

1423

Nicht für die Öffentlichkeit bestimmt!



1. Jahrgang

Heft 3

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

August 1942

Státní zeměměřičský a kartografický úřad
Knihovna
9175 ✓

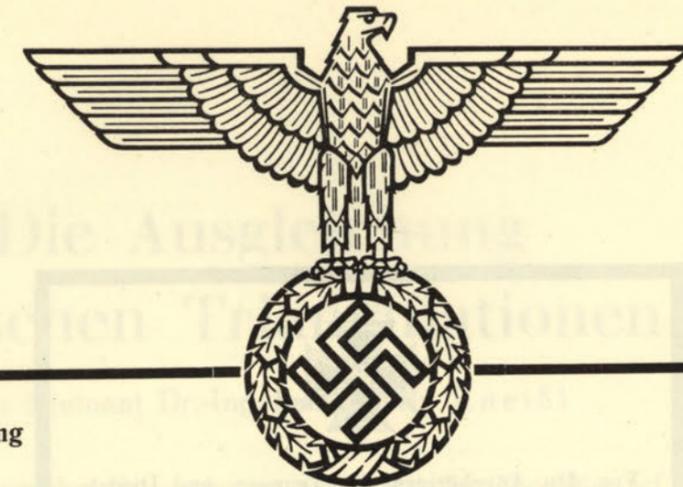
Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin

Druck: Kr.Kart.Verm.Amt Warschau

1423

GAZK

1717



1. Jahrgang

Heft 3

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

August 1942

INHALT:

- Lt. Dr.-Ing. habil. M. Kneißl: Die Ausgleichung der russischen Triangulationen I. O. S. 1
- Krassowsky (1931): Methoden zur Ausgleichung der staatl. Triangulation I. O. S. 3
- Krassowsky (1932): Methoden zur Ausgleichung der Triangulationen I. O. in der UdSSR. S. 62
- Urmajew (1931): Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten S. 74

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin

Die Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens erscheinen in zwangloser Folge in jährlich etwa sechs Heften. Sie werden vom Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens übersandt, eine Veröffentlichung im Buchhandel erfolgt vorläufig nicht. Abdruck nur mit Genehmigung des Kr. Kart. Verm. Chefs.

Beiträge sind zu richten an OKH./GenStdH./Kr. Kart. Verm. Chef, Berlin W 35, Lützowstraße 60



Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland:

Leutnant Koch, Peter, Führer eines Armeekartenlagers, gestorben nach der Verwundung durch Bombensplitter am 24.5.1942 in Russland;

Oberleutnant Klotz, Helmut, Führer einer Armeekartenstelle, gefallen durch Fliegerbombe am 24.6.1942 in Russland;

Gefreiter Pape, Ernst, Elektriker bei einer Armeekartenstelle, gefallen am 24.6.1942 durch Bombensplitter;

Gefreiter Eckel, Paul, Rotaprintdrucker bei einer Armeekartenstelle, gefallen am 24.6.1942 durch Bombensplitter;

Wachtmeister Geiger, Erich, Verm.-Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), gefallen bei einem Luftangriff am 1.7.1942 in Russland.

Die Ausgleichung der russischen Triangulationen I. O.

Von Leutnant Dr.-Ing. habil. Max Kneißl

Zur Anregung theoretischer Untersuchungen und praktischer Vorschläge auf dem Gebiete der Grossraumvermessung ist beabsichtigt, in den Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens bedeutendere Veröffentlichungen über die Landes- und Kolonialvermessungen des Auslandes zu besprechen oder durch Übersetzungen der Originalschriften der deutschen Wissenschaft und Fachwelt zugänglich zu machen. Weiterhin wird mit Rücksicht auf die vermessungstechnischen Aufgaben im neuen Europa die historische Entwicklung der europäischen Landesvermessungen, insbesondere die Entwicklung der Triangulationen, des Nivellements, der kartographischen Arbeiten usw. auf Grund der jeweiligen amtlichen Veröffentlichungen und Druckwerke dargestellt. Im Zuge dieser Darstellung wurde bereits im Heft 2 der vorliegenden Mitteilungen über die grundlegenden russischen Triangulationen berichtet. Entsprechende Überblicke über die Triangulationen der baltischen Staaten, über Belgien, Holland, Frankreich und die südosteuropäischen Staaten usw. werden zur Zeit bearbeitet und laufend veröffentlicht. Durch diese Veröffentlichungen soll dem Vermessungsoffizier und dem Vermessungsingenieur die Geschichte der europäischen Landesvermessungen näher gebracht und das Verständnis für die gemeinsamen europäischen Aufgaben vertieft werden.

Zur praktischen Lösung der gemeinsamen europäischen Aufgaben auf dem Gebiete der Landesvermessungen wurden durch den Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens in enger Zusammenarbeit mit den europäischen Vermessungsinstituten die Arbeiten für einen grosszügigen geodätischen und kartographischen Zusammenschluss der europäischen Landesvermessungen eingeleitet. Im einzelnen wurden hierfür bereits eine Reihe von Vorarbeiten — wie z. B. die Zusammenstellung der Triangulationsgrundlagen und der Nivellementsnetze, die Berechnung und Aufstellung von Hilfstafeln für die verschiedenen Ellipsoidübergänge, eine Darstellung der verschiedenen Projektionssysteme und die Überführung der jeweiligen Landeskoordinaten in ein einheitliches System und verschiedene kartographische Arbeiten — durchgeführt. Über den Stand und die Fortschritte dieser Arbeiten wird von Fall zu Fall eine Mitteilung erscheinen.

In dem vorliegenden Heft wird die Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze von F. N. Krassowsky durch Übersetzungen der einschlägigen Originalschriften dargestellt. Diese Ausgleichungsmethode wurde für die Ausgleichung der ostwärts der Meridiankette Pulkowo-Nikolajew gelegenen Dreiecksketten und Polygone I. O. der Triangulation der UdSSR im grossen Umfang verwendet und hat damit grosse praktische Bedeutung gewonnen. Sie bildet neben der amerikanischen Bowie-Methode*) einen der bemerkenswertesten Versuche zur Bearbeitung und Berechnung umfangreicher Landestriangulationen unter Berücksichtigung astronomischer Ortsbestimmungen und Azimutmessungen. Die Methode von Krassowsky stützt sich im wesentlichen auf die Helmertsche Methode**) zur Ausgleichung astronomisch-geodä-

*) The Bowie — Method of triangulation adjustment as applied to the first — order net in the Western Part of the United States, Special Publication Nr. 159, U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Washington 1930.

**) F. R. Helmert Lotabweichungen, Heft 1, Veröff. des Preuss. Geodät. Instituts, Berlin 1886.

tischer Netze und in einzelnen Rechnungsgängen auch unmittelbar auf die Bowie-Methode. Hinweise und Aufsätze über die Ausgleichungsmethode von Krassowsky finden sich in den Veröffentlichungen der Balt. Geod. Kommission, 5. Tagung, Helsinki 1931, S. 92 u. 93, S. 266 bis 275, 6. Tagung 1933, S. 109—118. Nähere Angaben über die praktische Anwendung dieser Methode enthält das Vorwort zum „Vorläufigen Katalog der trigonometrischen Punkte I. O. von Europäisch-Russland, herausgegeben vom Vereinigten wissenschaftlich-technischen Verlag des Volkskommissariats für Schwerindustrie der UdSSR, Hauptredaktion der Literatur für geologische Erkundung und Geodäsie, Moskau, Leningrad 1935“ und das Vorwort zum 1. Nachtrag hierzu („Katalog der trigonometrischen Punkte I. O. für das Gebiet der UdSSR, Ausgabe GUGSK. (KKWD.) SSSR., Moskau 1937“).

