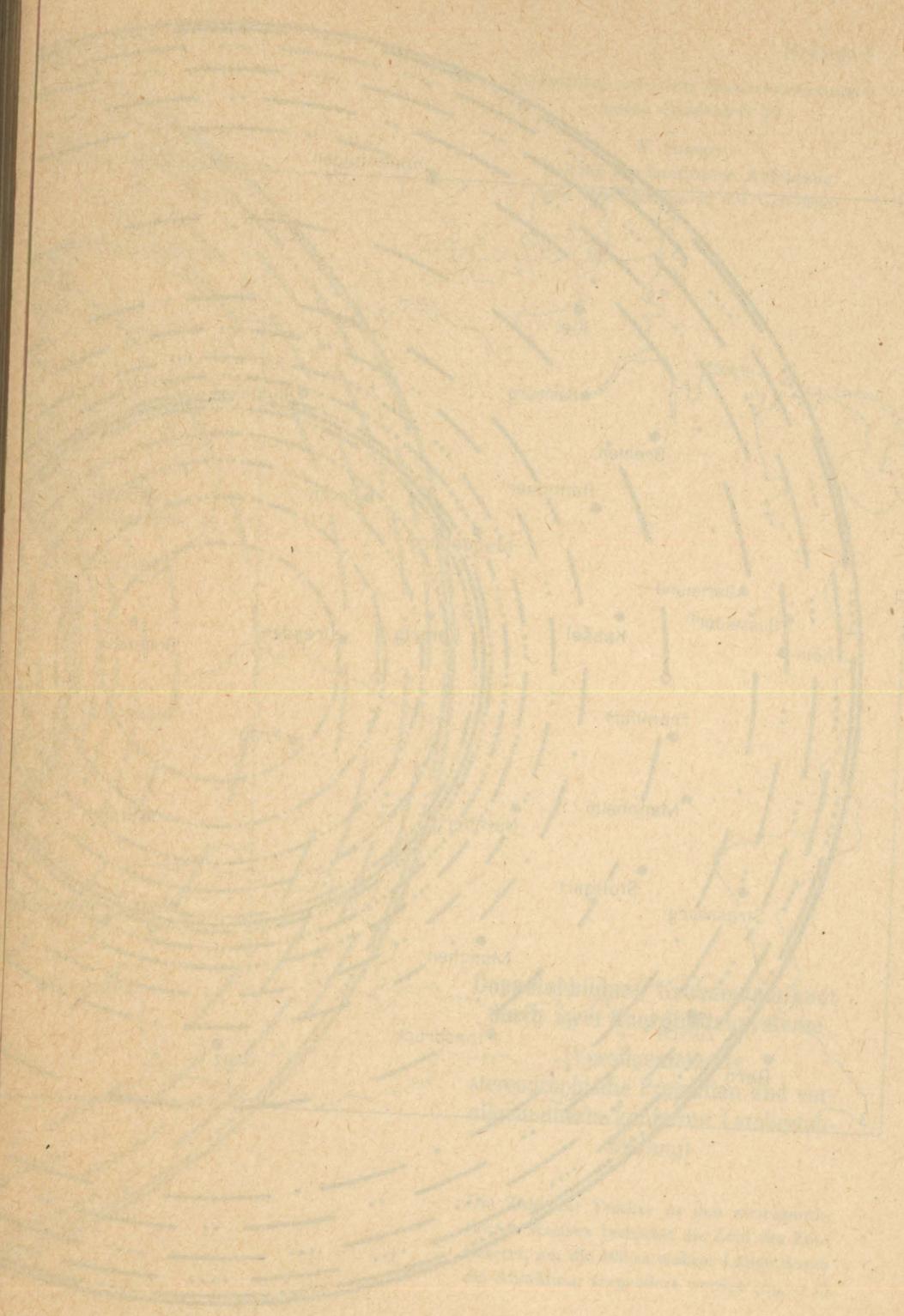
Die Zahl der Punkte in den strichpunk-
tierten Kreisen bedeutet die Zahl der Zen-
timeter, um die 100 m wahrer Länge durch
die Abbildung vergrößert werden ($m_0 = 1$)

