



Deretnahnmt am: 20. 1. 44  
Beleg-Nr.: 158  
Heine

2. Jahrgang

Heft 10

# MITTEILUNGEN

des Chefs des  
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Dezember 1943

*Im beschleunigten Umlauf bei den Vermessungsbeamten des Generalstabes I*

INHALT: (Schaltzeit 3 Tage)

<i>29. 1. 44</i>	<i>I:</i>	Hauptmann Geißler: Skulpturale Züge im Antlitz der Ukraine und ihre Veränderlichkeit, soweit sie für das Kartenbild und die Kartenberichtigung von Bedeutung sind . . . . . S. 3
<i>1. II</i>	<i>II:</i>	Obltn. Dipl.-Ing. Dilg: Zur Umformung geographischer in Gauß-Krüger-Koordinaten . . . . . S. 11
<i>23. III</i>	<i>III:</i>	Obltn. Dr.-Ing. Kneißl: Das Verfahren von N. A. Urmajew zur Ausgleichung von Triangulationen I. O. . . . . S. 15
<i>17. 2. 44</i>	<i>IV:</i>	N. A. Urmajew: Verfahren zur Ausgleichung von Triangulationen I. O. . . . . S. 22
<i>23. 3. 44</i>	<i>V:</i>	Obltn. Dipl.-Ing. Beck: Untersuchung über eine zweckmäßige Beobachtungslage bei der Winkelmessung in allen Kombinationen nach dem Schreiberschen Verfahren . . . . . S. 47
	<i>VI:</i>	Obltn. Dipl.-Ing. Häring: Die Landesvermessung in Französisch-Nordafrika . . . . . S. 58
	<i>XI:</i>	

*Zum Verbleib*

Herausgegeben vom

Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres  
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Berlin **Hauptmann Englert**

Schule f. Fahn.-Junker d. Art., - Ia Mess.



1424

GA2K

1718 I

Die Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens erscheinen in zwangloser Folge in jährlich etwa sechs Heften. Sie werden vom Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens übersandt, eine Veröffentlichung im Buchhandel erfolgt vorläufig nicht. Abdruck nur mit Genehmigung des Kr.Kart.Verm.Chefs.

Beiträge sind zu richten an OKH./GenStdH./Kr.Kart.Verm.Chef, Berlin W 35, Lützowstraße 60



Schule f. Fahn. Junker d. Artillerie  
Abt. Ia / Mess - Kartenstelle

2. Jahrgang

Heft 10

# MITTEILUNGEN

## des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Dezember 1943

### I N H A L T:

- Hauptmann Geißler: Skulpturelle Züge im Antlitz der Ukraine und ihre Veränderlichkeit, soweit sie für das Kartenbild und die Kartenberichtigung von Bedeutung sind . . . . . S. 3
- Obltn. Dipl.-Ing. Dilg: Zur Umformung geographischer in Gauß-Krüger-Koordinaten . . . . . S. 11
- Obltn. Dr.-Ing. Kneißl: Das Verfahren von N. A. Urmajew zur Ausgleichung von Triangulationen I. O. . . . . S. 15
- N. A. Urmajew: Verfahren zur Ausgleichung von Triangulationen I. O. . . . . S. 22
- Obltn. Dipl.-Ing. Beck: Untersuchung über eine zweckmäßige Beobachtungslage bei der Winkelmessung in allen Kombinationen nach dem Schreiberschen Verfahren . . . . . S. 47
- Obltn. Dipl.-Ing. Häring: Die Landesvermessung in Französisch-Nordafrika . . . . . S. 58

Herausgegeben vom  
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres  
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens  
Berlin





## Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland:

- Rittmeister d. R. Glahs, Willi, Vermessungsinspektor, Ia/Meß bei einer Infanteriedivision (mot), gefallen am 12. 9. 43 als Führer einer Alarmeinheit bei Kuren in Rußland.
- Unteroffizier Hoffmann, Martin, Angehöriger einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gestorben infolge schwerer Verwundung am 13. 9. 43 in Griechenland.
- Unteroffizier Grieswald, Kurt, Kraftfahrer, Feldkoch in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 17. 9. 43 in Kroatien.
- Unteroffizier Rehse, Franz, Kaufmann, Waffenunteroffizier in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 16. 9. 43 in Kroatien.
- Unteroffizier Reichel, Kurt, Vermessungsinspektor, Beobachter in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 17. 9. 43 in Kroatien.
- Unteroffizier Dahmer, Heinrich, Metallschleifer, Kopierer in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 3. 11. 43 in Rußland.
- Unteroffizier Karsch, Karl, Zeichner bei einer Divisionskartenstelle, gestorben infolge schwerer Verwundung am 10. 10. 43 in Rußland.
- Stabsgefreiter Lung, Wilhelm, Kraftfahrer in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 8. 11. 43 in Rußland.
- Stabsgefreiter Hartung, Heinrich, Kraftfahrer in einer Divisionskartenstelle, gestorben am 21. 9. 43 an den Folgen einer schweren Verwundung in Rußland.
- Obergefreiter Dobranz, Ernst, Schuhmacher bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 16. 9. 43 in Kroatien.
- Obergefreiter Zanger, Alfred, Kaufmann, Kraftfahrer bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gestorben am 11. 8. 43 in Frankreich infolge Unglücksfall.
- Obergefreiter Rahaus, Leopold, Steindrucker, Drucker in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 3. 11. 43 in Rußland.
- Obergefreiter Rinke, Franz, Tischler, Kradmelder bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 16. 9. 43 in Kroatien.
- Obergefreiter Spiersch, Paul, Lagerarbeiter, Signalbauer bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 16. 9. 43 in Kroatien.
- Obergefreiter Thürk, Otto, Zimmerer, Signalbauer bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 16. 9. 43 in Kroatien.
- Obergefreiter Wermke, Bruno, Tischler, Kraftfahrer bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gestorben infolge Verwundung am 17. 9. 43 in Kroatien.
- Gefreiter Kemper, Johannes, Vermessungstechniker, Aufschreiber in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gestorben infolge Verwundung am 17. 9. 43 in Kroatien.
- Gefreiter Cordes, Hans, MG-Schütze in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gestorben am 15. 10. 43 an den Folgen einer schweren Verwundung in Norwegen.
- Gefreiter Grüner, Karl, Buchdrucker, Drucker in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 3. 11. 43 in Rußland.
- Gefreiter Lauterbach, Kurt, Kraftfahrer bei einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 6. 9. 43 in Rußland.
- Obersoldat Werthmann, Albert, Vermessungstechniker, Fotograf in einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot), gefallen am 3. 11. 43 in Rußland.
- Als Angehörige einer Vermessungs- und Kartenabteilung (mot) fielen am 30. 10. 43 und am 2. 11. 43 in Rußland:
- Obergefreiter Klingels, Peter,
- Obergefreiter Magyar, Friedrich,
- Obergefreiter Noetzel, Fritz,
- Obergefreiter Ruhmannseder, Erwin,
- Gefreiter Suchanek, Willibald.

## Skulpturelle Züge im Antlitz der Ukraine und ihre Veränderlichkeit, soweit sie für das Kartenbild und die Kartenberichtigung von Bedeutung sind

Von Hauptmann H. Geißler (im Felde)

Der Landschaftscharakter der Ukraine wird durch weite, flachwellige Ebenen bestimmt. Nur wenige Berglandschaften in den Karpaten und auf der Krim sind emporgehoben und überragen das Gesamtgebiet. Das ebene Gebiet, eine gegen Südosten wenig geneigte Hochfläche von 200—300 m, stellt im Unterbau eine Abtragungslandschaft dar. Diese Rumpffläche besteht aus den verschiedensten Sedimentgesteinen. Die Mächtigkeit dieser Abtragungsschichten ist ostwärts des Dnepr größer als westlich. Sie erreicht in der Charkower Mulde etwa 800 m. Unter diesen Schichten liegt ein Schild von kristallinischem Gestein, der sich in dem Podolisch-Asowischen Schild heraushebt und sich von Nordost nach Südost durch die ganze Ukraine erstreckt. Dieses Grundgebirge und die Sedimentgesteine liegen nur in den Flußtälern offen, besonders im Mittellauf des Dnestr, Bug und Dnepr. Von Kanew bis Dnepropetrowsk wird der Dnepr an das kristallinische Massiv gedrückt, von Dnepropetrowsk bis Saporoschje schneidet sich der Fluß in den Schild ein. Die Rumpffläche der Abtragungslandschaft ist in großen Teilen durch den Löß, Ablagerungen von mächtigen, hellfarbigen Staubbmassen, flächenhaft überschichtet. Die flachwelligen Grundformen wurden dadurch noch mehr ausgeglichen, wobei die Hangformen konkav gestaltet wurden. Die Ströme und Flüsse zerschneiden das Gesamtgebiet. Dnestr, ukrainischer Bug, Dnepr und Donez bilden die Grenzen der in der Mappe F der Militärgeographischen Angaben über die Ukraine näher beschriebenen Einzellandschaften. Der strukturelle Unterbau macht sich da und dort durch Steilabfall gegen ein tiefer gelegenes Vorland oder gegen breite Flußniederungen bemerkbar und ist auch für den Verlauf der Täler im allgemeinen bestimmend. Sobald der Fluß sich in die Rumpffläche eintieft, beeinflussen die durchschnittenen geologischen Schichten auch die Form seines Tales. Die Strombecken stellen sich in ihrer heutigen Gestalt als Ergebnis einer mit Tiefenerosion verbundenen Seitenerosion stark rechts wirkender Ströme dar. Die Täler sind also jünger als die Hochfläche. Diese selbst dürfte unter dem Löß nicht älter als das mittlere Tertiär sein. Im Nordwesten und Norden verhüllen Ablagerungen des Eises die geologischen früheren Grundschichten.

Die folgenden Ausführungen sollen nun einige morphologische Besonderheiten der ukrainischen Landschaft beschreiben. Dabei soll insbesondere untersucht werden, wie sie in den Karten augenfällig werden, wie Veränderungen an den Formen durch Einwirkung besonders klimatischer, exogener Kräfte hervorgerufen werden. Damit sollen Fingerzeige gegeben werden, wo vorhandene Karten am ehesten zu berichtigen sind.

Von den formgestaltenden Kräften und Vorgängen kommen für unsere Betrachtung die Verwitterung, die Bewegung lockerer Massen, vor allem die Arbeitsleistung des fließenden Wassers und in geringem Umfange auch die Tätigkeit des Windes in Betracht. In den Berglandschaften der Karpaten und des Jailagebirges wirken die von unseren heimischen Gebirgsgegenden bekannten Kräfte; auch ihre Wirkung ist ähnlich. Auf sie soll daher nicht näher eingegangen werden. Auf den Landschaftsplatten liegen aber besondere Verhältnisse vor. Sie werden bestimmt von den die Tafeln mächtig überziehenden Lößmassen, deren Verwitterung und Bodenbildung und den besonderen kontinentalen klimatischen Verhältnissen des Gebietes.

Der Löß wurde als vom Wind hergewehter Staub in der Eiszeit im eisfreien Gebiet abgelagert. In der Ukraine wurde er im Laufe des Diluvium bis zu einer Mächtigkeit von 40 m aufgeschichtet. Am stärksten war die Ablagerung im Windschatten möglich. Die Winde kamen vor allem von Nordwesten und Norden. Der Löß ist fahlgelb, feinkörnig (0,5—0,02 mm), besteht hauptsächlich aus Quarz, der von einer dünnen Kalkhaut überzogen ist. Die Körnchen kleben nicht zusammen, haben aber trotzdem eine gewisse Standfestigkeit und können senkrechte Lößwände bilden. Das Wasser dringt leicht ein und wird wegen der Krümelstruktur im Boden auch etwas aufgespeichert. Durch Auslaugung und Zersetzung durch pflanzliche und tierische Stoffe bildete sich im Laufe von etwa 20 000 Jahren



eine bis zu 2 m mächtige Kulturschicht, die so fruchtbare ukrainische Schwarzerde. Nördlich der Linie Luzk, Rowno, Shitomir, Kiew und in den waldigen Sumpfniederungen des Polessje kommt der Löß nur vereinzelt vor.

Die Klimakräfte beeinflussen die den Löß tragenden Hochflächen auf besondere Weise. Auf den Hochflächen ist die Abtragung durch die Regenwasser gewöhnlicher Regenfälle gering, denn das Wasser wird von dem Lößboden rasch aufgesaugt. Dagegen bearbeiten größere Wassermengen die Oberfläche umgestaltend. Trotzdem die Schneedecke in der Ukraine im allgemeinen gering ist — sie beträgt im Nordteil etwa 30 cm und wird gegen Süden noch geringer — kommen bei der Schneeschmelze doch bedeutende Wassermengen zum Abfluß, da der Schnee im Frühjahr rasch schmilzt und der Untergrund bereits durchfeuchtet oder gefroren ist. Die Sommerregen treten in der Ukraine mit großer Heftigkeit auf. Besonders der Süden und der Osten werden durch heftige Platzregen und Wolkenbrüche heimgesucht. In der Steppe fließen diese Wasser rasch ab. Die nicht versickernden Niederschläge suchen ihren Weg in breiter Ausdehnung nach den niedrigsten Bodenstellen. Dort sammelt sich immer mehr Wasser und stürzt nach den abfallenden Mulden. Die strömenden Wasser reißen an wunden Stellen, manchmal genügt ein Mäuseloch, Risse in den weichen, feinkörnigen Lößuntergrund. Die Risse bilden dann den Beginn der für die Ukraine so typischen Regenschluchten. Mit großer Kraft ergießt sich das Wasser in die vorhandene Schlucht, erweitert und vertieft sie und verlängert sie dadurch nach rückwärts. Rechts und links fließt durch seitliche Rinnsale und Nebenschluchten immer neues Wasser zu. Ist die Erosion anfänglich auch schwach, so wächst sie mit den Wassermengen und dem Gefälle immer mehr, schneidet dann auch die unter dem Löß liegenden geologischen Schichten an und durchnagt schließlich tiefer liegende Gesteinsschichten. Die oberen weichen Boden- und Lößschichten werden natürlich schneller ausgewaschen. Wenn das Gefälle abnimmt, nimmt auch die Erosionskraft ab und manchmal endigen solche Regenschluchten im Muldenrund, wohin sie ihre Schuttmassen auslagern. Dieses plötzliche Aufhören vieler Erosionen fällt vor allem auf, wenn man vom Flugzeug aus diese Regenschluchten verfolgt. Die Russen unterscheiden den Owrag und die Balka. Die Balki sind die Hauptschluchten, haben eine größere Länge und im Unterlauf eine größere Breite, bis 150 m, wo sie dann bewachsen und sogar bebaut sind.

Die oberen Teile und die Seitenäste werden mit Owragi bezeichnet. Sie sind meist Ergebnisse der jüngsten Auswaschung und deshalb meist ohne Bewuchs. Die Balki erweiterten sich nach jahrtausendelanger Erosion zu breiten Talmulden und werden Dolina — Tal (Mehrzahl Doliny) benannt. Bei der Erosion werden auch wasserführende Schichten angeschnitten. Diese Schluchten haben dann ständig fließendes Wasser, das auch außerhalb der Hochwasserzeiten auswaschend wirkt. Meteorologische Faktoren (Verwitterung u. a.) begünstigen die Abtragung. Meist bilden diese Regenschluchten ein weit verzweigtes Netz, das sich bei jedem Regenguß oder Frühjahrshochwasser auch nach rückwärts und in die Tiefe einfrisst. Die Wände sind infolge der Standfestigkeit des Löß steil. Vom Flugzeug aus erscheinen diese hellgelben Owragi und die durch Bewachsung etwas dunkler schattierten Balki wie Riesenpolypen, die nach dem Lande greifen. Wenn sie eine Niederung erreicht haben, verschwindet die Geländewunde in der Vegetationsdecke. Die Ortschaften lassen am Lauf der größeren Balki Lücken frei.

Den Frühjahrshochwasser und den Sommerplatzregen kommen etwa 95% der jährlichen Unterspülung in den Schluchten zu, wogegen die Wasser der Untergrundquellen im unteren Teil der Schluchten im allgemeinen nur geringe Auswaschungen bewirken. Je tiefer die Erosionsbasis liegt, desto größer ist die Auswaschkraft der Sturzwasser. Deshalb sind die tiefsten Balki in den steilen Talhängen der Ströme und Flüsse.

Diese Regenschluchten sind das Veränderlichste im Antlitz der Ukraine. Nach den russischen Veröffentlichungen von Masalsky (Owragi im Schwarzerdengebiet in Rußland, Petersburg 1897) und N. A. Rosow (Owragi der Ukraine, Kiew 1927) können schon jährliche Veränderungen bis zu 30 m festgestellt werden. Vor allem ist das rasche Fortschreiten dieser Auswaschungen mit den größeren Schneefällen und den größeren Wolkenbrüchen im Osten beobachtet worden. Das schnelle Wachsen dieser Lößschluchten zeigt sich an dem Durchschneiden von Feldeinteilungen. Nicht selten werden auch Wege durchschnitten, die dadurch verlegt werden müssen. Die Bildung und das Umsichgreifen dieser Ausnagungen wird durch Baumpflanzung gehemmt. In den Wäldern macht die Erosion wenig Fortschritte. Die Bevölkerung bekämpft deshalb die Schluchtenbildung teilweise durch Bepflanzung. Seit

Jahrzehnten wird versucht, gegen diese Naturvorgänge anzukämpfen. E. E. Kern hat eine praktische Anweisung „Owragi“ dazu verfaßt, die 1928 schon in 8. Auflage erschien. Es werden darin empfohlen: Einbau von Faschinenwällen quer zur Gefällsrichtung in kurzen Abständen hintereinander, fester Wehre aus Balken und Steinen oder auch nur eingerammter Pfähle, Befestigung der Ränder durch Faschinen u. a., auch gemauerte Rinnen in der Nähe der Ortschaften. Im allgemeinen ist der Kampf nur spärlich aufgenommen worden.

Solch gewaltige Auswaschungen und Abschwemmungen der Regenschluchten wirkt sich auf die Umgebung aus und begünstigen im Laufe der Jahrtausende eine allgemeine Abtragung in breiter Form. Abbildung 1 gibt nach Rosow (s. o.) einen Überblick über die Verbreitung der Lößschluchten:

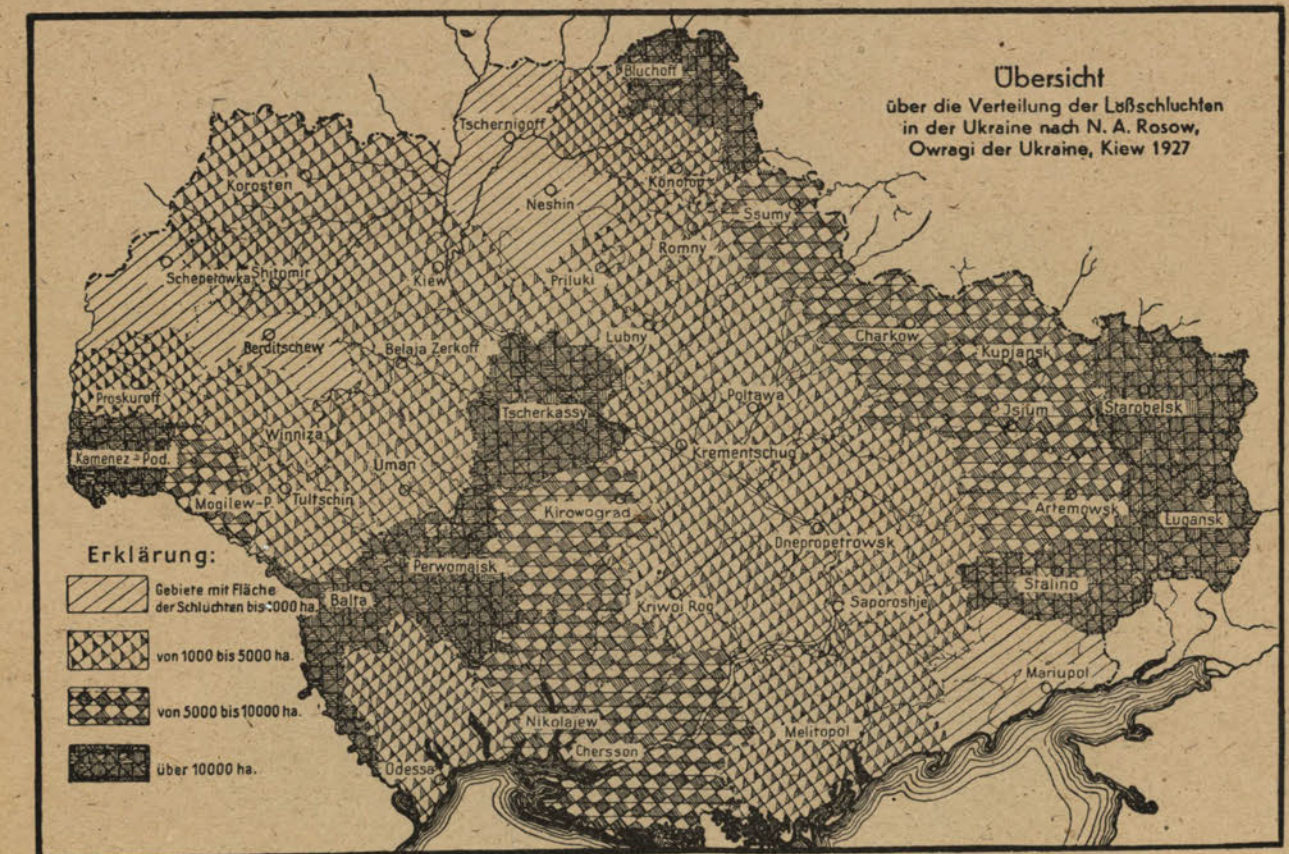


Abbildung 1

In den russischen Karten 1:25 000 und 1:50 000 werden die schmalen Gräben und Rinnsale, die nicht mehr maßstabgetreu ausgedrückt werden können, durch verstärkte Linien unter Einhaltung der Richtung der Gräbenachsen dargestellt, wobei Gräben und Auswaschungen in der Breite von 5 m und mehr durch zwei Linien und solche von weniger als 5 m Breite durch eine Linie dargestellt werden. Gräben, Schluchten und Kessel, die in diesen Maßstäben ausgedrückt werden können, werden durch Konturenzeichnungen in vollen Linien mit Schraffen dargestellt.

Bei der russischen Karte 1:100 000 sind die Gräben von 10 m und mehr durch zwei Linien und solche mit geringerer Breite als 10 m durch eine Linie dargestellt. Im Maßstab auszeichnbare Einschnitte sind durch Konturenzeichnung in vollen Linien mit Schraffen eingetragen.

Militärisch ist die richtige Erfassung dieser Geländehindernisse in den Karten wichtig. Sie stellen, soweit es sich nicht um ältere verflachte Formen oder wenig tiefe Schluchten handelt, ein wesentliches Erschwernis des Vormarsches dar. Es gibt steilwandige Balki bis zu 30 m Tiefe. Die Wände sind in der Regel schroff und schwer betretbar. Unversehens kann man vor ihren scharfen Rändern stehen. Besondere Hindernisse bereiten die Schluchten, wenn sie vom Wasser durchstürzt sind. Auf der anderen Seite sind diese im Oberlauf meist trockenen Bodenvertiefungen zum Einbau von Unterständen geeignet und bieten gute Deckung gegen den Feind.



Bei jeder Kartenberichtigung ist daher den Balki und Owragi, die in der Geländeplatte zur Darstellung kommen, besondere Beachtung zu schenken und besonders auch im Feindgelände auf ihre richtige und vollständige Lage zu achten.

Die Abbildungen 2—4 zeigen bildliche Erläuterungen zu den bisher angeführten Verhältnissen bei den Regenschluchten.



Abbildung 2

Die Niederschläge beeinflussen den Grundwasserstand in der Ukraine auf eine Weise, die Natur- und Kartenbild wenigstens zeitweise in Widerspruch bringt.

Das in die Oberfläche eingedrungene Wasser, das nicht vom Boden festgehalten wird, versickert in die Tiefe, bis es auf von Wasser gesättigte Schichten stößt. Es ist die Sättigungszone des Grundwassers, die ihre Entstehung und Erhaltung unterhalb liegenden wasserundurchlässigen Schichten verdankt. Diese Schichten haben vielfach eine Neigung, die ein Weiterücken des Grundwassers verursacht. Die obere Schicht der Sättigungszone ist der Grundwasserspiegel. Im Norden, im Wald- und Sumpfgebiet, auch in den Talniederungen und in Mulden der Hochfläche steht der Grundwasserspiegel nahe der Oberfläche. Das Grundwasser vereinigt sich hier oft mit dem oberflächigen Wasser. Dadurch entstehen die Sümpfe. Auf den Hochflächen, besonders im Steppengebiet, liegt der Grundwasserspiegel bis zu 30 m tief. Heiße, trockene Winde verringern noch das Grundwasser. Die Balki sowie die tief eingeschnittenen Flußniederungen leiten es ab. Von Juni bis September herrscht die

sommerliche Wasserarmut, besonders im Süden und Osten der Ukraine. Die sumpfigen Stellen gehen zurück, kleine Flüsse und Bäche trocknen dabei fast völlig aus. Plötzliche heftige Regenfälle reichern das Grundwasser wieder an. An Sumpfstellen können dann Seen entstehen, sonst ausgetrocknete Wasserläufe führen wieder Wasser. So kann der topographisch zu einer anderen Zeit erfaßte Wasserstand mit der Natur in Widerspruch stehen. Der russische Topograph hatte die Anweisung, den längstwährenden Wasserstand auch durch Befragen der Bevölkerung festzustellen. Solche Angaben sind meist recht unsicher, oder sie wurden nicht erhoben. Dies geht schon daraus hervor, daß ältere und jüngere Aufnahmen oder Erkundungen sich oft widersprechen.

Bei Benützung von Luftbildern ist doppelte Vorsicht geboten, da dabei die örtliche Beurteilung des Wasserlaufes besonders nach der Bewachung ausscheidet. Für die richtige Auswertung der Luftbilder für den Wasserstand wären Erhebungen über die der Aufnahme vorausgehenden Niederschläge wertvoll. Aufnahmen im Frühsommer und Herbst geben ein richtiges Bild vom Hauptzustand als Aufnahmen unmittelbar nach der Schneeschmelze oder nach einem Sommerhochwasser.

Quellen und Brunnen stehen ebenfalls im Zusammenhang mit dem Grundwasserstand. Die Schichtquellen in den Tälern sind im allgemeinen beständig, wenn die wasserdurchlässigen Schichten Neigung gegen den Quellaustritt haben. Auch die in der Ukraine ab und zu vorkommenden

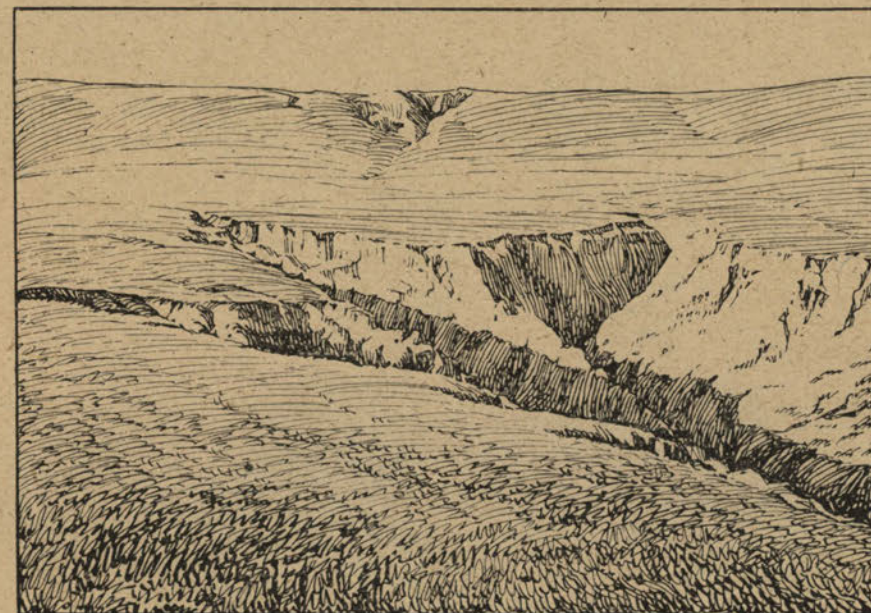


Abbildung 3

Artesischen Brunnen liefern das ganze Jahr Wasser. Das artesische Wasser entstammt einer vollausgefüllten, unter Druck stehenden wasserführenden Schicht zwischen zwei wasserundurchlässigen Schichten. Schachtbrunnen in unmittelbarer Nähe der Siedlungen haben in der Regel hinreichend Wasser; sie waren einst bestimmend für die Anlage der Siedlung. Fast alle Dorfsiedlungen liegen in Flußniederungen oder in der Nähe von Regenschluchten mit Schichtquellen. Dabei sind wenig tiefe Brunnen von 3—5 m an den typischen Ziehbrunnen, „Shurawl“ genannt, selbst im Luftbild erkennbar. Die tieferen Brunnen werden mittels Winden (Worot) oder auch mittels Windmotor genutzt. Die Kartenzeichen der russischen Karte unterscheiden die Ziehbrunnen, die Windbrunnen mit dem Zusatz „K.“ (Kolodez-Brunnen), die ausgetrockneten Brunnen mit dem Zusatz „K. (ssuch.)“, die artesischen Brunnen mit dem Zusatz „art. K.“; bei Brunnen mit bitterem, salzigem oder bittersalzigem Wasser steht „K.“ und in Klammer (g.), (ssol.) oder (g.-ssol.). Die Quellen sind mit dem Zusatz „Kl.“ (Kljutsch) oder „Rod.“ (Rodnik) bezeichnet. Diese Unterscheidung hat nur mundartlichen Charakter.

Soweit es sich um Karsterscheinungen handelt, was in der Ukraine nur in den Gebieten der Erdfälle am oberen Dnestr, auf der Pontischen Platte und der Podolischen Platte sowie auf der Krim zutrifft, sind auch die Flüsse mit blindem Ende von den Niederschlagsmengen beeinflusst. Manche Flüsse führen an sich schon wenig Wasser, das in den Trockenzeiten ganz verdunstet oder beim Sinken des



Grundwassers versickert. Das blinde Ende verändert sich mit der stärkeren oder minderen Wasserzufuhr. In der Frühjahrsschneeschmelze fließt das Wasser auch durch das blinde Ende. In der Karte werden solche nur zeitweilig durchflossenen Täler mit punktierten Gewässerlinien bezeichnet. In fruchtbaren Gründen ist das blinde Ende durch Gestrüpp gekennzeichnet. Dieses dient in der Kartendarstellung als Anhaltspunkt. Auch ganze Trockentäler sind da und dort feststellbar. Sie werden nur von Hochwassern und Regensturm Massen durchflutet. Diese Wasserrinnen haben in der Regel keinen Namen. Die Veränderungen durch Hochwasser sind in diesen Tälern gering.

Auffallend sind in den russischen Karten die vielen, meist kleinen künstlichen Staue. Staue zur Wasserregulierung finden wir an Flüssen, die im Sommer einen geringen Wasserstand aufweisen. Sie werden regelmäßig in den nebenflußreichen Strecken errichtet. Während der Frühjahrsschneeschmelze und auch bei sonstigen Hochwassern wird das Wasser in den Stauen aufgefangen, um im Sommer je nach Bedarf wieder abgelassen zu werden.



Abbildung 4

Staue für die Trinkwasserversorgung liegen in Gebieten mit Salzgrundwasser. Als Bauort dienen breite Balki mit großem Wasserfangungsvermögen. In diesen Stauen speichert sich das Wasser der Hochwässer an und sichert der Bevölkerung den Trinkwasserbedarf des ganzen Sommers. Die weitaus größte Zahl der Staue ist von geringerer Größe und dient der Bewässerung landwirtschaftlicher Kulturen und für die Fischzucht. Sie werden in kleinen Bachtälern oder in Regenschluchten angelegt. Ofters treibt das Wasser aus diesen Weihern auch noch ein primitives Sägewerk. Die Dämme für die kleinen Staue sind auf einfache Weise aus Balken, Brettern, Faschinen und Lehm hergestellt, wogegen die größeren Staue eine ingenieurmäßig bessere Ausführung haben. Zur Herabminderung der Hochwassergefahren legt die Bevölkerung sehr viele kleinere Staue an, um die Hochwasserfluten aufzufangen. Die Dämme dieser Staue sind primitiv und halten oft nicht mehr als zwei Hochwasser aus.

Die Staue werden dann ober- oder unterhalb des alten Staues neu angelegt. Die Staue in den Regenschluchten verschlammen nach wenigen Jahren. Auch hier werden die Dämme dann verlegt.

Durch die Verlegung stimmen Kartenbild und Örtlichkeit nicht mehr miteinander überein. Abbildung 5 zeigt solche Staue, Abbildung 6 eine durchschnittliche Wassermengenganglinie der Ebenenflüsse. Das Frühjahrshochwasser bei den aus dem schneereichen Norden kommenden Flüssen bringt bis

#### Staue in den Flüssen.

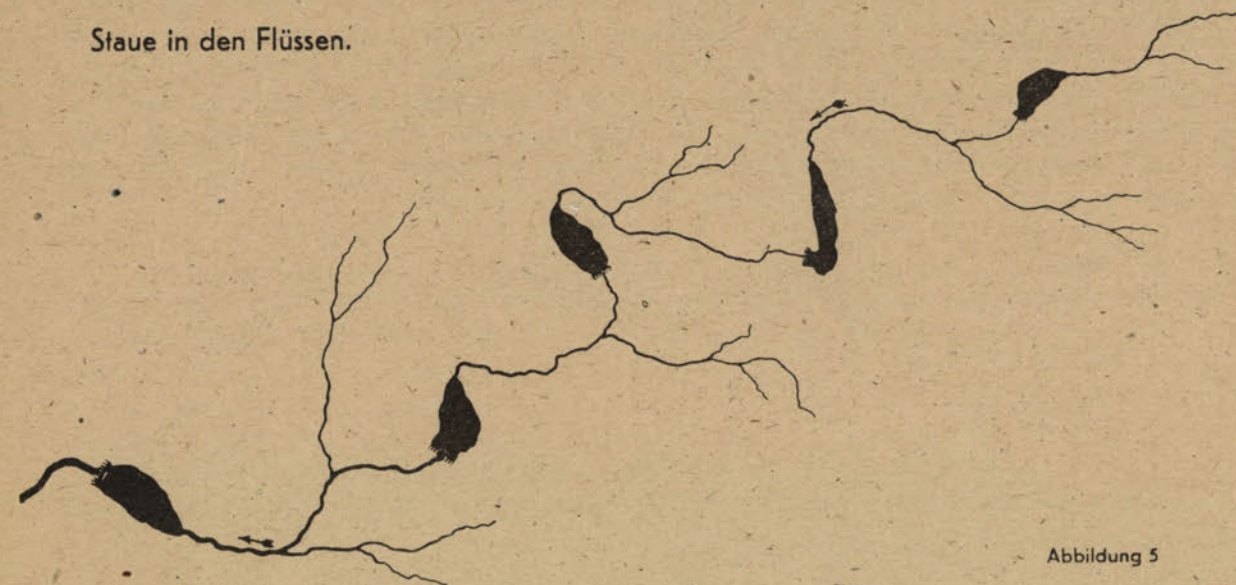
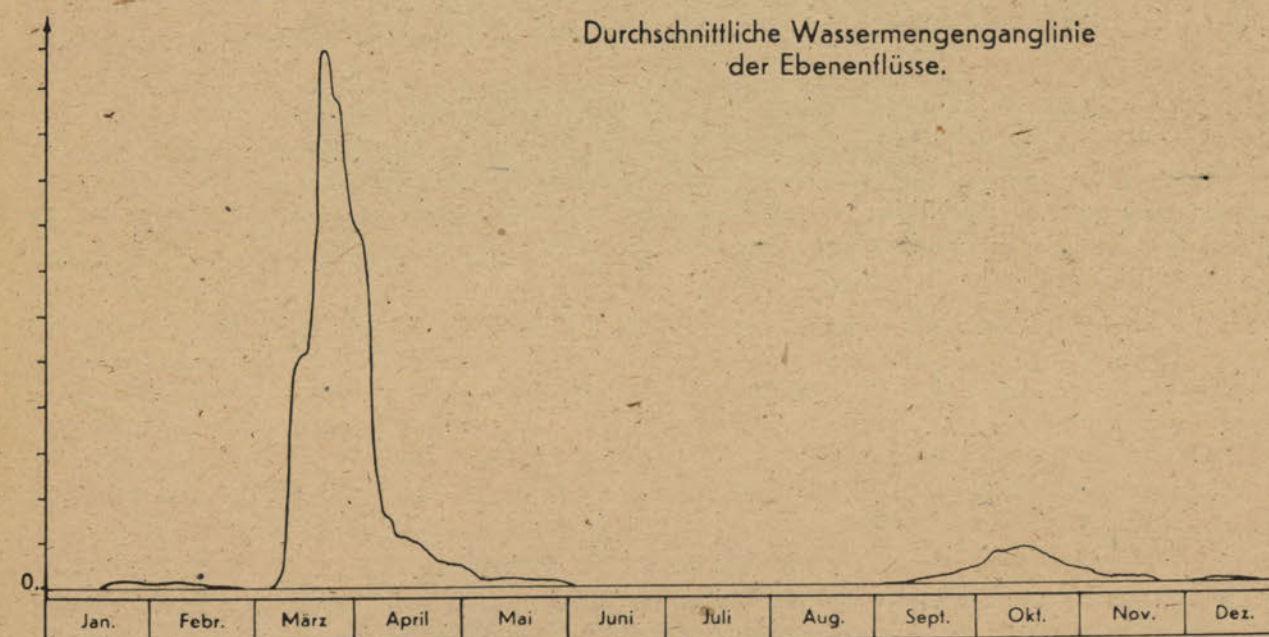


Abbildung 5

zu 80% des jährlichen Wasserabflusses. Bei den Balki des mittleren Gebietes macht das Frühjahrshochwasser immerhin noch etwa 60% des Jahresabflusses aus.

Die gewaltigen Hochwasser der Ströme und Flüsse, die aus dem schneereichen Norden kommen, bearbeiten die Talniederungen mit ungeheurer Kraft. Das Bett und die ganze Talniederung werden mit Abschwemm- und Schuttmassen durchwälzt. Die Geschwindigkeit des Wassers

$Q$  cbm/sec



Durchschnittliche Wassermengenganglinie der Ebenenflüsse.

Abbildung 6

verdoppelt sich, z. B. beim Dnepr. Die Wassermengen steigen bis zum 40fachen des Normalwassers, beim Dnepr bis etwa 25 000 cbm/sec, an. Das alte Flußbett wird mit Schuttmassen teilweise angefüllt, an anderen Stellen wird der Talgrund ausgeräumt. Die Flußschlingen werden verschoben. Altwasser werden zugeschüttet, neue gebildet. Die Schuttkegel der Nebenflüsse und Nebenbäche, die meist aus lockerem Material bestehen, werden angegriffen, teilweise weggeräumt oder umgeformt.



(siehe Abbildung 7). Tritt das Hochwasser zurück, dann sucht sich der Fluß seinen Weg nach dem geringsten Widerstand. Selbst die Flußtiefe ändert sich. Der Talgrundriß wechselt von Jahr zu Jahr sein Gesicht. Kein Wunder, wenn hier die Kartendarstellung schon nach einem Jahr mit der Wirklichkeit nicht mehr übereinstimmt. Topographische Aufnahmen in den Talauen stoßen dazu auf große Schwierigkeiten. Viele Stellen sind nie betretbar. Nur das Luftbild erlaubt eine rasche und gute Darstellung oder Berichtigung, um allerdings nach dem nächsten Hochwasser wieder neue Bilder zu zeigen. An den Talhängen, die meist rechts des Flusses liegen, bringen die Hochwasserkraft und der Eisgang Seitenerosionen zustande. Felsstürze an Steilhängen sind nicht selten. Zusammen mit Aufschüttungen des Hochwassers können sie das Flußbett beiseite drängen. Am Talhang selbst hinterläßt die Seitenerosion weitere Spuren, besonders an den weichen Schichten.

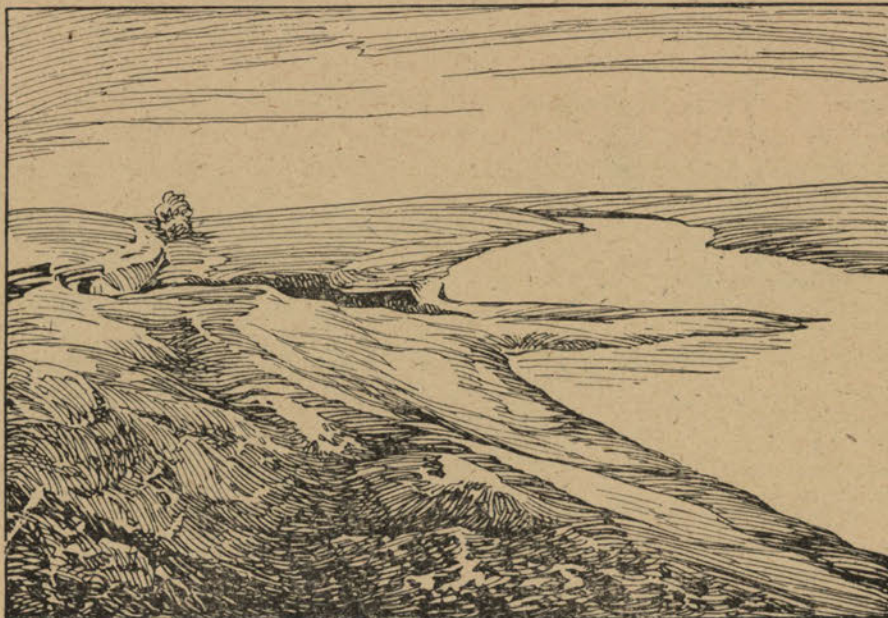


Abbildung 7

Größere offene Sandmassive hat die Ukraine nicht. Am Mittellauf und besonders am Unterlauf des Dnepr östlich der Stadt Chersson werden jedoch auf dem Linksufer Sandmassen der Windwirkung unterworfen. Der Sand wird durch die starken Winde bewegt und zu Sandhügeln, Kutschengurg genannt, aufgeweht. An mit Weide bewachsenen Sandflächen setzt vielfach die Erosion der Schmelz- und Regengußwasser kräftig an und erzeugt owragiähnliche Ausspülungen. Diese Auswaschungen sind weniger steilwandig.

Auch die Siedlungsanlagen sind landschaftsbedingt. Oben wurde schon bemerkt, daß die Dörfer wegen der Trinkwasserversorgung meist in den Flußniederungen liegen. Wenn man die Karten überblickt, dann liegen 95% aller Siedlungen an Wasserläufen, die eigentlichen Hochflächen sind nahezu frei von Ortschaften, weil das Grundwasser zu tief liegt. Die dichteste Besiedlung, wenn man von den Industriezentren absieht, liegt in den Schwarzerdegebieten der Waldsteppe (Mittelgebiet). Es sind die dichtest besiedelten Gebiete der Sowjetunion mit 80—100 Einwohnern auf 1 qkm. Im südlichen offenen Steppengebiet kommen nur noch 25—40 Einwohner auf 1 qkm, weil hier die Niederschläge zu gering sind und die Trinkwasserversorgung auf große Schwierigkeiten stößt.