Die theoretische Ableitung der Formeln und Begründung der Methode sind von F. N. Krassowsky dargelegt und veröffentlicht in den Arbeiten des Staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie, 2. Heft, Ausgabe Moskau-Leningrad 1931, „Methoden zur Ausgleichung der Triangulation I. O. in den UdSSR“.

In dem 5. Heft der Arbeiten des Staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie, herausgegeben 1932, bringt Krassowsky unter demselben Titel Hinweise auf Vereinfachungen der Methode, die bei der praktischen Anwendung noch durchgeführt werden konnten.

Krassowsky unterteilt die Gesamt-Ausgleichung in mehrere Rechnungsgänge, wobei zunächst die Teilstücke der Triangulation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten, je für sich unter Berücksichtigung der Dreiecks-, Seiten-, Basis- und Azimutbedingungen, aber ohne Berücksichtigung des Anschlusszwanges in Länge und Breite und der Polygonbedingungen ausgeglichen werden. Nach der Ausgleichung der Teilstücke werden diese durch geodätische Linien ersetzt, zu Polygonen zusammengefasst und einer astronomisch-geodätischen Hauptausgleichung unterzogen. Durch diese Hauptausgleichung werden die Längen und Azimute der geodätischen Linien und damit die Lage der Knotenpunkte bestimmt. In einem weiteren Rechnungsgang werden dann die geodätischen Linien wieder durch die Dreiecksketten ersetzt und diese endgültig unter Berücksichtigung des Anschlusszwanges in Länge und Breite ausgeglichen. Die endgültige Ausgleichung der Teilstücke erfolgt in enger Anlehnung an die entsprechende Ausgleichung bei der Bowie-Methode. Die Einzelheiten dieser Ausgleichung wurden von N. A. Urmajew im 1. Heft der Arbeiten des Staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie, Leningrad 1931, „Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten“ dargestellt.

Im folgenden werden die beiden angeführten Arbeiten von Krassowsky und die Arbeit von Urmajew in deutscher Bearbeitung wiedergegeben. Die Bearbeitungen vermitteln ein vollständiges Bild über die theoretische Begründung und Ableitung der Ausgleichungsmethode und ihre praktische Anwendung. Bei der deutschen Bearbeitung wurden die Bezeichnungen — die im übrigen den deutschen Bezeichnungen vollständig entsprechen —, die Formeln, Tabellen und Abbildungen unverändert von den Originalen übernommen. Ebenso wurde im Text soweit als möglich die russische Ausdrucksweise beibehalten und Kürzungen, Ergänzungen und freie Übersetzung nur soweit vorgenommen, als es für das Verständnis erforderlich war.

Bei der Bearbeitung unterstützte mich Prof. Dr. Buchholz von der Heeresplankammer durch gelegentliche Ratschläge und durch eine Durchsicht der Bearbeitung tatkräftig. Ich darf daher an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Buchholz meinen besten Dank für die Mitarbeit an der vorliegenden Arbeit aussprechen.

Berlin, im Juni 1942

M. Kneißl

Methoden zur Ausgleichung der staatlichen Triangulation I. O.

vorgeschlagen von Prof. F. N. Krassowsky zur Einführung in der UdSSR.*)

§ 1. Ausgleichung und Berechnung einzelner Dreiecksketten der Triangulation I.O.

Wir nehmen an, dass die Triangulation I.O. — wie das auch in der UdSSR. der Fall ist — aus einfachen Dreiecksketten besteht. Als Teilstück (Kettenabschnitt) einer Reihe I.O. bezeichnen wir jede einzelne Dreieckskette zwischen 2 festen Ausgangsseiten, die aus den zugehörigen Basisnetzen bestimmt werden.

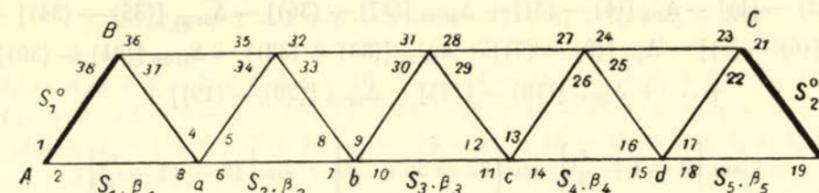


Abb. A.

In Abbildung A soll ein Kettenabschnitt zwischen den Ausgangsseiten $AB = S_1^\circ$ und $DC = S_2^\circ$ dargestellt werden. Von den Endpunkten der Ausgangsseiten muss wenigstens einer ein Laplacescher Punkt sein; in unserem Fall werden A und D als Laplacesche Punkte vorausgesetzt. Daher sind durch geodätische und astronomische Bestimmungen festzulegen

- in A:
- die geodätische Breite B_1
 - die astronomische Länge λ_1
 - das astronomische Azimut nach B. α_{AB}
 - das geodätische Azimut nach B. A_{AB}
 - die geodätische Länge L_1

- in D:
- die astronomische Breite φ_2
 - die astronomische Länge λ_2
 - das astronomische Azimut von D nach C α_{DC} .

Die Bezeichnung der beobachteten Richtungen ist aus der Abbildung zu ersehen.

Bei der Ausgleichung der vorliegenden Dreiecksketten sind die Dreiecksbeziehungen, die Basisgleichung und die Azimutbedingung zu beachten. Die Dreiecksbeziehungen haben die Form:

$$\left. \begin{aligned} (2) - (1) + (4) - (3) + (38) - (37) + v_1 &= 0 \\ (5) - (4) + (35) - (34) + (37) - (36) + v_2 &= 0 \\ \dots \\ (18) - (17) + (20) - (19) + (22) - (21) + v_9 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

*) Arbeiten des Staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie, 2. Serie von Prof. F. N. Krassowsky, 1931.

In den Gleichungen (a) ist v gleich der Summe der gemessenen Winkel des Dreiecks minus $180^\circ + \varepsilon$, wobei ε der sphärische Exzess des Dreiecks ist. (i) sind die Richtungsverbesserungen, v_i die Dreieckswidersprüche.

Zur Darstellung der Basisbedingung reduzieren wir die beobachteten Winkel zu ebenen Winkeln, indem wir sie um $1/3$ des sphärischen Exzesses des zugehörigen Dreiecks kürzen. Dadurch erhalten wir folgende Winkel:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3} & & & 5 - 4 - \frac{\varepsilon_2}{3} & & & 6 - 5 - \frac{\varepsilon_3}{3} \\ 4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} & & & 35 - 34 - \frac{\varepsilon_2}{3} & & & 8 - 7 - \frac{\varepsilon_3}{3} \\ 38 - 37 - \frac{\varepsilon_1}{3} & & & 37 - 36 - \frac{\varepsilon_2}{3} & & & 34 - 33 - \frac{\varepsilon_3}{3} \end{array}$$

usw.

Mit diesen Winkeln bilden wir die Basisbedingung und berechnen die Seiten s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 des Linienzuges AD .