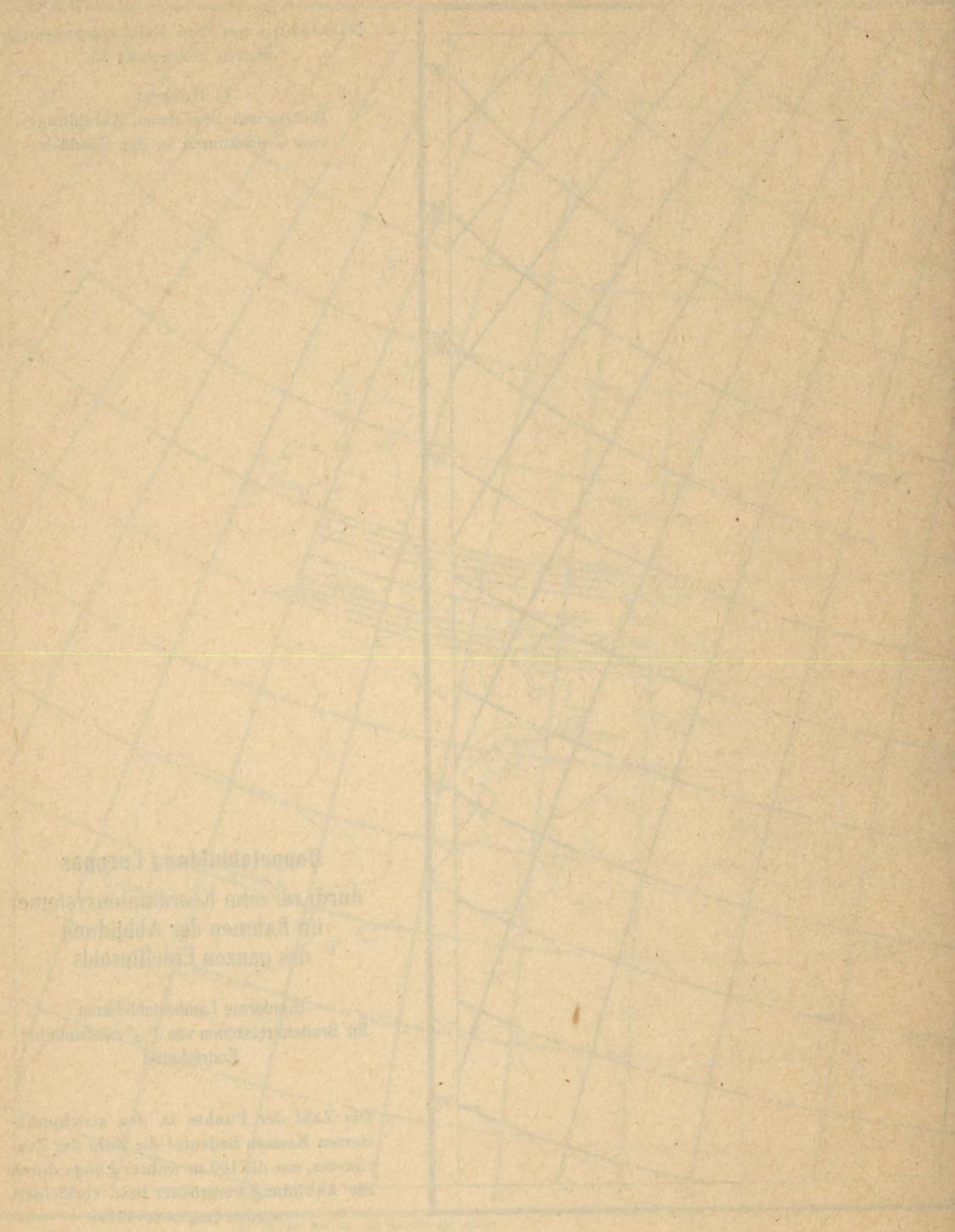