Die Geomorphologie ist in der Ukraine noch eine recht junge Wissenschaft, die sich in der Hauptsache an deutsche Veröffentlichungen anlehnt und geringe eigene Forschungen aufweist.

## Zur Umformung geographischer in Gauß-Krüger-Koordinaten

Von Oberleutnant Dipl.-Ing. Dilg, Heeresplankammer

Infolge der Ausdehnung der Kriegsschauplätze über fast ganz Europa bis nach Afrika und die Einführung des Deutschen Heeresgitters haben die Umformungen von geographischen in Gauß-Krüger-Koordinaten einen großen Umfang angenommen. Für diese Umformungen lagen alle diese Breiten umfassende Tafelwerke, die für die neue Meridianstreifenbreite von  $70''$  ausreichende Genauigkeit geben könnten, nicht vor. Für die Deutsche Heeresvermessung ergab sich daher die Notwendigkeit, für diese Umformungen selbst neue Tafelwerke zu berechnen und aufzustellen, die im Truppengebrauch zu einer einfachen und schnellen Lösung führen. Hierbei mußte auf einen einfachen Aufbau der Rechenformeln, eine übersichtliche Anordnung der Tafel und eine klare Anweisung zur Durchführung der Berechnung bei den derzeit in nicht genügender Anzahl zur Verfügung stehenden Fachkräften besonderer Wert gelegt werden, zumal gerade Kriegszeiten auch eine möglichst rasche Durchführung der Rechenarbeiten erfordern, wobei dem Gebrauch der Rechenmaschine vor der logarithmischen Rechnung der Vorzug gegeben werden muß.

In der deutschen Fachliteratur ist die Umformung geographischer in ebene, rechtwinklige Gauß-Krüger-Koordinaten oft behandelt worden. 1866 brachte bereits Schreiber in seinem Werk „Theorie der Hannoverschen Landesvermessung“, aufbauend auf Entwicklungen von C. F. Gauß aus den Jahren 1820—1830, eine grundlegende Formelentwicklung. Nachdem der Beirat für Vermessungswesen im Jahre 1922 beschlossen hatte, daß die Ergebnisse der Landesvermessung in ebenen, rechtwinkligen Koordinaten darzustellen sind, die durch die unmittelbare konforme Abbildung des Erdellipsoids auf die Ebene erhalten werden, haben neben anderen als ausführende Behörden:

1. das Reichsamt für Landesaufnahme,
2. die Katasterverwaltung Preußens,
3. außerdem das Bundesvermessungsamt Österreichs in Wien,

Anweisungen und Tafelwerke zur Berechnung ebener, konformer, rechtwinkliger Koordinaten herausgegeben, die im folgenden kurz gestreift werden sollen.

1. Das Reichsamt für Landesaufnahme führt die Rechnung nach den Tafeln von Thilo logarithmisch durch, die auf der Formelentwicklung von Krüger aufbauen, bei der sich jedoch die ursprüngliche Form der Entwicklung nach Potenzen einer Funktion des Längenabstandes vom Mittelmeridian  $= 1$  nicht mehr klar erkennen läßt. Bei einer Ausdehnung des Tafelwerkes von  $45''$  bis  $50''$  Breite ergeben die Formeln für einen  $4''$  breiten Meridianstreifen eine Genauigkeit von 2 mm.
2. Die Katasterverwaltung in Preußen gibt in der Anweisung XI die Lösung mittels Logarithmen und Rechenmaschine. Die logarithmischen Formeln sind die gleichen wie die des R. f. L. Die Formeln für Maschinenrechnung sind von Lips abgeleitet worden; in ihnen ist der Rechtswert durch Einführung der Hilfsgröße  $tg y = f(1)$  gleichfalls als eine Funktion der Länge dargestellt. Die Genauigkeit nach der für die Breiten von  $47''$  bis  $56''$  Breite aufgestellten Tafel beträgt bei  $4''$  breiten Meridianstreifen 3 mm.
3. Das Österreichische Bundesvermessungsamt hat eine Tafel für Maschinenrechnung aufgestellt, die sich allerdings nur für eine Meridianstreifenbreite von  $2,5''$  über den Breitenbereich von  $30''$  bis  $60''$  erstreckt. Die Rechenformeln gehen von der Schreiberschen Reihenentwicklung nach Potenzen von 1 aus und geben bei mm-Genauigkeit eine sehr rasche und übersichtliche Lösung.

Die oben aufgeführten Umformungsmethoden konnten von der Deutschen Heeresvermessung nicht übernommen werden, weil die Tafelwerke nur für einen engbegrenzten Breitenbereich aufgestellt sind und für eine Meridianstreifenbreite von  $70''$  nicht mehr die erforderliche Genauigkeit geben. Andererseits würden sich im Truppengebrauch bei Nichtfachkräften große Schwierigkeiten ergeben. Im Verlaufe des Krieges gegen die Sowjetunion wurden zwei Tafelwerke von Kagan und Numerow zur Umformung geographischer in Gauß-Krüger-Koordinaten erbeutet, die für Maschinenrechnung auf reiner Reihenentwicklung nach Potenzen der Längenunterschiede aufgebaut sind und sich über einen größeren

<sup>\*)</sup>  $6''$  breite Meridianstreifen mit  $30'$  Überlappung nach Osten und Westen.



Breitenbereich von  $35^{\circ}$ — $65^{\circ}$  bzw.  $36^{\circ}$ — $72^{\circ}$  erstrecken. Sie wurden deshalb vom OKH nachgedruckt und als vorläufige Tafelwerke in den Truppengebrauch gegeben.

Die Umrechnung nach den „Tabellen für nicht-logarithmische Berechnung der Gauß-Krüger-Koordinaten“ von Kagan ergeben für das DHG eine Genauigkeit von 5 mm. Für den Gebrauch der 13stelligen Rechenmaschine hat Kagan die ersten Glieder der Reihenentwicklung für den Rechts- und Hochwert ausgeklammert. Die von Numerow berechneten „Tabellen zur Berechnung der Gauß-Krüger-Koordinaten“ ermöglichen wegen Vernachlässigung der Glieder höher als 4. Ordnung nur eine Genauigkeit von 10 cm. Beide Verfasser bringen für ihre Tafelwerke keine neuen wissenschaftlichen Entwicklungen, sie haben lediglich für die Breiten von Minute zu Minute die Koeffizienten der Potenzen des Längenabstandes berechnet.

Mit der Einführung des Deutschen Heeresgitters auch für Afrika reichten die beiden erbeuteten Tafelwerke nicht mehr aus. Ermöglichte auch die von der Heeresplankammer erweiterte „Tafel der Gauß-Krüger-Koordinaten (DHG-Blatteckentafel)“ durch Interpolation eine Umformung von 2—3 dm Genauigkeit, so wurde doch die Schaffung eines umfassenden Tafelwerkes von  $0^{\circ}$  bis  $72^{\circ}$ , für das eine Genauigkeit der Umformung von 5 mm vorgeschrieben wurde, erforderlich, mit dessen Aufstellung die Heeresplankammer beauftragt wurde.

Der Aufbau der neuen „Tafel für Maschinenrechnung“ wird ähnlich den „Tabellen zur Berechnung der Gauß-Krüger-Koordinaten“ von Numerow sein, die sich im Truppengebrauch am besten bewährt haben. Die Koeffizienten werden in der Breite für jede Minute, für  $l$  in Sekunden berechnet. Das Glied der 5. Potenz, das im Maximum 226 mm beträgt, ist für jeden Breitengrad einem übersichtlichen Nomogramm zu entnehmen. Gleichfalls wird noch das Glied der 6. Potenz, das bis zu 6 mm anwachsen kann, berücksichtigt. Die Tafelwerke sind als ganze Zahlen ohne Kommastellen angegeben, die Potenzen von  $l$  werden schematisch auf soviel Stellen berechnet, daß bei Einstellung der Tafelwerke im Einstellwerk und Einkurbeln der  $l$ -Potenzen ins Zählwerk, beides von rechts, sich die Ergebnisse der einzelnen Glieder in der Rechenmaschine stellenrichtig addieren. Es kann somit die Umformung rein schematisch durchgeführt werden, die an den Rechner keinerlei fachliche Anforderungen stellt und die Fehlerquellen erheblich vermindert.

Neben diesen mit großer Genauigkeit durchzuführenden Umformungen für Punkte I. und II. Ordnung wird aber in den meisten Fällen eine mindere Genauigkeit ausreichen. So sind z. B. in kolonialen Gebieten eine große Zahl von Punkten nur nach geographischen Koordinaten bestimmt, die aber nur eine Genauigkeit für artilleristische Zwecke haben. Zur Eintragung der Kartengitter müssen Blatteckwerte gerechnet werden, für die eine Genauigkeit von 1 m ausreichend ist. In dünnbesiedelten Wüsten- und Steppengebieten, wo eine Vermessung mangels von Anschlußpunkten zu großen Zeit- und Arbeitsaufwand erfordern würde, werden Punkte astronomisch bestimmt, für deren Umformung eine Genauigkeit von 200 bis 300 m vollauf genügen würde.

Für den weitaus größten Teil dieser Umformungen wird eine Genauigkeit von 3—5 dm und weniger ausreichend sein. Bedenkt man, daß die Heeresplankammer allein in einem Jahre 25 000 Punkte umzuformen hatte, so zeigt sich die Notwendigkeit eines besonderen Verfahrens, das bei ausreichender Genauigkeit schneller zum Ziele führt. Größere Umformungsarbeiten, die außerhalb des Bereichs der erbeuteten Tabellen lagen, zwangen zuerst zur Berechnung durch Interpolation zwischen den Werten der DHG-Blatteckentafel, die bei umfangreichen Umformungsarbeiten noch zu großen Zeitaufwand erfordert. Als zweckmäßigste Lösung für Umformungen geringerer Genauigkeit wurde vom Verfasser eine vereinfachte halbgraphische Umformung entwickelt, die bei der Berechnung von einigen tausend Punkten mit großem Vorteil angewendet wurde. Das Verfahren ist bereits durch die Truppe erprobt worden und hat sich bestens bewährt. Der Vorteil dieser Umformung liegt in der schnellen Durchführung bei großer Zeitersparnis, die bis zu über 60% gegenüber anderen Methoden beträgt, ferner in ihrer großen Rechensicherheit.

Für die Berechnung des Rechts- und Hochwertes nach dieser vereinfachten halbgraphischen Umformung ergeben sich folgende einfache Formeln:

$$\text{Rechts} = l \cdot s$$

$$\text{Hoch} = T + b \cdot t$$

worin die Koeffizienten  $s$  und  $t$  durch einen Wert  $c_s$  und  $c_t$ , der einem Nomogramm zu entnehmen ist, verbessert werden und  $l$  bzw.  $b$  der Abstand vom Mittelmeridian bzw. von der Ausgangsbreite in Se-

kunden sind. Stellt man diesen einfachen Formeln, die mit nur je einer Multiplikation in linearer Abhängigkeit zu den Koeffizienten  $s$  und  $t$  stehen, die nicht unerheblichen Rechenarbeiten der Interpolation in der DHG-Blatteckentafel oder die Bildung der Potenzen von  $l$  bis  $l^4$  und Multiplikation mit 4 zu interpolierenden Faktoren der „Tabellen zur Berechnung der Gauß-Krüger-Koordinaten“ von Numerow entgegen, so zeigt sich deutlich der Vorteil dieser Umformung.

Die Berechnung der Koeffizienten  $s_0$ ,  $T_0$  und  $t_0$  sowie der Werte der Nomogramme  $c_s$  und  $c_t$  soll an Hand der DHG-Blatteckentafel für den Breitenbereich von  $48^{\circ}$  bis  $52^{\circ}$  kurz erläutert werden.

Für die Berechnung des Rechtswertes ist in der Tafel das Wachsen der Rechtswerte bei konstanter Breite (hier  $48^{\circ}$ ) aufgezeigt, wobei die Längenabstände von  $15'$  zu  $15'$  vom Mittelmeridian mit  $l_1$ ,  $l_2$  bis  $l_{14}$  und die zugehörigen Rechtswerte mit  $r_1$ ,  $r_2$  bis  $r_{14}$  bezeichnet werden sollen.

$l_n$	$r_n$	$\frac{l_n}{l_1} \cdot r_n$	$\frac{l_n}{l_1} \cdot r_n - r_1$
1	18 654,1	18 654,10	
2	37 308,1	654,05	— 0,05
3	55 962,0	654,00	— 0,10
4	74 615,9	653,97	— 0,13
5	93 269,6	653,92	— 0,18
10	186 534,6	653,46	— 0,64
14	261 140,1	652,87	— 1,23

Für die folgenden Breiten ergeben sich gleichfalls Werte  $(\frac{l_n}{l_1} \cdot r_n - r_1) = c_s$ , die sich leicht in einem Nomogramm als Abhängigkeit von Breite und Länge darstellen lassen. Werden nun die Werte  $r_1$ , die jetzt mit  $s_0$  bezeichnet werden sollen, für  $1'$  zu  $1'$  tabuliert, so lassen sie sich für jede Breite interpolieren und ergeben verbessert um den Wert  $c_s$  und mit dem Faktor  $\frac{l_n}{l_1}$  multipliziert den zu berechnenden Rechtswert.

Die Änderung des Hochwertes läßt sich wegen der Größe der zweiten Differenzen nicht in gleicher Weise in lineare Abhängigkeit zur Längenänderung bringen, es würden sich sonst Verbesserungen ergeben, die nicht mehr in einem Nomogramm darzustellen sind. Dagegen sind aber die Differenzen der Hochwerte bei konstanter Länge in soweit konstant, daß sich ihre Änderung bequem graphisch darstellen läßt.

Dies soll wieder an Hand der DHG-Blatteckentafel für einen beliebigen Längenabstand — hier  $2^{\circ}$  — und für den Breitenbereich von  $48^{\circ}$  bis  $52^{\circ}$  erläutert werden, wobei der Hochwert von  $48^{\circ} = B_0$  mit  $H_0$ , die Differenz der von  $10'$  zu  $10'$  folgenden Breiten zu  $48^{\circ}$  mit  $b_1$ ,  $b_2$  bis  $b_{24}$  und ihre zugehörigen Hochwerte mit  $H_1$ ,  $H_2$  bis  $H_{24}$  bezeichnet werden.

$b_n$	$H_n$	$\frac{H_n - H_0}{b_n}$	$\frac{H_n - H_0}{b_n} - (H_1 - H_0)$
$B_0$	5 319 821,2		
1	338 349,9	18 528,7	
2	356 879,0	528,90	+ 0,20
3	375 408,7	529,17	0,47
4	393 938,8	529,40	0,70
5	412 469,4	529,64	0,94
10	505 129,4	530,82	2,12
20	690 484,7	533,17	4,47
24	5 764 639,8	534,11	5,41

Es lassen sich so für alle andern Längen ein Tafelwert  $H_1 - H_0 = t_0$  und ein Nomogramm für die Werte  $\frac{H_n - H_0}{b_n} - (H_1 - H_0) = c_t$  berechnen. Werden gleichfalls  $1'$  zu  $1'$  Breitendifferenz die Hochwerte



einer Ausgangsbreite  $H_0$  — hier  $48^\circ$  — tabuliert, so lassen sich  $T_0$  und  $t_0$  für jede Länge interpolieren, so daß sich ein beliebiger Hochwert ergibt aus:

$$\text{Hoch} = T + b(t + c_t)$$

Nach der eben beschriebenen Art wurden bei der Heeresplankammer einige Tabellen für je einen Breitenbereich von  $4^\circ$  mit einem Argumentabstand  $1'$  berechnet, von denen der Anhang eine solche von  $48^\circ$  bis  $52^\circ$  bringt. Als Unterlagen zu ihren Berechnungen dienten bereits von  $10'$  zu  $10'$  in Breite und Länge auf 1 cm genaue Gauß-Krüger-Koordinaten. Es stellen also, von den in cm angegebenen Koeffizienten,  $s_0$  der Rechtswert für  $10'$  Längenabstand,  $T_0$  den Hochwert für die jeweilige Ausgangsbreite von  $1'$  zu  $1'$  bis  $30'30''$  tabuliert und die Differenzen zwischen den Hochwerten der Breiten  $B_0 + 10'$  und  $T_0$  dar. Für die Interpolation der Koeffizienten  $T_0$  und  $s_0$  sind ihre  $\Delta 1''$  errechnet, es genügt eine lineare Interpolation. Die Koeffizienten sind ohne Kommastellung dargestellt. Nach der Formel ergeben sich beim Einstellen der Koeffizienten und Einkurbeln von  $l$  und  $b$ , beides von rechts, die stellenrichtigen Rechts- und Hochwerte.

Genauigkeit der Umformung:

Die Interpolation von  $S_0$  und  $t_0$  kann nach der Formel um höchstens 0,5 cm ungenau werden, die Nomogramme gestatten eine Entnahme ihrer Werte auf 1 cm, so daß diese 1,5 cm im Maximum mit 21 bzw. 24 multipliziert einen Fehler von  $\pm 32$  cm bzw.  $\pm 36$  cm ergeben können, wobei sich zu den 36 cm noch ein Fehler der Interpolation von  $T_0$  von höchstens 3 cm addiert. Ein Gesamtfehler von 0,5 m wird nie überschritten. Nach einem Vergleich mit einer großen Zahl auf 1 cm genau umgeformten Punkten hat sich als mittlerer Fehler im Rechtswert  $\pm 10 - 12$  cm, im Hochwert  $12 - 15$  cm ergeben. Für die nach dem beigefügten Vordruck durchgeführten Umformungen haben sich gegenüber der strengen Rechnung mit 1 cm Genauigkeit folgende Differenzen ergeben:

Punkt 1	+0,02	2	-0,08	3	-0,14
	-0,11		+0,02		-0,10
4	-0,06	5	-0,08	6	-0,04
	-0,22		-0,11		+0,04

Hat man nach der halbgraphischen Methode einige Punkte umgeformt, so erkennt man erst recht ihren großen Vorzug für Massenumformungen. Die mechanische Rechnung stellt an den Rechner keinerlei fachliche Kenntnisse und ergibt bei größter Zeitersparnis eine höchste Rechensicherheit, womit alle gestellten Anforderungen erfüllt sind.

Es ist vorgesehen für alle Umformungen geographischer in Gauß-Krüger-Koordinaten nur noch drei Tafelwerke einheitlich im Truppgebrauch zu verwenden:

1. Die Tafeln für Maschinenrechnung im Gauß-Krüger-System, die mit 18stelliger Rechenmaschine eine Genauigkeit von 0,5 cm ergeben, mit 13stelliger Rechenmaschine eine Genauigkeit von 3 cm. Der Zeitaufwand für die Umformung ist der gleiche wie nach den „Tabellen zur Berechnung geographischer und rechtwinkliger Gauß-Krüger-Koordinaten“ von Numerow.
2. Die vereinfachte halbgraphische Umformung, die bei 0,5 m Genauigkeit vor allem für Massenumformungen einen weiteren bedeutenden Zeitgewinn ergibt.
3. Die DHG-Blatteckentafel zur Ermittlung von Blatteckenwerten, die unmittelbar aus der Tafel entnommen werden können.

Anlagen: 2 Tabellen

2 Nomogramme

2 Formblätter für Umformung.

## Das Verfahren von N. A. Urmajew zur Ausgleichung von Triangulationen I. O.

Von Oblt. Dr.-Ing. M. Kneißl

Die nachstehende Veröffentlichung des Verfahrens von N. A. Urmajew zur Ausgleichung von Triangulationen I. O. schließt die Reihe von Übersetzungen ausländischer Arbeiten über die Ausgleichung großer astronomisch-geodätischer Netze ab. Von dieser Übersetzungsreihe wurden in den Mitteilungen des Chefs des Kriegskarten- und Vermessungswesens bereits veröffentlicht:

F. N. Krassowsky: „Methoden zur Ausgleichung der Triangulationen I. O. in der UdSSR“ Heft 3/1942, S. 3—74 und

O. Adams: „Die Bowie-Methode zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes und ihre Anwendung auf das Netz I. O. im westlichen Teil der Vereinigten Staaten“ Heft 7/1943, S. 24—49.

Die Verfahren beziehen sich auf die Ausgleichung von übergeordneten Triangulationen, die in Form von Dreiecksketten das zu vermessende Gebiet gitterförmig überdecken. Die Dreiecksketten folgen dabei im allgemeinen den Meridianen und Längengraden. In den Knotenstellen, in denen sich die Meridian- und Parallelkreisketten überschneiden, werden die einzelnen Kettenabschnitte oder Teilstücke der Triangulation durch Grundlinienmessungen und Laplacesche Punkte versteift. Laplacesche Punkte sind Dreieckspunkte I. O., in denen astronomische Breiten-, Längen- und Azimutbestimmungen durchgeführt wurden.

Die Arbeit von Urmajew bringt weitere Vereinfachungen für die Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze. Sie schließt unmittelbar an das Verfahren von Krassowsky an, das selbst wieder auf das Helmertsche Verfahren zur Ausgleichung großer astronomisch-geodätischer Netze zurückgeht (Lotabweichung, Heft 1, Veröffentl. des Kgl. Preuß. Geod. Instituts, Berlin 1886) und von Krassowsky im Großen in die geodätische Praxis eingeführt wurde.

Helmert hat für die Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes von Mitteleuropa die einzelnen Teilstücke der Triangulation durch geodätische Linien ersetzt und dann die Längen der geodätischen Linien und die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel als unmittelbar gemessene Größen behandelt. Der Hauptzweck der Ausgleichung war dabei die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Lotabweichungen im Ausgangspunkt des Triangulationssystems und der Verbesserungen der angenommenen Dimensionen des Bezugsellipsoids.

Krassowsky trennte von vornherein die Bestimmung der Dimensionen des Bezugsellipsoids und seiner Orientierung von der Ausgleichung der Triangulation und stellte die Ausgleichung ausschließlich auf die Festlegung der Triangulation ab. Bei der Methode von Krassowsky werden nach dem Vorgang von Helmert die Längen der geodätischen Linien und die von ihnen eingeschlossenen Winkel als unmittelbar gemessene Größen behandelt und die astronomischen Längen und Azimute in die Ausgleichung einbezogen. Die Ausgleichung der aus geodätischen Linien gebildeten Polygone erfolgt nach Bedingungsgleichungen. Hierbei sind zu beachten, Bedingungsgleichungen für den Polygonschluß in Länge und Breite, Polygonwinkelbedingungen und Laplacesche Gleichungen. Zur Herleitung der geodätischen Linien, ihrer Azimute und der Polygonwinkel werden vor der eigentlichen Polygonausgleichung die einzelnen Teilketten zwischen den Knotenpunkten je für sich unter Berücksichtigung der Dreiecksgleichungen, der Seitengleichungen, der Basisgleichungen und der Laplaceschen Gleichungen (Azimutgleichungen) streng ausgeglichen. Durch die Berücksichtigung der Basis- und der Laplaceschen Gleichungen bei der Ausgleichung der Teilketten werden die Absolutglieder der Bedingungsgleichung bei der Polygonausgleichung sehr klein und nahezu Null, wodurch sich einige Vereinfachungen bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen ergeben. Durch die Aufstellung allgemein gültiger Gleichungen und durch Zurückführung aller Einzelpolygone auf Vierecke, ist es Krassowsky gelungen, die Bildung der Bedingungsgleichungen wesentlich zu vereinfachen. Damit wurde der Rechenaufwand für die Aufstellung und Auflösung der Bedingungsgleichung auf ein gewisses Mindestmaß zurückgeführt. Dieser Rechen-



aufwand ist aber bei einer großen Anzahl von Polygonen immer noch derart umfangreich, daß praktisch das Verfahren von Krassowsky nur auf eine sehr kleine Anzahl von Polygonen angewendet werden kann.

Mit Rücksicht hierauf hat Urmajew in engster Anlehnung an das Verfahren von Krassowsky ein Verfahren entwickelt, bei dem die eigentliche Polygonausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen erfolgt. Dabei werden ebenso wie bei Krassowsky die Längen der geodätischen Linien und die Winkel, die sie mit den Ausgangsseiten der einzelnen Teilketten einschließen, als unmittelbar gemessene Größen betrachtet und diese aus einer Ausgleichung der einzelnen Teilstücke der Triangulation unter Berücksichtigung der geometrischen Bedingungen und der Basis- und Azimutgleichungen bestimmt.

Bei der eigentlichen Polygonausgleichung werden die Längen  $s$  der geodätischen Linien, die Winkel  $\beta$ , die die geodätischen Linien mit den Ausgangsseiten der Teilstücke der Triangulation einschließen, die astronomisch bestimmten Längen der Knotenpunkte und die Azimute der Ausgangsseiten der Teilstücke der Triangulation der Ausgleichung unterzogen. Diese Größen können als bestimmte Funktionen von im einzelnen noch festzulegenden Unbekannten dargestellt werden.

Urmajew nimmt hierzu für die Knotenpunkte vorläufig bestimmte Näherungskordinaten  $B^0$  und  $L^0$  an, deren wahrscheinlichste Verbesserungen  $dB$  und  $dL$  als Unbekannte in die Polygonausgleichung eingehen. Zur eindeutigen geometrischen Bestimmung der ganzen Triangulation muß dann noch die Lage der Ausgangsseiten der Teilstücke der Triangulation durch die Einführung einer Orientierungsunbekannten in jedem Knotenpunkt festgelegt werden. Hiernach erhält man drei verschiedene Arten von Fehlergleichungen.

Zur Aufstellung der Fehlergleichungen berechnet man aus den bekannten Näherungskordinaten  $B^0$  und  $L^0$  der Knotenpunkte die Längen  $s^0$  und Azimute  $A^0$  der sie verbindenden geodätischen Linien, deren Verbesserungen  $ds$  und  $dA$  als Funktionen der  $dB$  und  $dL$  dargestellt werden können. Ist nun  $s^0 + ds$  der wahrscheinlichste Wert der Länge der geodätischen Linie und  $s$  der entsprechende Wert, der aus der vorläufigen Ausgleichung der Teilstücke berechnet wurde und als gemessen gilt, so erhält man eine Fehlergleichung für die Länge der geodätischen Linien in der Form

$$\text{oder} \quad \begin{aligned} w &= s^0 + ds - s \\ w &= ds + (s^0 - s), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $(s^0 - s)$  das Absolutglied darstellt. Die Zahl dieser Fehlergleichungen ist gleich der Anzahl der geodätischen Linien des Polygons. Wird weiterhin der Näherungswert für den Orientierungswinkel in den Laplaceschen Punkten mit  $z^0$  und seine Verbesserung mit  $\zeta$  bezeichnet, so ist  $z^0 + \zeta$  das geodätische Azimut der Ausgangsseite eines Teilstücks nach der Ausgleichung. Mit dem Anschlußwinkel  $\beta$  und dessen Verbesserung  $v$  wird dann das geodätische Azimut einer geodätischen Linie nach der Ausgleichung

$$\text{oder} \quad \begin{aligned} A^0 + dA &= \beta + v + z^0 + \zeta \\ v &= -\zeta + dA + [A^0 - (\beta + z^0)] \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $[A^0 - (\beta + z^0)]$  wiederum das Absolutglied darstellt. Da es für jede geodätische Linie für das Azimut und Gegenazimut je eine solche Fehlergleichung gibt, gibt es im Polygon doppelt so viele Gleichungen dieser Art als geodätische Linien.

Zur Ableitung der dritten Art der Fehlergleichung bezeichnet man noch das astronomische Azimut der Ausgangsseite eines Teilstücks der Triangulation mit  $\alpha$  und die astronomische Länge des zugehörigen Laplaceschen Punkts, der zugleich Eckpunkt des Polygonsystems ist, mit  $\lambda$  und die entsprechenden Verbesserungen mit  $\delta$  bzw.  $\delta\lambda$ . Dann stellt die Differenz

$$(\alpha + \delta) - (z^0 + \zeta)$$

die Lotabweichung im Azimut und

$$(\lambda + \delta\lambda) - (L^0 + dL)$$

die Lotabweichung in Länge dar, deren Zusammenfassung die Laplacesche Bedingung ergibt:

$$(\alpha + \delta) - (z^0 + \zeta) = [(\lambda + \delta\lambda) - (L^0 + dL)] \sin \varphi.$$

Dabei können die Verbesserungen für die astronomischen Größen noch zusammengefaßt werden in

$$\delta - \delta\lambda \sin \varphi = u.$$

Damit geht die Laplacesche Gleichung, die die dritte Art der Fehlergleichungen darstellt, über in

$$u = \zeta - dL \sin \varphi - [(\alpha - z^0) + (\lambda - L^0) \sin \varphi]. \quad (3)$$

Die Zahl der Fehlergleichungen ist hierbei gleich der Anzahl der Eckpunkte im Polygonsystem.

In den Fehlergleichungen (1) und (2) müssen die Größen  $ds$  und  $dA$  noch durch die wahrscheinlichsten Koordinatenverbesserungen  $dB$  und  $dL$  ersetzt werden. Hierfür erhält man mit Hilfe der Differentialformeln für die geodätische Linie die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} ds &= -\frac{M_1}{\rho''} \cos A_{12} dB_1 - \frac{M_2}{\rho''} \cos A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{\rho''} \sin A_{21} dL_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} \sin A_{12} dL_1 \\ dA &= \frac{M_1}{s} \sin A_{12} dB_1 + \frac{M_2}{s} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2 \cos A_{21}}{s} dL_2 - \frac{N_1 \cos B_1 (\cos A_{12} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1)}{s} dL_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Setzt man hierin noch

$$\frac{M}{10\rho''} dB = \xi \text{ und } \frac{N \cos B}{10\rho''} dL = \eta \quad (5)$$

so gehen die Fehlergleichungen (1), (2) und (3) über in

$$w = -10 \cos A_{12} \xi_1 - 10 \cos A_{21} \xi_2 - 10 \sin A_{12} \eta_1 - 10 \sin A_{21} \eta_2 + (s^0 - s); \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= -\zeta_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{12} \xi_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{21} \xi_2 \\ &\quad - \frac{10\rho''}{s} (\cos A_{12} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1) \eta_1 \\ &\quad - \frac{10\rho''}{s} \cos A_{21} \eta_2 + [A^0_{12} - (\beta_{12} + z^0_1)]; \\ v_{21} &= -\zeta_2 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{12} \xi_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{21} \xi_2 \\ &\quad - \frac{10\rho''}{s} \cos A_{12} \eta_1 - \frac{10\rho''}{s} (\cos A_{21} - \frac{s}{N_2} \operatorname{tg} B_2) \eta_2 \\ &\quad + [A^0_{21} - (\beta_{21} + z^0_2)]; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$u = \zeta_1 - \frac{10\rho'' \operatorname{tg} B_1}{N_1} \eta_1 - [(\alpha_1 - z^0_1) + (\lambda_1 - L^0_1) \sin B_1] \quad (8)$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) stellen die endgültige Form der Fehlergleichungen mit den Unbekannten  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  und  $\zeta_i$  dar.

Für die Bildung der Normalgleichungen müssen die Gewichte der als gemessen geltenden Größen bestimmt werden. Hier handelt es sich also zunächst um die Ermittlung der Gewichte oder der mittleren Fehler der Längen und Azimute der geodätischen Linien. Urmajew stützt sich hierbei auf die von A. A. Isotow\*) entwickelten Formeln und erhält nach einigen Umformungen verhältnismäßig einfache Gebrauchsformeln. Nach Isotow ergeben sich die mittleren Fehler der Länge und des Azimuts der geodätischen Linien aus

$$M_s^2 = \mu^2 s^2 \frac{Q_{xx}}{\rho''^2 v^2} \text{ und } M_\alpha^2 = \mu^2 \frac{Q_{yy}}{v^2},$$

wobei  $\mu$  den Gewichtseinheitsfehler oder den mittleren Fehler einer im Dreieck gemessenen Richtung bedeutet.  $s$  ist wie bisher die Länge der geodätischen Linie.  $v = \frac{n+1}{2}$ , wobei  $n$  die Anzahl der Dreiecke

\*) A. A. Isotow, Bewertung der Genauigkeit von Triangulationen, Moskau 1936.



in der Kette bedeutet. Die  $Q_{xx}$  und  $Q_{yy}$  sind die Gewichtskoeffizienten, die nach folgenden Formeln berechnet werden.

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx} &= \frac{2v^3 - 3v^2 + 10v}{9} - \frac{5v^2 - 7v - 9}{150} - \frac{(52-v)^2}{60(25v+17)} \\ Q_{yy} &= \frac{2v^3 + 3v^2 + v}{3} - \frac{75v^3 + 108v^2 - 58v}{125} - \frac{(66v-15)^2}{250(20v-11)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Daraus erhält man mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{g_s} = \left( \frac{100\,000}{\rho''} \right)^2 \frac{Q_{xx}}{v^2} = 0,05223v - \frac{0,08620v - 0,2134 - 0,2154v^{-1} + 0,4141v^{-2}}{v + 0,68} \dots \dots \dots (10)$$

und 
$$\frac{1}{g_a} = \frac{Q_{yy}}{v^2} = \frac{1}{15}v + \frac{0,1360v - 0,1487 - 0,0425v^{-1} - 0,0450v^{-2}}{v - 0,55} \dots \dots \dots (11)$$

die Ausdrücke

$$M_s^2 = \mu^2 \left( \frac{s}{100\,000} \right)^2 \frac{1}{g_s} \dots \dots \dots (12a)$$

und

$$M_a^2 = \mu^2 \frac{1}{g_a} \dots \dots \dots (12b)$$

Werden noch die Fehler der Ausgangsdaten berücksichtigt, so geht (12a) noch über in

$$M_s^2 = \mu^2 \left( \frac{s}{100\,000} \right)^2 \frac{1}{g_s} + \frac{\varepsilon^2 s^2}{2} \dots \dots \dots (13)$$

weil jede geodätische Linie nach zwei Grundlinien bestimmt wird und wobei  $\varepsilon$  den relativen Fehler der Ausgangsseite bezeichnet.

Für den Winkel  $\beta$  erhält man noch endlich

$$M_\beta^2 = \mu^2 \left( 1 + \frac{1}{g_a} \right) \dots \dots \dots (14)$$

Mit den mittleren Fehlern  $M_s$  und  $M_\beta$  für die Länge der geodätischen Linien und für die Anschlußwinkel  $\beta$  kann man zu den Gewichten übergehen, wobei Urmajew für den Gewichtseinheitsfehler für  $\beta$  den mittleren Fehler  $\pm 1''$  und für die Länge der geodätischen Linie  $\pm 1$  m annimmt.

Für die Gleichung (8) ergibt sich noch, weil  $u = \delta - \delta\lambda$  ist, zunächst

$$\mu_u^2 = \mu_s^2 + \mu_\lambda^2 \sin^2 \varphi$$

und endlich das Gewicht

$$p_u = \frac{\mu^2}{\mu_u^2} = \frac{\mu^2}{\mu_s^2 + \mu_\lambda^2 \sin^2 \varphi} \dots \dots \dots (15)$$

wobei  $\mu$  wieder wie oben der Gewichtseinheitsfehler einer Richtung ist und  $\mu_s$  und  $\mu_\lambda$  den mittleren Fehler der astronomischen Azimut- und Längenbestimmung bedeuten. Ganz allgemein darf noch bemerkt werden, daß Urmajew ebenso wie Krassowsky die Koordinaten des Fundamentalpunkts der ganzen Triangulation und das grundlegende Orientierungszimut in diesem Punkt unverändert beibehält. Er setzt also von vornherein

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0 \dots \dots \dots (16)$$

Die Berechnung der Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt in bekannter Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit Rücksicht auf die Form der Fehlergleichungen ergeben sich bei der Aufstellung der Normalgleichungen bestimmte Besonderheiten. So sind zur Aufstellung der Normalgleichungen, die sich auf einen bestimmten Punkt beziehen, nur die Fehlergleichungen erforderlich, die sich auf diesen Punkt und auf die von diesem Punkt ausgehenden geodätischen Linien beziehen. Damit gehen in diese Normalgleichungen auch nur die Unbekannten ein, die sich auf diesen Punkt und die

unmittelbar benachbarten Punkte beziehen. Werden daher an ein bereits ausgeglichenes Polygonsystem nachträglich weitere Polygone angeschlossen, so treten nur an den Anschlußnähten Änderungen in den Fehlergleichungen und Normalgleichungen ein. Für die übrigen Fehler- und Normalgleichungen des ausgeglichenen Systems ergeben sich keine Änderungen. Hiernach können die Fehler- und Normalgleichungen für die einzelnen Punkte je für sich und unabhängig von den übrigen Eckpunkten des Polygonsystems aufgestellt werden. Dadurch kann die Aufstellung der Fehler- und Normalgleichungen unter mehrere Rechner verteilt und in verhältnismäßig kurzer Zeit durchgeführt werden. Die Gesamtzahl der Fehlergleichungen kann unmittelbar am Polygonsystem abgelesen werden und ist jeweils gleich der Zahl der geodätischen Linien mal 3 plus der Zahl der Eckpunkte des Polygonsystems. Die Zahl der Normalgleichungen ist gleich der Zahl der Eckpunkte minus dem Ausgangspunkt der Triangulation mal 3. Die Differenz der Zahl der Fehlergleichungen minus der Zahl der Normalgleichungen gibt die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen.

Mit Rücksicht auf den verhältnismäßig einfachen Aufbau der Normalgleichungen ergeben sich bei der Auflösung auch bei einer großen Anzahl von Polygonen keine besonderen Schwierigkeiten. Zur Erleichterung der Auflösung empfiehlt Urmajew anstelle der Auflösung des ganzen Normalgleichungssystems in einem Guß nach dem Gaußschen Algorithmus ein stufenweises Näherungsverfahren, das im allgemeinen nach 5 Näherungen die endgültigen Ergebnisse liefert, und gibt hierzu eine leicht verständliche Anleitung.

Von besonderer Wichtigkeit ist, daß sich in den Normalgleichungen die Koeffizienten mit zunehmender Entfernung der Nachbarkpunkte von dem Bezugspunkt sehr stark vermindern. Dieser Minderungseinfluß bewirkt, daß bei der Erweiterung eines bereits ausgeglichenen Polygonsystems durch weitere Polygone nicht die ganze Ausgleichung neu zu machen ist. In einem solchen Fall müssen lediglich — wie schon gesagt — die Fehler- und Normalgleichungen für die Randpunkte neu aufgestellt werden. Im übrigen braucht man dann die vorhergegangene Auflösung der Normalgleichungen nur fortzusetzen und nur für die Randpunkte neue Koordinaten und Orientierungsverbesserungen zu berechnen. Die von der Anschlußnaht weit entfernten Punkte des ursprünglichen Systems bleiben hiernach praktisch fast unverändert.

Urmajew erläutert das Aufstellen der Fehler- und Normalgleichungen noch durch ein ausführliches Beispiel.

Nach der Bestimmung der Unbekannten  $\zeta$ ,  $\xi$  und  $\eta$  werden diese in die Fehlergleichungen zur Berechnung der  $w$ ,  $v$  und  $u$  eingesetzt. Damit erhält man dann den mittleren Fehler der Gewichtseinheit in bekannter Weise aus

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_s w^2] + [p_\beta v^2] + [p_u u^2]}{3D - 2p + 3}} \dots \dots \dots (17)$$

wobei  $D$  gleich der Anzahl der geodätischen Linien und  $p$  gleich der Anzahl der Eckpunkte des Polygonsystems ist. Bezeichnet man endlich noch die Gewichtsziproke eines ausgeglichenen Elements mit  $Q$ , so kann der zugehörige mittlere Fehler aus

$$M = \mu \sqrt{Q} \dots \dots \dots (18)$$

berechnet werden. Zur angenäherten Genauigkeitsberechnung, die den praktischen Anforderungen voll auf genügt, leitete Urmajew für die Berechnung der Gewichtskoeffizienten noch eine sehr einfache Näherungsformel ab, so daß die ganze Fehlerberechnung ohne weiteres mit dem Rechenschieber durchgeführt werden kann.

Nach Abschluß der Polygonausgleichung müssen die Teilstücke der Triangulation zwischen die nunmehr auch der Lage und Orientierung nach fest vorgegebenen Anschlußseiten durch eine nochmalige Ausgleichung der Teilstücke eingepaßt werden.

Wegen der Ausgleichung der Teilstücke der Triangulation zwischen je 2 festliegenden Ausgangsseiten darf noch auf die Arbeit von N. A. Urmajew „Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten“ verwiesen werden. Eine Übersetzung dieser Arbeit ist veröffentlicht in den Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Kart. u. Verm.-Wes. 1942/Heft 3, Seite 74—87.



Bei der Gesamtausgleichung ergeben sich also folgende Rechenstufen:

1. Vorläufige Ausgleichung der Teilstücke unter Berücksichtigung der Dreiecks-, Seiten-, Basis- und Azimutgleichungen.
2. Berechnung vorläufiger Koordinaten längs eines beliebigen Linienzuges, wobei mit dem Teilstück begonnen wird, das den Fundamentalpunkt der Triangulation enthält und dessen Koordinaten unverändert beibehalten werden.
3. Polygonausgleichung in folgenden Abschnitten:
  - a) Berechnung der Längen und Azimute der geodätischen Linien, die die einzelnen Teilstücke ersetzen und der geodätischen Azimute der Ausgangsseiten der Teilstücke.
  - b) Aufstellung der Fehlergleichungen nach (6), (7) und (8)
  - c) Berechnung der Gewichte der Fehlergleichungen nach (13), (14) und (15)
  - d) Aufstellung und Auflösungen der Normalgleichung einschl. Fehlerrechnung.
  - e) Bestimmung der endgültigen Koordinaten der Eckpunkte des Polygonsystems und der Orientierung der Ausgangsseiten der Teilstücke.
4. Endgültige Ausgleichung der Teilstücke unter Berücksichtigung der endgültigen Azimutbedingungen und des Anschlusses in Länge und Breite an die Eckpunkte des Polygonsystems.
5. Endgültige Koordinierung der gesamten Triangulation.

Das von Urmajew angegebene Verfahren der Polygonausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen bringt gegenüber dem Verfahren nach bedingten Beobachtungen von Krassowsky wesentliche Vereinfachungen. Die Aufstellung der Fehlergleichungen macht wesentlich weniger Arbeit als die Aufstellung der Bedingungsgleichungen, obwohl die Zahl der Bedingungsgleichungen, die der Anzahl der überschüssigen Messungen gleich ist, nur etwa halb so groß ist als die Zahl der Fehlergleichungen. Die Zahl der Normalgleichungen ist bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen erheblich geringer als bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen. Außerdem haben bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen die Normalgleichungen eine einfachere Form und besondere Eigentümlichkeiten, die bei der Auflösung des Normalgleichungssystems die Anwendung des stufenweisen Näherungsverfahrens gestatten. Überdies können hierbei in einfachster Weise die mittleren Fehler der ausgeglichenen Größen bestimmt werden. Bei Anwendung des Verfahrens von Urmajew können wesentlich mehr Polygone in einem Guß bearbeitet, die Ausgleichungsrechnung auf verschiedene Rechner verteilt und dadurch die ganze Ausgleichung wesentlich beschleunigt werden. Die Ergebnisse der Ausgleichung nach dem Verfahren von Urmajew und von Krassowsky sind, wie Urmajew nachweist, praktisch gleich.