Damit wird die Basisbedingung in folgender Form angeschrieben:

$$\begin{aligned} & \Delta_{2,1}[(2) - (1)] - \Delta_{3,4}[(4) - (3)] + \Delta_{37,35}[(37) - (36)] - \Delta_{34,35}[(35) - (34)] + \\ & + \Delta_{3,5}[(6) - (5)] - \Delta_{3,7}[(8) - (7)] + \Delta_{33,32}[(33) - (32)] - \Delta_{31,30}[(31) - (30)] + \\ & + \dots + \Delta_{18,17}[(18) - (17)] - \Delta_{20,19}[(20) - (19)] + \\ & + \lg \frac{\sin \left[2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[37 - 36 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[18 - 17 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[35 - 34 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[20 - 19 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]} + \\ & + \lg S_1^\circ - \lg S_2^\circ = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

In der Gleichung (b) bedeutet Δ die logarithmische Sinusdifferenz für $1''$ und die Zeiger bei Δ geben die entsprechenden Richtungen an. Die Seiten $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ erhält man in folgender Weise:

$$s_1 = \frac{S_1^\circ \sin \left[38 - 37 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}$$

$$s_2 = \frac{S_1^\circ \sin \left[2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[37 - 36 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[34 - 33 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[35 - 34 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[8 - 7 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}$$

und so weiter.

Die Berechnung der Seiten s_1, s_2, \dots, s_5 führt selbstverständlich auf den Widerspruch der Basisbedingung.

Wir bemerken noch, dass die Seiten s auf diese Weise aus den unverbesserten beobachteten Richtungen erhalten werden.

Das nächste Stadium umfasst die Aufstellung der Azimutbedingungen.

Diese Arbeit beginnt mit der Berechnung geodätischer Koordinaten für den Linienzug AD .

Wir berechnen mit Hilfe der Schreiberschen Formeln, ausgehend von B_1, L_1 und dem Azimut der Richtung 2

$$\beta = A_{AB} + 2 - 1,$$

die geodätischen Koordinaten der Punkte a, b, c, d und D und die Azimute $Aa, aA, ab, ba, bc, cb, cd, dc, dD, DC$ mit den Strecken s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 und den Winkeln

$$\begin{array}{l} \text{bei } a \dots 6 - 3 \\ \text{,, } b \dots 10 - 7 \\ \text{,, } c \dots 14 - 11 \\ \text{,, } d \dots 18 - 15 \\ \text{,, } D \dots 20 - 19. \end{array}$$

Wir erhalten dann:

die geodätische Breite B_2 des Punktes D ,
 „ „ Länge L_2 „ „ D
 und das geodätische Azimut A_{DC} von D nach C .

Werden die Azimute der Seiten mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ und ihre Gegenazimute mit $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4, \beta'_5$ bezeichnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= A_{AB} + 2 - 1 \\ \beta'_1 &= 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + \delta_1 \\ \beta_2 &= 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1 \\ \beta'_2 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ \\ \beta_3 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ \\ \beta'_3 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 180^\circ \\ \beta_4 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ \beta'_4 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ \\ \beta_5 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ \\ \beta'_5 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \\ A_{DC} &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \\ & + 20 - 19 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5. \end{aligned} \quad (c)$$

Hierin ist annähernd

$$\delta = (2) s \sin \beta \operatorname{tg} \varphi. \quad (d)$$

Die Verbesserung Δ_A des geodätischen Azimuts A_{DC} ist dann

$$\Delta_A = (2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19) + \sum_1^5 d\delta,$$

wobei unter $d\delta$ [die Änderung der Meridiankonvergenz infolge der Änderung der Seiten, der Breite und des Azimuts] zu verstehen ist:

$$d\delta = (2) \sin \beta \operatorname{tg} \varphi \cdot ds + (2) s \sin \beta \frac{d\varphi'' \cdot \sin 1''}{\cos^2 \varphi} + (2) s \cos \beta \operatorname{tg} \varphi \sin 1'' \cdot d\beta.$$

Wenn wir die Verbesserungen von $\alpha_{AB}, \alpha_{CD}, \lambda_1$ und λ_2 vernachlässigen, kann die vorläufige Laplacesche Bedingung für D so geschrieben werden:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2 - \Delta L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + \Delta_A. \quad (e)$$

In der Gleichung (e) ist ΔL_2 die Verbesserung der geodätischen Länge, die den Richtungsverbesserungen entspricht. Unter Vernachlässigung kleiner Glieder 2. Ordnung wird:

$$L_2 - L_1 = \sum_1^5 (2) s \sin \beta \sec \varphi$$

und daher

$$\Delta L_2 = \sum_1^5 \left\{ (2) \sin \beta \sec \varphi \cdot ds + (2) s \sin \beta \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + (2) s \cos \beta \sec \varphi \cdot d\beta \cdot \sin 1'' \right\}.$$

Hiernach ist leicht einzusehen, dass:

$$\Delta L_2 \sin \varphi_2 - \sum d\delta = - \sum (2) s \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi \cdot \sin 1'' +$$

$$+ \sum (2) \sin \beta \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi) ds + \sum (2) s \cos \beta \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi) d\beta \sin 1''.$$

Bei langen Teilstücken ist das 2. Glied das grössere; auf 200 km wird

$$\frac{\sum ds}{6400 \sin 1''} \cdot \frac{140}{6400} < \frac{1}{500} ''.$$

Für dasselbe Teilstück und für $s = 40$ km ist der Wert des 1. Gliedes:

$$- \sum (2) s \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi'' \cdot \sin 1'' < \frac{1''}{1600}.$$

Deshalb können wir in Bezug auf das Azimut ohne Bedenken annehmen, dass

$$\Delta L_2 \sin \varphi_2 = \sum d\delta \text{ ist.}$$

Mit Rücksicht hierauf kann die Azimutbedingung in folgender Form geschrieben werden:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + (2) - (1) + (6) - (3) +$$

$$+ (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19)$$

oder endgültig

$$(2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19) -$$

$$- [\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 - A_{DC}] + (\alpha_{AB} - A_{AB}) - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \quad (g)$$

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen (a), (b) und (g) nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt die Verbesserungen der in diesem Teilstück beobachteten Richtungen.

Bei Anwendung des hier dargelegten Verfahrens werden die Widersprüche der Basis- und Azimut-Bedingungen aus den unmittelbar beobachteten Grössen erhalten, die nicht durch irgendwelche willkürliche Korrekturen entstellt sind, wie dies bei anderen Ausgleichsmethoden geschieht; deshalb entsprechen die Widersprüche der Basis- und Azimut-Bedingungen in unserem Ausgleichungsverfahren tatsächlich den Beobachtungsfehlern in den Punkten des beobachteten Teilstücks.

Die Auflösung der Bedingungen (a), (b) und (g) darf als bekannt vorausgesetzt werden.

In die Azimut-Bedingung könnten auch Verbesserungen für die astronomisch bestimmten Längen und Azimute eingeführt werden, natürlich könnten aber diese Verbesserungen nur sehr unzuverlässig bestimmt werden. Sie werden daher in der Folge aus der allgemeinen Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes bestimmt.

Nach der beschriebenen Ausgleichung der beobachteten Richtungen und der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Richtungen müssen die Dreiecke nochmals zusammengestellt und die Seiten dieser Dreiecke nochmals berechnet werden. Dann müssen über den Linienzug $AabcdD$, ausgehend von B_1 und L_1 und A_{AB} nochmals die geodätischen Koordinaten und Azimute berechnet werden.