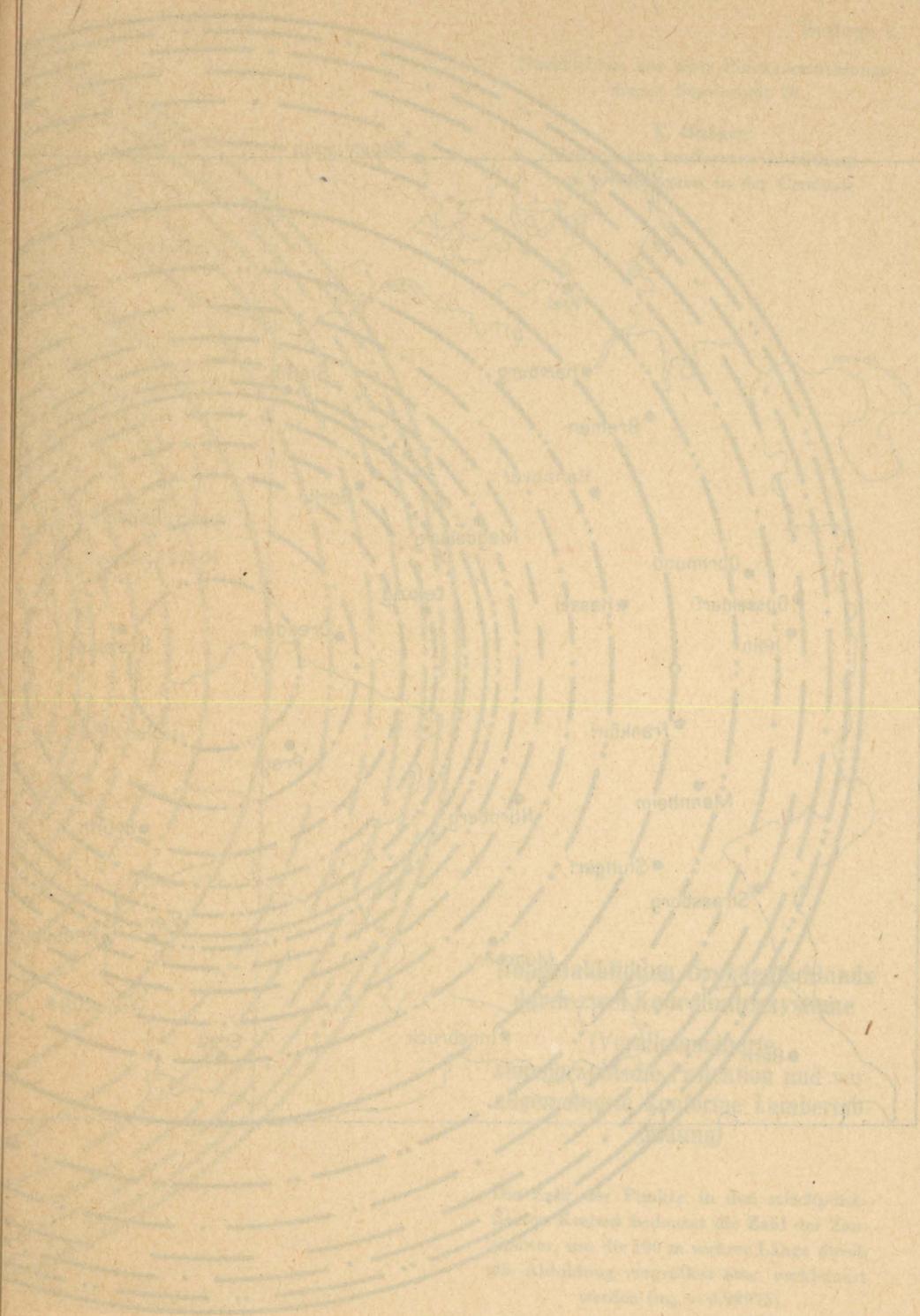