Beim Vergleich mit dem Bowie-Verfahren verdient ebenfalls das Verfahren von Urmajew den Vorzug, weil es kaum mehr Arbeit verursacht wie das Bowie-Verfahren, diesem aber in theoretischer Hinsicht weit überlegen ist. Beim Bowie-Verfahren werden bei der eigentlichen Polygon- oder Hauptausgleichung die astronomischen Messungsergebnisse nicht mehr ausgewertet.

Hiernach stellt das Verfahren von Urmajew für die Ausgleichung großer astronomisch-geodätischer Netze zurzeit wohl das empfehlenswerteste Verfahren dar. Zudem ist es Urmajew in bemerkenswert klarer Weise gelungen, die Grundgedanken des von ihm vorgeschlagenen Verfahrens herauszustellen und damit der praktischen Anwendung des Verfahrens weitgehend die Wege zu ebnen.

Wegen der Einzelheiten des Verfahrens von Urmajew darf auf die nachfolgende Übersetzung verwiesen werden. Die der Originalarbeit angeschlossene Inhaltsangabe wird nicht gebracht, weil sie im wesentlichen in die vorstehende Zusammenfassung eingearbeitet ist. Die Übersetzung selbst wurde beim OKH, Chef Kriegs-Karten- und Vermessungswesen durchgeführt und von Prof. Dr. Buchholtz von der Technischen Hochschule in Riga durchgesehen und weitgehend überarbeitet. Herrn Prof. Dr. Buchholtz darf daher an dieser Stelle der besondere Dank für seine Mitarbeit ausgesprochen werden.

# Verfahren zur Ausgleichung von Triangulationen I.O.

Von N. A. Urmajew \*)

Deutsche Übersetzung bearbeitet von  
Prof. Dr. Buchholtz, Riga

## Inhaltsverzeichnis:

	Seite
§ 1 Allgemeine Erwägungen über die Ausgleichung von Triangulationen	
I. Ordnung . . . . .	22
§ 2 Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen . . . . .	25
§ 3 Aufstellung der Fehlergleichungen . . . . .	27
§ 4 Berechnung der Koeffizienten der Fehlergleichungen . . . . .	28
§ 5 Berechnung der Gewichte der beobachteten Größen . . . . .	35
§ 6 Bildung und Auflösung der Normalgleichungen . . . . .	37
§ 7 Rechenbeispiel . . . . .	41
§ 8 Genauigkeitsuntersuchung der ausgeglichenen Größen . . . . .	43
§ 9 Vergleich der neuen Methode mit der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen . . . . .	45

\*) Erschienen als Folge 19 der „Arbeiten des Zentralen Wissenschaftlichen Forschungs-Instituts“, Moskau 1937, Verlag: Hauptverwaltung für Staatliche Landesaufnahme und Kartographie beim Volkskommissariat für Innere Angelegenheiten der UdSSR.



## § 1. Allgemeine Erwägungen über die Ausgleichung von Triangulationen I. Ordnung

Die Entwicklung der Triangulationen I. O. von unserer westlichen Grenze bis zum fernen Osten gibt umfangreichstes Material für die Bearbeitung geodätischer und astronomischer Beobachtungen.

Die Bearbeitung eines solchen Materials stößt naturgemäß auf ungeheure Schwierigkeiten; dies wird insbesondere klar, wenn man sich erinnert, daß allein schon die Bearbeitung der ersten acht unserer Polygone I. O. nur nach Voraussetzung einiger Vereinfachungen möglich war.

Bei der Bearbeitung von Triangulationen I. O. kann man zwei Wege gehen. Einmal kann man die Aufgabe stellen, die wahrscheinlichsten Verbesserungen aller unmittelbar beobachteten Elemente der Triangulationen zu bestimmen, insbesondere die der geodätischen Richtungen und der astronomischen Längen und Azimute.

Für die Gebiete der UdSSR ist die Zahl der unmittelbar beobachteten Elemente ungeheuer groß, so daß der üblichen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate große Schwierigkeiten entgegenstehen. Die ersten acht westlichen Polygone unserer Triangulation I. O. umfassen z. B. rund 700 Bedingungsgleichungen und ebenso viele Normalgleichungen.

Die Anwendung des Boltzschens Entwicklungsverfahrens, wenigstens in seiner ursprünglichen Form, kann die Arbeit kaum erleichtern, weil dadurch der Arbeitsaufwand für die Ausgleichung nicht geringer als beim Gaußschen Algorithmus ist.

Der Vorzug des Boltzschens Entwicklungsverfahrens besteht lediglich darin, daß durch dieses Verfahren die Arbeit der Neuausgleichung einer Triangulation wesentlich verkürzt wird, denn beim Entwicklungsverfahren erfolgt die Auflösung der Normalgleichungen in allgemeiner Form, d. h. die Korrelaten werden als lineare Funktionen der Absolutglieder der Normalgleichungen dargestellt. Es unterliegt daher keinem Zweifel, daß die strenge Ausgleichung der Triangulation I. O. im Gesamtumfang der UdSSR einen praktisch untragbaren Aufwand von Zeit und Arbeit erfordern würde.

Demnach wird es bei der Bearbeitung von Triangulationen I. O. wesentlich vorteilhafter sein, den zweiten Weg zu gehen, anstatt der unmittelbar beobachteten Elemente der Triangulation nur einige ihrer Funktionen auszugleichen.

Hierzu darf eine für diesen Fall sehr wesentliche Erwägung angeführt werden. Wir nehmen an, es sei uns gelungen, die der Ausgleichung zu unterziehenden Funktionen der beobachtenden Größen so zu wählen, daß alle Widersprüche weit unter den zulässigen Grenzen liegen.

Das bedeutet, daß die im Ergebnis der Ausgleichung erhaltenen Verbesserungen recht klein und von der Größenordnung der Beobachtungsfehler sein werden; man darf daher annehmen, daß eine derartige Lösung einer strengen recht nahe kommen wird.

Im Jahre 1886 brachte Helmert sein Verfahren zur Ausgleichung astronomischer Netze in Vorschlag („Lotabweichungen“ Heft 1, Veröffentlichungen des Preussischen Geodätischen Instituts).

Nach dem Helmertschen Verfahren werden einzelne Teilstücke der Triangulation zu Ausgleichungszwecken durch entsprechende geodätische Linien ersetzt.

Deshalb wurden bei diesem Verfahren die Längen geodätischer Linien und die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel als unmittelbar gemessene Größen behandelt.

Bei der Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze nach dem Helmertschen Verfahren besteht die Hauptaufgabe jedoch in der Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte der Lotabweichung im Ursprungspunkte der Triangulation, sowie der Verbesserungen der angenommenen Dimensionen des Erdellipsoids, d. h. der auf die große Halbachse und die Abplattung bezüglichen Verbesserungen.

Im Jahre 1930 schlug Prof. F. N. Krassowski vor, die Bestimmung der Dimensionen des Ellipsoids und seiner Orientierung einerseits und die Ausgleichung der Triangulation andererseits als zwei selbständige Aufgaben zu behandeln. Hierzu gibt er folgende Begründung. Durch die endgültige Orientierung der Triangulation erfahren die im Ergebnis der vorläufigen Ausgleichung der Teilstücke erhaltenen Elemente der Triangulation nur sehr kleine, praktisch bedeutungslose Veränderungen.

Außerdem kann die Bestimmung der Abplattung des Erdellipsoids aus Triangulationen I. O. im Be-

reich der UdSSR im Hinblick auf die geographische Lage und die Form des zur Zeit vorhandenen Netzes I. O. keinen Anspruch auf genügende Zuverlässigkeit erheben.

Aus diesem Grunde hat Prof. F. N. Krassowski in seiner Arbeit „Ausgleichsmethoden für staatliche Triangulationen I. O.“ (Arbeiten des Z. W. U. I. G. L. u. K., Folge 2) die Bestimmung der Ausgangsdaten und die Ausgleichung der Triangulationen I. O. als zwei voneinander getrennte Aufgaben behandelt.

Zur Zeit kann man, auf Grund der obigen Erwägungen, die Trennung der Bestimmung der Ausgangsdaten von der Ausgleichung, als ein vollkommen feststehendes Verfahren ansehen, und deshalb werden wir im folgenden nur die Frage der Ausgleichung der Staatlichen Triangulation behandeln.

Im Jahre 1930 hat der amerikanische Geodät O. S. Adams in seiner Arbeit „The Bowie Method of Triangulation Adjustment as Applied to the First-Order Net in the Western Part of the United States“ die Methode der Triangulations-Ausgleichung nach Bowie dargelegt.

Nach der Bowie-Methode werden als solche Größen, die der Ausgleichung unterliegen und als Messungsergebnisse gelten, die Breiten- und Längen-Unterschiede der Knotenpunkte von Polygonen I. O. angenommen. Die Gewichte dieser Größen werden umgekehrt proportional den Längen der entsprechenden geodätischen Linien angenommen.

Die Ausgleichung wird nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen ausgeführt. Astronomische Elemente werden dabei nicht in die Ausgleichung einbezogen.

Das Verfahren von Bowie ist als Näherungsverfahren zu bewerten; es dürfte daher kaum in einem so großen Gebiet anwendbar sein, wie es das der UdSSR ist.

Im Jahre 1932 wurde meinerseits ein Ausgleichungsverfahren vorgeschlagen, bei dem, ebenso wie bei der Bowie-Methode, die Breiten- und Längenunterschiede der Knotenpunkte der Polygone als unmittelbar gemessene Größen behandelt werden. Die Bestimmung (im oben angegebenen Sinne) der wahrscheinlichsten Koordinaten geschieht nach Formeln des allgemeinen arithmetischen Mittels.

Für die Gewichte der Unbekannten werden besondere Formeln angegeben, die eine nach Winkeln erfolgte Ausgleichung der einzelnen Teilstücke voraussetzen.

Hinsichtlich der Anwendung dieses Verfahrens war jedoch nur an Hauptreihen II. O. in Polygonen I. O. gedacht (siehe N. A. Urmajew „Anleitung zur Bearbeitung von Triangulationen“ Moskau 1932).

Wir sehen also, daß bei allen aufgezählten Methoden einige vereinfachende Voraussetzungen gemacht werden, wobei diese oder jene Funktionen gemessener Elemente als unmittelbar gemessene Größen behandelt werden.

Wir kehren nun zum Verfahren von Prof. F. N. Krassowski zurück.

Nach diesem Verfahren werden die Längen der geodätischen Linien und die von diesen Linien eingeschlossenen Winkel als unmittelbar gemessene Größen behandelt. Außerdem werden auch die astronomischen Längen und Azimute in die Ausgleichung einbezogen.

Die Ausgleichung wird nach dem Verfahren für bedingte Beobachtungen ausgeführt. Obgleich bei der Aufstellung der Polygonegleichungen, im Gegensatz zu Helmert, keine aufeinanderfolgenden Substitutionen angewandt werden, sondern die Aufstellung in Gleichungen für ein beliebiges Polygon nach fertig gegebenen Formeln erfolgt, verlangt die Aufstellung der Bedingungsgleichungen bei einer größeren Anzahl von Polygonen doch einen erheblichen Aufwand von Zeit und Arbeit.

Deshalb erscheint es vorteilhafter, die Ausgleichung der Polygone nach vermittelnden Beobachtungen auszuführen, weil dann die oben erwähnten Unzuträglichkeiten weniger in Erscheinung treten.

Die folgenden Ausführungen werden sich daher im wesentlichen auf dieses Verfahren beziehen.

Ebenso wie beim Verfahren von Prof. F. N. Krassowski, nehmen wir an, daß die Längen der geodätischen Linien und die Winkel zwischen diesen geodätischen Linien und den entsprechenden Ausgangsseiten der Kette gewissermaßen unmittelbar gemessene Größen vorstellen. Wenn diese Größen auf Grund des Gesamtmaterials der Triangulation genügend sorgfältig bestimmt sind, so ist wohl anzunehmen, daß die Schlußfehler der Polygone klein sein und die zulässigen Grenzen nicht überschreiten werden.

Dann werden die im Ergebnis der endgültigen Ausgleichung ermittelten Verbesserungen ebenfalls klein sein und sich nur unwesentlich von denen unterscheiden, die man bei strenger Ausgleichung des ganzen Polygonsystems der Triangulation I. O. erhalten haben würde.



Wir untersuchen zunächst, welches die Schlußfehler im Polygon sein werden, wenn die Ausgleichung seiner einzelnen Teilstücke in solcher Reihenfolge geschieht: zuerst nur bezüglich der Winkelsummenbedingungen, dann der Winkelsummen- und Basisbedingungen, und schließlich der Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen.

Diesbezügliche Berechnungen führen wir für ein Polygon aus, dessen Seiten nach Meridianen und Parallelen orientiert sind und schematisch aus 19 Dreiecken bestehende Ketten vorstellen. Die mittlere Seitenlänge möge 25 km betragen. Der mittlere quadratische Fehler einer Richtung sei  $\mu = \pm 0,5''$ . Unter solchen Umständen wird der Linienzug der Kette 10 Dreiecksseiten enthalten und das Teilstück 250 km lang sein; der Umfang des Polygons wird also 1000 km betragen.

Den mittleren quadratischen Fehler der Abszisse der Endseite des Teilstückes bezeichnen wir mit  $M_x'$ ,  $M_x''$ ,  $M_x'''$ , je nachdem das Teilstück nur bezüglich der Winkelsummenbedingung oder bezüglich der Winkelsummen- und Basisbedingungen, oder bezüglich der Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen ausgeglichen ist. Zur Berechnung von  $M_x'$  bedienen wir uns der Formeln, die A. A. Isotow in seiner Dissertation\*) angegeben hat. Für  $M_x'$  gibt A. A. Isotow folgende Formel (s. S. 90):

$$M_x'^2 = 2\mu^2 \sin^2 1'' s^2 \left\{ \left[ \frac{4v^3 - 3v^2 + 5v}{9} - \frac{50v^2 - 35v - 45}{1500} \right] \cos^2 \alpha + \left[ \frac{2v^3 + 3v^2 + v}{6} - \frac{100v^2 + 182v - 116v}{500} \right] \sin^2 \alpha - \frac{335v^2 - 335v}{500\sqrt{3}} \sin 2\alpha \right\}$$

Setzt man hier  $\mu = 0,5''$ ;  $s = 25$  km und  $V = 10$ , so lautet die letzte Formel

$$M_x'^2 = 3,03 \cos^2 \alpha + 1,11 \sin^2 \alpha - 0,26 \sin 2\alpha \quad (1)$$

Um  $M_x''$  und  $M_x'''$  zu berechnen, benutzen wir die erste Formel auf S. 61 der erwähnten Arbeit von A. A. Isotow. Diese Formel kann in folgender Form dargestellt werden:

$$M_x''^2 = M_x'^2 - \frac{\mu^2 s^2}{\rho'^2} \left\{ \left[ \frac{2v(2v-1)}{3} - \frac{v(N_{2v}-1-1)}{6N_{2v}} \right] \cos^2 \alpha + \left[ \frac{13v-3}{5\sqrt{3}} + \frac{v(N_{2v}-1-1)}{10\sqrt{3}N_{2v}} \right] \sin \alpha \right\}^2$$

Da hier  $v$  eine genügend große Zahl ist, so kann man annehmen

$$\frac{N_{2v}-1-1}{N_{2v}} \approx 0,382$$

(s. Fußnote in der Arbeit von A. A. Isotow auf S.7).

Dann ist

$$M_x''^2 = M_x'^2 - (1,53 \cos \alpha - 0,17 \sin \alpha)^2 \quad (2)$$

Auf Grund derselben Formel, S. 61, finden wir:

$$M_x'''^2 = M_x''^2 - \frac{\mu^2 s^2}{\rho'''^2} \times \left\{ \left[ \frac{106N_{2v} - (N_{2v}-1+1)(5v+4)}{2\sqrt{3}N_{2v}} \right] \cos \alpha + \left[ 10v^2 + 7v - \frac{v(N_{2v}-1+1)}{2N_{2v}} \right] \sin \alpha \right\}^2$$

Setzen wir hier die oben angeführten Ausdrücke ein, so erhalten wir:

$$M_x'''^2 = M_x''^2 - (0,02 \cos \alpha + 0,89 \sin \alpha)^2 \quad (3)$$

Wir wenden jetzt die Formeln (1), (2) und (3) auf die einzelnen Teilstücke des Polygons an, indem wir die Azimute gleich  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  und  $0^\circ$  setzen. Dann ergibt die Summe der  $M^2$  das Quadrat des mittleren Fehlers der Abszisse für das ganze Polygon.

\*) A. A. Isotow. — Bewertung der Genauigkeit von Triangulationen. Verlag des Moskauer Geodätischen Instituts, Moskau 1936.

Diese Berechnung bringen wir in folgender Tabelle.

$\alpha$	$M_x'^2$	$M_x''^2$	$M_x'''^2$
$90^\circ$	1,11 m	1,07 m	0,28 m
$180^\circ$	3,03 „	0,69 „	0,69 „
$270^\circ$	1,11 „	1,07 „	0,28 „
$0^\circ$	3,03 „	0,69 „	0,69 „
Summe	8,28 „	3,52 „	1,94 „

Infolge der Symmetrie der Koeffizienten in der Formel zur Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers der Ordinate, erhalten wir für letztere dieselben Größen. Die Gesamtfehler des Polygons sind also:

$$M' = \pm 4,1 \text{ m}; \quad M'' = \pm 2,7 \text{ m}; \quad M''' = \pm 2,0 \text{ m}.$$

Die entsprechenden relativen Fehler bei einem Umfang des Polygons von 1000 km sind:

$$1/240000; 1/370000 \text{ und } 1/500000$$

Es erweist sich also, daß durch die Einbeziehung der Basis- und Azimutbedingungen in die Ausgleichung der Teilstücke der zu erwartende Schlußfehler des Polygons um die Hälfte verkleinert wird.

Da alle Berechnungen hier für eine schematische Dreieckskette durchgeführt sind, sind die Fehlerwerte etwas kleiner als in Wirklichkeit, das Verhältnis der Fehler  $M'$  zu  $M''$  bleibt aber annähernd gewahrt.

Wir werden deshalb im folgenden annehmen, daß die Längen der geodätischen Linien aus Teilstücken abgeleitet sind, welche vorher bezüglich der Winkelsummen-, der Basis- und der Azimutbedingungen unter Berücksichtigung der Laplaceschen Verbesserung ausgeglichen wurden.

Wie die Berechnung und Bearbeitung der westlichen Polygone der Triangulation I. O. in der UdSSR nach dem Verfahren von Prof. F. N. Krassowski gezeigt hat, sind die im Ergebnis einer derartigen vorläufigen Ausgleichung der Teilstücke verbleibenden Klaffungen so klein, daß die nachfolgende Einfügung der Dreiecke der Teilstücke zwischen fest gegebene Seiten Verbesserungen der Dreieckswinkel notwendig macht, die erheblich kleiner als die Messungsfehler sind (maximale Winkelverbesserung  $0'',3$ ).

## § 2. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

Zunächst kommt es darauf an, grundsätzlich festzustellen, welche Größen der Ausgleichung unterliegen und als gemessene Größen gelten sollen.

Auf Grund der Ausführungen im vorangegangenen Paragraphen setzen wir voraus, daß die das Polygon bildenden Teilstücke bezüglich der Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen ausgeglichen seien.

Es mögen  $AB$  und  $CD$  (Abb. 1) die Grundseiten der Triangulation,  $A$  und  $D$  Laplacesche Punkte sein. Wenn das Teilstück  $ABCD$  bezüglich der Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen ausgeglichen ist, so können wir, längs irgend einem Linienzuge vorgehend, nacheinander für die Punkte des Teilstückes deren Koordinaten berechnen. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß die geodätischen Koordinaten und geodätischen Azimute in  $A$  durch fortschreitende Berechnung der geodätischen Koordinaten bestimmt sind, wobei mit dem Teilstück begonnen wurde, das den Ausgangspunkt der Triangulation enthält. Dann kann man auf Grund der so berechneten Koordinaten der Punkte  $A$  und  $D$ , die Länge der geodätischen Linie  $AD$  und ihr geodätisches Azimut und Gegenazimut berechnen.

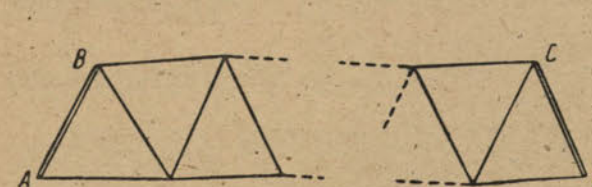


Abb. 1

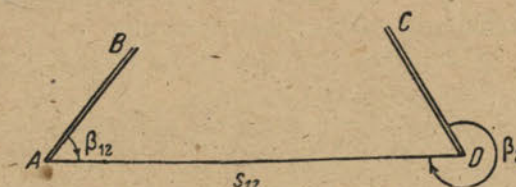


Abb. 2



Die geodätischen Koordinaten der Punkte  $A$  und  $B$  mögen  $B_1, L_1$  und  $B_2, L_2$  sein. Die geodätischen Azimute der Seiten  $AB$  und  $DC$  bezeichnen wir entsprechend mit  $A_{AB}$  und  $A_{DC}$ . Wenn das Azimut und Gegenazimut der geodätischen Linie mit  $A_{12}$  und  $A_{21}$  bezeichnet werden, so kann man die Winkel  $\beta$  (Abb. 2) nach folgenden Formeln berechnen:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} &= A_{12} - A_{AB} \\ \beta_{21} &= A_{21} - A_{DC} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Länge der geodätischen Linie und die Winkel  $\beta$  bei allen genügend kleinen Verlagerungen des ganzen Teilstückes auf der Oberfläche des Erdellipsoids unverändert bleiben. Sie sind also von den geodätischen Ausgangsdaten der Triangulation unabhängig. Das folgt schon daraus, daß man die Länge der geodätischen Linie  $s_{12}$  und die Winkel  $\beta$  auch ohne Berechnung der geodätischen Koordinaten und Azimute ermitteln kann, z. B. mit Hilfe von Polarkoordinaten. Außerdem werden die Länge der geodätischen Linie  $s_{12}$  und die aus dem Teilstück ermittelten Winkel  $\beta$  auch von kleinen Veränderungen der Elemente des Erdellipsoids nicht beeinflusst.

In der Tat müssen bei Anwendung von Polarkoordinaten die Dreiecke nacheinander nach dem Legendreschen Satz berechnet werden. Nimmt man z. B. an, daß die große Halbachse des Erdellipsoids eine Verbesserung um 600 m erfahren habe, so ändern sich die Meridian- und Normalkrümmungsradien je um 1:10000 ihrer Größe und der sphärische Exzeß um 1/5000 seiner Größe. Bei einer Länge des Teilstückes von 250 km kann der sphärische Exzeß 30" erreichen, und seine durch die Verbesserung der großen Halbachse des Erdellipsoids bewirkte Veränderung beläuft sich bloß auf 0,006". Die Dreieckswinkel ändern sich in diesem Falle nur um 0,002", und dabei nur in den zuletzt berechneten Dreiecken; die betreffenden Veränderungen liegen also innerhalb der Genauigkeitsgrenzen 8stelliger Logarithmentafeln.

Falls die Längen  $s'$  der geodätischen Linien und die Winkel  $\beta$  durch Berechnung von Polarkoordinaten im Teilstück ermittelt sind, so sind sie eigentlich als auf das Geoid bezogen zu betrachten. Bei der Auflösung der geodätischen Hauptaufgabe werden sie allerdings auf das Ellipsoid bezogen, das jedoch — wenn auch mit fehlerhaften Ausmaßen der Halbachsen — als im Bereich des Teilstückes mit dem Geoid zusammenfallend angenommen werden kann. Daher dürfen die solcherweise ermittelten  $s$  und  $\beta$  als auf das Geoid bezogen gelten. Gewiß mag eine solche Art der Ermittlung von  $s$  und  $\beta$  in Bezug auf die allgemeine Koordinatenoberfläche sozusagen als Flickarbeit erscheinen; immerhin werden auf solche Weise die Größen  $s$  und  $\beta$  im geodätischen Sinne so erhalten, als ob sie durch unmittelbare Messung auf der Oberfläche des Geoids ermittelt wären.

Wir nehmen jetzt als der Ausgleichung unterliegende Größen, also als solche, die im folgenden als unmittelbar gemessene gelten, an:

1. die Längen der geodätischen Linien  $s$ ,
2. die Winkel  $\beta$ ,
3. schließlich behandeln wir als der Ausgleichung unterliegende Größen auch die astronomisch bestimmten Längen der Punkte  $A$  und  $D$  sowie die astronomischen Azimute der Seiten  $AB$  und  $DC$ .

Bezüglich der Unbekannten, als deren Funktionen die gemessenen Größen dargestellt werden können, ist folgendes zu sagen:

Es ist offensichtlich, daß durch ein gewisses System geodätischer Koordinaten  $B, L$  die Längen der geodätischen Linien und ihre Azimute vollkommen bestimmt sind; die Lage der Ausgangsseiten kann dabei jedoch willkürlich angenommen werden. Deshalb muß zur Bestimmung dieser Lage noch ein gewisser Orientierungswinkel als unbekannte Größe eingeführt werden. Dann ist die ganze Triangulation geometrisch vollkommen bestimmt.

Es versteht sich, daß dieser Orientierungswinkel für alle Winkel  $\beta$  gilt, die sich beim betreffenden Laplaceschen Punkt befinden.

Mit anderen Worten: die Winkel  $\beta$  sind als im betreffenden Laplaceschen Punkt gemessene Richtungen zu behandeln.

Wir gelangen also zur Schlußfolgerung, daß als Unbekannte die geodätischen Koordinaten der Polygoneckpunkte anzunehmen sind, in denen astronomische Bestimmungen der Länge und des Azimuts er-

folgt sind, und daß außerdem die Orientierung der Ausgangsseiten der Triangulation als Unbekannte zu behandeln ist.

Nachdem damit die Frage bezüglich der gemessenen Größen und der zu berechnenden unbekannten Größen geklärt worden ist, können wir uns nun der Aufstellung der Fehlergleichungen zuwenden.

### § 3. Aufstellung der Fehlergleichungen

Wir nehmen ein beliebiges, dem wahrscheinlichsten nahekommendes System geodätischer Koordinaten  $B^0$  und  $L^0$  an; die betreffenden Verbesserungen mögen  $dB$  und  $dL$  sein.

Dann werden  $B^0 + dB = B$  und  $L^0 + dL = L$  die wahrscheinlichsten Koordinaten sein. Da die genäherten Koordinaten  $B^0$  und  $L^0$  bekannt sind, kann man die Längen der geodätischen Linien  $s^0$  und die entsprechenden Azimute  $A^0$  berechnen. Die betreffenden Verbesserungen  $ds$  und  $dA$  können als Funktionen der  $dB$  und  $dL$  dargestellt werden.

Wir stellen nun eine Fehlergleichung der ersten Art für die Längen der geodätischen Linie  $s^0 + ds$  auf, der im oben angedeuteten Sinn als gemessen geltende entsprechende Wert aber  $s$  ist, und wir die Bezeichnung

$$\left. \begin{aligned} w &= s^0 + ds - s, \\ w &= ds + (s^0 - s). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Das ist eine Fehlergleichung der ersten Art, in der  $s^0 - s$  das Absolutglied darstellt, und zwar im Sinne: Näherungswert minus gemessener Wert.

Augenscheinlich gibt es in einem Polygonnetz ebenso viele solcher Gleichungen, als geodätische Linien vorhanden sind.

Wir gehen nun zur Aufstellung der Fehlergleichungen der zweiten Art für die Winkel  $\beta$  über.

Es möge  $z^0$  der Näherungswert des Orientierungswinkels im betreffenden Laplaceschen Punkt und  $\zeta$  die entsprechende Verbesserung sein. Dann wird augenscheinlich  $z^0 + \zeta$  das geodätische Azimut der ausgeglichenen Ausgangsseite sein. Weiter nehmen wir an, daß im Ergebnis der Ausgleichung der Winkel  $\beta$  die Verbesserung  $v$  erhält. Dann wird augenscheinlich das Azimut der geodätischen Linie nach der Ausgleichung

$$\left. \begin{aligned} \beta + v + z^0 + \zeta &= A^0 + dA, \\ v &= -\zeta + dA + [A^0 - (\beta + z^0)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Das ist die Fehlergleichung der zweiten Art, in der  $A^0 - (\beta + z^0)$  das Absolutglied vorstellt.

Augenscheinlich gibt es doppelt soviel Gleichungen der zweiten Art als im Polygonnetz geodätische Linien vorhanden sind, weil für jede geodätische Linie zwei Gleichungen der zweiten Art aufgestellt werden müssen, z. B.

$$\begin{aligned} v_1 &= -\zeta_1 + dA_{12} + [A_{12}^0 - (\beta_1 + z_1^0)]; \\ v_2 &= -\zeta_2 + dA_{21} + [A_{21}^0 - (\beta_2 + z_2^0)]. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zur Aufstellung der Gleichungen der dritten Art über.

Wenn das astronomisch bestimmte Azimut der Seite  $AB$  gleich  $\alpha$  ist und durch die Ausgleichung die Verbesserung  $\delta$  erhält, während das ausgeglichene geodätische Azimut gemäß den früheren Ausführungen  $z^0 + \zeta$  ist, so stellt der Unterschied

$$(\alpha + \delta) - (z^0 + \zeta)$$

die Lotabweichung im Azimut dar.

Andererseits ergibt sich, wenn  $\lambda$  die beobachtete astronomische Länge,  $\delta\lambda$  ihre Verbesserung nach der Ausgleichung,  $L^0$  die genäherte geodätische Länge und  $dL$  deren Verbesserung nach der Ausgleichung ist, für die Lotabweichung in Länge der Ausdruck

$$(\lambda + \delta\lambda) - (L^0 + dL).$$



Demnach kann man die Laplaceschen Bedingungen wie folgt formulieren:

$$(\alpha + \delta) - (z^0 + \zeta) = [(\lambda + \delta\lambda) - (L^0 + dL)] \sin \varphi.$$

Nach Öffnung der Klammern und Umgruppierung der Glieder erhalten wir:

$$\delta - \delta\lambda \sin \varphi = \zeta - dL \sin \varphi - (\alpha - z^0) + (\lambda - L^0) \sin \varphi.$$

Nach Einführung der Bezeichnung

$$\delta - \delta\lambda \sin \varphi = u, \quad (7)$$

erhalten wir die Gleichung der dritten Art (Laplace) in folgender Form:

$$u = \zeta - dL \sin \varphi - [(\alpha - z^0) + (\lambda - L^0) \sin \varphi]. \quad (8)$$

Unsere weitere Aufgabe wird nun darin bestehen, daß wir die Größen  $ds$  und  $dA$ , die in die Formeln (5) und (6) eingehen, durch die Koordinatenunterschiede  $dB$  und  $dL$  ausdrücken müssen, wodurch die Fehlergleichungen in endgültiger Form erhalten werden.

#### § 4. Berechnung der Koeffizienten der Fehlergleichungen

Um Ausdrücke für die Koeffizienten der Fehlergleichungen zu erhalten, benutzen wir die Darstellung des Ellipsoids auf der Kugel nach Bessel.

Es möge auf dem Ellipsoid das Dreieck  $PAB$  mit den Seiten  $90^\circ - B_1$ ,  $90^\circ - B_2$ ,  $s$  und den Winkeln  $A, B, I$  gegeben sein, wobei  $s$  die Länge der geodätischen Linie  $AB$  und  $b$  den Längenunterschied bedeuten. Diesem Dreieck auf dem Ellipsoid entspricht das sphärische Dreieck  $PAB$ , mit den Seiten  $90^\circ - u_1$ ,  $90^\circ - u_2$ , wobei  $u$  die reduzierte Breite bedeutet und die Winkel  $A$  und  $B$  unverändert auf die Kugel übergehen. Für die dritte Seite  $\sigma$  und den Winkel  $\lambda$  haben wir folgende Differentialgleichungen:

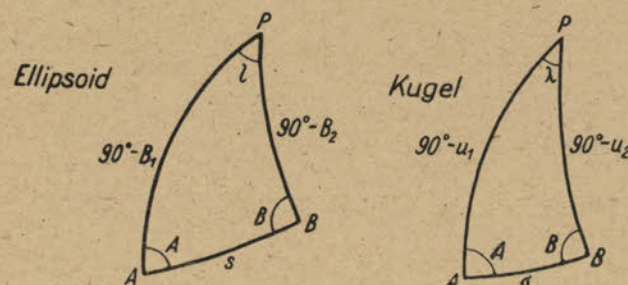


Abb. 3

$$ds = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma; \quad (9)$$

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda. \quad (10)$$

Die reduzierte Breite kann bekanntlich nach folgender Formel als Funktion der geodätischen Breite dargestellt werden:

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B. \quad (11)$$

Daraus folgt

$$\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 B - e^2 \operatorname{tg}^2 B = \sec^2 B - e^2 \sin B \sec^2 B = \sec^2 B = \sec^2 B (1 - e^2 \sin^2 B).$$

Es sei nun

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (12)$$

Dann ist

$$\sec u = W \sec B \quad (13)$$

oder

$$\cos u = \frac{\cos B}{W} \quad (14)$$

Es ist also

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} = \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 B}{W^2}} = \frac{1}{W} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B}$$

oder

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W} \quad (15)$$

Damit gehen die Gleichungen (9), (10) in folgende Form über:

$$ds = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{W} d\sigma; \quad (16)$$

$$d\lambda = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W} d\lambda. \quad (17)$$

Wir bilden nun die Ableitung  $\frac{du}{dB}$ .

Durch Differenzierung von (11) erhalten wir:

$$\sec^2 u du = \sqrt{1 - e^2} \sec^2 B dB.$$

Also ist mit (13)

$$W^2 \sec^2 B du = \sqrt{1 - e^2} \sec^2 B dB.$$

Daraus folgt

$$\frac{du}{dB} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{W^2} \quad (18)$$

Wenn wir die Koeffizienten für 200—300 km lange geodätische Linien berechnen (entsprechend der Länge eines Teilstücks der Triangulation I. O.), so kann man als Näherungswert von (16) annehmen

$$s = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{W} \sigma, \quad (19)$$

wobei  $W$  nach dem Argument  $1/2 (B_1 + B_2)$  gefunden werden kann. Wenn man die geodätische Linie sogar 530 km lang ( $\sigma = 5^\circ$ ) annimmt, so macht der Fehler doch nur  $1/600\,000$  aus, was praktisch belanglos ist, weil die Koeffizienten der Fehlergleichungen mit einem relativen Fehler von  $1/1000$  berechnet werden.

Wenn die Länge des Teilstücks 200—300 km ( $\sigma = 3^\circ$ ) beträgt, so kann die Größe  $W$  nach dem Argument  $B_1$  oder  $B_2$  angenommen werden, wodurch im Logarithmus von  $s$  oder  $\sigma$  ein Fehler im Betrage von nur 4 Einheiten der fünften Dezimalstelle entsteht. Man kann daher bei der Berechnung von  $W$  nach (19) nach Belieben  $B_1$ ,  $B_2$  oder  $1/2 (B_1 + B_2)$  als Argument benutzen. Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir nun zur Berechnung der Koeffizienten über.

Wenn wir auf das sphärische Dreieck  $PAB$  die Formel der sphärischen Trigonometrie anwenden, so finden wir

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \lambda. \quad (20)$$

Wir bilden den Ausdruck für das volle Differential:

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (21)$$

Wir berechnen nun die in Formel (21) eingehenden partiellen Ableitungen.

Wir haben:

$$-\sin \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u_1} = \cos u_1 \sin u_2 - \sin u_1 \cos u_2 \cos \lambda,$$

und

$$\cos u_1 \sin u_2 - \sin u_1 \cos u_2 \cos \lambda = \sin \sigma \cos A.$$

Also ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_1} = -\cos A. \quad (22)$$

Ebenso haben wir

$$-\sin \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u_2} = \sin u_1 \cos u_2 - \cos u_1 \sin u_2 \cos \lambda = \sin \sigma \cos B.$$



Folglich ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_2} = -\cos B. \quad (23)$$

Ferner haben wir

$$-\sin \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = -\cos u_1 \cos u_2 \sin \lambda$$

oder

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin \lambda}{\sin \sigma}.$$

Aber aus dem Dreieck *PAB* hat man:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \sigma} = \frac{\sin A}{\cos u_2} = \frac{\sin B}{\cos u_1},$$

deshalb ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin A}{\cos u_2} = \cos u_1 \sin A; \quad (24)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin B}{\cos u_1} = \cos u_2 \sin B. \quad (25)$$

Auf solche Weise erhält man

$$d\sigma = -\cos A du_1 - \cos B du_2 + \cos u_2 \sin B d\lambda. \quad (26)$$

Gehen wir von  $d\sigma$ ,  $du$ , und  $d\lambda$  zu  $ds$ ,  $dB$  und  $dl$  über, so finden wir aus den Formeln (16), (17) und (18):

$$\frac{W}{a\sqrt{1-e^2}} ds = -\cos A \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} dB_1 - \cos B \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_2^2} dB_2 + \frac{\cos B_2}{W_2} \sin B \frac{W}{\sqrt{1-e^2}} dl.$$

Daraus folgt:

$$ds = -\frac{a(1-e^2)}{W_1^3} \cos A dB_1 - \frac{a(1-e^2)}{W_2^3} \cos B dB_2 + \frac{a}{W_2} \cos B_2 \sin B dl. \quad (27)$$

Setzen wir nun  $A = A_{12}$  und  $B = 360^\circ - A_{21}$  so finden wir

$$ds = -M_1 \cos A_{12} dB_1 - M_2 \cos A_{21} dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dl. \quad (28)$$

Wir schreiben jetzt folgende Formel für das sphärische Dreieck *PAB*:

$$\cotg A = \cos u_1 \tg u_2 \operatorname{cosec} \lambda - \sin u_1 \cotg \lambda. \quad (29)$$

Ferner ist

$$dA = \frac{\partial A}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial A}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (30)$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$-\operatorname{cosec}^2 A \frac{\partial A}{\partial u_1} = -\sin u_1 \tg u_2 \operatorname{cosec} \lambda - \cos u_1 \cotg \lambda$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = \frac{\sin^2 A}{\sin \lambda \cos u_2} \left[ \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \lambda \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = \frac{\sin^2 A \cos \sigma}{\cos u_2 \sin \lambda}.$$

Nun ist

$$\frac{\sin A}{\cos u_2} = \frac{\sin \lambda}{\sin \sigma}.$$

Deshalb ist

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = \frac{\sin A \cos \sigma \sin \lambda}{\sin \lambda \sin \sigma} = \frac{\sin A}{\sin \sigma} \cos \sigma$$

oder

$$\frac{\partial A}{\partial B_1} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \frac{\sin A}{\sin \sigma} \cos \sigma. \quad (31)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial A}{\partial u_2} = -\sin^2 A \cos u_1 \sec^2 u \operatorname{cosec} \lambda = -\frac{\cos u_1 \sin^2 A}{\cos^2 u_2 \sin \lambda}$$

und

$$\sin A = \frac{\cos u_2 \sin B}{\cos u_1}.$$

Deshalb ist

$$\frac{\partial A}{\partial u_2} = -\frac{\cos u_1 \cos^2 u_2 \sin^2 B}{\cos^2 u_2 \sin \lambda \cos^2 u_1} = -\frac{\sin^2 B}{\sin \lambda \cos u_1} = -\frac{\sin^2 B \cos u_1}{\cos u_1 \sin B \sin \sigma};$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_2} = -\frac{\sin B}{\sin \sigma}$$

oder

$$\frac{\partial A}{\partial B_2} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{W_2^2} \frac{\sin B}{\sin \sigma}. \quad (32)$$

Wir bilden die Ableitung  $\frac{\partial A}{\partial \lambda}$ :

$$-\operatorname{cosec}^2 A \frac{\partial A}{\partial \lambda} = -\cos u_1 \tg u_2 \cos \lambda \operatorname{cosec}^2 \lambda + \sin u_1 \operatorname{cosec}^2 \lambda - \frac{\partial A}{\partial \lambda}$$

$$= -\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \lambda \cos u_2} (\sin u_1 \cos u_2 - \cos u_1 \sin u_2 \cos \lambda)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = -\frac{\sin^2 A \sin \sigma \cos B}{\sin^2 \lambda \cos u_2}.$$

Beachten wir noch:

$$\frac{\sin A}{\sin \lambda} = \frac{\cos u_2}{\sin \sigma};$$

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda} = -\frac{\cos^2 u_2 \sin \sigma \cos B}{\sin^2 \sigma \cos u_2} = -\frac{\cos u_2 \cos B}{\sin \sigma}. \quad (33)$$

Ferner hat man

$$\frac{\partial \lambda}{\partial l} = \frac{W}{\sqrt{1-e^2}} \text{ und } \cos u_2 = \frac{\cos B_2}{W_2}.$$

Deshalb ist

$$\frac{\partial A}{\partial l} = -\frac{a \cos B_2}{W_2} \frac{\cos B}{\sin \sigma} \frac{W}{a\sqrt{1-e^2}}$$

oder

$$\frac{\partial A}{\partial l} = -N_2 \cos B_2 \cos A_{21} \frac{W}{a\sqrt{1-e^2} \sin \sigma}. \quad (34)$$

Durch Substitution in (30) erhalten wir:

$$dA = \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_1^2} \frac{\sin A_{12}}{\sin \sigma} \cos \sigma dB_1 + \frac{\sqrt{1-e^2}}{W_2^2} \frac{\sin A_{21}}{\sin \sigma} dB_2 - N_2 \cos B_2 \cos A_{21} \frac{W}{a\sqrt{1-e^2} \sin \sigma} dl. \quad (35)$$

Wir führen jetzt folgende Bezeichnung ein:

$$m = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W_2} \sin \sigma.$$

Unter Berücksichtigung von (19) finden wir näherungsweise:

$$\sin \sigma = \sigma - \frac{\sigma^3}{6} = \sigma \left( 1 - \frac{\sigma^2}{6} \right) = \frac{W}{a\sqrt{1-e^2}} s \left( 1 - \frac{\sigma^2}{6} \right).$$

Im Verbesserungsglied kann man näherungsweise setzen

$$\frac{\sigma^2}{6} = \frac{s^2}{6K^2}$$



wo  $R$  der mittlere Krümmungsradius ist. Das ist zulässig, weil bei  $s=200$  oder  $300\text{km}$  die Größe des  $\log \frac{m}{s}$  nicht mehr als 17 Einheiten der 5. Dezimalstelle ausmacht. Somit ist

$$m = s \left( 1 - \frac{s^2}{6R^2} \right) \quad (36)$$

Die durch die Formel (36) bestimmte Größe  $m$  wird als reduzierte Länge der geodätischen Linie bezeichnet.