Bei dieser Berechnung erhält man für den Punkt D

die geodätische Breite B'_2 ,

die geodätische Länge L'_2

und das geodätische Azimut A'_{DC} von D nach C .

Dann kann aus den Koordinaten

für $A \dots \dots \dots B_1$ und L_1
für $D \dots \dots \dots B'_2$ und L'_2

die Länge S' der geodätischen Linie AD , das geodätische Azimut A'_{AD} von A nach D und das geodätische Gegenazimut A'_{DA} von D nach A berechnet werden.

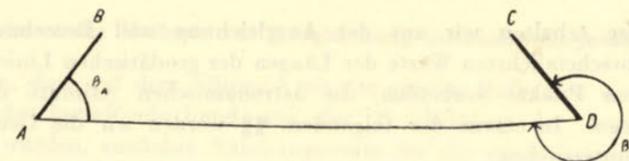


Abb. B.

Damit erhalten wir die Winkel β_A und β_D in den Punkten A und D (Abb. B) zwischen den Ausgangsseiten des Teilstücks und der geodätischen Linie AD und für die geodätische Linie AD die astronomischen Azimute:

$$\left. \begin{aligned} \beta_A &= A'_{AD} - A_{AB} \\ \beta_D &= A'_{DA} - A'_{DC} \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{AD} &= \alpha_{AB} + \beta_A \\ \alpha_{DA} &= \alpha_{DC} + \beta_D = A'_{DA} + (\alpha_{DC} - A'_{DC}) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Wenn auch die Azimute α_{AD} und α_{DA} nicht unmittelbar beobachtet wurden, so dürfen sie dennoch als astronomische Azimute bezeichnet werden.

In der Folge beachten wir, dass die Differenz

$$A'_{DA} - 180^\circ - A'_{AD}$$

der Differenz der geodätischen Azimute der geodätischen Linie S' mit dem Anfangsazimut α_{AD} in der Breite B_1 auf dem angenommenen Ellipsoid entspricht. Weiter nehmen wir eine Reihe von Teilstücken an, von denen sich eins an das andere anschliesst (Abb. C).

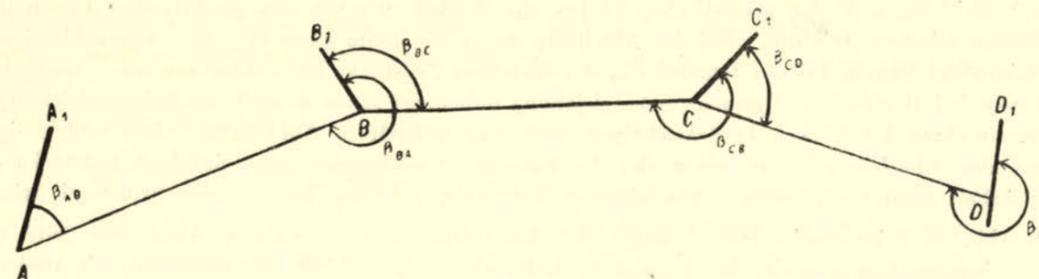


Abb. C.

Die Ausgangsseiten dieser Teilstücke werden mit $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 \dots$ bezeichnet. Dann behandeln wir alle Teilstücke in der oben beschriebenen Weise und erhalten die Länge $S'_{AB}, S'_{BC}, S'_{CD}$ der geodätischen Linien $AB, BC, CD \dots$, die die Laplaceschen Punkte $A, B, C, D \dots$ verbinden, und die Winkel $\beta_{AB}, \beta_{BA}, \beta_{BC}, \beta_{CB}, \beta_{CD} \dots$. Somit erhält man offensichtlich die Winkel zwischen den geodätischen Linien folgendermassen:

$$\begin{aligned} \text{bei } B & \dots \beta_{BA} - \beta_{BC} = \alpha_{BA} - \alpha_{BC} \\ \text{bei } C & \dots \beta_{CB} - \beta_{CD} = \alpha_{CB} - \alpha_{CD} \\ \text{bei } D & \dots \beta_{DC} - \beta_{DE} = \alpha_{DC} - \alpha_{DE}, \end{aligned}$$

wobei es nach der Art der Ableitung dieser Winkel klar ist, dass ihre Werte nicht durch Fehler entstellt sind, die ihre Ursache in der Bestimmung der astronomischen Azimute der Ausgangsseiten*) und den Verzerrungen dieser astronomischen Azimute durch den Einfluss der Lotabweichungen haben.

Auf diese Weise erhalten wir aus der Ausgleichung und Berechnung der Teilstücke der Triangulation die wahrscheinlichsten Werte der Längen der geodätischen Linien, die die aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkte verbinden, die astronomischen Azimute dieser Linien und die Winkel zwischen ihnen. In einem der folgenden §§ werden wir die Genauigkeit dieser Linien und Azimute näher untersuchen.

Die Elemente S' und α und die Winkel zwischen den geodätischen Linien unterliegen weiteren Verbesserungen, die den Polygonschlussbedingungen und den Laplaceschen Gleichungen entsprechen, in die noch die Verbesserungen der astronomischen Azimute und der astronomischen Längen als Unbekannte eingeführt werden müssen. Soweit wir die Laplacesche Gleichung schon bei der Ausgleichung der Teilstücke benutzt haben, geschah dies in so vereinfachter Form, dass Verbesserungen der astronomischen Azimute und Längen nicht eingeführt werden konnten, weshalb auch die Frage der Orientierung der Teilstücke auf dem Ellipsoid offen blieb.

Durch die Einführung der Laplaceschen Bedingung in Gleichung (e), wurde im wesentlichen nur die Differenz der geodätischen Azimute der beiden Ausgangsseiten des Teilstücks ausgeglichen, während die geodätische Orientierung unbeachtet blieb. Deshalb wissen wir noch nicht, inwieweit sich das Azimut A_{AB} dem endgültigen nähert, das zur Orientierung der ganzen Triangulierung auf dem angenommenen Ellipsoid zu benutzen ist. Diese Frage wird allein durch die Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes unter Beachtung der Polygonegleichungen und der sogenannten Laplaceschen Gleichungen entschieden, die in genauer und ausführlicher Form anzuwenden sind. Da bei der Ausgleichung des ganzen astronomischen Netzes an und für sich die Laplaceschen Gleichungen eingeführt werden müssen, die im wesentlichen Azimutbedingungen sind, hätten wir uns bei der beschriebenen Ausgleichung eines einzelnen Teilstücks auf die Berücksichtigung der Dreiecksbedingungen und der Basisgleichung beschränken können. So ging insbesondere Helmert in Deutschland vor, wodurch sich selbstverständlich bei der Berechnung und Ausgleichung der einzelnen Teilstücke einige Kürzungen ergaben. Aber mir erscheint es sehr wichtig schon vor der allgemeinen Ausgleichung des Polygonnetzes diejenigen Elemente mit möglichst grosser Zuverlässigkeit zu erhalten, die in dieser Ausgleichung wie unmittelbare Beobachtungen angesehen werden, nämlich die Längen S' der geodätischen Linien, die Winkel zwischen den geodätischen Linien und ihre astronomischen Azimute. Bei der Ableitung dieser Elemente kann sich eine Vernachlässigung der Azimutgleichungen bei der Bearbeitung der einzelnen Teilstücke bemerkbar machen. Ausserdem muss man bei Beginn der allgemeinen Ausgleichung unbedingt schon deshalb die Azimutgleichungen in den einzelnen Teilstücken berücksichtigen, weil eine verspätete Aufdeckung eines unzulässigen Wertes des Absolutgliedes in einer der Laplaceschen Gleichungen eines einzelnen Teilstücks die ganze Arbeit an der allgemeinen Ausgleichung der Staatl. Triangulierung zum Stillstand bringt.