**Doppelabbildung Großdeutschlands
durch zwei Koordinatensysteme**

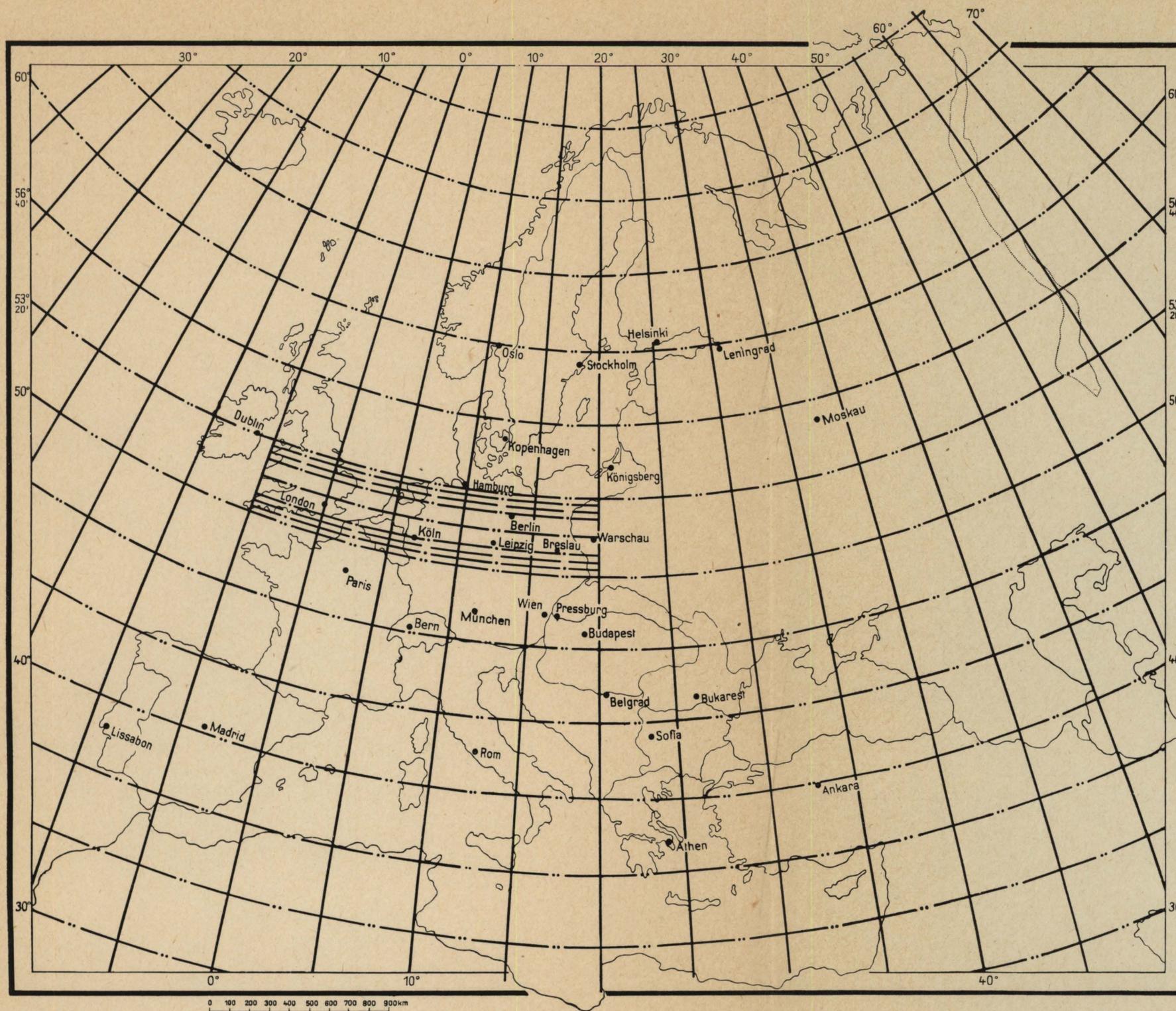
(Verallgemeinerte
stereographische Projektion und ver-
allgemeinerte konforme Lambertab-
bildung)

Die Zahl der Punkte in den strichpunk-
tierten Kreisen bedeutet die Zahl der Zen-
timeter, um die 100 m wahrer Länge durch
die Abbildung vergrößert bzw. verkleinert
werden ($m_0 = 0,99975$)





F. Hunger:
Beitrag zur konformen Abbildung
von Großräumen in der Geodäsie



Doppelabbildung Europas
durch rd. zehn Koordinatensysteme
im Rahmen der Abbildung
des ganzen Erdellipsoids

(Konforme Lambertabbildung
für Breitenkreiszonen von $3\frac{1}{3}^\circ$ nordsüdlicher
Erstreckung)

Die Zahl der Punkte in den strichpunk-
tierten Kreisen bedeutet die Zahl der Zen-
timeter, um die 100 m wahrer Länge durch
die Abbildung vergrößert bzw. verkleinert
werden ($m_0 = 0,99979$)