Außerdem ist

$$\frac{dm}{ds} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{W^2} \cos \sigma \frac{d\sigma}{ds} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{W^2} \cos \sigma \frac{W}{a \sqrt{1-e^2}},$$

folglich ist

$$\frac{dm}{ds} = \cos \sigma \quad (37)$$

Hiernach kann man die Formel (35) in folgender Weise schreiben:

$$dA = \frac{M_1}{m} \sin A_{12} \left( \frac{dm}{ds} \right) dB_1 + \frac{M_2}{m} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_1 \quad (38)$$

Wir bilden nun die letzten Glieder der Formeln (28) und (38) um, indem wir  $dl$  durch  $dL_2 - dL_1$  ersetzen. Dann geht das letzte Glied der Formel (28) über in

$$\begin{aligned} -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dl &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_1 = \\ &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 + N_2 \frac{\cos B_2}{\cos u_2} \cos u_2 \sin A_{21} dL_1. \end{aligned}$$

Aber auf Grund der vorhergegangenen Formeln hat man

$$\frac{\cos B_2}{\cos u_2} = W_2 \text{ und } \cos u_2 \sin A_{21} = -\cos u_1 \sin A_{12}.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dl &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 - N_2 W_2 \cos u_1 \sin A_{12} dL_1 = \\ &= -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 - a \cos u_1 \sin A_{12} dL_1 = -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 - \\ &= -\frac{a}{W_1} \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 = -N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 - N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL_1. \end{aligned}$$

Man kann nun die Formel (28) wie folgt schreiben:

$$ds = -M_1 \cos A_{12} dB_1 - M_2 \cos A_{21} dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_{21} dL_2 - N_1 \cos B_1 \sin A_{12} dL_1 \quad (39)$$

Bei Ableitung dieser Formeln setzen wir voraus, daß  $dB$  und  $dL$  im Bogenmaß ausgedrückt seien; wenn sie jetzt in Sekunden ausgedrückt werden, so nimmt die Formel (39) folgendes Aussehen an:

$$ds = -\frac{M_1}{\rho''} \cos A_{12} dB_1 - \frac{M_2}{\rho''} \cos A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{\rho''} \sin A_{21} dL_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} \sin A_{12} dL_1 \quad (40)$$

Ebenso bilden wir die Formel (38) um, wobei wir nur das letzte Glied nehmen:

$$-\frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dl = -\frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_2 + \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_1.$$

Wir nehmen jetzt nur das zweite Glied der letzten Formel:

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_1 &= \frac{N_1}{m} \cos B_1 \frac{N_2 \cos B_2}{N_1 \cos B_1} \cos A_{21} dL_1 = \\ &= \frac{N_1}{m} \cos B_1 \frac{\cos B_2}{\cos B_1} \cos A_{21} dL_1 = \frac{N_1}{m} \cos B_1 \frac{\cos u_2}{\cos u_1} \cos A_{21} dL_1. \end{aligned}$$

Aus dem sphärischen Dreieck  $PAB$  hat man:

$$\cos u_2 \cos A_{21} = \sin u_1 \sin \sigma - \cos u_1 \cos \sigma \cos A_{12}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_1 &= \frac{N_1}{m} \cos B_1 (\sin \sigma \operatorname{tg} u_1 - \cos \sigma \cos A_{12}) dL_1 = \\ &= \frac{N_1}{m} \cos B_1 \left( \sin \sigma \operatorname{tg} u_1 - \frac{dm}{ds} \cos A_{12} \right) dL_1. \end{aligned}$$

Wenn die Länge der geodätischen Linie gleich  $200-300\text{km}$  angenommen wird, so beträgt in unseren Breiten das erste Glied in Klammern annähernd  $1/25$ . Da wir die Koeffizienten mit einer Genauigkeit von  $1/1000$  ihres Werts berechnen wollten, so kann man annehmen

$$\sin \sigma \approx \frac{s}{N_1}; \operatorname{tg} u_1 \approx \operatorname{tg} B_1.$$

Außerdem ist bei Entfernungen von  $200-300\text{km}$  die Größe  $\frac{dm}{ds}$  annähernd gleich  $1/1000$ , weswegen

hier und im folgenden angenommen wird  $\frac{dm}{ds} = 1$ .

Da aber bei derselben Länge der geodätischen Linie die Größe  $\frac{m-s}{s}$  nur  $0,0004$  ausmacht, so setzen wir auch  $m=s$ .

Dann kann man schreiben:

$$\frac{N_2}{m} \cos B_2 \cos A_{21} dL_1 = \frac{N_1}{s} \cos B_1 \left( \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 - \cos A_{12} \right) dL_1$$

und

$$dA = \frac{M_1}{s} \sin A_{12} dB_1 + \frac{M_2}{s} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2}{s} \cos B_2 \cos A_{21} dL_2 - \left. \begin{aligned} & - \frac{N_1}{s} \cos B_1 \left( \cos A_{12} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) dL_1. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die gefundenen Werte  $dA$  und  $ds$  setzen wir in die Fehlergleichungen (5) und (6) ein. Dann nehmen dieselben folgende Gestalt an:

$$-\frac{M_1}{\rho''} \cos A_{12} dB_1 - \frac{M_2}{\rho''} \cos A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{\rho''} \sin A_{21} dL_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{\rho''} \sin A_{12} dL_1 + (s^0 - s) = w; \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\zeta_1 + \frac{M_1}{s} \sin A_{12} dB_1 + \frac{M_2}{s} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_2 \cos B_2}{s} \cos A_{21} dL_2 - \\ & - \frac{N_1 \cos B_1}{s} \left( \cos A_{12} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) dL_1 + [A^0_{12} - (\beta_{12} + z_1^0)] = v_{12} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die Gleichung (43) ist für den Winkel  $\beta_{12}$  aufgestellt. Wenn an ihr der Index 1 durch 2 ersetzt wird, so erhalten wir die Gleichung für den Winkel  $\beta_{21}$  also

$$\left. \begin{aligned} & -\zeta_2 + \frac{M_1}{s} \sin A_{12} dB_1 + \frac{M_2}{s} \sin A_{21} dB_2 - \frac{N_1 \cos B_1}{s} \cos A_{12} dL_1 - \\ & - \frac{N_2 \cos B_2}{s} \left( \cos A_{21} - \frac{s}{N_2} \operatorname{tg} B_2 \right) dL_2 + [A^0_{21} - (\beta_{21} + z_2^0)] = v_{21} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$



Zur Bequemlichkeit weiterer Berechnungen führen wir an Stelle von  $dB$  und  $dL$  neue Unbekannte ein nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{10\rho''} dB &= \xi; \\ \frac{N \cos B}{10\rho''} dL &= \eta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

Offensichtlich stellen die Koeffizienten  $\frac{M}{10\rho''}$  und  $\frac{N \cos B}{10\rho''}$  die Bogenlängen des Meridians und der Parallele in 0'',1 dar.

Dann nehmen die Fehlergleichungen folgende Gestalt an:

$$-10 \cos A_{12} \xi_1 - 10 \cos A_{21} \xi_2 - 10 \sin A_{12} \eta_1 - 10 \sin A_{21} \eta_2 + (s^0 - s) = w \dots \dots (46)$$

$$\left. \begin{aligned} -\xi_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{12} \xi_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{21} \xi_2 - \frac{10\rho''}{s} \left( \cos A_{12} - \frac{s}{N_1} \operatorname{tg} B_1 \right) \eta_1 - \\ - \frac{10\rho''}{s} \cos A_{21} \eta_2 + [A_{12}^0 - (\beta_{12} + z_{11})] = v_{12} \end{aligned} \right\} \dots \dots (47)$$

$$\left. \begin{aligned} -\xi_2 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{12} \xi_1 + \frac{10\rho''}{s} \sin A_{21} \xi_2 - \frac{10\rho''}{s} \cos A_{12} \eta_1 - \\ - \frac{10\rho''}{s} \left( \cos A_{21} - \frac{s}{N_2} \operatorname{tg} B_2 \right) \eta_2 + [A_{21}^0 - (\beta_{21} + z_{21})] = v_{21} \end{aligned} \right\} \dots \dots (48)$$

Für die Umbildung der Gleichung (8) finden wir aus (45):

$$dL_1 \sin B_1 = \frac{10\rho'' \eta_1}{N_1 \cos B_1} \sin B_1 = \frac{10\rho'' \operatorname{tg} B_1}{N_1} \eta_1 \dots \dots (49)$$

Dann nimmt die Gleichung (8) folgende Form an:

$$\xi_1 - \frac{10\rho'' \operatorname{tg} B_1}{N_1} \eta_1 - [(a_1 - z_{11}) + (\lambda_1 - L_{11}^0) \sin B_1] = u \dots \dots (50)$$

Zum bequemeren Übergang von den Unbekannten  $dB$  und  $dL$  zu  $\xi$  und  $\eta$  geben wir hier eine Tabelle der Größen  $\frac{M}{10\rho''}$  und  $\frac{N \cos B}{10\rho''}$ .

B	$\frac{M}{10\rho''}$	$\frac{N \cos B}{10\rho''}$	B	$\frac{M}{10\rho''}$	$\frac{N \cos B}{10\rho''}$	B	$\frac{M}{10\rho''}$	$\frac{N \cos B}{10\rho''}$
30°	3,079	2,680	42°	3,085	2,301	54°	3,091	1,821
31	079	653	43	086	265	55	3,092	1,777
32	080	625	44	086	228	56	092	733
33	080	596	45	3,087	2,190	57	093	688
34	081	566	46	087	151	58	094	642
35	3,081	2,535	47	088	112	59	094	596
36	082	504	48	088	073	60	3,094	1,550
37	082	472	49	089	032	61	095	503
38	083	439	50	3,089	1,991	62	095	455
39	083	406	51	090	950	63	096	407
40	3,084	2,372	52	090	908	64	096	359
41	084	337	53	091	865	65	3,097	1,310
		36			44			

## § 5. Berechnung der Gewichte der beobachteten Größen

Bevor wir zur Aufstellung der Normalgleichungen übergehen, müssen wir die Gewichte der Größen berechnen, die wir als Beobachtungsergebnisse ansehen.

Im folgenden werden wir unterstellen, daß alle Dreiecke der Kette gleichzeitig sind, daß es sich also um eine schematische Kette handelt.

Die Ermittlung der Gewichte oder der mittleren quadratischen Fehler der Längen und Azimute der geodätischen Linien ist ein Problem, mit dem sich viele Geodäten beschäftigt haben; die vollkommenste Lösung dieser Aufgabe gab A. A. Jsotow in seiner Dissertation „Bewertung der Genauigkeit von Triangulationen“. Wir benutzen die Formeln von A. A. Jsotow.

Da die vorläufige Ausgleichung der Teilstücke sich auf die Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen bezog, benutzen wir die bei A. A. Jsotow auf Seite 92 angegebenen Formeln, und zwar die Formeln (XV) und (XVII), die folgendermaßen lauten:

$$M_s^2 = \mu^2 s^2 \frac{Q_{xx}}{\rho''^2 v^2}; \quad M_a^2 = \mu^2 \frac{Q_{yy}}{v^2}, \quad \dots \dots (51)$$

wobei  $\mu$  den Gewichtseinheitsfehler oder den mittleren Fehler einer im Dreieck gemessenen Richtung bedeutet;  $s$  ist die Länge der geodätischen Linie;  $v = \frac{n+1}{2}$ , wobei  $n$  die Anzahl der Dreiecke in der Kette bedeutet,  $M_s$  und  $M_a$  sind die mittleren Fehler der Länge und des Azimuts der geodätischen Linie,  $Q_{xx}$  und  $Q_{yy}$  die Gewichtskoeffizienten, die nach folgenden Formeln berechnet sind:

$$Q_{xx} = \frac{2v^3 - 3v^2 + 10v}{9} - \frac{5v^2 - 7v - 9}{150} - \frac{(52-v)^2}{60(25v+17)}; \quad \dots \dots (52)$$

$$Q_{yy} = \frac{2v^3 + 3v^2 + v}{3} - \frac{75v^3 + 108v^2 - 58v}{125} - \frac{(66v-15)^2}{250(20v-11)}; \quad \dots \dots (53)$$

Wir bilden diese Formeln um, indem wir zunächst die Größe  $\frac{Q_{xx}}{v^2}$  berechnen.

Dabei erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{xx}}{v^2} &= \frac{2v^3 - 3v^2 + 10v}{9v^2} - \frac{5v^2 - 7v - 9}{150v^2} - \frac{2704 - 104v + v^2}{60v^2(25v+17)} = \\ &= \frac{(200v^3 - 300v^2 + 100v)(25v+17) - (30v^2 - 42v - 54)(25v+17) - (40560 - 1560v + 15v^2)}{900v^2(25v+17)} = \\ &= \frac{5000v^4 - 4850v^3 + 20425v^2 + 20624v - 39642}{900v^2(25v+17)}. \end{aligned}$$

Dann führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

$$\left( \frac{100\,000}{\rho''} \right)^2 \frac{Q_{xx}}{v^2} = \frac{1}{g_s}, \quad \dots \dots (54)$$

hierbei ist

$$\left( \frac{100\,000}{\rho''} \right)^2 = 0,23504. \quad \dots \dots (55)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_s} &= \left( \frac{100\,000}{\rho''} \right)^2 \frac{5000v^4 - 4850v^3 + 20425v^2 + 20624v - 39642}{22\,500v^3 + 15\,300v^2} = \\ &= \frac{0,05223v^2 - 0,05068v + 0,21337 + 0,21544v^{-1} - 0,41412v^{-2}}{v + 0,68} \end{aligned}$$

oder endgültig

$$\frac{1}{g_s} = 0,05223v - \frac{0,08620v - 0,2134 - 0,2154v^{-1} + 0,4141v^{-2}}{v + 0,68}. \quad \dots \dots (56)$$



Ebenso, unter Benutzung der Bezeichnung

$$\frac{1}{g_a} = \frac{Q_{yy}}{v^2}, \quad \dots \quad (57)$$

finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_a} &= \frac{2v^3 + 3v^2 + v}{3v^2} - \frac{75v^3 + 108v^2 - 58v}{125v^2} - \frac{(66v - 15)^2}{250v^2(20v - 11)} = \\ &= \frac{(500v^3 + 750v^2 + 250v)(20v - 11) - (450v^3 + 648v^2 - 348v)(20v - 11) - (13\,068v^2 - 5940v + 675)}{750v^2(20v - 11)} = \\ &= \frac{1000v^4 + 1490v^3 - 2230v^2 - 638v - 675}{15\,000v^3 - 8250v^2} = \\ &= \frac{0,06667v^4 + 0,09933v^3 - 0,14867v^2 - 0,04253v - 0,0450}{v^3 - 0,55v^2} \end{aligned}$$

oder endgültig

$$\frac{1}{g_a} = \frac{1}{15}v + \frac{0,1360v - 0,1487 - 0,0425v^{-1} - 0,0450v^{-2}}{v - 0,55} \quad \dots \quad (58)$$

Wir bringen noch eine Tabelle der Größen  $\frac{1}{g_s}$  und  $\frac{1}{g_a}$  für das Argument  $v$ .

$n$	$v$	$\frac{1}{g_s}$	$\frac{1}{g_a}$	$n$	$v$	$\frac{1}{g_s}$	$\frac{1}{g_a}$	$n$	$v$	$\frac{1}{g_s}$	$\frac{1}{g_a}$
5	3	0,151	0,298	15	8	0,365	0,658	25	13	0,614	0,996
7	4	0,187	0,378	17	9	0,414	0,727	27	14	0,664	1,06
9	5	0,228	0,450	19	10	0,463	0,795	29	15	0,715	1,13
11	6	0,272	0,521	21	11	0,513	0,862	31	16	0,766	1,20
13	7	0,318	0,590	23	12	0,563	0,929	—	—	—	—

Jetzt nehmen die Formeln (51) unter Benutzung der Bezeichnung (54) und (55) folgende Gestalt an:

$$M_s^2 = \mu^2 \left( \frac{s}{100000} \right)^2 \frac{1}{g_s}; \quad \dots \quad (59)$$

$$M_a^2 = \mu^2 \frac{1}{g_a}. \quad \dots \quad (60)$$

Es sei z. B.,  $s = 257 \text{ km} = 257\,000 \text{ m}$ ;  $\mu = \pm 0,5$ ,  $v = 10$ .

Dann ist  $\frac{1}{g_s} = 0,463$ ,  $\frac{1}{g_a} = 0,795$  und  $M_s = \pm 0,87 \text{ m}$ ,  $M_a = \pm 0,45$ .

Jetzt berücksichtigen wir die Fehler der Ausgangsdaten. Da jede geodätische Linie nach zwei Grundlinien bestimmt wird, so finden wir, wenn wir den relativen Fehler der Ausgangsseite mit  $\varepsilon$  bezeichnen

$$M_s^2 = \mu^2 \left( \frac{s}{100000} \right)^2 \frac{1}{g_s} + \frac{\varepsilon^2 s^2}{2}. \quad \dots \quad (61)$$

Was den Winkel  $\beta$  anbelangt, so wird dessen Fehler augenscheinlich bestimmt aus

$$M_\beta^2 = \mu^2 \left( 1 + \frac{1}{g_a} \right). \quad \dots \quad (62)$$

Nach der Bestimmung der mittleren quadratischen Fehler  $M_s$  und  $M_\beta$  kann man zu den Gewichten übergehen, wobei angenommen wird, daß dem Gewichtseinheitsfehler der mittlere Fehler  $\pm 1''$  des Winkels  $\beta$  und  $\pm 1 \text{ m}$  in der Länge der geodätischen Linie entspricht.

Wir wollen nun das Gewicht der Gleichung (50) ermitteln. Da nach (7)  $\mu = \delta - \delta\lambda \sin \varphi$ , so ist

$$\mu^2 = \mu_a^2 + \mu_\lambda^2 \sin^2 \varphi \text{ und } p_u = \frac{\mu^2}{\mu_a^2} = \frac{\mu^2}{\mu_a^2 + \mu_\lambda^2 \sin^2 \varphi}, \quad \dots \quad (63)$$

wobei  $p_u$  das Gewicht der Gleichung (50),  $\mu$  den Gewichtseinheitsfehler (der Richtung),  $\mu_a$  den Fehler der Azimutbestimmung und  $\mu_\lambda$  den Fehler der Längenbestimmung bedeutet. Die Fehler  $\mu_a$  und  $\mu_\lambda$  sind für jeden Punkt aus den Berichten über die astronomischen Arbeiten zu entnehmen. Es sei z. B.,

$$\mu = \pm 0,8, \quad \mu_a = \pm 0,7, \quad \mu_\lambda = \pm 0,3, \quad \varphi = 52^\circ, \quad \mu_\lambda \sin \varphi = \pm 0,24.$$

Dann ist

$$p_u = \frac{(0,8)^2}{(0,7)^2 + (0,24)^2} = 1,2.$$

## § 6. Bildung und Auflösung der Normalgleichungen

Die Bildung der Koeffizienten der Normalgleichungen erfolgt nach den allgemeinen Regeln der Methode der kleinsten Quadrate. Wenn man jedoch die Art der Fehlergleichungen berücksichtigt, so kann man bei der Bildung der Normalgleichungen einige Besonderheiten feststellen.

Beispielshalber betrachten wir die Bildung der Normalgleichungen für das in Abb. 4 dargestellte Polygonsystem.

Da wir hier nur die Besonderheiten bei der Bildung der Normalgleichungen zu beachten haben, geben wir für die Koeffizienten der Gleichungen keine Zahlenwerte an; in dem hier angeführten Schema

der Fehlergleichungen sind die Koeffizienten, die von Null abweichen, gestrichelt. Außerdem wird angenommen, daß Punkt 1 der Ausgangspunkt der Triangulationen ist, d. h. daß für ihn die geodätischen Koordinaten und das Azimut der Ausgangsseite gegeben sind; es ist also

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0.$$

Für dieses System gibt es 12 Gleichungen von der Art in (46), entsprechend der Anzahl der geodätischen Linien. Die Anzahl der Gleichungen von der Art in (47) und (48) ist doppelt so groß, also 24. Schließlich gibt es noch so viele Gleichungen (50), als Eckpunkte im Polygonsystem vorhanden sind, nämlich 9.

Insgesamt haben wir damit 45 Fehlergleichungen. Diese Gleichungen sind im folgenden Schema angegeben.

Zur Bildung der ersten drei Normalgleichungen, mit quadratischen Koeffizienten bei den auf Punkt 2 bezüglichen Unbekannten, d. h. bei  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ,  $\eta_2$ , sind offenbar nicht alle Fehlergleichungen erforderlich, sondern nur folgende:

$$w_{12}, v_{12}, v_{21}, u_2,$$

$$w_{23}, v_{23}, v_{32},$$

$$w_{25}, v_{25}, v_{52}.$$

Aus Abb. 4 ist ersichtlich, daß zur Bildung der auf Punkt 2 bezüglichen Normalgleichungen nur diejenigen Fehlergleichungen erforderlich sind, die sich auf Punkt 2 und die von diesem Punkt ausgehenden geodätischen Linien 2—1, 2—5, 2—3 beziehen.

Wenn man die auf Punkt 5 bezüglichen Normalgleichungen bildet, also diejenigen mit quadratischen Koeffizienten bei den Unbekannten  $\xi_5$ ,  $\xi_6$ ,  $\eta_5$ , so ist aus dem Schema der Fehlergleichungen ersichtlich, daß man hierzu nur folgende Fehlergleichungen braucht:

$$w_{25}, v_{25}, v_{52}, u_5,$$

$$w_{45}, v_{45}, v_{54},$$

$$w_{56}, v_{56}, v_{65},$$

$$w_{58}, v_{58}, v_{85}.$$



Schema der Fehlergleichungen

	$\zeta_2 \xi_2 \eta_2$	$\zeta_3 \xi_3 \eta_3$	$\zeta_4 \xi_4 \eta_4$	$\zeta_5 \xi_5 \eta_5$	$\zeta_6 \xi_6 \eta_6$	$\zeta_7 \xi_7 \eta_7$	$\zeta_8 \xi_8 \eta_8$	$\zeta_9 \xi_9 \eta_9$
$w_{12}$								
$w_{14}$								
$w_{23}$								
$w_{25}$								
$w_{36}$								
$w_{45}$								
$w_{47}$								
$w_{56}$								
$w_{58}$								
$w_{69}$								
$w_{78}$								
$w_{89}$								
$u_{12}$								
$u_{14}$								
$u_{21}$								
$u_{23}$								
$u_{25}$								
$u_{32}$								
$u_{36}$								
$u_{41}$								
$u_{45}$								
$u_{47}$								
$u_{52}$								
$u_{54}$								
$u_{56}$								
$u_{58}$								
$u_{63}$								
$u_{65}$								
$u_{67}$								
$u_{74}$								
$u_{78}$								
$u_{85}$								
$u_{87}$								
$u_{89}$								
$u_{96}$								
$u_{98}$								

	$\zeta_2 \xi_2 \eta_2$	$\zeta_3 \xi_3 \eta_3$	$\zeta_4 \xi_4 \eta_4$	$\zeta_5 \xi_5 \eta_5$	$\zeta_6 \xi_6 \eta_6$	$\zeta_7 \xi_7 \eta_7$	$\zeta_8 \xi_8 \eta_8$	$\zeta_9 \xi_9 \eta_9$
$u_1$								
$u_2$								
$u_3$								
$u_4$								
$u_5$								
$u_6$								
$u_7$								
$u_8$								
$u_9$								

also diejenigen, die sich auf Punkt 5 und die von denselben ausgehenden geodätischen Linien 5—2, 5—4, 5—6 und 5—8 beziehen.

Außerdem bemerken wir, daß mit solchen Koeffizienten, die sich von Null unterscheiden in die Normalgleichungen nur die Unbekannten eingehen, die sich auf benachbarte Punkte beziehen. Zum Beispiel gehen in die Normalgleichungen für Punkt 5, außer  $\zeta_5, \xi_5, \eta_5$ , noch  $\zeta_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_4, \xi_4, \eta_4, \zeta_6, \xi_6, \eta_6, \zeta_8, \xi_8, \eta_8$  ein. Die Koeffizienten bei den übrigen Unbekannten sind gleich Null. Dieses ist unmittelbar in der Struktur der Fehlergleichung begründet.

Sind an das in Abb. 4 dargestellte Polygonsystem noch weitere Polygone angeschlossen, so wird dadurch, zufolge des Vorhergesagten, an den Fehlergleichungen des früheren Systems nichts geändert.

Es tritt auch keinerlei Veränderung in den Normalgleichungen ein, die für das frühere System gebildet wurden.

Änderungen treten nur für die an der Grenze liegenden Punkte ein. Wenn, z. B., einige Polygone an der rechten Seite angeschlossen werden, so ändern sich dadurch die Normalgleichungen der Punkte 3, 6 und 9; die übrigen Normalgleichungen jedoch erfahren keine Veränderungen.

Hieraus ergibt sich die wichtige Schlussfolgerung, daß Fehlergleichungen und Normalgleichungen für jeden Punkt und die von ihm ausgehenden geodätischen Linien unabhängig von den übrigen Punkten des Polygonsystems aufgestellt werden können.

Das geschilderte Verfahren bietet in organisatorischer Hinsicht den sehr wesentlichen Vorteil, daß die Aufstellung der Fehler- und Normalgleichungen unter viele Berechner aufgeteilt werden kann, wodurch die ganze Arbeit sich in verhältnismäßig kurzer Zeit bewältigen läßt.

Der größeren Anschaulichkeit halber bringen wir ein Schema der Normalgleichungen, in denen die von Null abweichenden Koeffizienten durch Schraffierung bezeichnet sind.

Schema der Normalgleichungen

	$\zeta_2 \xi_2 \eta_2$	$\zeta_3 \xi_3 \eta_3$	$\zeta_4 \xi_4 \eta_4$	$\zeta_5 \xi_5 \eta_5$	$\zeta_6 \xi_6 \eta_6$	$\zeta_7 \xi_7 \eta_7$	$\zeta_8 \xi_8 \eta_8$	$\zeta_9 \xi_9 \eta_9$
$\zeta_2$								
$\xi_2$								
$\eta_2$								
$\zeta_3$								
$\xi_3$								
$\eta_3$								
$\zeta_4$								
$\xi_4$								
$\eta_4$								
$\zeta_5$								
$\xi_5$								
$\eta_5$								
$\zeta_6$								
$\xi_6$								
$\eta_6$								
$\zeta_7$								
$\xi_7$								
$\eta_7$								
$\zeta_8$								
$\xi_8$								
$\eta_8$								
$\zeta_9$								
$\xi_9$								
$\eta_9$								

Wir gehen jetzt zur Auflösung der Normalgleichungen über. Zunächst wollen wir näherungsweise feststellen, mit welcher Anzahl von Normalgleichungen wir es zu tun haben werden.

In Abb. 5 ist ein Polygonsystem dargestellt, in dem je fünf Polygone in der Meridianrichtung liegen. Dieses System kann nach rechts fortgesetzt werden, so daß die Gesamtzahl der Polygone ein Vielfaches von fünf ist. Man kann dann leicht die Anzahl der geodätischen Linien, die Zahl der Eckpunkte usw. berechnen. Alle diese Berechnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.



Anzahl d. Polygone	Geod. Linien	Eckpunkte	Fehlergleichung	Normalgleichung	Anzahl der überschüssig. Beobachtung.	Anzahl d. Polygone	Geod. Linien	Eckpunkte	Fehlergleichung	Normalgleichung	Anzahl der überschüssig. Beobachtung.
5	16	12	60	33	27	45	104	60	372	177	195
10	27	18	99	51	48	50	115	66	411	195	216
15	38	24	138	69	69	55	126	72	450	213	237
20	49	30	177	87	90	60	137	78	489	231	258
25	60	36	216	105	111	65	148	84	528	249	279
30	71	42	255	123	132	70	159	90	567	267	300
35	82	48	294	141	153	75	170	96	606	285	321
40	93	54	333	159	174	80	181	102	645	303	342

Diese Tabelle zeigt, um wieviel die Anzahl der Normalgleichungen bei Vergrößerung der Anzahl der Polygone anwächst. Wenn man jedoch in Betracht zieht, daß zur Auflösung einer Gleichung nicht mehr als fünfzehn Eliminationen erforderlich sind (was aus der Tabelle auf Seite 25 zu ersehen ist), so gestaltet sich die Auflösung der Normalgleichungen nicht so schwierig, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag.

Trotzdem empfehlen wir nicht die Auflösung des ganzen Normalgleichungssystems in einem Guß nach dem Algorithmus von Gauß, sondern wir wollen im folgenden ein stufenweises Näherungsverfahren entwickeln, das zu denselben Ergebnissen führt wie das Verfahren von Gauß.

Das stufenweise Näherungsverfahren eignet sich besonders für vermittelnde Beobachtungen, weil man sich in diesem Falle mit einer geringeren Genauigkeit begnügen kann, als bei bedingten Beobachtungen.

Das stufenweise Näherungsverfahren selbst geben wir in anderer Form an, als es durch Gauß und Seidel geschehen ist.

Wir sondern aus dem System der Gleichungen (S. 25) z. B. die ersten drei ab und lösen sie bezüglich der Unbekannten  $\xi_2, \xi_3, \eta_2$  auf.

Diese Auflösung kann nach dem gewöhnlichen Schema von Gauß erfolgen, wobei  $\xi_3, \xi_3, \eta_3, \xi_5, \xi_5, \eta_5$ , also die Koordinaten- und Orientierungsverbesserungen in den an Punkt 2 anschließenden Punkten unbestimmt bleiben. Im Ergebnis dieser Rechnung erhalten wir Gleichungen, die in allgemeiner Form folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= a_0 + a_1 \xi_3 + a_2 \xi_3 + a_3 \eta_3 + a_4 \xi_5 + a_5 \xi_5 + a_6 \eta_5 \\ \xi_3 &= b_0 + b_1 \xi_3 + b_2 \xi_3 + b_3 \eta_3 + b_4 \xi_5 + b_5 \xi_5 + b_6 \eta_5 \\ \eta_2 &= c_0 + c_1 \xi_3 + c_2 \xi_3 + c_3 \eta_3 + c_4 \xi_5 + c_5 \xi_5 + c_6 \eta_5 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

Da jeder beliebige quadratische Koeffizient  $[ii]$  seinem Modul nach größer als  $[ik]$  ist, so sind die Koeffizienten  $a, b, c$  der Unbekannten  $\xi, \eta$  im allgemeinen kleiner als 1.

Gleichungen der Art (64) können auch für die übrigen Punkte des Polygonnetzes aufgestellt werden.

In erster Annäherung setzen wir

$$\xi_2 = a_0; \quad \xi_3 = b_0; \quad \eta_2 = c_0, \quad \dots \dots \dots (65)$$

und verfahren in ähnlicher Weise auch bezüglich der übrigen Punkte.

So erhalten wir z. B. für die Punkte 3 und 5:

$$\left. \begin{aligned} \xi_3 &= a_0^{(3)}; \quad \xi_5 = b_0^{(3)}; \quad \eta_3 = c_0^{(3)} \\ \xi_5 &= a_0^{(5)}; \quad \xi_5 = b_0^{(5)}; \quad \eta_5 = c_0^{(5)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66)$$

Nach Substitution von (66) in (64) finden wir in zweiter Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= a_0 + a_1 a_0^{(3)} + a_2 b_0^{(3)} + a_3 c_0^{(3)} + a_4 a_0^{(5)} + a_5 b_0^{(5)} + a_6 c_0^{(5)} \\ \xi_3 &= b_0 + b_1 a_0^{(3)} + b_2 b_0^{(3)} + b_3 c_0^{(3)} + b_4 a_0^{(5)} + b_5 b_0^{(5)} + b_6 c_0^{(5)} \\ \eta_2 &= c_0 + c_1 a_0^{(3)} + c_2 b_0^{(3)} + c_3 c_0^{(3)} + c_4 a_0^{(5)} + c_5 b_0^{(5)} + c_6 c_0^{(5)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

Ganz auf dieselbe Weise erhalten wir die zweite Näherung auch für die anderen Punkte.

Ferner berechnen wir die dritte Näherung und fahren damit so lange fort, bis der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungen innerhalb der erforderlichen Genauigkeitsgrenzen bleibt.

Die praktische Anwendung des stufenweisen Näherungsverfahrens lehrt, daß gewöhnlich ungefähr fünf Näherungen erforderlich sind. Da hier alle Berechnungen entweder im Kopf oder mit Hilfe des Rechenschiebers erfolgen, so lassen sich die Annäherungen genügend leicht berechnen.

Kontrollberechnungen werden dabei gewöhnlich nicht gemacht, weil ein etwaiger Fehler in der folgenden Näherung berichtigt wird.

Wir vermerken hier noch einen wichtigen Umstand.

Der Einfluß irgend eines vom Punkt  $i$  genügend entfernten Punktes  $k$  kann offenbar so ausgedrückt werden:

$$\xi_i = a_1 a_2 a_3 \dots a_k \xi_k \dots \dots \dots (68)$$

Da alle Koeffizienten kleiner als 1 sind, so ist der Koeffizient bei  $\xi_k$  eine kleine Zahl, die um so kleiner ist, je weiter der Punkt  $k$  vom Punkt  $i$  entfernt ist. Dieser Umstand ist bei der Bearbeitung von Polygonnetzen von großer Bedeutung.



Abb. 6

Es möge ein bereits ausgeglichenes Polygonnetz in der Folge durch hinzugefügte Polygone erweitert sein. Dann braucht man nicht die ganze Berechnung neuzumachen, sondern man hat nur die Fehler- und Normalgleichungen zu bilden und in der Art (64) darzustellen, und alsdann die Ausgleichung fortzusetzen, wobei nur die angrenzenden Punkte veränderte Koordinaten- und Orientierungsverbesserungen erhalten.

Augenscheinlich wird durch den Anschluß neuer Polygone die Lage entfernter Punkte des ersten Systems fast garnicht verändert. Das ist ein großer Vorzug des geschilderten Verfahrens.

## § 7. Rechenbeispiel

Alle Berechnungen nach dem geschilderten Verfahren werden für sämtliche Punkte des Polygonsystems in gleicher Weise durchgeführt. Deshalb ist es zur besseren Klarlegung des Verfahrens ausreichend, an einem Beispiel aufzuzeigen, wie die Berechnung für einen Punkt geschieht.

In Abb. 6 laufen im Punkt 1 die geodätischen Linien 1—2, 1—3, 1—4 und 1—5 zusammen. Die erforderlichen Ausgangsdaten für die Berechnung der Koeffizienten der Fehlergleichungen sind folgende:

	B	L	i	k	$S_{ik}$	$\nu$	$A_{ik}$	$A_{ki}$
1.	51°56' 4"	35°52' 9"	1	2	333,5 km	11	278°44'	94°54'
2.	52°17' 26"	31° 2' 3"	1	3	331,6 ..	13	5°17'	185°40'
3.	54°54' 4"	36°20' 41"	1	4	300,4 ..	11	96° 5'	279°28'
4.	51°34' 7"	40°10' 50"	1	5	437,5 ..	16	174°12'	354°39'
5.	48° 1' 8"	36°27' 41"						

$i \cdot k$	1·2	1·3	1·4	1·5	$i \cdot k$	1·2	1·3	1·4	1·5
$\sin A_{ik}$	-0,988	+0,092	+0,994	+0,101	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ik}$	+0,09	+6,19	-0,73	-4,70
$\cos A_{ik}$	+0,152	+0,996	-0,106	-0,995	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70
$\sin A_{ki}$	+0,996	-0,099	-0,986	-0,093	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ik}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48
$\cos A_{ki}$	-0,086	-0,995	+0,165	+0,996	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ki}$	+6,17	-0,61	-6,78	-0,44
$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ik}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ki}$	+6,17	-0,61	-6,78	-0,44
$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ik}$	+0,09	+6,19	-0,73	-4,70	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70
$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ki}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70
$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ik}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48
$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ik}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ki}$	+6,17	-0,61	-6,78	-0,44
$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ik}$	+0,09	+6,19	-0,73	-4,70	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70
$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ki}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48	$\frac{10 \rho''}{s} \sin A_{ik}$	-6,12	+0,57	+6,83	+0,48
$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70	$\frac{10 \rho''}{s} \cos A_{ki}$	-0,05	-6,19	+1,13	+4,70

Die Gewichtsrechnung führen wir nach den Formeln (61), (62) und (63) aus, wobei wir annehmen  $\epsilon = 1:240\,000$ ;  $\mu_a = \pm 0'',7$ ;  $\mu_k = \pm 0'',3$ ;  $\mu = \pm 1''$ .



Die Fehlergleichungen stellen wir nach den Formeln (46), (47), (48) und (50) auf. Sie sind auf Seite 29 in einem Schema angegeben.

Wenn wir die Fehlergleichungen mit  $p$  multiplizieren, so erhalten wir die auf das Gewicht 1 bezogenen Fehlergleichungen. Dieselben sind im Schema auf Seite 29 angegeben.

Hierauf stellen wir nach den üblichen Regeln die Normalgleichungen zusammen.

Es ist zu beachten, daß in den Schemata der Fehlergleichungen die Absolutglieder fortgelassen sind, da wir die Auflösung in allgemeiner Form ausführen.

Die Normalgleichungen haben folgendes Aussehen:

- 1)  $+3,85\zeta_1 - 0,88\zeta_2 - 0,52\eta_1 - 3,31\zeta_3 - 0,28\eta_2 + 0,31\zeta_4 - 3,10\eta_3 + 3,64\zeta_5 + 0,61\eta_4 + 0,20\zeta_6 + 2,16\eta_5 + [pal] = 0.$
- 2)  $-0,88\zeta_1 + 110,66\zeta_2 + 6,85\eta_1 + 3,28\zeta_3 - 40,88\zeta_4 - 2,62\eta_2 - 0,28\zeta_5 - 13,27\zeta_6 + 2,33\eta_3 - 3,66\zeta_7 - 50,18\zeta_8 - 4,86\eta_4 - 0,22\zeta_9 - 6,29\zeta_{10} - 1,38\eta_5 + [pbl] = 0.$
- 3)  $-0,52\zeta_1 + 6,85\zeta_2 + 92,70\eta_1 + 0,50\zeta_3 - 3,63\zeta_4 - 15,42\eta_2 + 3,10\zeta_5 + 2,45\zeta_6 - 38,49\eta_3 - 0,39\zeta_7 - 3,84\zeta_8 - 19,09\eta_4 - 2,16\zeta_9 - 1,37\zeta_{10} - 20,28\eta_5 + [pcl] = 0.$

Fehlergleichungen

	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\eta_1$	$\zeta_3$	$\zeta_4$	$\eta_2$	$\zeta_5$	$\zeta_6$	$\eta_3$	$\zeta_7$	$\zeta_8$	$\eta_4$	$\zeta_9$	$\zeta_{10}$	$\eta_5$	Summe $s$	$\sqrt{p}$
$w_{12}$		-1,52	+9,88		+1,86	-9,96										-0,74	0,388
$w_{13}$		-9,96	-0,92					+9,95	+0,99							+0,06	0,361
$w_{14}$		+1,06	-9,94							-1,65	+9,86					-0,67	0,430
$w_{15}$		+9,95	-1,01										-9,96	+0,93		-0,09	0,248
$v_{12}$	-1	-6,12	-0,53		+6,17	+0,53										-0,95	0,734
$v_{13}$	-1	-0,57	-5,78					-0,61	+6,19							-0,63	0,707
$v_{14}$	-1	-6,83	+1,14							-6,78	-1,13					-0,94	0,734
$v_{15}$	-1	+0,48	+5,11										-0,44	-4,70		-0,55	0,675
$v_{21}$		-6,12	-0,94	-1	+6,17	+0,95										-0,94	0,734
$v_{31}$		+0,57	-6,19				-1	-0,61	+6,65							-0,58	0,707
$v_{41}$		-6,83	+0,73							-1	-6,78	-0,72				-0,96	0,734
$v_{51}$		+0,48	+4,70										-1	-0,44	-4,34	-0,60	0,675
$u_1$	+1		-0,41													+0,59	1,35

Auf das Gewicht 1 bezogene Fehlergleichungen

	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\eta_1$	$\zeta_3$	$\zeta_4$	$\eta_2$	$\zeta_5$	$\zeta_6$	$\eta_3$	$\zeta_7$	$\zeta_8$	$\eta_4$	$\zeta_9$	$\zeta_{10}$	$\eta_5$	$s$
$\sqrt{pw_{12}}$		-0,59	+3,83		+0,33	-3,86										-0,29
$\sqrt{pw_{13}}$		-3,60	-0,33					+3,59	+0,36							+0,02
$\sqrt{pw_{14}}$		+0,46	-4,27							-0,71	+4,24					-0,28
$\sqrt{pw_{15}}$		+2,47	-0,25										-2,47	+0,23		-0,02
$\sqrt{pv_{12}}$	-0,73	-4,49	-0,39		+4,53	+0,39										-0,69
$\sqrt{pv_{13}}$	-0,71	+0,40	-4,08					-0,43	+4,37							-0,45
$\sqrt{pv_{14}}$	-0,73	+5,01	+0,84							-4,98	-0,83					-0,69
$\sqrt{pv_{15}}$	-0,68	+0,32	+3,45										-0,30	-3,17		-0,36
$\sqrt{pv_{21}}$		-4,49	-0,69	-0,73	+4,53	+0,70										-0,68
$\sqrt{pv_{31}}$		+0,40	-4,37				-0,71	-0,43	+4,70							-0,41
$\sqrt{pv_{41}}$		+5,01	+0,54							-0,73	-4,97	-0,53				-0,68
$\sqrt{pv_{51}}$		+0,32	+3,17										-0,68	-0,30	-2,93	-0,42
$\sqrt{pu_1}$	+1,35		-0,55													+0,80

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für  $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1$  folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -0,012 [pcl] - 0,003\zeta_2 + 0,017\zeta_3 + 0,166\eta_2 - 0,034\zeta_4 - 0,036\zeta_5 + 0,424\eta_3 + \\ &\quad + 0,002\zeta_6 + 0,004\zeta_7 + 0,203\eta_4 + 0,023\zeta_8 + 0,010\zeta_9 + 0,216\eta_5, \\ \zeta_1 &= -0,010 [pbl] - 0,030\zeta_2 + 0,376\zeta_3 + 0,014\eta_2 + 0,005\zeta_4 + 0,122\zeta_5 - \\ &\quad - 0,040\eta_3 + 0,033\zeta_6 + 0,446\zeta_7 + 0,030\eta_4 + \\ &\quad + 0,001\zeta_8 + 0,056\zeta_9 - 0,005\eta_5, \\ \zeta_1 &= -0,265 [pal] - 0,008\zeta_2 + 0,948\zeta_3 + 0,099\eta_2 - 0,005\zeta_4 - 0,057\zeta_5 + 0,852\eta_3 + \\ &\quad + 0,008\zeta_6 - 0,844\zeta_7 - 0,122\eta_4 + 0,003\zeta_8 - 0,036\zeta_9 - 0,532\eta_5.\end{aligned}$$

Damit haben wir die Gleichungen in die Form (64) gebracht.

Nach Aufstellung ebensolcher Gleichungen für die anderen Punkte kann man zur stufenweisen Berechnung der Näherungswerte der unbekannten Größen übergehen.

## § 8. Genauigkeitsuntersuchung der ausgeglichenen Größen

Setzt man die berechneten Werte für die Unbekannten in die Fehlergleichungen ein, so ergeben sich die Größen  $w, v, u$ . Dann kann der mittlere quadratische Gewichtseinheitsfehler nach der Formel

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_s w^2] + [p_v v^2] + [p_u u^2]}{3D - 2p + 3}} \quad (69)$$

berechnet werden, wobei  $D$  die Anzahl der geodätischen Linien und  $p$  die Anzahl der Eckpunkte bezeichnet.

Es sei  $Q$  die Gewichtsreziproke eines beliebigen ausgeglichenen Elementes. Dann ist der entsprechende Fehler:

$$M = \mu \sqrt{Q} \quad (70)$$

Die Gewichtungskoeffizienten  $Q$  können auf folgende Art berechnet werden.