Abb. D zeigt noch einen Mangel der beschriebenen Ausgleichung. Wenn die Seite CD die gemeinsame Ausgangsseite für 4 (oder 3) Teilstücke I, II, III, IV ist, so müssen die Dreiecke ECD und CFD entweder in die oben beschriebene Ausgleichung eingeführt, oder als starr und unveränderlich angesehen werden. Werden zuerst die Teilstücke I und II und dann erst die Teilstücke III und IV ausgeglichen, dann müssen bei der Ausgleichung der beiden letzten Teilstücke die Seiten CF und ED als Ausgangsseiten mit den Werten übernommen werden, die für sie bei der Ausgleichung der Teilstücke I und II bestimmt wurden. Werden zuerst die Teilstücke

*) Das ist nur insoweit richtig, als die Fehler der Azimute keinen Einfluss auf das Resultat der Ausgleichung der Winkel der Dreiecke hatten.

III und IV ausgeglichen, so müssen bei der Ausgleichung der Teilstücke I und II als Ausgangswerte EC und DF angenommen werden. Hierin liegt eine Willkür, die allerdings auf das Ergebnis wenig Einfluss haben wird. Daraus folgt, dass man eigentlich die Figur $CFDE$ für sich bearbeiten, ihre Dreieckswinkel mit besonders grosser Sorgfalt messen und alle 4 Punkte C, D, E, F als Laplacesche Punkte bestimmen müsste. Leider war dies bisher in der UdSSR. nicht möglich.

§ 2. Die Helmertsche Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze.

Wir nehmen an, dass auf dem Ellipsoid mit der grossen Halbachse a und der Abplattung e , dessen Ausmasse für das betreffende Land aus der Bearbeitung der astronomisch-geodätischen Ergebnisse abgeleitet wurden, zunächst Näherungswerte für die geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte der Triangulation bestimmt werden.*)

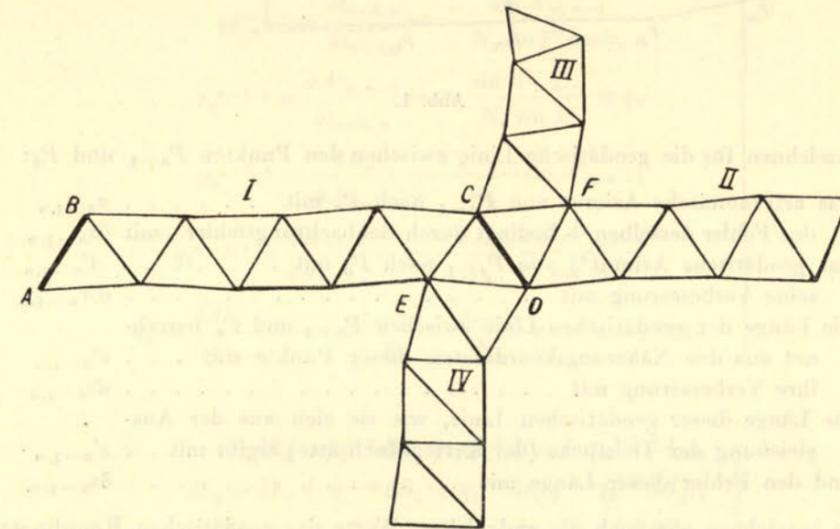


Abb. D.

Näherungskordinaten heissen diese Koordinaten, weil wir zu ihrer Ableitung die Triangulationspolygone nicht ausgleichen und in diesen Polygonen überschüssige Übertragungen nicht durchführen.

Für einen Punkt mit der Nummer n bezeichnen wir:

- die erwähnten Näherungskordinaten mit. B_n° und L_n° ;
- deren Verbesserungen aus der bevorstehenden Ausgleichung mit dB_n und dL_n ;
- die astronomische Breite und Länge mit. φ_n und λ_n ;
- die Fehler der astronomischen Koordinatenbestimmungen mit. . . $\delta\varphi_n$ und $\delta\lambda_n$.

Mit den Näherungskordinaten berechnen wir in aller Strenge die geodätischen Azimute A und die Längen s der geodätischen Linien, die die aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkte verbinden (s. Abb. 1); wir berechnen hierbei die Azimute, die Gegenazimute und die Längen der geodätischen Linien $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, \dots, P_3P_9, P_9P_{10}, \dots$. Diese Azimute und Längen entsprechen also streng den Werten der Näherungskordinaten B° und L° .

*) Die Laplaceschen Punkte sollen in den Dreiecksketten I.O. etwa 80 — 100 km auseinanderliegen.

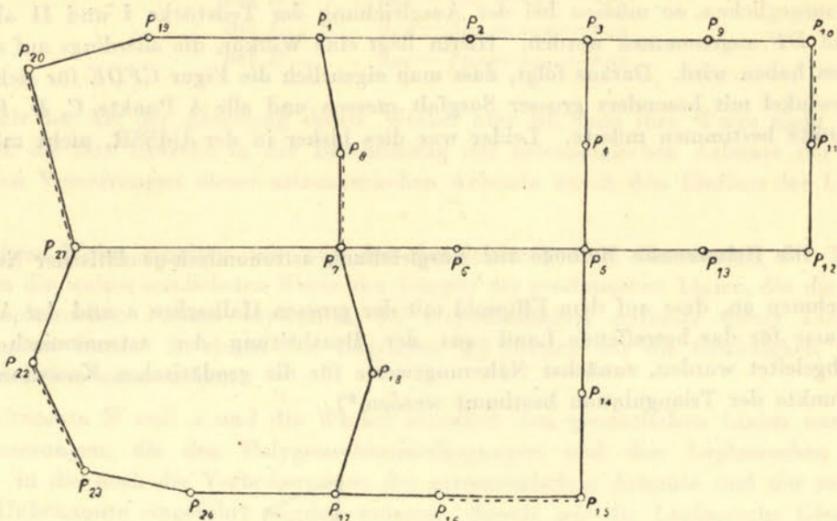


Abb. 1.

Wir bezeichnen für die geodätische Linie zwischen den Punkten P_{n-1} und P_n :

- das astronomische Azimut von P_{n-1} nach P_n mit $\alpha_{n-1,n}$
- den Fehler desselben — bedingt durch Beobachtungsfehler — mit $\delta\alpha_{n-1,n}$
- das geodätische Azimut*) von P_{n-1} nach P_n mit $A_{n-1,n}^0$
- seine Verbesserung mit $dA_{n-1,n}$
- die Länge der geodätischen Linie zwischen P_{n-1} und P_n , berechnet aus den Näherungskoodinaten dieser Punkte mit . . . $s_{n-1,n}^0$
- ihre Verbesserung mit $ds_{n-1,n}$
- die Länge dieser geodätischen Linie, wie sie sich aus der Ausgleichung der Teilstücke (der Kettenabschnitte) ergibt mit . . $s'_{n-1,n}$
- und den Fehler dieser Länge mit $\delta s_{n-1,n}$.

Endlich bezeichnen wir noch die endgültigen Werte der geodätischen Koordinaten und Azimute, die man nach der Ausgleichung des Netzes erhält, wie folgt:

- die Breite des n -ten Punktes mit B_n
- „ Länge „ n - „ „ „ L_n
- das Azimut von $(n-1)$ -ten Punkt zum n -ten Punkt mit . . . $A_{n-1,n}$.

Diese endgültigen geodätischen Koordinaten und Azimute werden sich von den entsprechenden astronomischen Werten, die um $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ und $\delta\alpha$ verbessert werden, nur um die Beträge der Lotabweichungen in $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ gegenüber dem bei der Ausgleichung angenommenen Ellipsoid unterscheiden. Die Komponenten dieser Lotabweichung in P_n bezeichnen wir mit ξ_n und η_n .

Damit bekommen wir:

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \xi_1 &= B_1^0 + dB_1 + \xi_1 &= \varphi_1 + \delta\varphi_1 \\ B_2 + \xi_2 &= B_2^0 + dB_2 + \xi_2 &= \varphi_2 + \delta\varphi_2 \\ L_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= L_1^0 + dL_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 \\ L_2 + \eta_2 \sec \varphi_2 &= L_2^0 + dL_2 + \eta_2 \sec \varphi_2 &= \lambda_2 + \delta\lambda_2 \\ A_{1,2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= A_{1,2}^0 + dA_{1,2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= \alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2} \\ A_{2,1} + \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 &= A_{2,1}^0 + dA_{2,1} + \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 &= \alpha_{2,1} + \delta\alpha_{2,1} \\ s_{1,2}^0 + ds_{1,2} &= s'_{1,2} + \delta s_{1,2} \end{aligned} \right\} (1)$$

*) Berechnet aus den Koordinaten B_{n-1}^0, L_{n-1}^0 und B_n^0, L_n^0 .

Für die geodätische Linie $P_{n-1} P_n$ schreiben wir jetzt die Differentialkoeffizienten in der bekannten Form:

$$p_1^{n-1,n} = \frac{\partial B_n}{\partial B_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{M_n} \cos l_{n-1,n}; \quad l_{n-1,n} = L_n^0 - L_{n-1}^0$$

M = Meridiankrümmungsradius,
 N = Querkrümmungsradius.

$$\left. \begin{aligned} q_1^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial B_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{N_n} \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n \\ r_1^{n-1,n} &= \frac{\partial A_{n,n-1}^0}{\partial B_{n-1}} = \frac{\sin l_{n-1,n}}{\cos \varphi_n} \\ p_3^{n-1,n} &= -\frac{\cos A_{n,n-1}^0}{M_n \sin l''} = \frac{\partial B_n}{\partial s_{n-1,n}} \\ q_3^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial s_{n-1,n}} = -\frac{\sin A_{n,n-1}^0}{N_n \sin l'' \cos \varphi_n} \\ r_3^{n-1,n} &= \frac{\partial A_{n,n-1}^0}{\partial s_{n-1,n}} = -\frac{\sin A_{n,n-1}^0}{N_n \sin l''} \operatorname{tg} \varphi_n \\ p_4^{n-1,n} &= \frac{\partial B_n}{\partial A_{n-1,n}} = \frac{s_{n-1,n}^0 \sin A_{n,n-1}^0}{M_n} \\ q_4^{n-1,n} &= \frac{\partial l_{n-1,n}}{\partial A_{n-1,n}} = -\frac{s_{n-1,n}^0 \cos A_{n,n-1}^0}{N_n \cos \varphi_n} \\ r_4 &= \frac{\partial A_{n,n-1}^0}{\partial A_{n-1,n}} = \cos \frac{s_{n-1,n}}{R} - \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A_{n,n-1}^0 \operatorname{tg} \varphi_n \end{aligned} \right\} (2)$$

Damit wird:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_1^{1,2} dB_1 + p_3^{1,2} ds_{1,2} + p_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dL_2 &= dL_1 + q_1^{1,2} dB_1 + q_3^{1,2} ds_{1,2} + q_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dA_{2,1} &= + r_1^{1,2} dB_1 + r_3^{1,2} ds_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2} \end{aligned} \right\} (3)$$

Nach den Ausdrücken (1) ist:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \varphi_2 - B_2^0 - \xi_2 + \delta\varphi_2 \\ dB_1 &= \varphi_1 - B_1^0 - \xi_1 + \delta\varphi_1 \\ dL_2 &= \lambda_2 - L_2^0 - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 \\ dL_1 &= \lambda_1 - L_1^0 - \eta_1 \sec \varphi_1 + \delta\lambda_1 \\ dA_{2,1}^0 &= \alpha_{2,1} - A_{2,1}^0 - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2,1} \\ dA_{1,2}^0 &= \alpha_{1,2} - A_{1,2}^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2} \end{aligned} \right\} (4)$$

Setzt man die Ausdrücke (4) in (3) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - B_2^0 - \xi_2 + \delta\varphi_2 &= p_1^{1,2} (\varphi_1 - B_1^0 - \xi_1 + \delta\varphi_1) + p_3^{1,2} ds_{1,2} + \\ &+ p_4^{1,2} (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}) \\ \lambda_2 - L_2^0 - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 &= (\lambda_1 - L_1^0 - \eta_1 \sec \varphi_1 + \delta\lambda_1) + q_1^{1,2} (\varphi_1 - B_1^0 - \xi_1 + \delta\varphi_1) + \\ &+ q_3^{1,2} ds_{1,2} + q_4^{1,2} (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}) \\ \alpha_{2,1} - A_{2,1}^0 - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2,1} &= r_1^{1,2} (\varphi_1 - B_1^0 - \xi_1 + \delta\varphi_1) + r_3^{1,2} ds_{1,2} + \\ &+ r_4^{1,2} (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^0 - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \delta\alpha_{1,2}) \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \varphi_2 - B_2 - P_1^{1.2}(\varphi_1 - B_1) - P_3^{1.2}(s'_{1.2} - s_{1.2}) - P_4^{1.2}(\alpha_{1.2} - A_{1.2}) + \\ &\quad + P_1^{1.2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\varphi_2 - P_3^{1.2}\delta s_{1.2} + P_4^{1.2}\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - P_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) - (L_2^\circ - L_1^\circ) - q_1^{1.2}(\varphi_1 - B_1) - q_3^{1.2}(s'_{1.2} - s_{1.2}) - q_4^{1.2}(\alpha_{1.2} - A_{1.2}) + \\ &\quad + q_1^{1.2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 - q_3^{1.2}\delta s_{1.2} + (1 + q_4^{1.2} \sin \varphi_1) \eta_1 \sec \varphi_1 - q_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2.1} - A_{2.1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_1^{1.2}(\varphi_1 - B_1) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_3^{1.2}(s'_{1.2} - s_{1.2}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &\quad - r_4^{1.2}(\alpha_{1.2} - A_{1.2}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + r_1^{1.2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) \operatorname{cosec} \varphi_2 + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - r_4^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{1.2} - \\ &\quad - r_3^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta s_{1.2} + r_4^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \eta_1 \end{aligned} \right\} (5)$$