Wir nehmen an, wir hätten ein System von  $n$  Normalgleichungen der Art:

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= a_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= a_3 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= a_n\end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Nimmt man die Absolutglieder wie folgt an:

$$a_1 = 1; \quad a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0,$$

so erhält man die Gewichtungskoeffizienten:

$$Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{1n}.$$

Dann wird der Fehler, welcher der ersten Unbekannten  $x_1$  entspricht, berechnet aus:

$$M_{x_1} = \mu \sqrt{Q_{11}} \quad (72)$$

Hierzu wird bemerkt, daß eine genaue Berechnung des Fehlers keine praktische Bedeutung hat. Im allgemeinen genügt es, diesen Fehler mit sehr geringer Genauigkeit zu berechnen, etwa mit einer einzigen Wertziffer.

Dann kann man folgendes vereinfachtes Verfahren anwenden, das vollkommen zufriedenstellende Resultate liefert.

Da  $a_{ik}$  dem Modul nach kleiner als  $a_{ii}$  ist, erhalten wir nach Division der Gleichungen (71) durch deren quadratische Koeffizienten folgende Determinante  $n$ -ter Ordnung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & 1 & \varepsilon_{23} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1 & \dots & \varepsilon_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \varepsilon_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (73)$$

Die Größen  $\varepsilon$  sind kleiner als 1 und viele von ihnen gleich Null, wenn man die Normalgleichungen



Berechnet man die Determinante (73) im Wege sukzessiver Zerlegung nach Elementen der ersten Zeilen — sowohl der Determinante selbst, als auch ihrer Minoren —, so erhält man:

$$\Delta = 1 - \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{13} \varepsilon_{31} - \varepsilon_{14} \varepsilon_{41} - \dots - \varepsilon_{1n} \varepsilon_{n1} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} - \varepsilon_{24} \varepsilon_{42} - \dots - \varepsilon_{2n} \varepsilon_{n2} - \dots - \varepsilon_{n-1, n} \varepsilon_{n, n-1} \quad (74)$$

[illegible]
$$Q_{11} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \frac{1 - \sum_3^N \varepsilon_{2i} \varepsilon_{i2} - \sum_4^N \varepsilon_{3i} \varepsilon_{i3} - \dots - \varepsilon_{n-1, n} \varepsilon_{n, n-1}}{1 - \sum_2^N \varepsilon_{1i} \varepsilon_{i1} - \sum_3^N \varepsilon_{2i} \varepsilon_{i2} - \sum_4^N \varepsilon_{3i} \varepsilon_{i3} - \dots - \varepsilon_{n-1, n} \varepsilon_{n, n-1}}$$
$$Q_{11} = \frac{1}{a_{11}} \left[ 1 - \sum_2^n \varepsilon_{1i} \varepsilon_{i2} - \sum_4^n \varepsilon_{2i} \varepsilon_{i3} - \dots - \varepsilon_{n-1, n} \varepsilon_{n, n-1} \right] \cdot \left[ 1 + \sum_2^n \varepsilon_{1i} \varepsilon_{i1} + \sum_3^n \varepsilon_{2i} \varepsilon_{i2} + \sum_4^n \varepsilon_{3i} \varepsilon_{i3} + \dots + \varepsilon_{n-1, n} \varepsilon_{n, n-1} \right]$$
$$Q_{1i} = \frac{1}{a_{11}} \left[ 1 + \sum_{i=2}^{i=n} \epsilon_{1i} \epsilon_{j1} \right] \dots \dots \dots (76)$$

Als Beispiel nehmen wir das folgende Normalgleichungssystem:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	+ 3,02	+ 0,40	— 0,38	— 0,31	+ 0,03	+ 0,09	+ 0,07	— 0,01
$x_2$	+ 0,40	+ 2,59	— 0,15	— 0,19	+ 0,10	— 0,09	+ 0,17	— 0,04
$x_3$	— 0,38	— 0,15	+ 5,24	— 0,09	— 0,79	— 0,37	— 3,60	+ 1,42
$x_4$	— 0,31	— 0,19	— 0,09	+ 0,97	+ 0,38	+ 0,03	+ 0,26	— 0,39
$x_5$	+ 0,03	+ 0,10	— 0,79	+ 0,38	+ 3,99	— 2,94	— 1,31	+ 2,88
$x_6$	+ 0,09	— 0,09	— 0,37	+ 0,03	— 2,94	+ 9,44	+ 2,52	— 7,98
$x_7$	+ 0,07	+ 0,17	— 3,60	+ 0,26	— 1,31	+ 2,52	+ 5,78	— 2,98
$x_8$	— 0,01	— 0,04	+ 1,42	— 0,39	+ 2,88	— 7,98	— 2,98	+ 10,43

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_1$	+1,00	+0,13	-0,13	-0,10	+0,01	+0,03	+0,02	0,00
$x_2$	+0,15	+1,00	-0,06	-0,07	+0,04	-0,03	+0,07	-0,02
$x_3$	-0,07	-0,03	+1,00	-0,02	-0,15	-0,07	-0,69	+0,27
$x_4$	-0,32	-0,20	-0,09	+1,00	+0,39	+0,03	+0,27	-0,40
$x_5$	+0,01	+0,03	-0,20	+0,10	+1,00	-0,74	-0,33	+0,72
$x_6$	+0,01	-0,01	-0,04	0,00	-0,31	+1,00	+0,27	-0,84
$x_7$	0,00	+0,03	-0,62	+0,04	-0,23	+0,44	+1,00	-0,51
$x_8$	0,00	0,00	+0,14	-0,04	+0,28	-0,77	-0,29	+1,00

	$\frac{1}{a_{11}}$	$1 + \Sigma$	$Q$	$\sqrt{Q}$	Strenger Wert $\sqrt{Q}$		$\frac{1}{a_{11}}$	$1 + \Sigma$	$Q$	$\sqrt{Q}$	Strenger Wert $\sqrt{Q}$
$x_1$	0,33	1,1	0,4	0,6	0,6	$x_5$	0,25	1,6	0,4	0,6	0,7
$x_2$	0,39	1,0	0,4	0,6	0,6	$x_6$	0,11	2,0	0,2	0,4	0,6
$x_3$	0,19	1,5	0,3	0,5	0,7	$x_7$	0,17	1,8	0,3	0,5	0,7
$x_4$	1,03	1,1	1,1	1,1	1,1	$x_8$	0,10	2,1	0,2	0,4	0,6

Da alle diese Berechnungen mit dem Rechenschieber ausgeführt werden, so nimmt die Ableitung der Fehler nach der Formel (76) sehr wenig Zeit in Anspruch.

Die vorläufige Ausgleichung einer Triangulation, die sich auf die Ausgleichung der einzelnen Teilstücke hinsichtlich der Winkelsummen-, Basis- und Azimutbedingungen und der Laplaceschen Verbesserungen bezieht, liefert uns in ihrem Ergebnis die Längen der geodätischen Linien und die Winkel  $\beta$ ; diese Größen werden ebenso wie bei Anwendung des von Prof. F. N. Krassowski ausgearbeiteten Verfahrens der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen auch nach dem neuen Verfahren als beobachtete Größen behandelt.



Der Unterschied zwischen beiden Verfahren tritt erst im folgenden zutage, nämlich bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen, bzw. der Aufstellung der Fehlergleichungen nach der neuen Methode.

Da die Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich der Anzahl der überschüssigen Messungen ist, so kommen wir, bei Betrachtung der Tabelle auf S. 25, zu dem Schluß, daß die Anzahl der Bedingungsgleichungen annähernd um die Hälfte geringer ist als die der Fehlergleichungen.

Da die Fehlergleichungen jedoch eine sehr einfache Form haben, nimmt ihre Aufstellung aber nur ebensoviel Zeit oder sogar noch weniger Zeit in Anspruch, als die Aufstellung einer halb so großen Anzahl von Bedingungsgleichungen.

Beim Übergang zu den Normalgleichungen bemerken wir ferner, daß die Anzahl der letzteren beim Verfahren nach vermittelnden Beobachtungen geringer ist, als beim Verfahren nach bedingten Beobachtungen.

Außerdem haben die Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen eine einfachere Form, wodurch ihre Auflösung sich wesentlich einfacher gestaltet als beim Verfahren nach bedingten Beobachtungen.

Die Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen haben wichtige Eigentümlichkeiten, von denen auf Seite 27 im Zusammenhang mit der Anwendung des stufenweisen Näherungsverfahrens die Rede war; diese Eigentümlichkeiten stecken der Anwendbarkeit des stufenweisen Näherungsverfahrens weite Grenzen: erstens ermöglichen sie die gleichzeitige Bearbeitung einer so großen Anzahl von Polygonen, bei der das Verfahren mit Bedingungsgleichungen praktisch nicht mehr anwendbar ist; zweitens beschleunigen sie den ganzen Prozeß.

Noch ein Vorzug des Verfahrens nach vermittelnden Beobachtungen ist zu erwähnen. Die Formel (76) ermöglicht die näherungsweise Bestimmung der Koordinatenfehler der Eckpunkte nach der Ausgleichung des Polygonsystems. Wendet man aber das Verfahren nach bedingten Beobachtungen an, so ist das nur im Wege neuer zusätzlicher Berechnungen möglich, und zwar nach den Formeln für das Gewicht von Funktionen ausgeglichener Größen bei bedingten Beobachtungen, wobei man gezwungen ist, eine große Anzahl (200—300) von Normalgleichungen nach dem Schema von Gauß aufzulösen.

Wir wollen nun die Frage untersuchen, inwieweit sich die nach dem einen und dem anderen Verfahren erzielten Ergebnisse unterscheiden.

Diese Ergebnisse würden einander gleich sein, wenn die Bedingungen des Minimums der Korrekturen ein und dieselben wären. Aber diese Bedingungen sind verschieden.

Beim Verfahren nach vermittelnden Beobachtungen erfolgt die Auflösung der Gleichungen unter der Bedingung:

$$[p_s w^2] + [p_\beta v^2] + [p_u u^2] = \min. \quad (77)$$

Beim Verfahren nach bedingten Beobachtungen haben wir folgende Bedingung:

$$[p_s w^2] + [p_\beta v^2] + [p_\alpha \delta^2] + [p_\lambda \delta \lambda^2] = \min. \quad (78)$$

Die Bedingungen (77) und (78) unterscheiden sich also nur durch die letzten Glieder. Hierzu ist aber zu bemerken, daß in der Formel (77) die beiden ersten Glieder größer sind als das letzte Glied. Tatsächlich gelangt man angesichts der Tabelle auf Seite 25 zu dem Schluß, daß die Gleichungen (50) annähernd den sechsten Teil aller Fehlergleichungen im Polygonsystem ausmachen. Deshalb ist der Unterschied zwischen (77) und (78) verhältnismäßig gering, und die Ergebnisse der Verfahren nach vermittelnden und nach bedingten Beobachtungen dürften nicht sehr wesentlich verschieden sein.

Auf Grund aller dieser Erwägungen gelangt man zu dem Schluß, daß das Verfahren nach vermittelnden Beobachtungen in der Anwendung auf große Polygonsysteme einfacher und in der Praxis in organisatorischer Hinsicht schmiegsamer ist als das Verfahren nach bedingten Beobachtungen.

## Untersuchung über eine zweckmäßige Beobachtungslage bei der Winkelmessung in allen Kombinationen nach dem Schreiberschen Verfahren

Von Oblt. Dipl.-Ing. Beck

Gliederung:

- I. Allgemeines.
- II. Genauigkeit der Winkelmessung und Seitenrefraktion, Einfluß von Pfeilerdrehung und Instrumentalfehler.
- III. Grundsätze der Beobachtungsanlage.

### I. Allgemeines

Die Kriegsvermessung stellt bei der Schaffung eines Festpunktfeldes im wesentlichen folgende zwei Forderungen:

- a) Gleichmäßige Verhältnisse in allen Punkten des Feldes (Konformität).
- b) Anschluß der Punktfelder an die bestehende und dem Kartenmaterial zugrunde gelegte Landesvermessung.

Zu a): Unter Schaffung gleichmäßiger Verhältnisse wird verstanden: gleiche Genauigkeit in der Bestimmung aller Punkte und gleiche Orientierung für alle Netzteile. Besonders die zweite Forderung spielt für die Zuverlässigkeit der schießtechnischen Unterlagen eine wichtige Rolle.

Beispiel: In einem Raum von 50 km Frontausdehnung ist für die schwere Artillerie der Feuerauftrag meist in der Feuerzusammenfassung gegeben, d. h. Ansetzen z. T. räumlich weit getrennter Waffen auf dasselbe Ziel. Unter Berücksichtigung der auftretenden Streuungen und der Zuverlässigkeit der Bestimmung der BWE sowie ihrer Veränderung ist die Genauigkeit der Entfernung und der Seite festgelegt. Die Bestimmung der Entfernung wird meist aus der Karte, die der Seite nur aus Netzrichtungen mit genügender Genauigkeit erfolgen können. Ist ein System kleiner Dreiecke zur Schaffung des Punktfeldes benutzt worden, dann kann der mittlere Fehler jeder Punktbestimmung gleich und ausreichend genau sein (auch scheinbar für die Berechnung der Richtungsbestimmung), ohne daß diese tatsächlich ausreicht. Denn durch eine Vielzahl von Richtungsübertragungen über Dreiecke oder besonders angelegter Streckenzugsysteme tritt meist ein Schwenkungsfehler auf, der nur in bestimmten Fällen vollständig in seiner Größe erfaßt, sonst aber nur vermutet werden kann. Deshalb ist bei der Schaffung eines Festpunktfeldes fast immer die erste Forderung: Verwendung weitmaschiger Dreieckssysteme, um die Richtungsübertragungen von der ursprünglich orientierten Seite möglichst klein zu halten.

Zu b): Die Koordinaten von jedem Festpunktfeld müssen sich auf das Gitter beziehen, das der Karte für den Truppeneinsatz zugrunde gelegt ist. Bei örtlichen, also nicht mit identischen Punkten durch direkte Messungen an die Landesvermessung angeschlossenen Festpunktfeldern kann dies für jedes einzelne auf einfachste Weise mit Kartenpunkten geschehen, selbst die dadurch ungenaue Orientierung eines solchen Feldes gegenüber dem Kartengitter ist tragbar, wenn der Orientierungsfehler bekannt und wie schon oben besprochen, für alle Netzteile gleich groß ist; seine Bestimmung kann verschieden und einfach erfolgen.

Örtliche Systeme stellen immer eine Belastung dar, denn meistens wird die ursprüngliche Forderung der Erfassung nur eines kleinen Raumes durch ein Festpunktfeld von der Truppe weiter gesteigert; das örtliche Netz beginnt sich auszudehnen und wächst dann meist noch mit anderen zusammen. Die Folge: Wenn überhaupt, dann können nur die Koordinaten der Punkte eines Feldes beibehalten werden, die aller übrigen Felder müssen umgerechnet werden. Deshalb ist es immer ratsam, den Anschluß an die der Karte zugrunde gelegte Landesvermessung zu suchen.

Die unter a) und b) angestellten Betrachtungen lassen die Verwendung großer Dreiecke in folgenden Fällen notwendig erscheinen:

1. Bei Schaffung örtlicher Festpunktfelder,



2. Bei Überbrückung großer Räume (Anschluß einzelner kleiner Punktfelder an die Landesvermessung oder ihre Verbindung untereinander),
3. Bei allen Spezialaufgaben der Kriegsvermessung, vor allem bei der Schaffung neuer Kartenwerke.

Es ist selbstverständlich, daß die Verwendung großer Dreiecke, d. h. solche mit Seitenlängen über 20 km auch eine größere Genauigkeit und vor allem die Berücksichtigung der bei solchen Entfernungen durch die äußeren Verhältnisse gegebenen Schwierigkeiten durch eine entsprechende Beobachtungsanlage verlangen. Allgemein wird die Winkelmessung in Dreiecken mit durchschnittlichen Seitenlängen von über 15 km dann als Winkelmessung I. Ordnung bezeichnet, wenn die Beobachtung mit einem Instrument I. Ordnung (z. B. Wild T 3), die Zieldarstellung durch Lichtquellen und die Beobachtungsanlage nach dem Schreiberschen Verfahren (Winkelmessung in allen Kombinationen) erfolgt. Diese Beobachtungstechnik und Methode ist erforderlich, um den Widerspruch im Dreiecksschluß 3" zu halten. Wie die nachstehenden Untersuchungen zeigen werden, ist eine große Gruppe von Fehlereinflüssen (vor allem die der Refraktion) systematischer Art, die Widersprüche der Messungen tragen also keinen zufälligen Charakter mehr, die Genauigkeit der Messung oder die Wahrscheinlichkeit des plausibelsten Wertes eines Winkels steht nur noch in einem bedingten Zusammenhang mit der Anzahl der Beobachtungen. Um den wahrscheinlichsten Wert eines Winkels zu erhalten, genügt nicht mehr, allein die Zahl der Beobachtungen auf die Leistungsfähigkeit des Instrumentes, also auf ihre Genauigkeit abzustimmen, sondern es wird als wesentlich erscheinen, die Beobachtungen in sich und zeitlich gleichmäßig und über mindestens 2 Tage zu verteilen. Die durchschnittliche tägliche Dauer der Beobachtung ist bestimmt durch die atmosphärischen Verhältnisse und beträgt ungefähr 2 Stunden am Nachmittag.

Die folgenden Untersuchungen sind mit Beobachtungen durchgeführt, die im vergangenen Jahr bei Heeres-Vermessungsarbeiten entstanden sind; sie sollen dazu dienen, die wesentlichen Fehler in ihrer Größe und Art einschätzen zu lernen, mitzuhelfen, den Vorteil der Dreiecke und Beobachtungen I. Ordnung zu erkennen und sie praktisch in einen Rahmen einzufügen, der militärisch allgemein tragbar und durchführbar ist.

## II. Genauigkeit der Winkelmessung und Einfluß von Pfeilerdrehung, Refraktion und Instrumentalfehler

### 1. Vorbetrachtung:

Als Voraussetzungen für die Winkelmessung in großen Dreiecken gelten:

- a) Leistungsfähige Instrumente,
- b) Beobachtungsstände mit großer Standfestigkeit,
- c) Darstellung der Ziele durch künstliche oder natürliche punktförmige Lichtquellen.

**Zu a):** Die Leistungsfähigkeit eines Instrumentes setzt sich im wesentlichen zusammen aus der Leistungsfähigkeit seiner Optik und seines Teilkreises. Der moderne Instrumentenbau versucht dabei bei größter Leistungsfähigkeit auch die Größe des Instrumentes möglichst klein zu halten. Für die Kriegsvermessung kommt bei der Winkelmessung für große Dreiecke bis jetzt fast nur der Winkeltheodolit (T 3) wegen seiner Vorteile, die in seinem Gewicht, seiner Handlichkeit, Handhabung und Unempfindlichkeit bestehen, in Frage.

**Zu b):** Die Einrichtung von Beobachtungsständen erfordert wegen der langen Sichten eine sorgfältige Erkundung, wegen der Genauigkeit der Winkelmessung eine erhöhte Standfestigkeit. Beides verzögert zunächst das Vorwärtstreiben der Arbeiten, wird aber fast immer belohnt durch die Schnelligkeit der nachfolgenden Beobachtung, der Zuverlässigkeit der Ergebnisse und der Erfassung großer Räume, die in vielen Fällen die Aufgabe aller Aufgaben darstellt.

**Zu c):** Die Darstellung des Zieles durch eine punktförmige Lichtquelle geschieht mit verschiedenen Geräten, die mehr oder weniger vorteilhaft für den Kriegseinsatz sind. Die Schaffung eines Einheitsgerätes für die Truppenvermessung ist notwendig.

### 2. Genauigkeit der Winkelmessung und Pfeilerdrehung:

Die Untersuchung über die Genauigkeit der Winkelmessung wurde mit den Beobachtungen von 6 Stationen I, 6, davon 2 zu einem Basisvergrößerungsnetz, 2 zu diesem und dem Hauptnetz und 2 nur zum Hauptnetz gehörend durchgeführt.

Für die Messung stand ein Askania-Instrument mit photographischer Ablesevorrichtung zur Verfügung, die Beobachtungen wurden auf Holzständen von 8—20 m Höhe durchgeführt, mittlere Seitenlänge der Dreiecke 25 km, die Witterungsverhältnisse waren wechselnd aber nicht ungünstig. Sämtliche Beobachtungen sollten zunächst dazu dienen, den mittleren Fehler einer einmaligen Richtungsbeobachtung oder einer einmaligen Einstellung des Zieles zu ermitteln. Da das Ziel durch einen Lichtpunkt dargestellt ist, der während der Beobachtung sich meist in Bewegung (Schwingung) befindet und sich außerdem in der Abbildungsschärfe unterscheidet, wurden die verschiedenen Erscheinungsformen der Lichtpunkte in 5 Gruppen eingeteilt:

Gruppe 1: Lichtpunkt erscheint völlig ruhig und besitzt einen scharfen Kern.

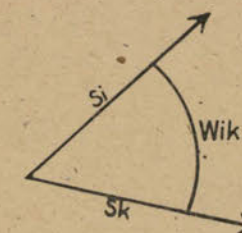
„ 2: Lichtpunkt in schwacher Bewegung mit scharfem Kern.

„ 3: Lichtpunkt in starker Bewegung (Schwingung mit großer Amplitude und z. T. unregelmäßig), scharfer Kern.

„ 4: Lichtpunkt in starker Bewegung mit aufgelöstem Kern.

„ 5: Licht mit starker Bewegung und stark aufgelöstem Kern, kaum mehr meßbar.

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden folgende mathematischen Beziehungen abgeleitet:



$$\left. \begin{aligned} (A_i') + v_i' &= A_i' = S_i + O_i + R_i' + T_i \\ (A_k') + v_k' &= A_k' = S_k + O_i + R_k' + T_k + D_k' \\ (A_k'') + v_k'' &= A_k'' = S_k + O_i + R_k'' + T_k + D_k'' \\ (A_i'') + v_i'' &= A_i'' = S_i + O_i + R_i'' + T_i + D_i'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

darin bedeuten:

$(A_i')$ ;  $(A_k')$  bzw.  $(A_i'')$ ;  $(A_k'')$  die Ablesungen für die Einstellung der Ziele J und K im Hin- bzw. Rückgang

$S_i$  und  $S_k$  die endgültigen Richtungen

$O_i$  die Orientierung

$R_i'$ ,  $R_k'$  und  $R_i''$ ,  $R_k''$  die Refraktion,  $T_i$  und  $T_k$  die Teilkreisfehler

$D_k'$ ,  $D_k''$  und  $D_i''$  die Pfeilerdrehung.

Aus (1) werden folgende Beobachtungsdifferenzen gebildet:

$$\left. \begin{aligned} (A_k') - (A_k'') + v_k' - v_k'' &= R_k' - R_k'' + D_k' - D_k'' \\ d_k = v_k' - v_k'' = \varepsilon_k' - \varepsilon_k'' &= R_k' - R_k'' + D_k' - D_k'' - [(A_k') - (A_k'')] \\ d_i = v_i' - v_i'' = \varepsilon_i' - \varepsilon_i'' &= R_i' - R_i'' - D_i'' + (A_i') - (A_i'') \\ (d_k) &= (A_k'') - (A_k') \\ (d_i) &= (A_i'') - (A_i') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

setzt man in (2)  $R_k' = R_k''$ ,  $R_i' - R_i'' = -\Delta R_i$  und  $D_k' = D_k''$

(wegen der unmittelbar aufeinander folgenden Beobachtungen trifft diese Annahme in den meisten Fällen zu), dann geht (2) über in:

$$\left. \begin{aligned} d_k &= (d_k) = (A_k'') - (A_k') \\ d_i &= (d_i) - \Delta R_i - D_i'' = (d_i) - \Delta R_i - D_{ik}' - D_{ik}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

statt  $D_k'$ ,  $D_k''$  und  $D_i''$  sind in (3) gesetzt

$$\left. \begin{aligned} D_k' &= D_{ik}' ; D_i'' = D_{ik}' + D_{ik}'' \\ D_k'' &= D_k' \\ d_{ik} &= d_k - d_i = (d_k) - (d_i) + \Delta R_i + D_{ik}' + D_{ik}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3a)$$

aus den Differenzen  $(d_k)$ ,  $(d_i)$  und  $(d_{ik})$  lassen sich die mittleren Fehler  $m_k$ ,  $m_i$  und  $m_{ik}$  berechnen. Die Größen  $\Delta R_i$  sowie  $D_{ik}'$  bzw.  $D_{ik}''$  lassen sich annähernd bestimmen und nach ihrem Charakter beurteilen.

$$\left. \begin{aligned} \text{Aus (3) folgt: } d_k &= (d_k) \\ d_i &= (d_i) - \Delta R_i - (D_{ik}' + D_{ik}'') = (d_i) - x \\ d_{ik} &= (d_{ik}) + \Delta R_i + (D_{ik}' + D_{ik}'') = (d_{ik}) + x \\ x &= \Delta R_i + D_{ik}' + D_{ik}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$



Der Ausdruck für  $x$  umfaßt also den Einfluß der Pfeilerdrehung und der Änderung der Refraktion für die Richtung während der Messung eines Winkels im Hin- und Rückgang.

Bei einer genügenden Anzahl von gleichgenauen Beobachtungen kann  $d_i = d_k$  gesetzt werden und aus (4) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{[(d_k)] - [(d_i)]}{n} = \frac{[(d_{ik})]}{n} \\ x'' &= \frac{[(d_k)] - [(d_i)]}{n} \\ x''' &= \frac{[(d_k) - (d_i)]}{n} = \frac{[(d_{ik})]}{n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

außerdem für den mittleren Fehler einer einmaligen Winkelmessung (Halbsatz) und einer einmaligen Richtungsbeobachtung.

$$\left. \begin{aligned} m_k^2 &= \frac{[(d_k)(d_k)]}{n} ; & m_k'^2 &= \frac{[(d_k)(d_k)]}{2n} = \frac{m_k^2}{2} \\ m_i^2 &= \frac{[(d_i)(d_i)]}{n} ; & m_i'^2 &= \frac{m_i^2}{2} \\ m_{ik}^2 &= \frac{[(d_{ik})(d_{ik})]}{2n} ; & m_{ik}'^2 &= \frac{m_{ik}^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

durch Vergleich der verschiedenen Werte für  $x'$ ,  $x''$ ,  $x'''$ ,  $m_k$ ,  $m_i$  und  $m_{ik}$  lassen sich Kriterien für die Größe und den Charakter von  $x$  ableiten.

#### 1. Fall: $x$ konstant:

Dann  $x' \approx x''$ ;  $m_k < m_i$ ,  $m_{ik} \approx m_k$  außerdem kann die Größe von  $x$  noch aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} (d_i) &= d_i + x \\ [(d_i)^2] &= [d_i^2] + 2x[d_i] + nx^2 = [(d_k)^2] + 2x[(d_k)] + nx^2 \\ x^{IV} &= \frac{[(d_k)] \pm \sqrt{[(d_k)]^2 - n^2(m_k^2 - m_i^2)}}{n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

und  $(d_{ik}) = (d_k) - (d_i) = \varepsilon_k' - \varepsilon_k'' - (\varepsilon_i' - \varepsilon_i'') + x$

$$m_{ik}^2 = \frac{[(d_{ik})^2]}{2n} = \left( [\varepsilon_k''^2] + [\varepsilon_k'^2] + [\varepsilon_i''^2] + [\varepsilon_i'^2] + [\varepsilon_k' \varepsilon_k''] + [\varepsilon_i' \varepsilon_i''] + 2x(-[\varepsilon_k'] + [\varepsilon_i'] + [\varepsilon_k''] - [\varepsilon_i'']) + x^2 \right) \frac{1}{2n}$$

die Glieder  $\frac{[\varepsilon_k' \varepsilon_k'']}{n}$  und  $\frac{[\varepsilon_i' \varepsilon_i'']}{n}$  werden bei einer ausreichenden Zahl von Beobachtungen gleich Null.

$$m_{ik}^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{2n} + 2x \frac{[(d_{ik})]}{2n} + \frac{x^2}{2n} ; \quad m_k^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

wenn  $x$  klein, dann

$$x = \frac{(2m_{ik}^2 - m_k^2) \cdot n}{2[(d_{ik})]} \dots \dots \dots (8)$$

#### 2. Fall: $x$ regelmäßig:

Je nach Art dieser Regelmäßigkeit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(d_{ik})]}{n} = 0 \quad \text{oder} \quad = n$$

$x''$  gibt den durchschnittlichen Wert von  $x$ ; außerdem ist

$$m_i > m_k ; \quad m_{ik} \approx m_k$$

#### 3. Fall: $x$ unregelmäßig:

$x$  ist in seiner Absolutgröße nicht mehr zu erfassen.

Bei allen Untersuchungen wird vorausgesetzt:

1. daß eine genügende Anzahl von Fehlergleichungen vorliegt;
2. die Beobachtungen die Voraussetzungen des Gaußschen Fehlergesetzes erfüllen.

Zusammenstellung 1.

Lichtgüte		1	2	3	4	5
Punkt	$m_k'$	$\pm 0'',465$	$\pm 0'',450$	$\pm 0'',351$	—	—
	Anzahl der Sätze	64	11	7		
$M_o$	$m_k'$	—	$\pm 0'',308$	$\pm 0'',541$	$\pm 0'',775$	$\pm 0'',708$
	Anzahl der Sätze		5	26	7	3
$J$	Anzahl der Sätze	$\pm 0'',564$	$\pm 0'',516$	$\pm 0'',520$	$\pm 1'',091$	$\pm 0'',777$
	Anzahl der Sätze	9	22	19	2	1
$M$	Anzahl der Sätze	$\pm 0'',511$	$\pm 0'',574$	$\pm 0'',492$	$\pm 0'',242$	$\pm 0'',800$
	Anzahl der Sätze	3	9	20	5	2
$N$	Anzahl der Sätze	—	$\pm 1'',059$	$\pm 0'',417$	—	$\pm 0'',655$
	Anzahl der Sätze		1	22		7
$S$	Anzahl der Sätze	$\pm 0'',673$	$\pm 0'',925$	$\pm 0'',437$	$\pm 0'',080$	
	Anzahl der Sätze	21	14	9	1	
Für sämtliche Stationen		$\pm 0'',526$	$\pm 0'',631$	$\pm 0'',541$	—	—
		97	62	103		

#### Ergebnis der Zusammenstellung:

1. Die Beobachtungen bei Lichtgüte 1—3 sind ungefähr gleich genau, d. h. bei scharf abgebildeten Lichtpunkten erfolgt die Einstellung bei ruhigem und in Bewegung befindlichen Licht gleich genau.
2. Bei Lichtgüte 4 und 5 ist die Beobachtung äußerst unzuverlässig. Das Gewicht einer einmaligen Beobachtung (Richtungsmessung) ist ungefähr 1/3 desjenigen einer Beobachtung bei Lichtgüte 1—3, d. h. bei aufgelösten Lichtpunkten muß die Anzahl der Beobachtungen verdreifacht werden.

Zusammenstellung 2.

Station	$S_o$	$M_o$	$M$	$J$	$N$	$S$
$x'$	$+0'',10$	$-0'',13$	$-0'',19$	$+0'',17$	$+0'',21$	$+0'',03$
$x''$	$(-0'',15)$	$(-0'',10)$	$(-0'',14)$	$(-0'',10)$	$(-0'',21)$	$(-0'',03)$
$m_k$	$\pm 0'',60$	$\pm 0'',71$	$\pm 0'',75$	$\pm 0'',73$	$\pm 0'',66$	$\pm 0'',84$
$m_i$	$\pm 0'',80$	$\pm 0'',80$	$\pm 0'',92$	$\pm 0'',85$	$\pm 1'',04$	$\pm 0'',83$
$m_{ik}$	$\pm 0'',69$	$\pm 0'',72$	$\pm 0'',87$	$\pm 0'',73$	$\pm 0'',71$	$\pm 0'',88$
Sätze	82	27	29	49	29	41
Beob. Tage	3	2	3	2	2	2
Holzpfeiler Höhe	9m	18m	geb.	20m	17m	12m



# Anmerkung:

1. Alle Beobachtungen bei Lichtgüte 4 und 5 sind wegen ihrer Unzuverlässigkeit weggelassen.
2. In den Reihen der  $d_i$  und  $d_k$  treten vereinzelt Größen auf, die die zu erwartenden Maximalgrößen überschreiten, dies ist besonders bei Punkt N der Fall. Auf N herrschten ungünstige Windverhältnisse.

# Ergebnis der Zusammenstellung:

1. Die Pfeilerdrehung bei Holzbauten ist so gering, daß ihr Einfluß auf das Messungsergebnis unberücksichtigt bleiben kann.
2. Der Einfluß der Pfeilerdrehung ist, wie zu erwarten war, unregelmäßiger Art.  
(In dem Ausdruck für  $x$  s. Gl. (4) ist angenommen, daß  $\Delta R_i$  unberücksichtigt bleiben kann.)

# Seiten-Refraktion:

Die Refraktion, d. h. die Brechkurve des Lichtstrahles im Raum ist im wesentlichen vom Temperatur-, Luftdruck- und Feuchtigkeitsgefälle abhängig. Von der Brechkurve des Lichtstrahles interessiert bei der Horizontalwinkelmessung lediglich ihre Abbildung in die Grundrißebene, die Seitenrefraktion.

Die Seitenrefraktion ist also abhängig von meteorologischen Verhältnissen und wird sich mit ihnen ändern; d. h. bei einer Untersuchung über das Auftreten von Seitenrefraktion bei der Winkelmessung I. O. wäre folgendes zu klären:

1. Die Häufigkeit langperiodischer (mehrtäglicher) Veränderungen der Refraktion.
2. Die Häufigkeit kurzperiodischer (täglicher) Veränderungen der Refraktion.
3. Der zu erwartende Maximalfehler.

Ein zuverlässiges Ergebnis der Untersuchung der zur Verfügung stehenden Messungen von 6 Stationen kann nicht erwartet werden. Es wird aber möglich sein, die Art und GröÙe des Auftretens der Seitenrefraktion in diesen wenigen Fällen aufzuweisen und dabei schon bestimmte Vermutungen über alle wahrscheinlich auftretenden Erscheinungsformen der Refraktion anzustellen.

# 1. Beispiel:

Für diese Untersuchungen eignen sich am besten Winkel, die mehrmals hintereinander in ausreichender Zahl gemessen wurden, also Winkel in Basisvergrößerungsnetzen und Messungen, die möglichst frei von anderen Fehlern, besonders Teilkreisfehlern, sind. In dem hier vorliegenden Basisvergrößerungsnetz wurde für einen der Winkel nach der Gewichtsvorausberechnung die Beobachtungszahl mit 60 errechnet. Die Beobachtungsanlage wurde so getroffen, daß die Messungsergebnisse zu einer Teilkreisuntersuchung verwendet werden konnten, um so die für die Untersuchung des Auftretens der Seitenrefraktion benutzten Messungen vorher von den regelmässigen Teilkreisfehlern zu befreien.

Der Versuch wurde auf einem Holzpfeiler von 9 m Höhe durchgeführt, wegen des mittleren Beobachtungsfehlers und vor allem wegen allen unregelmässigen Fehlern, die sich aus der Beobachtungseinrichtung (Holzpfeiler) ergaben, war kein zufriedenstellender Erfolg zu erwarten. Das Ergebnis des Versuches wird nachfolgend zusammengestellt, um zu zeigen, welche Genauigkeit mühelos auch bei schneller Beobachtung bei der Winkelmessung I. O. zu erreichen ist.

- a) Beobachtungsanlage: 1. Reihe: Kreislagen, 3°, 9°, 15°, 21° . . . . . Anzahl der Beobachtungen 30;  
2. Reihe: Kreislagen, 0°, 6°, 12° . . . . . Anzahl der Beobachtungen 30.

Die Beobachtungen wurden gleichmäßig am 1. und 2. Tag auf Reihe 1, am 2. und 3. Tag auf Reihe 2 verteilt. Wegen der wahrscheinlich auftretenden Fehler wurden lange Reihen im Gegensatz zu den sonst bei Teilkreisuntersuchungen verwendeten kurzen Reihen gewählt, um für den Winkel einen möglichst zuverlässigen Wert zu erhalten.

Es ergab sich für die 1. Reihe ein Sekundenwert von 47",890, für die 2. Reihe von 47",950.

Der regelmäßige Teilkreisfehler ergibt sich als Funktion von  $\varphi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in einer Fourier-Reihe dargestellt wie folgt:

$$\Delta\varphi = a \cdot \sin(2\varphi + A) + b \cdot \sin(4\varphi + B) + c \cdot \sin(6\varphi + C)$$

Die Ausgleichung nach dem Heuvelinkschen Verfahren ergab:

Reihe	[h - $\alpha$ ] ×					
	sin 2 $\varphi$	cos 2 $\varphi$	sin 4 $\varphi$	cos 4 $\varphi$	sin 6 $\varphi$	cos 6 $\varphi$
1	-2,9809	-3,0435	-1,5289	+4,2651	-3,7862	+2,8988
2	-1,7750	-0,0327	+5,2955	+6,1600	-3,2852	+7,2332
$\Sigma$	-4,7559	-3,0762	+3,7666	+10,4251	-7,0714	+10,1320
$\Sigma^2$	22,6182	12,0840	14,1873	108,6827	50,0041	102,6566

mit  $n=60$

$$x_1 = -0,1025 \quad y_1 = +0,3475 \quad Z_1 = +0,3377$$

$$x_2 = -0,1585 \quad y_2 = +0,1255 \quad Z_2 = -0,2357$$

$$3 + A = 122^\circ 54' \quad 3 = 30^\circ 31' \quad A = 92^\circ 23'$$

$$2 \cdot 3 + B = 160^\circ 08' \quad B = 99^\circ 06'$$

$$3 \cdot 3 + C = 214^\circ 55' \quad C = 123^\circ 22'$$

$$a = -0'',193 \quad \Delta\varphi = -0'',193 \sin(2\varphi + 92^\circ 23')$$

$$b = +0'',212 \quad +0'',212 \sin(4\varphi + 99^\circ 06')$$

$$c = +0'',206 \quad +0'',206 \sin(6\varphi + 123^\circ 22')$$

Genauigkeitsberechnungen:

$$M^2 = \frac{[(h - \alpha)]^2}{58} = 1,0214; \quad M = \pm 1'',01$$

$$M'^2 = \frac{[v' v']}{56} = 1,0372; \quad M' = \pm 1'',02$$

$$M''^2 = \frac{[v'' v'']}{54} = 0,9998; \quad M'' = \pm 0'',98$$

$$M'''^2 = \frac{[v''' v''']}{52} = 0,9404; \quad M''' = \pm 0'',97$$

mittlerer Fehler einer einmal gemessenen Richtung:

$$m_{ik}^2 = \frac{[(d_{ik}')^2]}{4n} = \frac{1}{4} \left( \frac{[(d_{ik})^2]}{n} - \frac{[(d_{ik})]^2}{n} \right) = \frac{1}{4} (0,9507) = 0,2377$$

$$m_{ik}' = \pm 0'',49$$

$$M^2 = m_{ik}^2 + 2\tau^2; \quad \tau^2 = \frac{M^2 - m_{ik}^2}{2} = \frac{0,7837}{2} = 0,3918$$

$$\tau = \pm 0'',62$$

Der mittlere totale Teilungsfehler ist  $\tau = \pm 0'',62$ . Durch Vergleich von  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  und  $M'''$  ergibt sich, daß die Verbesserungen der Beobachtungen so groß und unregelmäßig gegenüber den regelmässigen Teilkreisfehlern sind, daß die für  $\Delta\varphi$  aufgestellte Funktion unzuverlässig ist und willkürlichen Charakter trägt.

Auf dem Punkt S des Basisvergrößerungsnetzes wurde an 2 verschiedenen Tagen ein Winkel in denselben Kreislagen 12mal hintereinander gemessen.



### Zusammenstellung 3. $\angle (1 \cdot 2) = 43^\circ 11'$

Messung: 1. Tag, Beobachtungen nach ihrer Reihenfolge.

Zeit. ....	15 <sup>40</sup>	45	48	50	55	56	16 <sup>00</sup>	04	07	10	15		
Kreislage. .	0°	30°	60°	90°	120°	150°	165°	135°	105°	75°	45°	15°	
Mittel d. Sätze	34,45	34,65	32,35	35,95	33,45	33,50	34,35	34,05	35,95	33,90	35,80	35,70	34,508
	+0,06	-0,14	+2,16	-1,44	+1,06	+1,01	+0,16	+0,46	-1,44	+0,61	-1,29	-1,19	
	-1,84	-0,89	-0,34	-0,94	-0,19	+1,81	+0,31	-0,29	+1,81	+1,41	+0,16	-0,99	
Mittel d. Sätze	35,00	34,05	33,50	34,10	33,35	31,35	32,85	33,45	31,30	31,75	33,00	34,15	33,158
Kreislage. .	15°	45°	75°	105°	135°	165°	30°	0°	60°	90°	120°	150°	
Zeit. ....	15 <sup>44</sup>	46	50	54	57	59	16 <sup>06</sup>	08	09	12	15	17	

Messung: 2. Tag, Beobachtungen nach ihrer Reihenfolge.

#### Ergebnis:

1. Der Unterschied der Seitenrefraktion zwischen beiden Messungstagen beträgt 1",35. (Daß Seitenrefraktion an beiden Meßtagen vorlag, konnte nach Abschluß der Messungen im Basisvergrößerungsnetz durch Zusammenstellung der Dreiecke geprüft werden, demnach brachten beide Tage je ein Maximum des Ausschlags nach der positiven und negativen Seite.)
2. Es ist wahrscheinlich, daß sich die Seitenrefraktion auch während der Beobachtung merklich geändert hat und an jedem Tag die Werte zwischen den größten Ausschlägen mit ungleicher Schnelligkeit durchlaufen würde. (Die Seitenrefraktion trat bei der Richtung zwischen den beiden Basisendpunkten auf; geringer Abstand des Lichtstrahles vom Boden.)

#### 2. Beispiel:

Dieselbe Richtung wurde am anderen Ende der Basis in Punkt N noch einmal eingemessen. Die Messung erfolgte an einem Tag mit langer Beobachtungszeit am Anfang und Ende.

### Zusammenstellung 4. $\angle (1 \cdot 2) = 68^\circ 10'$

	Messung an einem Tag												
	I. Teil						II. Teil						
Zeit	15 <sup>58</sup>	16 <sup>00</sup>	05	10	14	15 <sup>18</sup>	17 <sup>02</sup>	06	10	13	16	17 <sup>20</sup>	
Kreislage	150°	120°	90°	60°	30°	0°	165°	135°	105°	75°	45°	15°	
Satzmittel	11",20	11",90	11",95	10",90	12",95	14",45	14",00	12",65	12",25	12",70	14",15	12",40	
Differenz gegen Ges.-Mittel	+1",43	+0",73	+0",68	+1",73	-0",32	-1",82	-1",37	-0",02	+0",38	-0",07	-1",52	+0",23	Gesamt- mittel
	Mittel = 12",23						Mittel = 13",03						12",63

#### Ergebnis:

Zwischen den Mitteln der Messung im I. und II. Teil besteht ein Unterschied von 0,80". Vergleicht man die Differenz an dem einzelnen Satzmittel gegenüber dem gesamten Winkelmittel, dann zeigt der Verlauf der Beobachtung im II. Teil im Durchschnitt eine bessere Annäherung an das Gesamtmittel.