Die Gleichungen (5) müssen nochmals etwas umgeformt werden. Vorher führen wir aber noch neue Bezeichnungen ein.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n - B_n - P_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - P_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}) - \\ - P_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}) = \omega_\varphi^{n-1,n} \\ (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L_n^\circ - L_{n-1}^\circ) - q_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - \\ - q_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}) - q_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}) = \omega_\lambda^{n-1,n} \\ \operatorname{cosec} \varphi_n [(\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}) - r_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - \\ - r_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s_{n-1,n}) - r_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n})] = \omega_\alpha^{n-1,n} \\ \eta_n \sec \varphi_n = \nu_n \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{M_n} \cos l_{n-1,n} = -P_1^{n-1,n} \\ P_3^{n-1,n} &= \frac{\cos A_{n,n-1}}{M_n \sin l''} = -P_3^{n-1,n} \\ P_2^{n-1,n} &= P_4^{n-1,n} \sin \varphi_{n-1}; P_4^{n-1,n} = -\frac{s_{n-1,n} \sin A_{n,n-1}}{N_n} = -P_4^{n-1,n} \\ Q_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{N_n} \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n = -q_1^{n-1,n} \\ Q_3^{n-1,n} &= \frac{\sin A_{n,n-1}}{N_n \sin l'' \cos \varphi_n} = -q_3^{n-1,n} \\ Q_2^{n-1,n} &= 1 - \frac{s_{n-1,n} \cos A_{n,n-1}}{N_n} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\ Q_4^{n-1,n} &= \frac{s_{n-1,n} \cos A_{n,n-1}}{N_n \cos \varphi_n} = -q_4^{n-1,n} \\ R_1^{n-1,n} &= -\frac{\sin l_{n-1,n}}{\sin \varphi_n \cos \varphi_n} = -r_1^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\ R_3^{n-1,n} &= Q_3^{n-1,n} = -r_3^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\ R_2^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n \sin \varphi_{n-1} + \frac{s_{n-1,n} \cos A_{n,n-1}}{N_n} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\ R_4^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n + \frac{s_{n-1,n} \cos A_{n,n-1}}{N_n} \sec \varphi_n = \\ &= R_2^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_{n-1} = -r_4^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \end{aligned} \right\} (7)$$

Dann erhalten wir die Gleichungen (5) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \omega_\varphi^{1.2} + \delta\varphi_2 + P_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1.2}\nu_1 + P_3^{1.2}\delta s_{1.2} + P_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} \\ \nu_2 &= \omega_\lambda^{1.2} + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1.2}\nu_1 + Q_3^{1.2}\delta s_{1.2} + Q_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} \\ \nu_2 &= \omega_\alpha^{1.2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + R_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1.2}\nu_1 + R_3^{1.2}\delta s_{1.2} + R_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} \end{aligned} \right\} (8)$$

Die Gleichungen (8) sind für die Linie P_1P_2 angesetzt; dieselbe Form haben sie auch für die Linie $P_{n-1}P_n$, nur müssen dann die Indizes 1.2 durch $n-1.n$ ersetzt werden. Nun stellen wir uns vor, dass wir das Polygon $P_1P_2P_3P_4P_1$ (Abb. 2) haben, in dem P_1, P_2, P_3, P_4 Laplacesche Punkte sind. Wenn wir das Polygon im Uhrzeigersinn umschreiten, wird P_1 identisch mit P_5 . Die Gleichungen (8) für die ξ der geodätischen Linien dieses Polygons lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \omega_\varphi^{1.2} + \delta\varphi_2 + P_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1.2}\nu_1 + P_3^{1.2}\delta s_{1.2} + P_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} & (a) \\ \xi_3 &= \omega_\varphi^{2.3} + \delta\varphi_3 + P_1^{2.3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2.3}\nu_2 + P_3^{2.3}\delta s_{2.3} + P_4^{2.3}\delta\alpha_{2.3} & (b) \\ \xi_4 &= \omega_\varphi^{3.4} + \delta\varphi_4 + P_1^{3.4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) - P_2^{3.4}\nu_3 + P_3^{3.4}\delta s_{3.4} + P_4^{3.4}\delta\alpha_{3.4} & (c) \\ \xi_1 = \xi_5 &= \omega_\varphi^{4.1} + \delta\varphi_1 + P_1^{4.1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) - P_2^{4.1}\nu_4 + P_3^{4.1}\delta s_{4.1} + P_4^{4.1}\delta\alpha_{4.1} & (d) \end{aligned} \right\} (9)$$

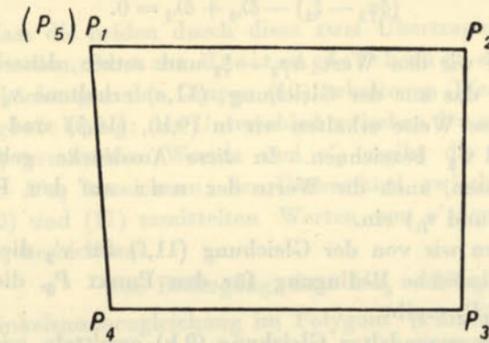


Abb. 2.

Für die Gleichungen für η , die sich aus dem Vergleich der Längen ergeben, bekommen wir für unser Polygon:

$$\left. \begin{aligned} \nu_2 &= \omega_\lambda^{1.2} + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1.2}\nu_1 + Q_3^{1.2}\delta s_{1.2} + Q_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} & (a) \\ \nu_3 &= \omega_\lambda^{2.3} + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + Q_1^{2.3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2.3}\nu_2 + Q_3^{2.3}\delta s_{2.3} + Q_4^{2.3}\delta\alpha_{2.3} & (b) \\ \nu_4 &= \omega_\lambda^{3.4} + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 + Q_1^{3.4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) + Q_2^{3.4}\nu_3 + Q_3^{3.4}\delta s_{3.4} + Q_4^{3.4}\delta\alpha_{3.4} & (c) \\ \nu_5 = \nu_1 &= \omega_\lambda^{4.1} + \delta\lambda_1 - \delta\lambda_4 + Q_1^{4.1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) + Q_2^{4.1}\nu_4 + Q_3^{4.1}\delta s_{4.1} + Q_4^{4.1}\delta\alpha_{4.1} & (d) \end{aligned} \right\} (10)$$

Für die Gleichungen für η , die sich aus dem Vergleich der Azimute ergeben, bekommen wir endlich:

$$\left. \begin{aligned} \nu_2 &= \omega_\alpha^{1.2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + R_1^{1.2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1.2}\nu_1 + R_3^{1.2}\delta s_{1.2} + R_4^{1.2}\delta\alpha_{1.2} & (e) \\ \nu_3 &= \omega_\alpha^{2.3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} + R_1^{2.3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2.3}\nu_2 + R_3^{2.3}\delta s_{2.3} + R_4^{2.3}\delta\alpha_{2.3} & (f) \\ \nu_4 &= \omega_\alpha^{3.4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4.3} + R_1^{3.4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) - R_2^{3.4}\nu_3 + R_3^{3.4}\delta s_{3.4} + R_4^{3.4}\delta\alpha_{3.4} & (g) \\ \nu_5 = \nu_1 &= \omega_\alpha^{4.1} + \operatorname{cosec} \varphi_1 \cdot \delta\alpha_{1.4} + R_1^{4.1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) - R_2^{4.1}\nu_4 + R_3^{4.1}\delta s_{4.1} + R_4^{4.1}\delta\alpha_{4.1} & (h) \end{aligned} \right\} (11)$$

Beim Helmertschen Verfahren müssen die Gleichungen (9), (10) und (11) für jedes Teilstück I.O. (das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkten liegt) angesetzt werden, wobei die vorher berechneten Zahlenwerte der Koeffizienten bei $(\delta\varphi_i - \xi_i)$, $\delta s_{i,i+1}$, ν_i , $\delta\alpha_{i+1,i}$

und $\delta a_{i,i+1}$ sowie die nach Formel (6) berechneten Werte der Absolutglieder dieser Gleichungen eingesetzt werden.