### 3. Beispiel:

Station Mo.

— Messung 1. Tag

— Messung 2. Tag

— Messung 3. Tag

#### Anmerkung:

1. Innerhalb der Tage sind die Beobachtungen nach ihrer Reihenfolge geordnet.
2. Neben der Kreislage ist für jeden Winkel noch der Zustand der beiden Lichtpunkte angegeben.
3. Die über den beob. Mitteln in [ ] stehenden Zahlen sind die ausgeglichenen Winkelwerte.
4. Der Plan enthält sämtliche Beobachtungen.

#### Ergebnis der Zusammenstellung:

Seitenrefraktion tritt auf bei Richtung 5. Die Messungen am 2. u. 3. Tag geben dieselben Ergebnisse und unterscheiden sich gegenüber den Messungen des 1. Tages.

Fernrohr-lage	I	I	I/II	II	II	Mittel
Winkel						
1-2	0° 12",0 12",2 12",10	72° 10,7 11,8 11,25	144° 13,4 11,1 12,25	108° 10,2 11,0 10,60	36° 11,6 11,4 11,50	[11,79] 11,54
1-3	7°,2 31,8 31,1 31,45	79°,2 29,5 28,9 29,20	151°,2 31,0 30,7 30,85	43°,2 29,3 29,7 29,50	115°,2 27,8 29,6 28,70	[29,77] 29,94
1-4	158°,4 48,4 52,0 50,20	50°,4 52,3 51,7 52,00	14°,4 51,2 51,3 51,25	86°,4 51,6 51,4 51,50	122°,4 51,8 51,8 51,60	[51,12] 51,31
1-5*	21°,6 22,6 23,0 22,80	93°,6 22,0 23,3 22,65	57°,6 24,1 24,1 23,85	129°,6 23,6 24,6 25,55	165°,6 24,6 24,6 25,25	[24,10] 24,02
2-3	14°,4 15,5 16,3 15,90	86°,4 18,6 16,9 17,75	158°,4 18,1 19,8 18,95	122°,4 19,1 17,3 18,20	50°,4 19,9 18,1 19,00	[17,98] 17,96
2-4	21°,6 39,0 38,0 38,50	57°,6 38,9 38,2 38,55	129°,6 38,8 38,5 38,65	165°,6 38,8 38,7 38,75	93°,6 41,6 39,6 40,50	[39,33] 38,99
2-5*	28°,8 11,8 11,8 11,80	100°,8 12,9 10,8 11,85	172°,8 12,7 14,3 13,50	136°,8 13,1 13,4 13,25	64°,8 11,3 12,3 11,80	[12,31] 12,44
3-4	28°,8 22,5 22,1 22,30	64°,8 22,0 21,4 21,70	172°,8 21,3 22,3 21,80	100°,8 21,3 22,8 22,05	136°,8 19,8 19,5 19,65	[21,35] 21,50
3-5*	0° 53,3 54,1 53,70	72° 54,6 54,0 54,30	36° 53,1 50,7 51,90	108° 54,2 55,1 54,65	144° 56,2 57,2 56,70	[54,33] 54,25
4-5*	7°,2 32,6 33,9 32,25	43°,2 34,4 33,5 33,95	115°,2 31,9 32,0 31,95	151°,2 34,3 32,7 33,50	79°,2 31,9 34,6 33,25	[32,98] 32,98

#### 4. Instrumentalfehler.

Diese Fehler können in 2 Gruppen eingeteilt werden:

a) Die unregelmäßigen Fehler wie der unregelmäßige Teilkreisfehler und alle Fehler, die aus der Handhabung des Instrumentes und den Witterungseinflüssen sich ergeben. Bei jedem Instrument derselben Bauart werden sie verschieden sein. Es ist notwendig, daß bei der Winkelbeobachtung für die I. Ordnung diese zufälligen Fehler in ihrer Maximalgröße näherungsweise bekannt sind. Schon nach kurzem Umgang mit einem Theodolit ist es im allgemeinen dem Beobachter möglich, die Eigenarten des Instrumentes kennen zu lernen und die daraus sich ergebenden Maximalfehler einigermaßen sicher zu erfassen.

b) Die regelmäßigen Fehler wie regelmäßiger Teilkreisfehler, Schleifen des Teilkreises u. s. f. Diese Fehler, besonders die wichtigste Art unter ihnen, die regelmäßigen Teilkreisfehler können in ihrer Größe nur durch eine entsprechende Instrumentenuntersuchung erfaßt, durch die Messungsmethoden aber eliminiert werden. Je genauer eine Messung und je größer die Leistungsfähigkeit des Instrumentes ist, desto mehr müssen die Messungsmethoden auf die Ausschaltung dieser regelmäßigen Fehler abgestimmt sein.

### III. Grundsätze der Beobachtungsanlage

Bevor diese Grundsätze aufgestellt, müssen die Forderungen der Kriegsvermessung bei dieser Art der Winkelmessung angegeben werden; diese sind:



- a) Schnelle Beobachtung,
- b) Messungsaufwand nur soweit dieser für die vorgeschriebene Genauigkeit unbedingt notwendig ist,
- c) Seitenlängen der Dreiecke zwischen 20 und 30 km, um Bebauung und Erkundung schnell zu erledigen,
- d) Einfaches und einheitliches Leuchtgerät,
- e) Einfache Bebauung.

Diesen Forderungen müssen diejenigen gegenübergestellt werden, die sich für die Beobachtungsanlage aus den inneren und äußeren Fehlerursachen als notwendig ergeben; diese sind:

- a) Art des Auftretens und Größe der Seitenrefraktion,
- b) Instrumentenfehler,
- c) Messungsfehler durch die Beobachtungseinrichtung, Empfindlichkeit gegenüber Temperaturschwankungen (Pfeilerdrehung) und Wind.
- d) Zustand der Lichtpunkte.

Zu a): Von allen bei der Winkelbeobachtung I. Ordnung auftretenden Fehlern ist die Seitenrefraktion wegen der Unmöglichkeit der bestimmten Voraussage ihres Auftretens, ihrer Größe und Art vor Beginn der Messung am schwersten durch eine entsprechende Beobachtungsanlage auszuschalten.

Die unter II durchgeführten Untersuchungen können nur Anhalt sein, die Zuverlässigkeit solcher Untersuchungen wird immer von ihrer Zahl und ihrer Vielseitigkeit abhängig sein.

Da die Seitenrefraktion nach Art und Größe verschieden auftritt, würde es am zweckmäßigsten sein, von allen möglichen Fällen den wahrscheinlichsten herauszugreifen, auf ihn die Beobachtungsanlage abzustimmen, die am ehesten die Ausschaltung der Seitenrefraktion, d. h. das Erfassen von symmetrischen Werten zum Nullwert gewährt; außerdem müssen aus entsprechenden Anordnungen der Messungsergebnisse Kriterien geschaffen werden, die diese Ausschaltung überprüfen.

Bei der Winkelmessung in allen Kombinationen wird jeder Winkel  $p$  mal gemessen; das Mittel aus diesen  $p$ -Messungen oder das Ergebnis der Ausgleichung soll für jeden Winkel oder für jede Richtung frei von Refraktionsfehlern sein. Von allen auftretenden Fällen wird der als am wahrscheinlichsten angenommen, bei dem die Seitenrefraktion am vorhergehenden und nachfolgenden Meßtage gleiche Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen erreicht und während eines Meßtages sich mehr oder weniger ändert.

Die Mindestzeit der Beobachtung einer Station ist damit auf 2 Tage festgelegt, wovon die 1. Hälfte am ersten, die 2. Hälfte am zweiten Tage so zu erledigen wäre, daß alle Richtungen gleichmäßig über die Messung und diese wiederum gleichmäßig über die Zeit verteilt sind.

Daraus ergeben sich folgende Grundsätze:

1. Nach allen Zielen muß während der Beobachtungszeit dauernd beobachtet werden können, dazu sind bei den in Europa im allgemeinen herrschenden klimatischen Verhältnissen Seitenlängen der Dreiecke von 20—30 km und einwandfreie Bedienung der Geräte notwendig.

2. Das Kriterium der Genauigkeit einer Messung, d. h. des wahrscheinlichsten Richtungs- bzw. Winkelwertes liegt vor allem im Dreieckschluß.

3. Die Genauigkeit einer Messung muß bei gleichbleibender Leistungsfähigkeit des Instrumentes und Standfestigkeit der Beobachtungseinrichtung immer dieselbe sein; sind daher Widersprüche vorhanden, die größer sind als nach den Fehlern anzunehmen ist, dann ist Seitenrefraktion zu vermuten.

4. Das Auftreten von Seitenrefraktion kann nur durch ihre Änderung festgestellt werden. Diese drückt sich aus:

- a) In der Streuung der Messungen desselben Winkels,
- b) In den Widersprüchen der Bedingungsgleichung,
- c) In den Widersprüchen der aus der Winkelmessung für eine Richtung abgeleiteten Wertereihe.

Tritt Seitenrefraktion auf, wird eine größere Streuung zwischen den Netzmitteln desselben Winkels nicht zu vermeiden sein; diese Streuung muß bei gleichen Voraussetzungen bei allen Winkeln auftreten, denen die Richtung mit Seitenrefraktion angehört.

Ist die Symmetrie in der Beobachtungsanlage nicht und Seitenrefraktion vorhanden, dann können in den Bedingungsgleichungen Widersprüche bis zum doppelten Wert der Seitenrefraktion auftreten; da jede der 3 Richtungen einer Bedingungsgleichung bei 2 Winkeln in dieser vorkommt, liegt im allgemeinen der Widerspruch in den beiden Winkeln, denen die durch Seitenrefraktion gestörte Richtung angehört. Die gestörte Richtung ist leicht festzustellen. Der Widerspruch in der Bedingungsgleichung drückt aus, daß entgegengesetzte Verhältnisse bei der Messung des einen gegenüber der des anderen geherrscht haben, d. h. durch eine Ergänzungsmessung bei beiden Winkeln muß versucht werden, jeweils die ungleichen Verhältnisse durch entgegengesetzte auszugleichen. Die Nachmessung erstreckt sich immer auf eine ganze Beobachtungsreihe oder einen Teil desselben Winkels, also niemals auf eine einzelne Messung. Zweckmäßig wählt man für die Nachmessung einer Beobachtungsreihe neue Kreislagen, die ebenfalls gleichmäßig über den Kreis verteilt sind.

Zu b): Von den Instrumentenfehlern ist der unregelmäßige Kreisteilungsfehler besonders zu beachten. Sind an verschiedenen Stellen des Teilkreises solche Fehler festgestellt worden und fällt mit ihnen die Kreislage zusammen, dann ist es am zweckmäßigsten, um 2—3 Einheiten des Teilkreises diesen zu verstellen.

Wesentlich ist bei vielen Instrumenten auch die Richtung, in der die Drehung des Instrumentes während der Messung erfolgt.

Zu c): Widersprüche in der Messung, die von der Beobachtungseinrichtung herrühren, sind meistens ohne Schwierigkeit vor oder während der Messung festzustellen. Die Standfestigkeit bei ungünstigen Windverhältnissen ist durch den Libellenausschlag, durch Widersprüche im Hin- und Rückgang und zwischen den einzelnen Sätzen, die Drehung — durch den Widerspruch im Hin- und Rückgang festzustellen.

Zu d): Der Schnelligkeit der Beobachtung wegen wird man bestrebt sein, auch Lichtpunkte im schlechten Zustand noch für die Messung heranzuziehen, dann mehrmalige Einstellung desselben Lichtpunktes hintereinander und Einführung des Mittels dieser Ergebnisse in die Messung als einfache Beobachtung (s. II, Zusammenstellung 1). Voraussetzung für diese Messungsmethode ist allerdings keine oder nur eine sehr geringe Pfeilerdrehung.

#### Schlußbetrachtung:

1. Die Beobachtungszeit eines Winkels im Hin- und Rückgang in derselben oder in verschiedenen Fernrohrlagen mit dem Wild  $T_3$  liegt zwischen 3 und 5 Minuten, in der Stunde 16 bis 24 Sätze. Bei einer durchschnittlichen täglichen Beobachtungszeit von  $1\frac{1}{2}$  Stunden liegt die Tagesleistung bei 30 Winkelmessungen, d. h. bei 6 Richtungen können sämtliche Messungen an 2 Tagen erledigt werden.

2. Für die Widersprüche in den Messungen und in den mit ihnen aufgestellten Bedingungen sind im Merkblatt für die Beobachtung I. O. Fehlergrenzen als Anhaltspunkte aufgestellt.



# Die Landesvermessung in Französisch-Nordafrika

Von Oblt. Dipl.-Ing. Häring, Ia/Meß bei einem Generalkommando

Die astronomischen, geodätischen und Nivellementsarbeiten in Nordafrika wurden von Beginn der Kolonialvermessung bis zum Ausbruch des zweiten Weltkrieges durch die militärische Organisation des Service Géographique — oder mindestens in seinem Auftrag — mit zentraler Leitung von Paris aus durchgeführt. Sie sollen hier im Hinblick auf ihren Arbeitsgang, die verwendeten Instrumente und die Berechnungsmethoden, zum Teil auch mit ihren Ergebnissen, betrachtet werden, soweit dies für eine eingehende Erklärung nötig erscheint. Leider ist kein zusammenfassendes Werk über diese Arbeiten vorhanden, sondern die gesamten Angaben sind über eine Unzahl von Quellen zerstreut. Dadurch treten manche Lücken und Widersprüche, besonders in den Zahlenangaben, auf. Ein Verzeichnis der durchgesehenen Literatur, die ziemlich vollzählig erfaßt sein dürfte, ist daher der Abhandlung am Schluß beigegeben.

## Inhalts-Übersicht:

- A. Geschichtlicher Rückblick.
- B. Durchführung der systematischen Landesvermessung.
  - I. Astronomisch-geodätische Arbeiten.
    - a) Astronomische Stationen.
    - b) Bestimmung astronomischer „Kleinpunkte“.
  - II. Geodätische Arbeiten.
    - a) Grundlinienmessung.
    - b) Netzmessung.
    - c) Berechnung der Triangulation.
    - d) Abbildungsgrundlagen.
  - III. Höhenmessung.
    - a) Feldarbeiten (Nivellement).
    - b) Ausgangswerte.
    - c) Berechnung des Höhennetzes.
    - d) Trigonometrische Höhenbestimmung.
  - IV. Sicherung der Festpunkte.
    - a) Festlegung der trigonometrischen Punkte.
    - b) Festlegung der Nivellementsunkte.
- C. Dienststellen.
- D. Schlußbetrachtung.
- E. Quellenverzeichnis.

## A. Geschichtlicher Rückblick und Vorläufer der geschlossenen Landesvermessung:

In Algerien, der ältesten der drei Kolonien, streckte Frankreich zum ersten Male im Jahre 1830 seine Fühler aus. Es bedurfte jedoch langer Kämpfe, besonders gegen den hartnäckig sich wehrenden Emir Abd el Kader, bis etwa 1848 die „Befriedung“ durchgeführt war. Infolge des beständigen Kleinkriegs und auch des ungesunden Klimas konnten zunächst — unter militärischem Schutz — Vermessungsarbeiten nur stückweise als Grundlage für Erkundungskarten (cartes de reconnaissance) stattfinden. Solche Arbeiten wurden hauptsächlich ausgeführt von Filhon (1830) bei Algier, Delcambe (1833) bei Bône, Boblaye (1838) bei Algier und zwischen Bône und Constantine, Neveu und Passot (1844—1847) zwischen Bône und La Calle sowie Marel (1848) zwischen Oran und Algier. Durch diese Messungen wurden drei Netze gebildet, die aber nur lose miteinander verbunden waren. Nach der endgültigen Brechung jedes nennenswerten Widerstandes setzte von 1850 ab die planmäßige Landesvermessung ein.

Bedeutend friedlicher zeigten sich die Bewohner Tunesiens. Dort waren schon vor der Besetzung umfangreiche Vermessungsarbeiten ausgeführt worden, welche die Herstellung einer Karte 1:400 000 erlaubten. Die Bearbeiter waren der Däne Falbe, der 1837—1838 ein Dreiecksnetz von 265 Punkten mit einer Grundlinie von 5000 m Länge bei Karthago bestimmte, und der Franzose Pricot de Sainte-Marie, welcher dieses Netz 1843—1849 durch etwa 100 astronomisch bestimmte Punkte nach Süden und Westen ausdehnte. Noch ehe Frankreich im Jahre 1881 das Land offiziell in Besitz nahm, war 1878 der Längenunterschied Karthago—Algier bestimmt worden.

Noch schwieriger wie in Algerien gestaltete sich die Durchdringung Marokkos. Dieses Gebiet blieb durch die unduldsame Haltung seiner Bergvölker dem Europäer bis vor wenigen Jahrzehnten verschlossen. Von 1907 ab begann aber Frankreich die ihm im Vertrag von Algieras zugestandenen Rechte der Einflußnahme in Marokko in die Tat umzusetzen. Hand in Hand mit der militärischen Eroberung des Landes (1907—1920) wurde eine flüchtige Triangulation für den Truppengebrauch betrieben. Sie bestand anfangs aus zwei Teilen: in der Osthälfte wurde die vorhandene algerische Triangulation etwa 250 km nach Westen ausgedehnt (Bearbeiter: Rieder, Noguès, Viviez, Prudhomme und Boué), im Westen ging man von einer Grundlinie bei Ber Réchid (reduzierte Länge 8662, 872 m) aus, bei der Breite und Azimut astronomisch bestimmt wurden, und gelangte stückweise unter großen Schwierigkeiten (Bearbeiter: Noirel, Bellot, Viviez, Lamotte, Cornudet und Boué) bis Taza, wo sich die beiden Teile 1914 vereinigten. Diese flüchtige Triangulation erfüllte zwar ihren ursprünglichen Zweck vollkommen, die wirtschaftliche Erschließung des Landes nach Beendigung des ersten Weltkrieges machte jedoch ihre Ersetzung durch eine nach einheitlichen Gesichtspunkten angelegte Triangulation notwendig.

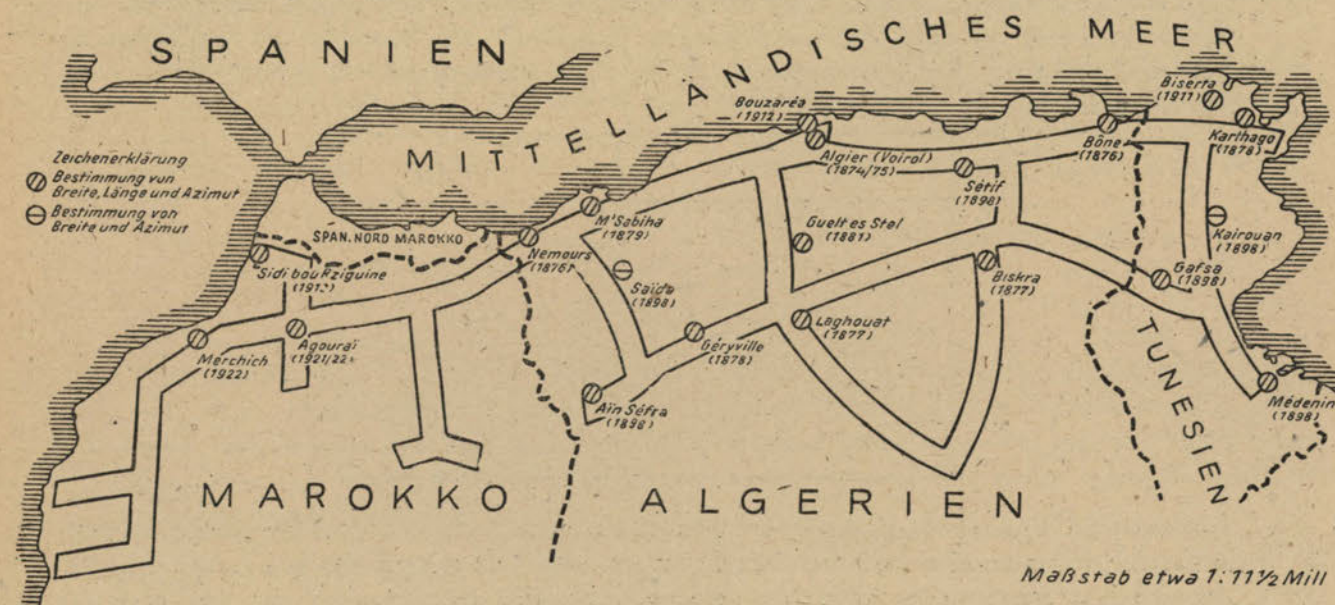
## B. Durchführung der systematischen Landesvermessung:

Entsprechend den weitaus auseinander liegenden Zeitpunkten des Beginns der nach festem Plan gelenkten Vermessung (1850 und 1921) haben auch die verschiedensten Meßverfahren, Instrumente und Berechnungsmethoden Verwendung gefunden. Um den Text möglichst übersichtlich zu halten, wurden diese für den Fachmann gleichfalls wichtigen Einzelheiten in besonderen Anlagen zusammengefaßt.

### I. Astronomisch-geodätische Arbeiten

#### a) Astronomische Stationen (dazu Anlage 1):

1. In Algerien wurde ein erster Versuch zur astronomischen Orientierung der Triangulation im Jahre 1860 unternommen, der noch kein befriedigendes Ergebnis zeitigte. Zwei weitere Versuche — Douéra (1864) und Dar Beïda (1869) —, bei denen anscheinend für die Zeitübermittlung Lichtsignale gegeben wurden, waren von mehr Erfolg gekrönt, zeigten aber auch noch ziemliche Differenzen. Erst nach Einführung der Telegraphie und der Verlegung eines Seekabels von Marseille nach Algier konnten von 1874 ab astronomische Messungen durchgeführt werden, deren Ergebnisse heute noch Gültigkeit haben.





Als grundlegende Station wurde im Jahre 1874 die Colonne Voirol bei Algier mit besonderer Sorgfalt und zahlreichen Einzelmessungen bestimmt. Auf sie folgten in kurzen Zeitabständen die Stationen von Bône und Nemours (1876), Biskra und Laghouat (1877), Géryville (1878) sowie anlässlich des von Spanien und Frankreich gemeinsam gemessenen Verbindungsvierecks Europa—Afrika die Station M'Sabiha (1879).

Um besonders die Längenbestimmungen einfacher durchführen zu können, wurden nur für Algier Zeitzeichen aus Paris benutzt, alle weiteren Stationen erhielten dann Zeitzeichen aus Algier. Neben den in Anlage 1 gemachten Angaben ist noch wissenswert:

	Längenbestimmung	Breitenbestimmung		
	Beob.-Abende zu je 4 Beob.-Serien	Beob.-Abende	Anzahl der beob. Sterne	Anzahl der errechneten Werte
Algier . . . . .	20	12	45	419
Bône . . . . .	10	5	65	226
Nemours . . . . .	10	4	45	209
Biskra . . . . .	9	5	40	80
Laghouat . . . . .	6	4	50	213
Géryville . . . . .	12	4	50	213
M'Sabiha . . . . .	15	5	45	180

Die nächsten Messungen wurden durchgeführt auf den Stationen Guelt es Stel (1881), Aïn Séfra und Sétif (1898) sowie Saïda (1898), letztere ohne Längenbestimmung. Für die Azimutbestimmung wurde grundsätzlich im Gang der astronomischen Messungen eine in kurzer Entfernung (je nach Örtlichkeit 100 m bis 10 km) und in Nord-Südrichtung gelegene Mire mitgemessen; bei Tage wurde dieses Azimut auf einen weiter entfernten Punkt (etwa 15—20 km) übertragen. Von diesen elf Stationen wurden fünf sofort, die übrigen im Laufe der Zeit an die Triangulation angeschlossen und Azimute nach Anschlußpunkten bestimmt.

Bei der Berechnung der Triangulation stellte sich heraus, daß auf der Ausgangsstation Colonne Voirol, die sich auf Tertiärboden am Rande des Sahel-Massivs befindet, starke Lotabweichungen verursacht werden. Um diese näher zu erforschen, wurden wiederholt Messungen durchgeführt. Einmal wurde im Jahre 1903 auf dem neuen Observatorium Bouzaréa, das inmitten des Massivs liegt, auf den Punkten Amirauté, Dély-Ibrahim und Chérage sowie auf Colonne Voirol Breite und Azimut bestimmt und dazu Schwere-Messungen ausgeführt. Mit Bouzaréa als Ausgangspunkt wurden die geodätischen Breiten berechnet, das Ergebnis rechtfertigte die Vermutung von Schwere-Störungen vollauf:

	$B_{astr.} - B_{geod.}$
	cc
Bouzaréa . . . . .	0,00
Voirol . . . . .	— 35,90
Amirauté . . . . .	— 16,05
Dély-Ibrahim . . . . .	— 27,60
Chérage . . . . .	— 19,30

Zur weiteren Untersuchung dieser Lotabweichungen und auch zur Erprobung geeigneter Funkgeräte für astronomische Punktbestimmungen der kolonialen topographischen Aufnahme wurden alle fünf Stationen im Jahre 1912 erneut beobachtet. Dabei wurden vor und nach den

Zeitzeichen vom Eiffelturm je zwei Beobachtungsreihen gemessen. Eine Studie von Laborde faßt die Ergebnisse der Jahre 1903 und 1912 zusammen:

	1912		ältere Messungen		Werte der Laplace'schen Gleichung <sup>1)</sup>	Lotabweichungen	
	$B_{astr.} - B_{geod.}$	$L_{astr.} - L_{geod.}$	$B_{astr.} - B_{geod.}$	$Az_{astr.} - Az_{geod.}$		in Nord-Süd- Richtung <sup>2)</sup>	in Ost-West- Richtung
	cc	cc	cc	cc	cc	cc	cc
Bouzaréa . . . . .	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0
Voirol . . . . .	— 35,90	+ 4,53	— 35,90	+ 16,22	+ 18,93	— 35	— 11
Amirauté . . . . .	— 14,16	+ 0,39	— 16,05	+ 25,16	+ 25,39	— 15	— 17
Dély-Ibrahim . . . . .	— 40,88	+ 25,68	— 27,60	— 41,52	— 25,15	— 40	+ 38
Chérage . . . . .	— 19,00	+ 33,05	— 19,30	— 5,19	+ 16,60	— 19	+ 16

Trotz dieser eindeutigen Feststellungen konnte man sich aber anscheinend nicht entschließen, von Colonne Voirol als Ausgangspunkt für die Berechnung der algerischen Triangulation abzugehen (Vergleiche Abschnitt IIc 1).

- Die astronomischen Stationen Tunesiens wurden jeweils im Zusammenhang mit den algerischen astronomischen Arbeiten beobachtet, nämlich die für die zweite Berechnung der tunesischen Triangulation als Ausgangspunkt benutzte Station Karthago (1878), sowie Médenine, Gafsa und Kairouan (1898), letztere nur mit Breitenbestimmung. Für Karthago seien vergleichshalber dieselben Angaben wie bei den zeitlich entsprechenden algerischen Stationen angeführt:

	Längenbestimmung	Breitenbestimmung		
	Beob.-Abende zu je 4 Beob.-Serien	Beob.-Abende	Anzahl der beob. Sterne	Anzahl der errechneten Werte
Karthago . . . . .	7	4	35	146

Auf dieser Station wurde später eine ebenfalls nennenswerte Lotabweichung festgestellt (Vergleiche Abschnitt IIc 2).

Die Übertragung drahtloser Zeitzeichen wurde in Nordafrika zum ersten Mal bei der Beobachtung der Station Biserta, Arsenal Sidi Abdallah, (1911) angewandt. Im Pariser Observatorium und in Biserta sollten dabei gleichzeitig durch zwei Beobachtergruppen die gebräuchlichen Instrumente (cercle méridien und astrolabe à prismes) in ihren Ergebnissen verglichen werden, wobei beide Stationen Zeitzeichen sandten. Die von den beiden Gruppen bestimmten Längenunterschiede klafften um 0,23".

- Die erste astronomische Station in Marokko wurde durch eine französisch-spanische Grenzkommision bei Sidi bou Rziguine auf dem nördlichen Endpunkt der gleichzeitig gemessenen Grundlinie im Jahre 1913 bestimmt, wobei die Beobachtungen von den beiden Gruppen getrennt durchgeführt wurden. Da die Ergebnisse nicht ganz übereinstimmten, einigte man sich auf Mittelwerte; endgültige Werte sollten von Frankreich später noch ermittelt werden. Mit der eigentlichen geodätischen „Erschließung“ wurden zwei weitere Stationen beobachtet, nämlich bei Agouraï (1921/22) auf dem nördlichen Endpunkt der gleichnamigen Grundlinie und bei Merchich (1922) im Vergrößerungsnetz der Grundlinie von Ber-Réhid. Wohl um die Versuche von Biserta fortzusetzen, wurden für die Messungen Meridiankreis und Astrolab eingesetzt. Ursprünglich war Agouraï als Ausgangspunkt für die Berechnung der Triangulation Marokkos vorgesehen. Durch die bei der Station Algier gemachten Erfahrungen vorsichtig geworden, stellte man jedoch zuvor verschiedene Versuchsberechnungen an, die ergaben, daß auf Agouraï eine Lotabweichung von etwa 44" nach Norden vorhanden war. Daher wurde dann Merchich als Ausgangspunkt übernommen.

<sup>1)</sup> Längen 1912, Azimute älter.

<sup>2)</sup> Positives Vorzeichen bedeutet eine Abweichung des Zenits nach Norden.



b) Bestimmung astronomischer „Kleinpunkte“ für die kleinmaßstäbliche topographische Aufnahme:

In dem algerischen Anteil der Wüste Sahara war es weder möglich noch erforderlich, die Triangulation als Grundgerüst der topographischen Aufnahme weiter vorzutreiben. Der SGA. ging daher von 1920 ab dazu über, die Aufnahme der Karte 1 : 500 000 mit astronomisch bestimmten Punkten zu unterbauen. Da die Versuche, die man hinsichtlich der Verwendung drahtloser Zeitzeichen auf der Station Biserta (1911) und auf den südlichsten Punkten der algerischen Triangulation in Gegend Ouargla (1919/20) angestellt hatte, zum vollen Erfolg führten, wurden nunmehr alljährlich Trupps mit Astronomen und Topographen losgeschickt, die bestimmte Kartenblätter zu bearbeiten hatten. Die einzelnen Punkte wurden in 50 bis 80 km Abstand mit Prismenastrolab bestimmt, für die Längenbestimmung wurden Zeitzeichen vom Eiffelturm oder von Bordeaux benutzt. Zur Azimutbestimmung für die Topographen wurden kleine Theodolite mitgeführt. Die Höhen wurden mit Barometern (Marke Fortin oder Tonnelot) oder Siedethermometern (Marke Naudin) festgelegt. Für die Jahre 1920 bis 1934 ist die Zahl der Bestimmungen mit 80 bis 90 Punkten anzunehmen.

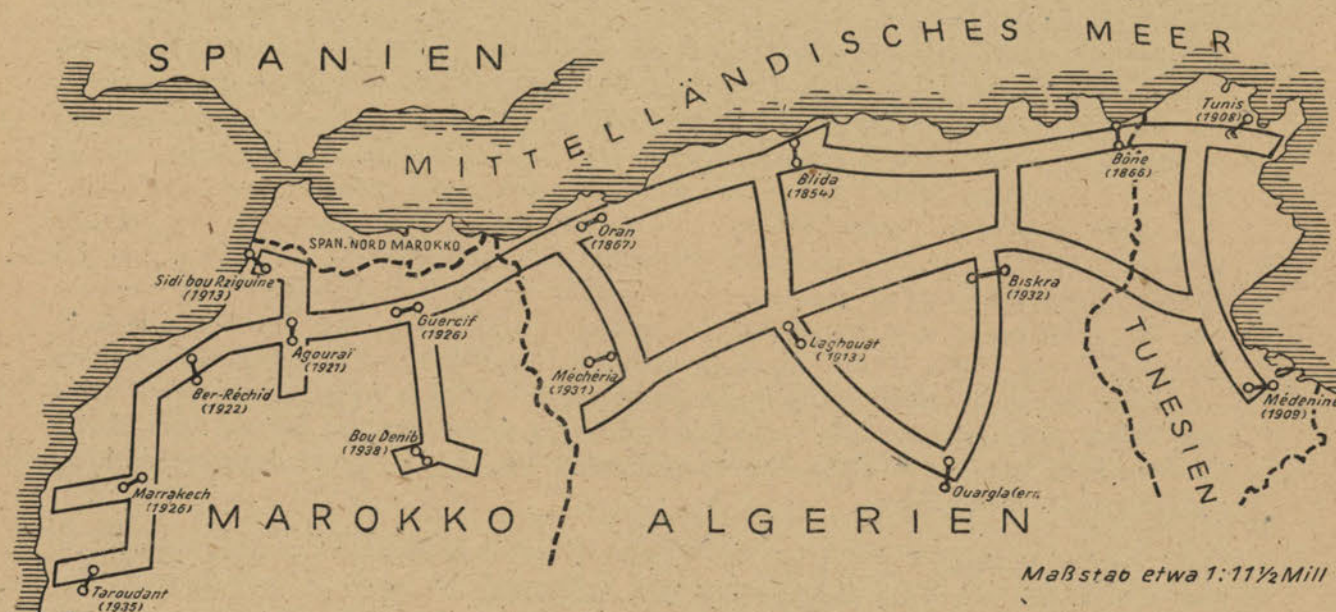
Neben diesen vom SGA. gesteuerten periodischen Arbeiten wurde algerisches Gebiet auch von Französisch-Westafrika aus durch Expeditionen gestreift, die im Auftrage interessierter Behörden und Gesellschaften die Erforschung der Sahara betrieben. Die dabei getätigten Punktbestimmungen, die in die Jahre 1898 bis 1928 fallen, sind in ihrer Qualität sehr verschieden zu bewerten. Die astronomischen Messungen wurden meist mit Zeitübertragung durch eine größere Anzahl Uhren (hauptsächlich Marke Leroy) ausgeführt. An Instrumenten standen Astrolabien oder auch Theodolite zur Verfügung. Die Anzahl dieser Punkte beläuft sich auf etwa 150, die in einem vom Service Géographique de l'Afrique Occidentale Française in Dakar veröffentlichten Katalog enthalten sind.

## II. Geodätische Arbeiten

### a) Grundlinienmessung (dazu Anlage 2):

Übereinstimmend berichten sämtliche Quellen von den gewaltigen Anstrengungen, denen besonders die an der Grundlinienmessung Beteiligten im afrikanischen Klima ausgesetzt waren. Die Messungen konnten überhaupt nur im Herbst und Frühjahr ausgeführt werden, die erzielten Ergebnisse sind mit wenigen Ausnahmen als sehr gut zu bezeichnen.

Im Gegensatz zum Beispiel: zu Spanien, wo ursprünglich nur eine große Grundlinie (etwa 14 km Länge), im übrigen eine Anzahl kleiner Grundlinien (3 bis 4 km) für Kontrollrechnungen gemessen wurden, legte der SGA. seine sämtlichen Grundlinien von Anfang an so groß an, wie es die praktischen Arbeitsbedingungen unter Einhaltung der gewünschten Genauigkeit zuließen. Beinahe alle



Grundlinien bewegen sich zwischen 10 bis 15 km Länge, zwei kommen sogar dicht an die 20-km-Grenze heran.

1. An den algerischen Grundlinien wird besonders deutlich, wie sehr die Meßgeräte und -methoden im Laufe der Zeit verbessert wurden, und wie sehr sich die Franzosen bemühten, auch unter großem Aufwand die älteren Messungen immer wieder zu verbessern, bis sie den neuen gleichwertig wurden.

Die Messung der ältesten Grundlinie, Blida (1854), mit der bimetallischen Meßstange von Porro nahm 5 Monate in Anspruch, wobei allerdings zwischendurch infolge Beschädigung des Geräts und Ermüdung der Beobachter eine Pause von 2 Monaten eintreten mußte. Diese Grundlinie wurde bis 1912 als alleinige Ausgangslänge in die Berechnungen eingeführt. Unter denselben Bedingungen wurden Bône (1866) und Oran (1867) gemessen. Infolge der starken Beanspruchung der Beobachter begnügte man sich bei allen drei Grundlinien mit einer einmaligen Messung. Um aber ein Bild über ihre Genauigkeit zu bekommen, wurde bei der Grundlinie von Oran eine Teilstrecke auch zurück gemessen, und der sich ergebende Fehler proportional auf die Grundlinien übernommen. Die Reduktion auf Meereshöhe beruhte zunächst auf trigonometrischer Höhenbestimmung. Bei der zweiten Eichung (um 1885) von Bône und Oran lagen auch genauere Höhenbestimmungen vor, und zum Zeitpunkt der nächsten Messungen waren diese drei Grundlinien an das Nivellementsnetz angeschlossen.

Nach der Einführung des Invardrahts sollten alle Grundlinien nochmals gemessen werden, man begnügte sich dann aber mit Blida und Oran (1910). Der Arbeitsgang war nunmehr folgender: Auf der Grundlinie von Blida wurde eine Teilstrecke mit Invarmeßstange gemessen, auf der anschließend die Drähte geeicht wurden. Dabei ergab sich jedoch für die Meßstangenmessung ein systematischer Fehler infolge des gleichbleibenden starken Gefälls der Teilstrecke (1,8%), der in die Eichung der Drähte übernommen wurde, und die Länge der Drähte änderte sich ebenfalls im Laufe der Messung. Daher wurde diese Grundlinie 1912 zum dritten Male, und zwar nur mit Meßstange, gemessen und im Anschluß daran die Grundlinie von Laghouat (1913) bestimmt. Für Oran (1910) liegen keine Untersuchungen vor; ihre ermittelte reduzierte Länge, die ebenfalls auf der Eichstrecke von Blida (1910) beruht, ist infolgedessen zumindest zweifelhaft.

Im Jahre 1920 wurde bei Ouargla eine Grundlinie erkundet, deren Messung jedoch unterblieb. Dagegen wurden nach modernen Gesichtspunkten die Grundlinien von Méchéria (1931) und Biskra (1932) bestimmt. Der großen Ausdehnung wegen (beinahe 20 km) wurden diese beiden in zwei Teile zerlegt. Heute sind sämtliche Grundlinien an das Feinnivellementsnetz angeschlossen.

2. Die tunesische Triangulation war ursprünglich nur ein Teil der algerischen. Daher wurden hier Grundlinien erst gemessen, als geplant wurde, diesen Teil unabhängig zu berechnen. Entsprechend der geringeren Ausdehnung dieses Gebietes wurden nur zwei Grundlinien, Tunis (1908) durch Meßstangen-, und Médenine (1909) durch Drahtmessung bestimmt. Bei letzterer war die Genauigkeit verhältnismäßig gering, was auf den starken Wind zurückgeführt wurde, der in dieser Gegend einen großen Teil des Winters über herrscht.

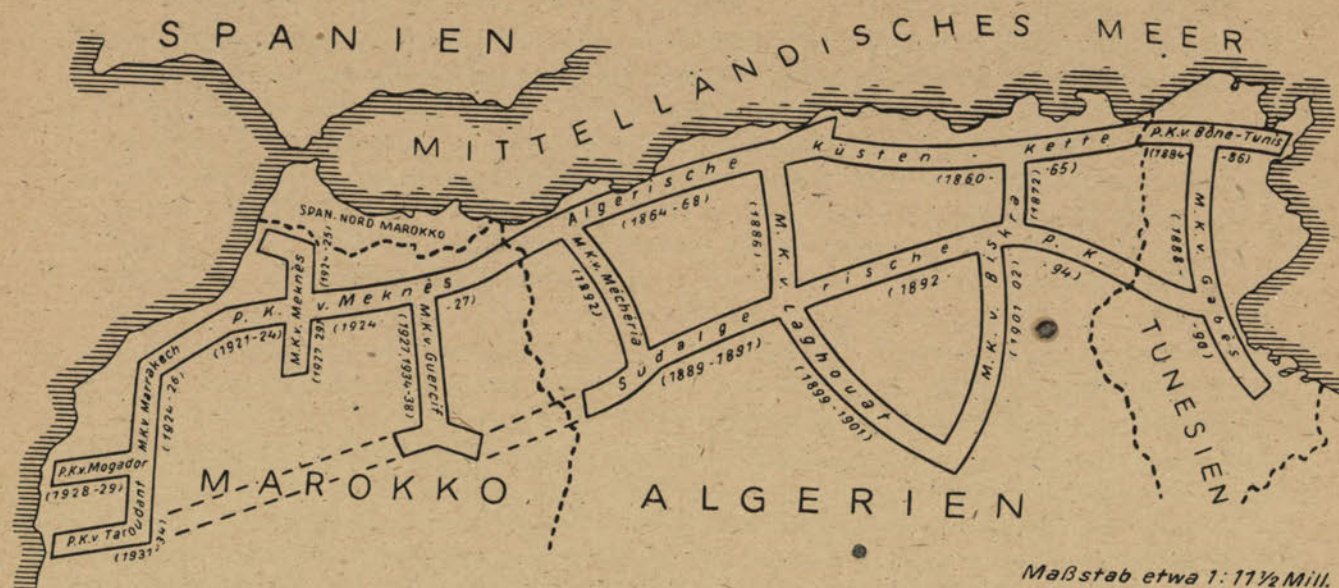
3. In Marokko wurden — außer der Grundlinie von Sidi bou Rzigine (1913), die zunächst nur dem begrenzten Zweck der französisch-spanischen Grenzfestlegung dienten — nur neuzeitliche Grundlinien von hoher Genauigkeit gemessen. Infolge ungünstiger Erfahrungen, die man bei früheren Grundlinien mit zweimaliger Messung unter Verwendung jeweils zahlreicher Drähte gemacht hatte, führte der SGA. die Messung von Agourai (1921) und Ber-Réhid (1922) in drei Gängen mit nur je zwei Drähten durch. Dadurch wurde aber das Personal stark beansprucht und auch mehr Zeit benötigt. So ging man bei der Messung von Marrakech und Guercif (1926) sowie von Taroudant (1935) zur zweimaligen Messung mit je zwei Drähten über. Über die neueste Grundlinie, Bou Denib (1938), sind keine Angaben vorhanden.

### b) Netzmessung (dazu Anlage 3):

Nach der Messung der Grundlinie von Blida setzte in der Landesvermessung eine sechsjährige Pause ein, während der erst geeignete Instrumente und Meßmethoden für die Winkelmessung entwickelt werden mußten. Dann aber wurden von 1860 ab die Arbeiten planmäßig vorwärts



getrieben. Das Dreiecksnetz wurde von Anfang an so geplant und angelegt, daß es sich mit der Zeit gleichmäßig über das gesamte französische Nordafrika erstrecken und so auch einen wertvollen Beitrag zur Erdmessung leisten sollte. Das Netz erster Ordnung wurde in einfacher Form aus Parallel- und Meridian-Ketten aufgebaut, die sich in Algerien und Tunesien in der Regel aus Dreiecken, in Marokko dagegen aus Vierecken zusammensetzten.



In die Ketten erster Ordnung wurden anschließend Ketten und Füllnetze niederer Ordnung eingehängt. Zu den Messungen erster Ordnung benötigte man in

Algerien . . . (1860 bis 1910) 50 Jahre,  
Tunesien . . . (1884 bis 1890) 6 Jahre,  
Marokko . . . (1921 bis 1938) 17 Jahre.

Weitere Arbeiten erster Ordnung waren vor Kriegsbeginn noch zwischen Algerien und Marokko geplant.

An Meßmethoden und -Instrumenten wurden nacheinander verwendet<sup>1)</sup>:

1860 bis 1866 Repetitionsmessung (20fach) mit cercle répétiteur Gambey,  
1867 bis 1936 Reiteration (20fach) mit cercle azimutal verschiedener Herkunft,  
seit 1937 répétition fractionnée (6fach) vermutlich mit Theodolit Wild.

Über die Messungsanordnung sind nur lückenhafte Angaben vorhanden:

1884 bis 1890 méthode des directions, tour d'horizon,  
1921 bis 1924 Winkelmessung in allen Kombinationen (mesure directe des angles) nach Schreiber,  
seit 1925 Winkelmessung mit Hilfsnullziel (méthode des couples sur référence).

Die Winkelmessung bereitete bei den ungünstigen Sichtbedingungen des heißen Klimas große Schwierigkeiten; daher ist es an sich verwunderlich, daß der Ausweg einer in kürzerer Entfernung liegenden und daher immer gut sichtbaren Hilfsnullrichtung nicht schon früher ergriffen wurde.

c) Berechnung der Triangulation (Ausgangswerte, Gang der Berechnung und Ausgleichung, Genauigkeitsangaben):

Entsprechend der Ausbreitung des Netzes erster Ordnung und den mit verbesserten Meßmethoden und -Instrumenten erzielten genaueren Ergebnissen führte der SGA. — besonders für die älteste Triangulation — eine ganze Anzahl Berechnungen durch. Da die heute bekannten Unterlagen zum Teil auf älteren Berechnungen beruhen, also nicht den neuesten Stand wiedergeben, soll hier eine kurze Übersicht gegeben werden:

<sup>1)</sup> Die vom SGA. angewandten Winkelmessmethoden wird demnächst Oberleutnant Dr.-Ing. Kneißl an dieser Stelle in einem Aufsatz behandeln, worauf verwiesen werden darf.

1. In Algerien erfolgte eine vorläufige Berechnung der Küsten-Kette mit dem unzureichend bestimmten Ausgangspunkt Douéra (1864) und der Grundlinie von Blida (1854).

Die erste wissenschaftlich vertretbare Berechnung wurde nach Bestimmung der Station Voirol bei Algier für die algerische und tunesische Triangulation gemeinsam durchgeführt. Sie beruht auf dem Ausgangspunkt Voirol (1875) und ebenfalls der Grundlinie von Blida (1854).

Nach Fertigstellung der gesamten Winkelmessungen und auch der Nachmessungen wurde bereits 1913 eine Neuberechnung des algerischen Netzes erster Ordnung vorbereitet. Die Ausführung nahm allerdings geraume Zeit in Anspruch und wurde wohl erst knapp vor Ausbruch des zweiten Weltkrieges fertig. Obwohl für Voirol im Jahre 1912 eine erhebliche Lotabweichung festgestellt worden war, wurde diese Station doch allem Anschein nach wieder als Ausgangspunkt übernommen. An den gemessenen Richtungen wurden Verbesserungen für die Höhe und für die geodätische Linie angebracht; ferner wurden sämtliche gemessenen Grundlinien in die Berechnung eingeführt. Die hierüber veröffentlichten Angaben sind leider sehr dürftig:

	Berechnung beendet	ausgeglichen zwischen
Algerische Küstenkette . . . . .	1935	Grundlinien von Oran (1910), Blida (1912/13) und Bône (1885)
M. K. von Biskra, nördlicher Teil . . . . .	1935	Alg. Küstenkette und Grundlinie von Biskra (1932)
M. K. von Méchéria . . . . .	1937	Alg. Küstenkette und Grundlinie von Méchéria (1931)
M. K. von Laghouat . . . . .	1937 begonnen	

2. Die erste Berechnung der tunesischen Triangulation war, wie bereits erwähnt, mit der algerischen identisch. Eine weitere, unabhängige Berechnung wurde 1912 in Angriff genommen und 1926 für das Netz erster Ordnung fertiggestellt. Als Ausgangswerte wurden die Station Karthago (1878) und die Grundlinien von Bône, Tunis und Médénine benutzt. Durch Vergleich der beiden Berechnungen stellte sich heraus, daß auch auf Karthago eine erhebliche Lotabweichung herrscht:

	alte — neue Breite	alte — neue Länge
	cc	cc
Karthago	+ 64,5	+ 36,2
Kairouan	+ 67,0	+ 35,3
Gafsa	+ 29,9	+ 33,0
Médénine	+ 15,4	+ 34,0

Über den Gang der Ausgleichung bestehen folgende näheren Angaben:

	Berechnung beendet	ausgeglichen zwischen
P. K. von Bône—Tunis . . . . .	1922	Grundlinie von Bône (1885) und Tunis (1908)
M. K. von Gabès . . . . .	1922	P. K. von Bône—Tunis und Grundlinie von Médénine (1909)

Zur Vereinfachung des Rechenganges wurden zunächst die Vergrößerungsnetze der Grundlinien für sich ausgeglichen, und zwar bei

Bône mit 36 Bedingungsgleichungen und 47 Unbekannten  
Tunis mit 19 Bedingungsgleichungen und 38 Unbekannten  
Médénine mit 10 Bedingungsgleichungen und 24 Unbekannten.

Mit je einer Seite aus den Vergrößerungsnetzen wurden dann die Ketten ausgeglichen:

P. K. von Bône—Tunis mit 25 Bedingungsgleichungen und 74 Unbekannten  
M. K. von Gabès (keine Angaben).



Als Unbekannte wurden beim Vergrößerungsnetz der Grundlinie von Bône die Winkel, sonst grundsätzlich die Richtungen angenommen.

Der mittlere Fehler eines beobachteten Winkels [I], ermittelt aus den Dreiecksschlüssen, und der mittlere Fehler eines ausgeglichenen Winkels [II] betrugen:

	[I]	[II]
	cc	cc
im Vergrößerungsnetz von Bône	$\pm 3,246$	$\pm 3,630$
im Vergrößerungsnetz von Tunis	$\pm 2,256$	$\pm 2,274$
im Vergrößerungsnetz von Médenine	$\pm 3,203$	$\pm 4,911$
in der P. K. von Bône—Tunis	$\pm 1,828$	$\pm 2,748$
in der M. K. von Gabès	$\pm 2,044$	$\pm 2,585$

3. In Auswertung der gesammelten Erfahrungen wurde für die Berechnung der Triangulation Marokkos als Ausgangspunkt die Station Merchich (1922) genommen, die nachweislich keiner Lotabweichung unterworfen war. Ferner wurde in einer Instruktion vom 15. Dezember 1920 vorgesehen, daß jeder Teil der Dreiecksketten sofort nach seiner Messung im Gelände mit Hilfe zweier Grundlinien berechnet werden sollte.

Bekannte Angaben über den Gang der Ausgleichung:

	Berechnung beendet	ausgeglichen zwischen
P. K. von Meknès, westl. Teil . . .	1925	Grundlinien von Ber-Réhid (1922) und Agourai (1921)
ostw. Teil . . .	1929	Grundlinien von Agourai und Guercif (1926) sowie zwischen Guercif und Oran (1910)
M. K. von Meknès, nördl. Teil . . .	1925	Grundlinien von Sidi bou Rziguine (1913) und P. K. von Meknès
südl. Teil . . .	1929	—
M. K. von Marrakech . . . . .	1927	Grundlinien von Ber-Réhid und Marrakech (1926)
M. K. von Guercif . . . . .	1939	Grundlinien von Guercif und Bou Denib (1938)
P. K. von Mogador . . . . .	1929	—
P. K. von Taroudant, ostw. Teil . .	1935	Grundlinien von Marrakech und Taroudant (1935)
westl. Teil . . .	1937	—

Einzelheiten wurden nur über den westlichen Teil der Parallelkette von Meknès veröffentlicht. Nach dem schon in Tunesien angewandten Verfahren wurden zuerst die Vergrößerungsnetze ausgeglichen:

Ber-Réhid mit 20 Bedingungsgleichungen und 40 Unbekannten,  
Agourai mit 18 Bedingungsgleichungen und 34 Unbekannten,

anschließend die

P. K. von Meknès mit 22 Bedingungsgleichungen und 52 Unbekannten.

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung [I] und einer ausgeglichenen Richtung [II] betrug:

	[I]	[II]
	cc	cc
im Vergrößerungsnetz von Ber-Réhid	$\pm 1,1$	$\pm 2,8$
im Vergrößerungsnetz von Agourai	$\pm 1,6$	$\pm 2,7$
in der P. K. von Meknès	$\pm 2,5$	$\pm 4,1$

4. Da die einzelnen Triangulationen — besonders infolge der Lotabweichungen auf dem algerischen und dem tunesischen Ausgangspunkt — ziemliche Klaffungen untereinander aufweisen, nahm der SGA. im Jahre 1934 eine geschlossene Ausgleichung des gesamten nordafrikanischen Netzes

in Angriff. Eine vorläufige Berechnung wurde 1939 fertiggestellt, an der endgültigen Berechnung wurde auch nach Kriegsbeginn weiter gearbeitet. Einzelheiten über diese Arbeiten wurden naturgemäß nicht mehr veröffentlicht.

#### d) Abbildungsgrundlagen:

Die Abbildungsgrundlagen wurden durch eine Anzahl Instruktionen des SGA. (vom 30. August 1920, 10. März 1921 und 11. Juli 1922) verbindlich eingeführt. Die algerischen und tunesischen Längenangaben beziehen sich auf den Nullmeridian Paris (Observatorium), den sogenannten Cassini-Meridian, während für Marokko von Anfang an der Meridian von Greenwich eingeführt wurde. Als Bezugsellipsoid wurde das im französischen Mutterland seit 1910 übliche Erdellipsoid von Clarke (1880) vorgeschrieben. An Stelle der vorher in Algerien und Tunesien benutzten Bonneschen Projektion wurde für das rechtwinklige Koordinatensystem die winkeltreue Lambertsche Kegelprojektion mit zwei Systemen von jeweils 5° Ausdehnung in der geographischen Breite verwendet. Durch die Einführung von Maßstabsreduktionen betragen die maximalen Projektions-Verzerrungen noch etwa  $\pm 1/2000$ .

Zur Umrechnung geographischer Koordinaten in rechtwinklige veröffentlichte der SGA. in den Jahren 1924, 1935 und 1937 zwei verschiedene Arten von Hilfstafeln. Die erste Art ist hauptsächlich für die Umformung geographischer Koordinaten gedacht und enthält die rechtwinkligen Werte  $x$  und  $y$  für Zehntel-Grade der in Frage kommenden Längen und Breiten. Zum Aufbau der später erschienenen Tafel, die für beide Rechenfälle bestimmt ist, wurden nicht die geographischen Breiten- und Längenausdifferenzen, sondern die entsprechenden geodätischen Linear-Koordinaten benutzt. Es wurden die zu den Fußpunktbreiten gehörigen Ordinaten  $Y_0$  als Funktion der geographischen Breite tabelliert und umgekehrt. Die Formeln sind durchweg für Maschinenrechnung wie auch für achttstellige logarithmische Rechnung angegeben.

#### III. Höhenmessung

Der SGA. erhielt in den Jahren 1887 und 1889 von der tunesischen bzw. algerischen Landesregierung die ersten Aufträge zur Ausführung von Feinnivellements. Zunächst wurden in Tunesien Probemessungen zur Festlegung eines geeigneten Meßverfahrens angestellt. In den Jahren 1889 bis 1894 und 1903 bis 1914 wurde dann ein Höhennetz gleichmäßig in Algerien und Tunesien beobachtet und 1928 bis 1939 weiter ausgedehnt.

In Marokko wurden gleichzeitig mit der flüchtigen Triangulation vom SGA. und vom Bureau topographique in Casablanca Nivellementsarbeiten in größerem Umfange ausgeführt (1907—1922). Da die Festlegungen dieser — in sich nicht einheitlich angelegten — Arbeiten im Laufe der Zeit durch Straßenbau und andere Einwirkungen verloren gegangen waren, führte der Service Géographique du Maroc in Rabat ein neues Feinnivellement durch (1922—1925). Die Ausdehnung der Nivellementslinien betrug in

	1889—1914	1889—1939	1922—1925
Algerien	2800 km	8900 km	—
Tunesien	2100 km	2700 km	—
Marokko	—	—	3300 km

In Algerien und Tunesien entfiel im ersten Arbeitsabschnitt (1889—1914) auf durchschnittlich 700 m Nivellementsstrecke eine Höhenfestlegung; im zweiten Abschnitt (1928—1939) wurde dieser Abstand für bewohnte Gegenden auf etwa 1 km, für Wüstengebiete auf 5 km vergrößert. In Marokko betrug der Abstand zwischen den Höhenpunkten etwa 1500 m.

#### a) Feldarbeiten:

Der Aufbau des Höhennetzes erster Ordnung wurde so angelegt, daß jeweils eine Anzahl Teilstrecken von etwa 100 km Länge (sections) zu einer Schleife (circuit) zusammengefaßt werden konnten:

	sections	circuits
Tunesien	keine Angaben	—
Algerien (1914)	20	5
Marokko (1925)	34	10



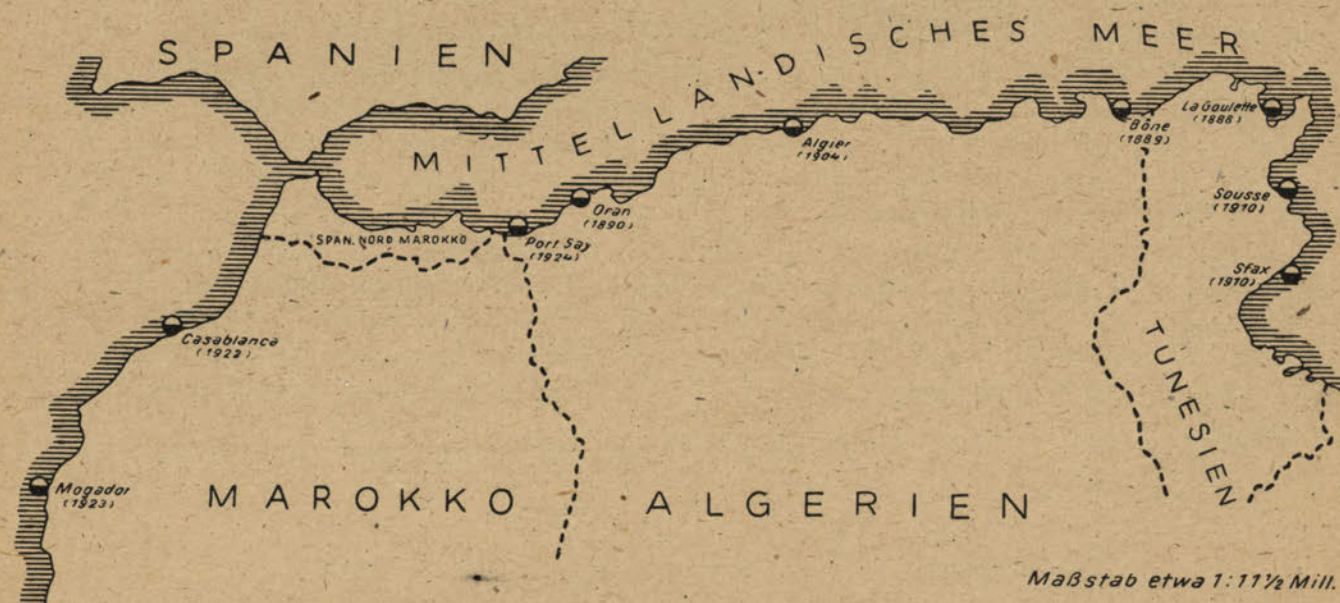
Bei der Messung wurden früher die Tagesabschnitte in einem Arbeitsgang hin- und zurück-nivelliert, wobei die Lattenablesungen in Algerien und Tunesien von zwei Beobachtern getätigt wurden; in Marokko dagegen arbeitete nur ein Beobachter, der alle 10 km abgelöst wurde. Im Jahre 1930 wurde in Algerien die „méthode du double cheminement“ eingeführt. Dabei wurden die einzelnen Teilstrecken von zwei verschiedenen Beobachtern in entgegengesetzter Richtung, aber mit gleichen Instrumentenabständen, je einmal nivelliert.

Für sämtliche Arbeiten wurde das Nivellierinstrument Berthélémy verwendet, dazu in Algerien und Tunesien bis 1911 bimetalische Nivellierlatten, von 1911 ab Invarlatten, die entweder vor und nach jeder Beobachtungsperiode in Paris durch den Service du nivellement général, oder auch in bestimmten Abständen (etwa 200 km) während der Beobachtungen, geeicht wurden. In Marokko wurden Latten aus Tannenholz benutzt und jährlich zweimal in Rabat geeicht.

Im ersten Arbeitsabschnitt von Algerien und Tunesien waren hauptsächlich Offiziere als Beobachter tätig, im zweiten Abschnitt (ab 1928) durchweg ältere Unteroffiziere des SGA. Das gesamte marokkanische Höhennetz wurde von ehemaligen zaristischen Offizieren beobachtet, die teils als Unteroffiziere bei der Fremdenlegion standen, teils als Landmesser beim Service topographique chérifien tätig waren.

#### b) Ausgangswerte (Horizont, Flutmesser):

Als Ausgangspunkt für die tunesischen und algerischen Höhenangaben diente zunächst ein Flutmesser, der 1888 im Hafen La Goulette in Tunesien eingerichtet worden war. In den Jahren 1899—1903 wurde jedoch festgestellt, daß dieser Flutmesser samt dem ihn umgebenden Gelände jährlich 6—7 mm absank. Daher wurde als endgültige Ausgangshöhe eine Konsole am Bahnhofsgelände Sidi el Hémessi (Eisenbahnlinie Tunis—Algier) bestimmt. Im Laufe der Zeit wurden fünf weitere Flutmesser installiert.



Für diese wurde Anfang 1936 in bezug auf La Goulette (1888) festgestellt:

	Jahr der Einrichtung	Betriebsdauer Jahre	Höhe bezogen auf La Goulette (1888) cm
Bône . . . . .	1889	45	+ 14
Oran . . . . .	1890	41	— 6
Algier . . . . .	1904	31	— 2
Port Say . . . . .	1924	unregelmäßiger Gang	—
La Goulette . . . . .	1888	45	— 3
Sousse . . . . .	1910	25	— 10
Sfax . . . . .	1910	25	— 11

Die in Marokko vor 1922 ausgeführten Nivellementsarbeiten beruhten auf verschiedenen Bezugspunkten, welche im Jahre 1920 an einen Höhenfestpunkt im Hafen Casablanca angeschlossen wurden. Im Jahre 1929 wurde festgestellt, daß die Höhe dieses Punktes (5000 m) gegenüber dem endgültigen Nivellement um 2107 m zu groß bestimmt worden war.

Als Horizont des neuen marokkanischen Feinnivellements (1922—1925) gilt das Mittelwasser des Atlantik im Hafen Casablanca, das aus dem Mittel der täglichen Aufzeichnungen des dortigen Flutmessers (1922) für die Zeit vom Januar 1923 bis November 1924 bestimmt wurde. Weitere Flutmesser — sämtlich Typ Lallemant — wurden in den Häfen von Mogador (1923) und Port-Say in Algerien (1924) eingerichtet. Nach 5 Jahren Beobachtungszeit wurde Ende 1927 unter Benutzung des ausgeglichenen Nivellementsnetzes und in bezug auf Casablanca das Mittelwasser in Mogador und Port-Say bestimmt zu:

Mogador (Atlantik) + 128 mm  
Port-Say (Mittelmeer) + 153 mm

#### c) Berechnung des Höhennetzes (Gang der Berechnung und Ausglei- chungsangaben):

Zur Ausglei- chung des Nivellementsnetzes erster Ordnung wurde allgemein das beim Service du nivellement général übliche Verfahren angewandt.

Da die endgültigen Höhen dringend gebraucht wurden, wartete man nicht die Messung des gesamten Netzes ab, sondern glich die einzelnen Schleifen jeweils sofort nach ihrer Beobachtung aus und benutzte diese dann wieder als Ausgangswerte für die nächsten Schleifen. Der Gang der Ausglei- chung war folgender:

1. Zunächst wurden vorläufige Höhen durch Mittelbildung aus den beiden Beobachtungen auf- gestellt.
2. Dann wurde der wahrscheinliche Gesamtfehler jeder Teilstrecke berechnet, der sich aus dem systematischen wahrscheinlichen Fehler und dem zufälligen wahrscheinlichen Fehler zusammen- setzt. Diese beiden wurden aus den Unterschieden bestimmt, die sich für die einzelnen Instru- mentenaufstellungen (nivelée) im Hin- und Rückgang ergaben.

Man fand folgende Werte, bezogen auf 1 km Nivellementsstrecke:

	Systematischer wahrscheinlicher Fehler		zufälliger wahrscheinlicher Fehler	
	Einzelwerte zwischen	Mittelwert	Einzelwerte zwischen	Mittelwert
Algerien . . . . .	0,2—0,8 mm	± 0,4 mm	0,5—1,0 mm	± 0,7 mm
Tunesien . . . . .	—	± 0,16 "	—	± 0,46 "
Marokko . . . . .	0,002—0,15 "	± 0,04 "	0,46—1,05 "	± 0,7 "

Während also der zufällige wahrscheinliche Fehler etwa in derselben Größenordnung blieb, nahm der systematische wahrscheinliche Fehler im Laufe der Zeit erheblich ab. Dies dürfte in der Haupt- sache durch die größere Erfahrung der Beobachter zu erklären sein.

3. Die Berechnung des tatsächlichen Abschlußfehlers der einzelnen Schleifen erfolgte aus den vor- läufigen Höhen unter Berücksichtigung der orthometrischen Höhenverbesserung. Andererseits wurden die theoretischen Abschlußfehler der Schleifen aus den wahrscheinlichen Gesamt- fehler der Teilstrecken berechnet und mit den tatsächlichen Abschlußfehlern verglichen. Dabei stellte man für Marokko fest, daß die tatsächlichen Fehler meist ein Vielfaches der theoretischen Fehler betrugen (im Mittel das 2,3fache). Dies wurde hauptsächlich darauf zurückgeführt, daß die systematischen Fehler der Teilstrecken zu klein berechnet worden waren.
4. Die eigentliche Ausglei- chung wurde dann so durchgeführt, daß die tatsächlichen Schleifen- Abschlußfehler auf die einzelnen Teilstrecken im Verhältnis der Quadrate ihrer wahrschein- lichen Gesamtfehler verteilt wurden, wobei die schon früher durch Ausglei- chung bestimmten Höhen unverändert blieben. Innerhalb der Teilstrecken wurden die Unterschiede auf die einzelnen Punkte entsprechend ihrer Entfernung von den beiden Endpunkten weiterverteilt, wobei man die Meßgenauigkeit innerhalb der Teilstrecken als gleichbleibend annahm.



5. Die drei Höhenetze wurden getrennt ausgeglichen. Der SGA. veröffentlichte 1926 für die 1889—1914 in Algerien getätigten Arbeiten ein Verzeichnis mit orthometrisch verbesserten Höhen. Das tunesische Höhennetz wurde 1914 vorläufig, 1925 endgültig ausgeglichen, die Ergebnisse aber nicht veröffentlicht. Dagegen ist für Marokko ein vollständiges Höhenverzeichnis der Nivellementsnetze erster bis vierter Ordnung mit orthometrischen und dynamischen Höhen aus dem Jahre 1930 vorhanden.

6. Die orthometrische Höhenverbesserung wurde zwischen je zwei Stationen berechnet nach der Formel

$$O = -2a \cdot H \cdot \sin 2L \cdot dL^2,$$

wobei

$H$  = Mittelhöhe zwischen beiden Stationen in Meter,

$L$  = geogr. Breite der Station mit Höhe  $H_2$ ,

$dL$  = Breitenunterschied zwischen den Stationen mit  $H_1$  und  $H_2$ ,

$a = 0,0026$

und

$H_2 = H_1 + O$ .

Diese Verbesserung wurde für die einzelnen Teilstrecken graphisch aufgetragen.

Die dynamischen Höhen wurden aus den orthometrischen Höhen gewonnen durch einen Zuschlag von

$$d = -a \cdot H \cdot \cos 2L - \frac{1}{2} b \cdot H^2,$$

wobei  $H$  = Höhe des Punktes,

$L$  = geogr. Breite des Punktes,

$a = 0,0026$ ,

$b = 1,96 \cdot 10^{-7}$ .

7. Außer dem Punkt Sidi el Hémessi hatten das algerische und das tunesische Höhennetz noch drei gemeinsame Höhenpunkte, bei denen folgende Unterschiede auftraten:

	tunesische—algerische Höhe
Bahnhof Gardimaou	— 0,108 m
Bahnhof Slata	— 0,034 m
Bahnhof Kalaa Djerda	— 0,322 m

Diese Werte zeigen, daß bei einigen Teilstrecken erhebliche Bodensenkungen eingetreten waren. Über die weiteren Rechenarbeiten zur Verbesserung der Höhenangaben stimmen die Ansichten der französischen Bearbeiter nicht ganz überein. Denn einmal sollte das algerische und tunesische Höhennetz erneut ausgeglichen werden, sobald für die Flutmesser längere Beobachtungsreihen vorliegen; andererseits wurde für Marokko festgestellt, daß eine spätere Gesamtausgleichung des Nivellementsnetzes für den praktischen Gebrauch keine wesentlichen Änderungen der Höhenwerte erbringen würde.

#### d) Trigonometrische Höhenbestimmung:

Bei der Messung der algerischen Küstenkette (1860—1868) wurde der Brechungskoeffizient aus 170 Beobachtungen zu 0,072 bestimmt. Im Jahre 1930 wurde ein neuer Wert als Mittel aller Beobachtungen zu 0,058 angegeben. Die während der flüchtigen Triangulation in Marokko (1907—1920) festgestellten Werte des Brechungskoeffizienten schwanken entsprechend dem Charakter der Landschaft und der Jahreszeit der Bestimmung zwischen 0,031 und 0,072; als Mittel aus 22 Werten wurde 0,055 gefunden.

#### IV. Sicherung der Festpunkte

Wegen der Ungunst der örtlichen Verhältnisse und auch wegen der Vorliebe der Eingeborenen für Metall jeglicher Art, besonders für Bronze, mußte von den in Frankreich üblichen Festlegungen

<sup>2)</sup> Eine entsprechende Formel findet sich in Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Band II, 2 (1933), S. 121, Formel (9).

abgegangen werden. So waren zum Beispiel Holzbauten wegen des Holz Mangels und wegen dauernder Gefahr der Zerstörung durch Menschen und Tierwelt nicht zweckmäßig. Außer den Angaben im Planheft sei noch erwähnt:

#### a) Festlegung der trigonometrischen Punkte:

In Marokko wurden die Steine mit eingelassenem Bronzebolzen in ein Betonfundament von den Ausmaßen 100.100.70 cm eingebracht. Allgemein wurde über den Festlegungen — in Marokko: Bronzebolzen, in Algerien und Tunesien: Löcher in Stein oder Fels von 5 cm Durchmesser, mit gemahlener Kohle gefüllt — ein kaminartig ausgesparter Pfeiler gemauert (Querschnitt 60.60 cm, Höhe 120 cm), der bei Beobachtungen jederzeit eine genaue Zentrierung zuließ.

#### b) Festlegung der Nivellementspunkte:

Bei den Arbeiten in Algerien und Tunesien bis 1914 entfielen auf etwa 2 km Nivellementsstrecke jeweils ein Punkt höherer Ordnung (Konsole) und zwei Punkte niedriger Ordnung (Bolzen) von der in Frankreich üblichen Form. Von 1903 ab wurden auch Höhentafeln angebracht, deren Höhenangaben jedoch nicht immer mit den durch spätere Ausgleichung gewonnenen Werten übereinstimmen.

In Marokko machten die steigende Entwicklung der Motorisierung und auch die unbezähmbare Begierde der eingeborenen Hirtenbevölkerung nach Metall eine Festlegung der Höhenpunkte im freien Gelände durch einfache Bolzen meist unmöglich. In diesen „gefährdeten“ Gegenden wurden dann die im Planheft erwähnten pyramidenstumpfförmigen Betonklötze eingeführt, die durch ihr stattliches Gewicht von etwa 30 Zentnern am besten geschützt waren.

#### C. Dienststellen

Die Dienststellen, die sich seither in Französisch-Nordafrika mit Landesvermessungsarbeiten befaßt haben, sind im Planheft ausführlich zusammengestellt.

#### D. Schlußbetrachtung

Die Schilderung der ausgeführten Arbeiten zeigt deutlich, wie sehr der SGA., von kurzen Pausen abgesehen, fortwährend bemüht war, in Französisch-Nordafrika eine möglichst geschlossene und hochwertige Triangulation herzustellen. Besonders in den letzten Jahren vor Kriegsbeginn waren umfassende Ausgleichungen in Arbeit begriffen und wurden neue große Planungen aufgestellt.

Ganz im Gegensatz hierzu steht die geradezu sträfliche Vernachlässigung des Mutterlandes hinsichtlich der Landesvermessung. Wie aus dem Teil Frankreich des Planheftes hervorgeht, mußten dort von 1941 ab westlich des Meridians von Paris erst durch das neu geschaffene Institut Géographique National (IGN.) und die deutsche Heeresvermessung Dreiecksketten erster Ordnung bestimmt werden, um wirklich brauchbare Vermessungsgrundlagen zur Verfügung zu haben. Dies zeugt zwar nicht von dem Friedenswillen, wohl aber von der Kurzsichtigkeit der maßgebenden Stellen, die sich hinter der Maginotlinie sicher fühlten und die Möglichkeit ganz außer acht ließen, daß ein angezettelter Krieg auch auf das eigene Land übergreifen könnte. Zum anderen kann diese Tatsache — neben den Erfordernissen für eine planmäßige Erschließung der Kolonien — nur mit dem brennenden Ehrgeiz erklärt werden, dem ostafrikanischen Meridianbogen der Engländer einen gleichbedeutenden oder noch besseren nordafrikanischen Parallelkreisbogen der Franzosen an die Seite zu stellen. Jedenfalls ist für den Fachmann interessant zu sehen, wie mit geringem Personal und oft unter sehr schwierigen Arbeitsbedingungen klimatischer und anderer Art Großes geleistet wurde, dank der persönlichen Initiative und Aufopferung aller Beteiligten. Eine kritische Betrachtung und Würdigung dieser Arbeiten soll einer berufeneren Feder vorbehalten bleiben.



# E. Quellenverzeichnis

## 1. Mémorial du Dépôt Général de la Guerre:

Tome X: Description géométrique de l'Algérie; Paris 1875.  
Tome XI: Détermination des longitudes, latitudes et azimuts terrestres en Algérie; Paris 1877.  
Tome XIII: Jonction géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne; Paris 1887.

## 2. Verhandlungen der Allgemeinen Konferenzen der Internationalen Erdmessung:

9. Allgemeine Konferenz in Paris (3.—12. Oktober 1889), Beilage A III (S. 10—11):  
Van de Sande-Bakhuyzen, Rapport sur les longitudes, latitudes et azimuts; Berlin 1890.  
10. Allgemeine Konferenz in Brüssel (27. September—7. Oktober 1892), Beilage A IV (S. 258/259, 350/351, 442/443):  
Van de Sande-Bakhuyzen, Rapport sur les longitudes, latitudes et azimuts; Berlin 1893.  
12. Allgemeine Konferenz in Stuttgart (3.—12. Oktober 1898), Beilage A VII (S. 75—102):  
Ferrero, Rapport sur les triangulations; Florenz 1899.  
14. Allgemeine Konferenz in Kopenhagen (4.—13. August 1903), Beilage B XIII (S. 223—227):  
Helmert-Krüger, Bericht über die Triangulation; Beilage B XVII (S. 358, 373, 393):  
Albrecht, Bericht über die Längen-, Breiten- und Azimutbestimmungen; Berlin 1904.  
15. Allgemeine Konferenz in Budapest (20.—28. September 1906), Beilage A XIV a (S. 275/276):  
Bourgeois, Rapport sur les travaux géodésiques exécutés par le SGA.de 1903 à 1906; Berlin 1908.  
17. Allgemeine Konferenz in Hamburg (17.—27. September 1912), I. Teil, Beilage A XV (S. 276—277, 279—281):  
Lallemand, Rapport sur les travaux géodésiques exécutés par le SGA.de 1909 à 1912; Berlin 1913.  
II. Teil, Beilage B VII a (S. 127/128):  
Bourgeois, Rapport triennal sur les bases (1909—1911), Beilage B VII b (S. 144—158):  
Bourgeois, Rapport d'ensemble concernant les mesures de bases; Berlin 1914.

## 3. Mémorial du Service Géographique de l'Armée:

Tome I: Description géométrique du Maroc; Paris 1926.  
Tome II: Description géométrique de l'Algérie; Nivellement de précision, réseau établi de 1889 à 1914; Paris 1926.  
Tome IV: Description géométrique du Maroc; Nivellement de précision (Réseau établi de 1922 à 1925); Paris 1930.  
Tome V: La carte d'Algérie (1830—1930); Paris 1930.

## 4. Travaux de l'Association de Géodésie de l'Union géodésique et géophysique internationale:

Tome 2: Jolly, Rapport sur les latitudes, azimuts et différences de longitude (S. 34—35, 42—49, 82—85, 90—95); Paris 1925.

Tome 9: Perrier, Rapport général sur les bases mesurées de 1912 à 1932 (S. 164—177); Paris 1939.

Tome 10: Perrier, Rapport général sur les triangulations effectuées de 1912 à 1932 (S. 125—130); Paris  
Tome 13, fasc. 2: Vignal et Taton, Rapport sur les travaux du Service du nivellement général de la France en 1933—1935; Paris 1938.

## 5. Cahiers du Service Géographique de l'Armée:

Rapport sur les travaux exécutés  
en 1912 ; Paris 1913. en 1926 et 1927; Paris 1928.  
en 1913 ; Paris 1919. en 1928 et 1929; Paris 1930.  
en 1914 ; Paris 1921. en 1930 et 1931; Paris 1932.  
en 1922 et 1923; Paris 1926. en 1934 et 1935; Paris 1936.  
en 1924 et 1925; Paris 1927. en 1936 et 1937; Paris 1938.

## 6. Service Géographique de l'Armée:

Description géométrique de la Tunisie, fasc. 1—27 (1890—1904), fasc. 28—34 (1921); Paris

## 7. Service Géographique de l'Armée:

Tables de projection système Lambert  
Nord Maroc (mit Gebrauchsanweisung für Süd-Algerien bzw. Süd-Tunesien); Paris 1924.  
Nord Algérie (mit Gebrauchsanweisung für Nord-Tunesien); Paris 1926.  
Sud Maroc; Paris 1935.  
Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées rectangulaires Lambert et inversement; Paris 1937.

## 8. Bulletin géodésique: Jahrg. 1926, Nr. 10, S. 104—116:

Perrier, Les chaînes primordiales de la triangulation de la Tunisie; Paris 1926.

## 9. Service Géographique de l'Afrique Occidentale Française (SG. AOF.):

Catalogue des positions géographiques provisoirement admises par le Service Géographique de l'AOF.; Laval 1923.

## 10. La Géographie:

Band XII, 1905, S. 209—230 und XIII, 1906, S. 443—446:  
Villatte, Du Tidikelt vers Tombouctou.  
Band XII, 1905, S. 231—238:  
Trépié, Remarques sur la carte dressée par M. Villatte à la suite de son exploration de 1904 dans le Sahara central.  
Band XXIII, 1911, S. 161—192 und XXXV, 1921, S. 388—389:  
Villatte, A travers le Sahara.  
Band XXVI, 1912, S. 157—176:  
Tilho et Troadec, La détermination des longitudes en campagne par la télégraphie sans fil.  
Band XXVII, 1913, S. 116—125:  
Cortier, Liste des positions géographiques déterminées dans le Sahara par la mission Cortier (1908—1910).  
Band XXIX, 1914, S. 73—113:  
Niéger, Résultats Scientifiques d'ensemble de la mission du Transafricain.  
Band XXXIX, 1923, S. 1—35:  
Augiéras, Mission transsaharienne Alger-Dakar (1920—1921).

# Dilg „Zur Umformung“ Rechtswert 48°—52°

Anlage 1

	48°		49°		50°		51°		
'	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	'
0	12 43 605	668	12 19 381	677	11 94 784	687	11 69 818	697	0
1	43 204	668	18 974	678	94 371	688	69 399	698	1
2	42 804	668	18 567	678	93 958	688	68 980	698	2
3	42 403	668	18 160	678	93 544	688	68 560	698	3
4	42 002	668	17 753	678	93 131	688	68 141	698	4
5	41 601	668	17 345	678	92 717	688	67 721	698	5
6	41 200	668	16 938	678	92 304	688	67 302	698	6
7	40 798	669	16 530	679	91 890	689	66 882	699	7
8	40 397	669	16 123	679	91 476	689	66 462	699	8
9	39 996	669	15 715	679	91 062	689	66 042	699	9
10	12 39 594	669	12 15 307	679	11 90 648	689	11 65 622	699	10
11	39 192	669	14 899	679	90 234	689	65 202	699	11
12	38 790	669	14 491	679	89 820	689	64 782	699	12
13	38 388	670	14 083	680	89 405	690	64 361	700	13
14	37 986	670	13 675	680	88 991	690	63 944	700	14

47	24 662	675	12 00 145	685	75 258	695	50 434	705	46
48	24 256	675	1 99 733	685	74 840	695	50 011	705	47
49	23 851	676	99 321	686	74 422	696	49 587	705	48
							49 163	706	49
50	12 23 445	676	11 98 909	686	11 74 004	696	11 48 739	706	50
51	23 039	676	98 497	686	73 586	696	48 315	706	51
52	22 633	676	98 085	686	73 168	696	47 891	706	52
53	22 227	676	97 673	686	72 749	696	47 466	706	53
54	21 821	676	97 260	686	72 331	696	47 042	706	54
55	21 414	677	96 848	687	71 912	697	46 617	707	55
56	21 008	677	96 435	687	71 494	697	46 193	707	56
57	20 601	677	96 023	687	71 075	697	45 768	707	57
58	20 195	677	95 610	687	70 656	697	45 343	707	58
59	19 788	677	95 197	687	70 237	697	44 918	707	59
60	12 19 381		11 94 784		11 69 818		11 44 493		60
'	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	S <sub>0</sub>	Δ1" S <sub>0</sub>	'

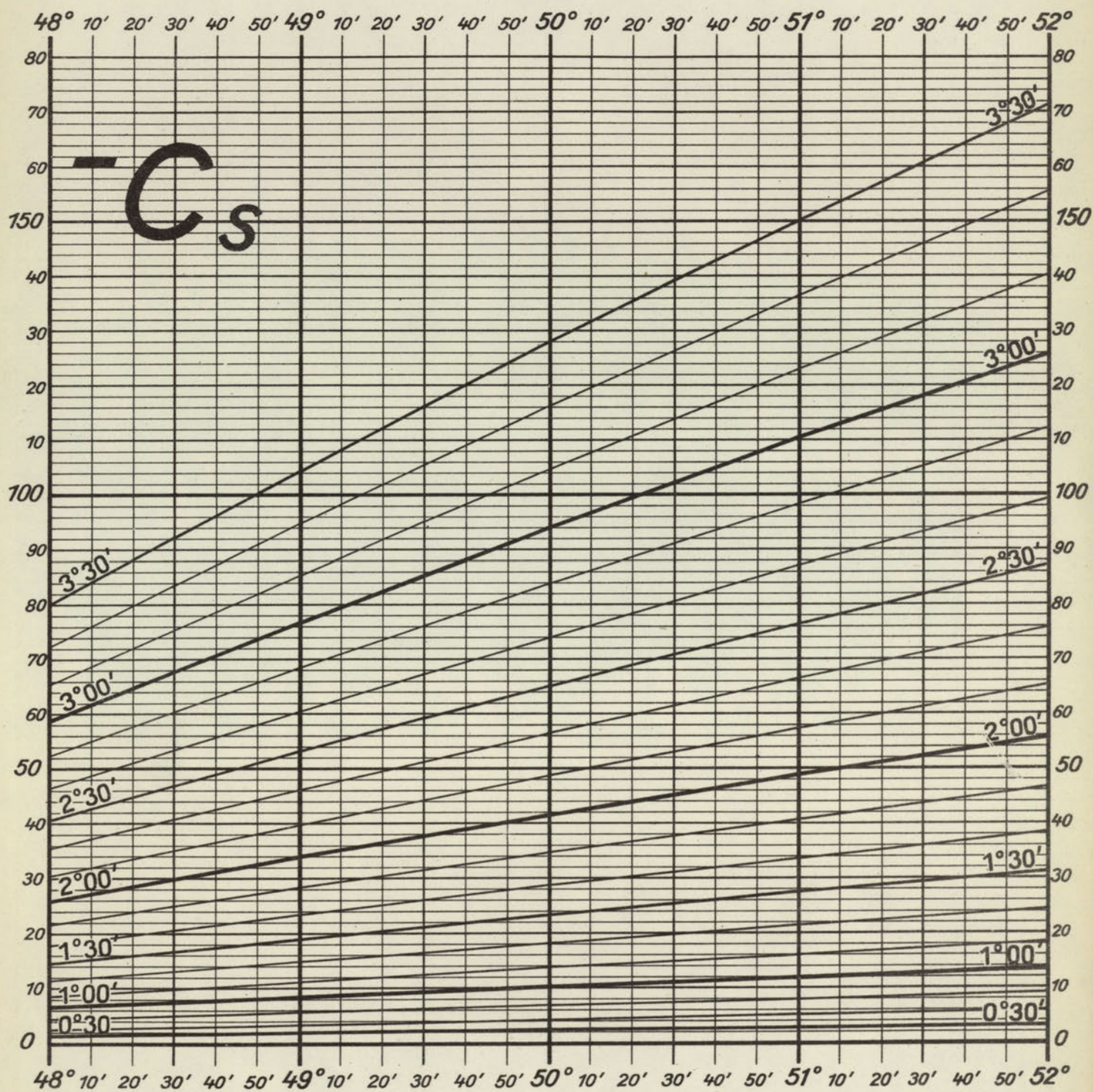


48°			49°		50°		51°		
'	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	'
0	12 43 605	668	12 19 381	677	11 94 784	687	11 69 818	697	0
1	43 204	668	18 974	678	94 371	688	69 399	698	1
2	42 804	668	18 567	678	93 958	688	68 980	698	2
3	42 403	668	18 160	678	93 544	688	68 560	698	3
4	42 002	668	17 753	678	93 131	688	68 141	698	4
5	41 601	668	17 345	678	92 717	688	67 721	698	5
6	41 200	668	16 938	678	92 304	688	67 302	698	6
7	40 798	669	16 530	679	91 890	689	66 882	699	7
8	40 397	669	16 123	679	91 476	689	66 462	699	8
9	39 996	669	15 715	679	91 062	689	66 042	699	9
10	12 39 594	669	12 15 307	679	11 90 648	689	11 65 622	699	10
11	39 192	669	14 899	679	90 234	689	65 202	699	11
12	38 790	669	14 491	679	89 820	689	64 782	699	12
13	38 388	670	14 083	680	89 405	690	64 361	700	13
14	37 986	670	13 675	680	88 991	690	63 941	700	14
15	37 584	670	13 266	680	88 576	690	63 520	700	15
16	37 182	670	12 858	680	88 162	690	63 100	700	16
17	36 780	670	12 449	680	87 747	690	62 679	700	17
18	36 377	670	12 041	680	87 332	690	62 258	700	18
19	35 975	671	11 632	681	86 917	691	61 837	701	19
20	12 35 572	671	12 11 223	681	11 86 502	691	11 61 416	701	20
21	35 169	671	10 814	681	86 087	691	60 995	701	21
22	34 766	671	10 405	681	85 672	691	60 574	701	22
23	34 363	671	09 996	681	85 256	691	60 152	701	23
24	33 960	671	09 587	681	84 841	691	59 731	701	24
25	33 557	672	09 177	682	84 425	692	59 309	702	25
26	33 154	672	08 768	682	84 010	692	58 888	702	26
27	32 751	672	08 358	682	83 594	692	58 466	702	27
28	32 347	672	07 949	682	83 178	692	58 044	702	28
29	31 944	672	07 539	682	82 762	692	57 622	702	29
30	12 31 540	672	12 07 129	682	11 82 346	692	11 57 200	702	30
31	31 136	673	06 719	683	81 930	693	56 778	703	31
32	30 732	673	06 309	683	81 514	693	56 356	703	32
33	30 328	673	05 899	683	81 097	693	55 933	703	33
34	29 924	673	05 488	683	80 681	693	55 511	703	34
35	29 520	673	05 078	683	80 264	693	55 088	703	35
36	29 116	673	04 667	683	79 848	693	54 666	703	36
37	28 712	674	04 257	684	79 431	694	54 243	704	37
38	28 307	674	03 846	684	79 014	694	53 820	704	38
39	27 903	674	03 435	684	78 597	694	53 397	704	39
40	12 27 498	674	12 03 024	684	11 78 180	694	11 52 974	704	40
41	27 093	674	02 613	684	77 763	694	52 551	704	41
42	26 688	674	02 202	684	77 346	694	52 128	704	42
43	26 283	675	01 791	685	76 928	695	51 705	705	43
44	25 878	675	01 379	685	76 511	695	51 281	705	44
45	25 473	675	00 968	685	76 093	695	50 858	705	45
46	25 067	675	00 556	685	75 676	695	50 434	705	46
47	24 662	675	12 00 145	685	75 258	695	50 011	705	47
48	24 256	675	1 99 733	685	74 840	695	49 587	705	48
49	23 851	676	99 321	686	74 422	696	49 163	706	49
50	12 23 445	676	11 98 909	686	11 74 004	696	11 48 739	706	50
51	23 039	676	98 497	686	73 586	696	48 315	706	51
52	22 633	676	98 085	686	73 168	696	47 891	706	52
53	22 227	676	97 673	686	72 749	696	47 466	706	53
54	21 821	676	97 260	686	72 331	696	47 042	706	54
55	21 414	677	96 848	687	71 912	697	46 617	707	55
56	21 008	677	96 435	687	71 494	697	46 193	707	56
57	20 601	677	96 023	687	71 075	697	45 768	707	57
58	20 195	677	95 610	687	70 656	697	45 343	707	58
59	19 788	677	95 197	687	70 237	697	44 918	707	59
60	12 19 381		11 94 784		11 69 818		11 44 493		60
'	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	$S_0$	$\Delta 1'' S_0$	'

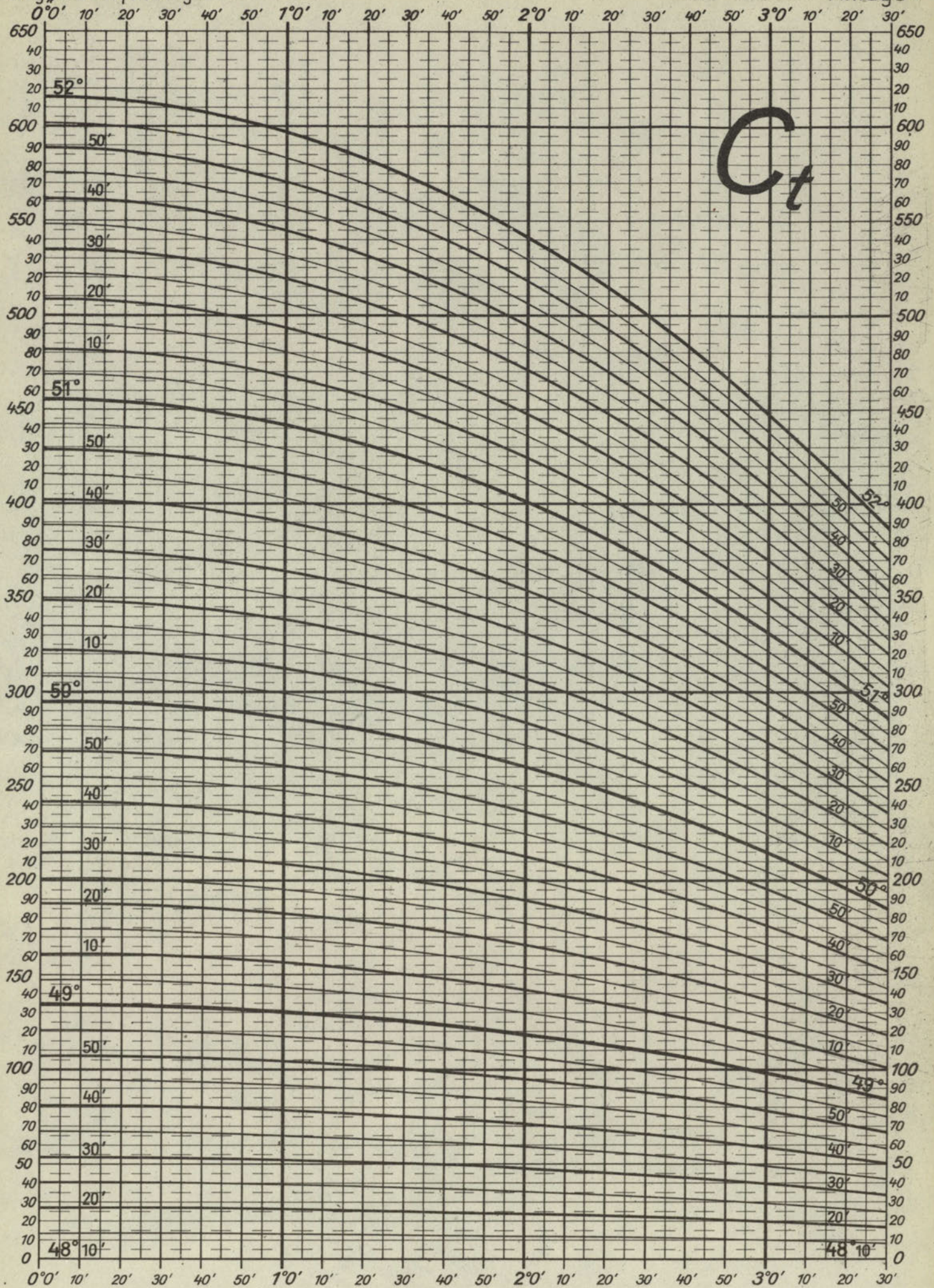


0°				1°			2°			3°			
'	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	'
0	531 788 523	22	18 52 991	531 836 915	2712	18 52 961	531 982 116	5402	18 52 871	532 224 202	8093	18 52 719	0
1	536	67	991	838 542	2757	960	985 357	5446	869	229 058	8138	716	1
2	577	112	991	840 195	2801	959	988 624	5490	867	233 941	8183	713	2
3	644	157	991	841 876	2845	958	991 918	5535	865	238 852	8228	710	3
4	738	202	991	843 583	2890	957	995 240	5580	863	243 789	8273	707	4
5	859	247	991	845 317	2935	956	998 588	5625	860	248 752	8318	704	5
6	789 007	292	991	847 078	2980	955	532 001 963	5670	858	253 743	8363	701	6
7	181	337	991	848 866	3025	954	005 365	5715	856	258 761	8408	698	7
8	383	382	990	850 681	3070	952	008 794	5760	854	263 806	8453	694	8
9	612	426	990	852 522	3115	951	012 250	5805	851	268 877	8498	691	9
10	531 789 867	470	18 52 990	531 854 391	3160	18 52 950	532 015 333	5850	18 52 849	532 273 976	8543	18 52 688	10
11	790 149	515	990	856 287	3204	949	019 243	5895	847	279 102	8588	685	11
12	459	560	990	858 209	3248	948	022 779	5940	845	284 255	8633	682	12
13	795	605	989	860 158	3293	947	026 343	5985	842	289 434	8678	678	13
14	791 158	650	989	862 134	3338	946	029 933	6030	840	294 641	8723	675	14
15	548	695	989	864 138	3383	944	033 551	6074	838	299 874	8768	672	15
16	964	740	988	866 168	3428	943	037 195	6118	836	305 135	8813	668	16
17	792 408	785	988	868 224	3473	942	040 866	6163	834	310 423	8858	665	17
18	878	829	988	870 308	3518	941	044 564	6208	831	315 737	8903	662	18
19	793 376	873	987	872 419	3562	940	048 289	6253	829	321 079	8947	658	19
20	531 793 900	918	18 52 987	531 874 556	3607	18 52 939	532 052 041	6298	18 52 827	532 326 447	8992	18 52 655	20
21	794 451	963	987	876 720	3652	938	055 820	6343	825	331 842	9037	652	21
22	795 029	1008	986	878 912	3697	936	059 626	6388	822	337 265	9082	648	22
23	634	1053	986	881 130	3742	935	063 459	6433	820	342 714	9127	645	23
24	796 266	1098	985	883 375	3787	933	067 318	6478	817	348 190	9172	641	24
25	924	1143	985	885 647	3832	932	071 205	6523	815	353 693	9217	638	25
26	797 610	1188	985	887 946	3877	930	075 119	6567	812	359 223	9262	634	26
27	798 322	1233	984	890 272	3922	928	079 059	6612	810	364 780	9307	631	27
28	799 062	1277	984	892 625	3966	927	083 026	6657	807	370 364	9352	627	28
29	828	1322	983	895 004	4001	925	087 021	6702	805	375 975	9397	624	29
30	531 800 621	1367	18 52 983	531 897 411	4055	18 52 923	532 091 042	6747	18 52 802	532 381 613		18 52 620	30
31	801 441	1412	982	899 844	4100	921	095 090	6792	799				31
32	802 288	1456	982	902 305	4145	920	099 165	6837	797				32
33	803 161	1501	981	904 792	4190	918	103 267	6882	794				33
34	804 062	1545	981	907 306	4235	917	107 396	6927	792				34
35	804 989	1590	980	909 847	4280	915	111 552	6972	789				35
36	805 944	1635	980	912 415	4325	913	115 735	7017	786				36
37	806 925	1680	979	915 010	4370	912	119 944	7062	784				37
38	807 933	1725	978	917 632	4415	910	124 181	7107	781				38
39	808 968	1770	978	920 280	4460	909	128 445	7151	779				39
40	531 810 030	1815	18 52 977	531 922 956	4505	18 52 907	532 132 735	7195	18 52 776				40
41	811 119	1860	976	925 658	4550	905	137 052	7240	773				41
42	812 235	1905	976	928 388	4594	904	141 397	7285	771				42
43	813 377	1950	975	931 144	4638	902	145 768	7330	768				43
44	814 547	1994	974	933 927	4683	900	150 166	7375	765				44
45	815 743	2038	974	936 737	4728	898	154 592	7420	762				45
46	816 966	2083	973	939 574	4773	896	159 044	7465	760				46
47	818 216	2128	972	942 438	4818	895	163 523	7510	757				47
48	819 493	2173	972	945 329	4863	893	168 028	7555	754				48
49	820 797	2218	971	948 246	4908	891	172 561	7600	752				49
50	531 822 128	2263	18 52 970	531 951 191	4952	18 52 889	532 177 121	7645	18 52 749				50
51	823 486	2308	969	934 162	4998	887	181 708	7690	746				51
52	824 870	2353	968	957 161	5042	885	186 322	7735	743				52
53	826 282	2398	968	960 186	5087	884	190 962	7780	740				53
54	827 720	2443	967	963 238	5132	882	195 630	7825	737				54
55	829 186	2487	966	966 317	5177	880	200 325	7870	734				55
56	830 678	2532	965	969 423	5222	878	205 046	7915	731				56
57	832 197	2577	964	972 556	5267	876	209 795	7960	728				57
58	833 743	2622	963	975 716	5312	875	214 570	8005	725				58
59	835 315	2667	962	978 902	5357	873	219 373	8049	722				59
60	531 836 915		18 52 961	531 982 116		18 52 871	532 224 202		18 52 719				60
'	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	$T_0$	$\Delta 1'' T_0$	$t_0$	'











# Umrechnung von geographischen in Gauß-Krüger Koordinaten des Deutschen Heeresgitters.

Punkt: \_\_\_\_\_  $L =$  \_\_\_\_\_  $\text{Hochwert}(X) =$  \_\_\_\_\_  
 $B$  \_\_\_\_\_  $L_0 =$  \_\_\_\_\_  $\text{Rechtswert}(y) =$  \_\_\_\_\_  
 $L$  \_\_\_\_\_  $\ell' = \lambda$  \_\_\_\_\_

## Hochwert

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_1) &= \text{-----} \\ B_2(\lambda_1) &= \text{-----} \\ \Delta &= \text{-----} \\ \frac{B - B_2}{10} \cdot \Delta &= \text{-----} \\ B_2 &= \text{-----} \\ B(\lambda_1) &= \text{-----} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(\lambda_2) &= \text{-----} \\ B_2(\lambda_2) &= \text{-----} \\ \Delta &= \text{-----} \\ \frac{B - B_2}{10} \cdot \Delta &= \text{-----} \\ B_2 &= \text{-----} \\ B(\lambda_2) &= \text{-----} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\lambda_2) &= \text{-----} \\ B(\lambda_1) &= \text{-----} \\ \Delta &= \text{-----} \\ v \cdot (\lambda_2 - \lambda) &= \text{-----} \\ d = \Delta - v \cdot (\lambda_2 - \lambda) &= \text{-----} \\ + \left\{ d \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{15} \right. &= \text{-----} \\ B(\lambda_1) &= \text{-----} \\ X &= \text{-----} \end{aligned}$$

## Rechtswert

$$\begin{aligned} B_2(\lambda_1) &= \text{-----} \\ B_1(\lambda_1) &= \text{-----} \\ \Delta &= \text{-----} \\ \frac{B_1 - B}{10} \cdot \Delta &= \text{-----} \\ B_1 &= \text{-----} \\ B(\lambda_1) &= \text{-----} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(\lambda_2) &= \text{-----} \\ B_1(\lambda_2) &= \text{-----} \\ \Delta &= \text{-----} \\ \frac{B_1 - B}{10} \cdot \Delta &= \text{-----} \\ B_1 &= \text{-----} \\ B(\lambda_2) &= \text{-----} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\lambda_1) &= \text{-----} \\ B(\lambda_2) - B(\lambda_1) = \Delta &= \text{-----} \\ \frac{\lambda - \lambda_1}{15} \cdot \Delta &= \text{-----} \\ B(\lambda_1) &= \text{-----} \\ \text{westl. } L_0 &= \text{-----} \\ \text{östl. } L_0 &= \text{-----} \\ \text{Kennziffer} + 500\,000 &= \text{-----} \\ y &= \text{-----} \end{aligned}$$

### Anmerkung:

Mittelmeridian  $L_0 = 3^\circ, 9^\circ, 15^\circ, 21^\circ$  usw.

Kennziffer  $\frac{L_0 + 3}{6}$

$v \cdot (\lambda_2 - \lambda) =$  Verbesserung durch 2. Differenz.

Genauigkeit  $\approx 1\text{ m}$

### Tafel für v:

$70^\circ = 1,3\text{ m}$	$40^\circ = 2,0\text{ m}$
$65^\circ = 1,6\text{ ''}$	$35^\circ = 1,9\text{ ''}$
$60^\circ = 1,8\text{ ''}$	$30^\circ = 1,8\text{ ''}$
$55^\circ = 1,9\text{ ''}$	$25^\circ = 1,6\text{ ''}$
$50^\circ = 2,0\text{ ''}$	$20^\circ = 1,3\text{ ''}$
$45^\circ = 2,0\text{ ''}$	



# Vereinfachte Umformung

von geographischen = in Gauß-Krüger-Koordinaten des DHG.

$r = \frac{+}{*} \quad 52 \, 291,01$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 552 \, 291,01$ <b>Hoch</b> = $5 \, 364 \, 901,42$	<b>Punkt: 1</b> $L = 339^{\circ} 42' 23",635$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 0^{\circ} 42' 23",635$ $\ell = \frac{+}{*} \quad 42',3939 \quad (4)$	$B = 48^{\circ} 25' 14",542$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 0^{\circ} 25' 14",542$ $b = + \quad 25',2424 \quad (4)$
$r = \frac{+}{*} \quad 88 \, 609,53$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 588 \, 609,53$ <b>Hoch</b> = $5 \, 438 \, 800,11$	<b>Punkt: 2</b> $L = 340^{\circ} 12' 47",194$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 1^{\circ} 12' 47",194$ $\ell = \frac{+}{*} \quad 72',7866 \quad (4)$	$B = 49^{\circ} 04' 51",972$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 1^{\circ} 04' 51",972$ $b = + \quad 64',8662 \quad (4)$
$r = \frac{+}{*} \quad 140 \, 385,36$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 640 \, 385,36$ <b>Hoch</b> = $5 \, 526 \, 270,27$	<b>Punkt: 3</b> $L = 340^{\circ} 57' 09",394$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 1^{\circ} 57' 09",394$ $\ell = \frac{+}{*} \quad 117',1566 \quad (4)$	$B = 49^{\circ} 51' 27",318$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 1^{\circ} 51' 27",318$ $b = + \quad 117',4553 \quad (4)$
$r = \frac{*}{-} \quad 150 \, 372,56$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 349 \, 627,44$ <b>Hoch</b> = $5 \, 602 \, 912,85$	<b>Punkt: 4</b> $L = 336^{\circ} 52' 41",713$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 2^{\circ} 07' 18",287$ $\ell = \frac{*}{-} \quad 127',3048 \quad (4)$	$B = 50^{\circ} 32' 37",698$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 2^{\circ} 32' 37",698$ $b = + \quad 152',6283 \quad (4)$
$r = \frac{*}{-} \quad 203 \, 572,79$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 296 \, 427,21$ <b>Hoch</b> = $5 \, 677 \, 700,54$	<b>Punkt: 5</b> $L = 336^{\circ} 05' 12",877$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 2^{\circ} 54' 47",113$ $\ell = \frac{*}{-} \quad 174',7865 \quad (4)$	$B = 51^{\circ} 11' 57",174$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 3^{\circ} 11' 57",174$ $b = + \quad 191',9529 \quad (4)$
$r = \frac{*}{-} \quad 233 \, 927,85$ $+ \text{ Kennz.} = \quad 57 \, 500 \, 000,0$ <b>Rechts</b> = $57 \, 266 \, 072,15$ <b>Hoch</b> = $5 \, 756 \, 642,73$	<b>Punkt: 6</b> $L = 335^{\circ} 36' 02",978$ $L_0 = 339^{\circ}$ $\ell = 3^{\circ} 23' 57",022$ $\ell = \frac{*}{-} \quad 203',9504 \quad (4)$	$B = 51^{\circ} 53' 45",578$ $B_0 = 48^{\circ}$ $b = + 3^{\circ} 53' 45",578$ $b = + \quad 233',7596 \quad (4)$

Anmerkung:  $L_0 = 3^{\circ}, 9^{\circ}, 15^{\circ}, 21^{\circ}$  usw. Kennziffer =  $\frac{L_0 + 3^{\circ}}{6}$ .

Für die Umrechnung der Sekunden in Minuten sind die Sekunden mit 0,01667 zu multiplizieren.  $r$  hat gleiches Vorzeichen wie  $\ell$ .

Formeln: Interpolation von  $T$  und  $S$ :  $T \cdot 10^5 = T_0 \cdot 10^5 + \Delta 1_{T_0}'' \cdot \Delta \ell'' \cdot 10^3$   
 $S \cdot 10^5 = S_0 \cdot 10^5 + \Delta 1_{S_0}'' \cdot \Delta b'' \cdot 10^3$

$$r \cdot 10^7 = \ell \cdot 10^4 \cdot S$$

$$\text{Rechts} = \text{Kennz.} + 500\,000 \pm r$$

$$\text{Hoch} \cdot 10^7 = T \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 \cdot t$$

Genauigkeit  $\pm 0,2m$   
maximaler Fehler  $< 0,5m$



Astronomische Stationen										Anlage 1	
Name	Beobach- tungs Jahr	Beobachter	Benutzte		Für Längenbestimmung Übermittlung der Zeitzeichen		persönliche Gleichungen der Beobachter	Breite *	Länge	Azimut von Süden aus gezählt	Bemerkungen
			Instrumente	Uhren	durch	von					
Algerien:											
Douéra	1864	Versigny, Ganot	cercle méridien Brunner	—	—	—	—	—	—	—	Ausgangspunkt der vorl. Berech- nung der Triang.
Dar Beïda	1869	Perrier, Titeux, Penel	"	—	—	—	—	—	—	—	—
Algier (Colonne Voirol)	1874/75	Loewy, Perrier	c.m. Secrétan- Eichens (0,475m), c.m. Rigaud Nr. 2	pendule Bréguet, " Berthoud	Draht	Paris	Der Größe nach ermittelt	36° 45' 02,7 ± 0,10	0° 42' 35,47 ± 0,15 ostw. Paris	0° 00' 57,88 ± 0,12 57,84 (2. endg. Best.) (Miroir de l'Atlas)	Ausgangspunkt der Berechnung der Triang., astr. Pfeiler geod. Pfeiler
	1886	de Magnin	c.m. Brunner	—	—	—	—	36° 45' 07,9 36° 45' 03,6	0° 42' 35,5	—	—
	1898	Bourgeois, Massenet	c.m. Brunner	—	—	—	—	36° 45' 03,6 ± 0,20	—	—	—
	1903	Noirel	Prismen Astrolab	—	—	—	—	36° 45' 08,20	—	—	—
	1912	Tilho, Troadec	Prism. Astr. Jobin (geod. Mod.)	compteurs Auricoste Nr. 7404, Thomas Nr. 877	Funk	Eiffelturm	nicht ermittelt	36° 45' 09,55	0° 42' 35,85 ostw. P.	—	—
Bône	1876	Perrier, Bassot	c.m. portatif Brunner, c.m. Secrétan-Eichens	régulateur Berthoud Nr. 1,2	Draht	Algier	ermittelt	36° 54' 13,3 ± 0,06	5° 25' 26,3 ± 0,18 ostw. Paris	180° 00' 57,09 (Sidi Aïssa),	—
Nemours	1876	dies.	c.m. Rigaud, c.m. Secrétan-Eichens	régulateur Bréguet, Berthoud Nr. 2	"	"	"	35° 05' 49,5 ± 0,08	4° 11' 08,70 ± 0,18 west. Paris	0° 00' 56,77 ± 0,17 (Djerr el Amar)	—
Biskra	1877	Bassot, Perrier	c.m. Rigaud, c.m. Brunner Nr. 1 (0,475m)	chronomètre Bréguet Nr. 2192, pendule Berthoud Nr. 1	"	"	"	34° 51' 13,6 ± 0,07	3° 23' 15,45 ± 0,22 ostw. Paris	180° 02' 17,55 ± 0,008 (Bourzel)	—
Laghouat	1877	Perrier, Bassot	c.m. portatif Brunner, c.m. Brunner Nr. 1	chronomètre Bréguet Nr. 950, pendule Berthoud Nr. 1	"	"	"	33° 48' 07,8 ± 0,07	0° 32' 32,3 ± 0,21 ostw. Paris	179° 59' 48,57 ± 0,09 (Dakla), 179° 08' 49,9 (Milog)	—
	1886	Defforges, de Magnin	c.m. Brunner	—	—	—	—	33° 48' 00,1	—	—	—
Géryville	1878	Defforges, Perrier	c.m. Brunner Nr. 1 c.m. Rigaud	chronometre Bréguet Nr. 950, pend. Berthoud Nr. 1	"	"	ermittelt	33° 40' 51,5 ± 0,10	1° 19' 35,9 ± 0,21 westl. Paris	0° 00' 50,5 ± 0,18 (Dj. Méchéria)	—
M'Sabiha	1879	Perrier, Bassot	c.m. Brunner Nr. 1 c.m. Rigaud	chronographe Bréguet, pendule Berthoud Nr. 1	"	"	"	35° 39' 37,05 ± 0,06	3° 11' 10,77 ± 0,21 westl. Paris	0° 01' 30,72	—
Guelles Stel	1887	Perrier, Bassot, Defforges	c.m. Brunner	—	"	Algier u. Laghouat	"	35° 07' 50,3 ± 0,10	0° 40' 46,57 ± 0,21 ostw. Paris (von Algier aus) 49,55 ± 0,25 (von Laghouat aus)	161° 37' 24,22 (Dir el Hamar)	—
Ain Séfra	1898	de Fontlongue, Scherdlin	c.m. Brunner	—	"	Algier	Durch Beob.- Wechsel ausgesch.	32° 45' 25,6 ± 0,20	3° 38' 22,89 ± 0,09 westl. Algier	125° 22' 15,2 (Moghad)	Länge vorläufig
Sétif	1898	Maurain, Massenet	c.m. Brunner	—	"	"	"	36° 11' 29,4 ± 0,16	2° 21' 10,40 ± 0,08 ostw. Algier	46° 52' 59,8 (Sdim)	"
Saida	1898	de Fontlongue, Maurain	c.m. Brunner	—	—	—	—	34° 46' 02,4 ± 0,14	—	180° 07' 35,4 (Tiberguent)	—
Bouzaréa	1898/99	Trépied, Massenet, Sy, Rambaud	c.m. Brunner	—	Draht	Algier	ermittelt und ausgeschaltet	—	0° 00' 43,92 ± 0,09 westl. Algier = 0° 41' 51,55 ± 0,17 ostw. Paris	—	—
	1903	Noirel	Prismen-Astrolab	—	—	—	—	36° 48' 02,50	—	—	—
	1912	Tilho, Troadec	Prism. Astr. Jobin (geod. Mod.)	compteurs Auricoste Nr. 7404, Thomas Nr. 877	Funk	Eiffelturm	nicht ermittelt	36° 48' 03,1	0° 41' 54,75 ostw. Paris	—	—
Amirauté (Leuchtturm)	1899	Massenet	c.m. Brunner	—	—	—	—	36° 47' 22,8 ± 0,22	—	—	—
	1903	Noirel	Prismen-Astr.	—	—	—	—	36° 47' 18,08	—	—	—
	1912	Tilho, Troadec	Prism. Astr. Jobin (geod. Mod.)	Auricoste 7404, Thomas 877	Funk	Eiffelturm	nicht ermittelt	36° 47' 19,3	0° 44' 03,60 ostw. Paris	—	—
Dély-Jbrahim	1912	"	"	"	"	"	"	36° 45' 12,1	0° 38' 45,15 ostw. Paris	—	—
Chéraga	1912	"	"	"	"	"	"	36° 47' 12,9	0° 34' 44,10 ostw. Paris	—	—
Tunesien											
Carthago	1878	Perrier, Defforges	c.m. Brunner Nr. 2 Rigaud	chronomètre Bréguet Nr. 2192, pendule Berthoud Nr. 1	Draht	Algier	ermittelt	36° 51' 06,5 ± 0,10	7° 59' 06,7 ± 0,22 ostw. Paris	180° 01' 00,9 ± 0,17 (Marsa)	Ausgangspunkt der 2. Berechnung d. Triang., astr. Pfeiler geod. Pfeiler
								36° 51' 06,7	06,7	01° 00,9 (Marsa)	—
Médenine	1898	Dumézil, Scherdlin, Massenet	c.m. Brunner	—	"	"	ausgeschaltet	33° 22' 28,0 ± 0,15	7° 20' 32,63 ± 0,09 ostw. Algier	18° 30' 10,8 (Smoumnia)	—
Gafsa	1898	Scherdlin, Massenet	"	—	"	"	"	34° 24' 57,0 ± 0,08	5° 43' 39,86 ± 0,08 ostw. Algier	268° 27' 37,5 (Biadah)	—
Kairouan	1898	Scherdlin, Massenet	"	—	—	—	—	35° 43' 04,5 ± 0,13	—	98° 16' 36,3 (Taourit)	—
Biserta	1911	Noirel, Bellot, (in Paris), Tsatsopoulos, Lancelin	Prismen Astr. Jobin c.m.	horloges, chronographes à plumes Bréguet	Funk	Paris (Obs.) bzw. Biserta	ermittelt und ausgeschaltet	37° 09' 36,8	7° 28' 06,56 ± 0,20 ostw. Paris	—	—
Marokko											
Sidi bou Rziguine	1913	Perrier	Mikroskop-Theod. Huetz Nr. 9	montres de torpilleur	Funk	Eiffelturm	nicht ermittelt	34° 59' 27,95 ± 0,40 = 38° 8790,0	nicht bekannt	350° 0190,09 (?)	vorl. Wert des franz. Teils der Grenzkommission
								38° 8787,6	9° 4880,0 westl. Paris	307° 1121,5 (Sidi Aïssa)	Werte d. gemischten Kommission (eben- falls vorläufig!)
Agourai	1921/22	Perrier, Reignier	c.m. Brunner (0,42m) Nr. 1, Astrolab Jobin (mod. geod.) Nr. 75	horloge Berthoud Nr. 1, chronographe à plumes Bréguet	Funk	Eiffelturm, Lyon, Bordeaux	"	33° 47' 01,40	5° 31' 37,878 westl. Gr.	nicht berechnet	Werte vorläufig
Merchich	1922	Reignier, Guérinat	c.m. Brunner (0,42m) Nr. 4, Astrolab S. O. M. Nr. 24	pendule sidérale Berthoud Nr. 2, chronographe Bréguet	"	"	"	37° 1665,838 ± 0,092	8° 3973,612 ± 9,26 westl. Gr.	399° 9989,727	Werte bezogen auf den Pfeiler d. c.m. Ausgangspunkt der Berechnung d. Triang.

\*Die Genauigkeitsangaben sind für  
Algerien und Tunesien die wahrschein-  
lichen Fehler, für Marokko liegt  
keine Erklärung vor.



Grundlinienmessung									Anlage 2
Name	Zeitpunkt der Messung	a) Leitung b) Beobachter	Benutztes Meßgerät	Art der Messung	Eichung	Form	Reduzierte Länge mit Fehler-Angabe	Erreichte Genauigkeit	Bemerkungen
Algerien									
Blida	2.V.-23.IX. 1854	a) Hossard b) Marel, Foerster	Bimetallische Meßstange von Porro (3m), verbessert durch Hossard	einmal gemessen	Das bimetallische Vergleichsmeter des Apparats Porro wurde vom Conservatoire des arts et métiers mit der Nachbildung I <sub>2</sub> d. Urplatinometers (mètre des archives) geeicht August 1866	gerade	10 000,286 m ± 10,25 mm	1: 1 000 000	
	II./III. 1910	a) Lallemand b) —	Monometallische Meßstange (4m), Jäderindrähte (24m) Nrn. 13, 14, 15, 306, 307, 308, Gerät Carpentier	Teilstrecke dreimal mit Meßstange, ganze Grundlinie hin und zurück mit allen Drähten	Meßstange wurde im Jan. 1910 in Breteuil geeicht, die Drähte auf der Teilstrecke von 960 m	—	9 999,6304 theoretischer Kilometerfehler (aus Drahtmessung): 0,62 mm tatsächlicher mittl. Kil.-Fehler: 6,90 mm	1: 1 500 000 1: 140 000	Ergebnis der Messung verworfen
	18.XII. 1912 - 4. II. 1913	a) Lallemand b) Vicq, Penel, de Fontanges, Cornudet, Niolet,	Invar-Meßstange (4m) N <sup>o</sup> 0	Teilstrecke 4 mal, ganze Grundlinie hin und zurück	Meßstange wurde beim Bureau International des Poids et Mesures im Sept./Okt. 1911 und im April 1913 geeicht	—	9 999,624 445 m	—	
Bône	10.X.-10.XII. 1866	a) Perrier b) Bondivenne, Derrien	wie Blida (1854)	einmal gemessen	wie Blida (1854) Eine weitere Eichung mit genaueren Methoden wurde vom B. I. P. M. vorgenommen (um 1885), die Grundlinie nach der 2. Eichung ist um 1:34 200 kürzer	gerade	10 325,167 m ± 10,20 mm (erste Eichung) 10 324,8633 m 866 81 m *	1: 1 000 000 —	
Oran	10.X.-20.XI. 1867	Dieselben	wie Blida (1854)	einmal gemessen	wie Bône, die Verkürzung beträgt 1:30 900	gerade	9 364,178 m ± 9,22 mm (erste Eichung) 9 363,8754 m (zweite Eichung)	1: 1 000 000 —	
	III./IV. 1910	a) Lallemand	Jäderindrähte (24m) Nrn. 13, 14, 15, 306, 307, 308,	hin und zurück mit allen Drähten	Eichung auf der Teilstrecke (960 m) von Blida (1910)		9 363,8785 m mittl. Kilom.-Fehler ± 0,78 mm	1: 1 300 000	vgl. dazu Blida (1910)
Laghouat	13.-19. II. 1913	a) Lallemand b) vgl. Blida (1912/13)	Invardrähte (24m) Nrn. 306, 307, 308	hin mit 306, 307, zurück mit 306, 308	Eichung auf der Teilstrecke von Blida (1912/13) am 1.-3. II. 1913 und 13. III. 1913, sowie in Breteuil (XII. 1912 und III. 1913)	gerade	9 363,875 m * 6 624,859 43 m mittl. Kilom.-Fehler ± 5,9 mm	1: 1 700 000	zur Reduktion zunächst nur trig. Höhenbestimmung, 1931 an feinnivelllement angeschlossen
Ouargla	1920	—	—	—	—	—	11 641 m (nuerkundet)	—	1932 an das Niv. angeschlossen
Méchéria	16.XI.-15.XII. 1931	a) Reignier b) Jahan, Maillard, Salin, Pehau	Invardrähte (24m) Nrn. 306, 307, 308, 564, Meßapparat Secrétan	hin und zurück mit je zwei Drähten; 306 blieb in Reserve	Eichung durch B. I. P. M. in Sèvres im Okt. 1931 und März/April 1932	gerade, zwei Abschnitte (A und B)	A: 8 608,310 86 m ± 0,95 mm B: 11 139,584 57 m ± 2,38 mm	1: 9 063 000 1: 4 681 000	Beide Grundlinien mit Verbesserungen für den Unterschied der Schwerkraft zwischen den Orten der Eichung und der Messung versehen und an das Fein-Niv. angeschlossen
Biskra	3.-26. I. 1932	a) Reignier b) wie Méchéria	wie Méchéria	wie Méchéria	wie Méchéria	gerade, zwei Abschnitte (West u. Ost)	West: 9 536,563 09 m ± 1,74 mm Ost: 9 339,156 53 m ± 0,93 mm	1: 5 481 000 1: 10 000 000	
Tunesien									
Tunis	1908	a) Lallemand b) —	Monometallische Invar-Meßstange (4m) Nr. 0	westl. Abschnitt zweimal, ostw. Abschnitt einmal gemessen	Eichung mit dem Invar-Vergleichsmeter L 0 des B. I. P. M.	einmal gebrochen	8 217,633 5 m wahrscheinlicher Kilometerfehler ± 0,51 mm (aus westl. Abschnitt) 8 217,652 7 m *	1: 2 000 000	
Médenine	1909	a) Lallemand b) —	Invar-Drähte (24m) Nr. 13, 14, 15	hin und zurück mit allen Drähten	Eichung auf dem westl. Abschnitt der Grundlinie von Tunis (1908)	gerade	10 156,965 m wahrscheinlicher Kilometerfehler ± 3,29 mm 10 156,963 m *	1: 300 000	
Marokko									
Sidi bou Rziguine	1913	a) Perrier b) —	Invardrähte Nrn. 13, 14, 15	zwei Messungen mit je 2 Drähten	—	gerade	4 578,488 25 m ± 5,1 mm (gemessene Länge)	1: 900 000	
Agourai	23.IV.-17.V. 1921	a) Cornudet b) L'Hôte, Tardi, Delienne, Bidan	Invardrähte (24m) Nrn. 565, 566, 568, Invardraht (8m) Nr. 509, Invarband (4m) Nr. 71; Meßapparat Carpentier	geplant waren 3 Messungen mit je 2 Drähten; Nr. 565 fiel jedoch wegen Beschädigung während der Messung aus	Eichung durch B. I. P. M. in Sèvres im Juni 1920 und Okt. 1921	gerade	12 281,419 48 m ± 1,99 mm	1: 6 160 000	Höhenbest. durch Niv., Verbesserungen für Unterschied der Schwerkraft zwischen den Orten der Eichung und der Messung angebracht
Ber-Réhid	3.-23. XI. 1922	a) Figaret b) Thimel, Reignier, Guérinat	wie bei Agourai; statt Nr. 568 die Nr. 567	Drei Messungen mit je 2 Drähten	Im Sept. 1922 und Febr./März 1923	gerade	11 036,561 54 m ± 1,01 mm	1: 10 890 000	desgl.
Marrakech	15.-30. I. 1926	a) Michel b) Figaret, Bernard, Pouylau,	Drähte (24m), Nr. 565, 566, 568, Meßapparat Carpentier	hin und zurück mit je 2 Drähten	im August 1925 und Juli 1926	dreimal gebrochen wegen Flußüberquerung	11 298,445 0 m ± 5,71 mm	1: 1955 000	desgl.
Guercif	10.-31. XII. 1926	a) Bazerque b) Gorceix, Mathieu, Ivanoff	wie Marrakech; Meßapparat Secrétan	wie Marrakech	im Juli 1926 und August 1927	gerade	15 136,722 25 m ± 1,53 mm	1: 10 000 000	desgl.
Taroudant	25. II. - 15. III. 1935	a) Goevaers b) Clos-Arceuduc, Arragon, Gaida, Ivanoff	Invardrähte (24m) Nrn. 565, 566, 567, 568, Invardraht (8m) Nr. 509; Meßapparat Secrétan	wie Marrakech, Draht Nr. 568 wurde jedoch nicht benutzt	im August/Sept. 1934 und Sept. 1935/Jan. 1936	zweimal gebrochen wegen Flußüberquerung	9 694,131 20 m ± 1,22 mm	1: 8 500 000	Höhenbestimmung trigonometrisch von Marrakech aus
Bou Denib	1938	—	—	—	—	—	12 945 m	—	keine Angaben veröffentlicht

\*Angaben von Perrier 1926 (beruhen vermutlich auf den inzwischen durch Fein-Niv. bestimmten Höhen)



Netzmessung						Anlage 3
Parallelkette (P.K.) oder Meridiankette (M.K.)	Zeitpunkt der Messung	Beobachter	Anzahl der Dreieckspunkte	Benutzte Instrumente	Dreiecksschlüsse zwischen..... und.....	Bemerkungen
<b>Algerien</b>						
Algerische Küstenkette (P.K.), ostw. Teil	1860-1865	Versigny, Perrier, Roudaire	44	cercle répétiteur Gambey Nrn. 13 u. 4 (0,275m) (4 Nonien, 10 <sup>cc</sup> Ablesung)	+9,9 -7,8	Die Beobachtungen mit c.r. Gambey wurden 1906-1910 mit c.a. wieder- holt.
westl. Teil	1864-1868	Perrier, Roudaire	30	c.r. Gambey Nr. 3. cercle azimutal Brunner Nr. 2 (2 Mikroskope, 4 <sup>cc</sup> Ablesung)	+9,2 -6,8	
M.K. von Biskra, nördl. Teil	1872	Roudaire, de Villars	12	c.a. Brunner, Theodolite Brunner Nrn. 3 u. 4	+1,5 -3,3	
südl. Teil	1901-1902	Meunier, Prévost	29	c.a. Huetz Nr. 4 (2 Mikroskope)	+10,6 <sup>cc</sup> -12,7 <sup>cc</sup>	
M.K. von Laghouat, nördl. Teil	1886	Bassot, Tracou, Defforges, Brullard	17	c.a. Brunner Nrn. 1, 2, 3 (4 Mikroskope)	+9,3 <sup>cc</sup> -2,9	
südl. Teil	1899-1901	de Fonlongue	44	c.a. Huetz Nr. 2	+10,4 <sup>cc</sup> -10,7 <sup>cc</sup>	
Südalgerische P.K., ostw. Teil	1892-1894	de Fonlongue	35	petit c.a. (4 Mikroskope)	+6,4 <sup>cc</sup> -9,5 <sup>cc</sup>	
westl. Teil	1889-1891	Barisien, Dumézil	20	petit c.a.	+9,3 <sup>cc</sup> -8,2 <sup>cc</sup>	
M.K. von Méchéria	1892	Barisien	9	petit c.a.	+9,6 <sup>cc</sup> -12,2 <sup>cc</sup>	
<b>Tunesien</b>						
P.K. von Bône-Tunis	1884-1886	Brullard, Barisien	18	c.a. Brunner (0,32m) - (2 Mikroskope, 1867) c.a. Brunner (0,42m) (4 Mikroskope, 1870)	+5,0 <sup>cc</sup> -3,5 <sup>cc</sup>	
M.K. von Gabès	1888-1890	Tracou, Dumay, Barisien	28	c.a. (0,32m) (4 Mikroskope)	+9,5 <sup>cc</sup> -10,2 <sup>cc</sup>	
<b>Marokko</b>						
P.K. von Meknès, westl. Teil	1921-1924	Figaret, Reignier, Adam, Guéritat, Guinand, Tardi	17	c.a. Brunner (0,42m) Nrn. 3 u. 4	—	Sämtliche Beobachtungen geschahen zentrisch Wegen zu großer Drei- eckschluß-Fehler wurde 1928 auf 5 Punkten nachbeobachtet Zielung nicht mehr nach Spiegeln, sondern nach Tafeln, die senk- recht zur Zielrichtung aufgestellt wurden, dadurch angeblich er- heblich bessere Drei- eckschlüsse
ostw. Teil	1924-1927	Morange, La Salle, Rumeau, Barzerque	17	—	—	
M.K. von Marrakech	1924-1926	Figaret, Pouylau	14	—	—	
M.K. von Meknès, nördl. Teil	1924-1925	Reignier, Bonneval, Rainoird	14	—	—	
südl. Teil	1927, 1929	Tardi, Rumeau, Bazerque, Volontat	7	—	—	
M.K. von Guercif	1927 u. 1934-1938	Bodinot, Lejay, Martin	19	c.a. (0,30m)	—	
P.K. von Mogador	1928-1929	Aubry, Simon	9	—	—	
P.K. von Taroudant	1931-1934	Bidan, Lockhart, Clos-Arce- duc, Arragon	15	Großer Theodolit Wild	—	
P.K. von Ain Séfra - Bou Denib - Taroudant	—	—	—	—	—	geplant