Der weitere Rechengang besteht dann in der Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Netzes vermittle der Gleichungen (9), (10) und (11); hierbei treten folgende Gleichungen auf: 1) in jedem geschlossenen Polygon die Breiten-, Längen- und Winkelsummenbedingung (also 3 Gleichungen), 2) die Laplaceschen Gleichungen für jede geodätische Linie zwischen 2 Laplaceschen Punkten, wobei die Laplacesche Bedingung erfordert, dass die Grössen $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$, die aus den Gleichungen (10) abgeleitet werden, den entsprechenden Grössen $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$, die aus den Gleichungen (11) hervorgehen, genau gleich werden.

Zur Aufstellung der Polyongleichungen und der Laplaceschen Gleichungen müssen nacheinander aus (9), (10) und (11) die Komponenten der Lotabweichungen eliminiert werden, damit in diesen Gleichungen ausschliesslich der Zusammenhang zwischen den Verbesserungen der beobachteten Grössen zum Ausdruck gelangt.

Hierbei kann man verschieden verfahren; wir wählen folgenden Weg:

1) Durch Subtraktion der Gleichung (10,a) von der Gleichung (11,e) erhalten wir die Laplacesche Bedingung für den Punkt P_2 :

$$\omega_a^{1.2} - \omega_\lambda^{1.2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta a_{2.1} + (R_4^{1.2} - Q_4^{1.2}) \delta a_{1.2} - (R_2^{1.2} + Q_2^{1.2}) v_1 + (R_1^{1.2} - Q_1^{1.2}) (\delta \varphi_1 - \xi_1) - \delta \lambda_2 + \delta \lambda_1 = 0. \quad (12)$$

2) Aus (9,a) ermitteln wir den Wert $\delta \varphi_2 - \xi_2$ und setzen denselben in (9,b), (10,b) und (11,f) ein. Ferner setzen wir das aus der Gleichung (11,e) erhaltene v_2 in die Gleichungen (9,b), (10,b) und (11,f) ein; auf diese Weise erhalten wir in (9,b), (10,b) und (11,f) neue Ausdrücke für ξ_3 und v_3 , die wir mit ξ'_3 und v'_3 bezeichnen. In diese Ausdrücke gehen, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, auch die Werte der nur auf den Punkt P_1 bezüglichen Lotabweichungskomponenten (ξ_1 und η_1) ein.

3) Alsdann subtrahieren wir von der Gleichung (11,f) für v'_3 die Gleichung (10,b) für v'_3 ; dadurch erhalten wir die Laplacesche Bedingung für den Punkt P_3 , die sich durch Übertragung längs der Linien P_1P_2 und P_2P_3 ergibt.

4) Aus der nach 2) umgewandelten Gleichung (9,b) ermitteln wir $\delta \varphi_3 - \xi'_3 = \delta \varphi_3 - \xi_3$ und führen diese Grösse in (9,c), (10,\gamma) und (11,g) ein; ferner führen wir v_3 , das aus der nach 2) umgewandelten Gleichung (11,f) erhalten wurde, in die Gleichungen (9,c), (10,\gamma) und (11,g) ein; dadurch ergeben sich neue Ausdrücke für ξ_4 in (9,c), für v_4 in (10,\gamma) und für v_4 in (11,g). Diese neuen Ausdrücke bezeichnen wir mit ξ'_4, v'_4 , wobei in diese Ausdrücke, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, auch noch die nur für den Punkt P_1 geltenden Lotabweichungskomponenten (ξ_1, η_1) eingehen.

5) Von der nach 4) umgewandelten Gleichung (11,g) für v'_4 subtrahieren wir die umgeformte Gleichung (10,\gamma) für dieselbe Grösse v'_4 ; damit ergibt sich dann die Laplacesche Gleichung für P_4 , die durch Übertragung längs der Linien P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_4 erhalten wurde (s. Abb. 2).

6) Aus der nach 4) umgewandelten Gleichung (9,c) ermitteln wir die Grösse $\delta \varphi_4 - \xi_4 = \delta \varphi_4 - \xi'_4$, die wir in die Gleichungen (9,d), (10,\delta) und (11,h) einsetzen; ferner setzen wir v'_4 , das aus der Umformung von (11,g) nach 4) erhalten wurde, in (9,d), (10,\delta) und (11,h) ein. Im Ergebnis erhalten wir neue Ausdrücke für ξ_1 in (9,d), für v_1 in (10,\delta) und für v_1 in (11,h); diese neuen Ausdrücke bezeichnen wir mit ξ'_1 und v'_1 ; in diese gehen, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, die Lotabweichungskomponenten im Punkt P_1 ein.

7) Führen wir die unter 6) aufgeführten Umformungen durch, so ergibt sich folgendes: Die rechte Seite der Gleichung für ξ'_1 wird der Grösse ξ_1 und die rechte Seite der Gleichung für v'_1 der Grösse v_1 selbst gleich sein. Die Bedingung, dass nach Durchlaufen des ganzen Polygons $P_1P_2P_3P_4P_1$ für die Lotabweichungskomponenten im Punkt P_1 die Grössen ξ_1 und η_1 erhalten werden müssen, kann folgendermassen formuliert werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi'_1 &= 0 \\ v_1 - v'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hier bedeuten ξ'_1 und v'_1 die rechten Seiten der Gleichungen für ξ_1 und η_1 , die nach 6) erhalten wurden.

Die erste Gleichung von (13) ist die Breitengleichung für unser Polygon; die zweite Gleichung von (13) ist die betreffende Längengleichung.

8) Subtrahiert man von der nach 6) umgeformten Gleichung (11,h) für v'_1 die umgeformte Gleichung (10,\delta) für v'_1 , so erhält man die Laplacesche Gleichung für den Punkt P_1 , die der Übertragung längs der geodätischen Linien P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 und P_4P_1 entspricht.

9) Nun setzen wir den nach 6) aus der umgeformten Gleichung (9,d) erhaltenen Wert ξ'_1 und den aus der umgeformten Gleichung (11,h) erhaltenen Wert v'_1 in die rechten Seiten der Gleichungen (10,a) und (11,e) ein. Wir erhalten dann in (10,a) und (11,e) neue Ausdrücke für v'_2 ; ziehen wir dieselben voneinander ab, so erhalten wir in neuer Form die Laplacesche Gleichung in Punkt P_2 ; subtrahieren wir von dieser neuen Laplaceschen Gleichung für den Punkt P_2 , die der Übertragung längs der Linien $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ und P_1P_2 entspricht, die Gleichung (12) — d. i. die frühere Laplacesche Gleichung für P_2 — so erhalten wir die Winkelsummengleichung für unser Polygon.

Bei der zahlenmässigen Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen und der Polyongleichungen ist es einfacher und zweckmässiger, nicht das ganze Polygon in einer Richtung zu umgehen, sondern zuerst von P_1 bis P_2 und von P_2 bis P_3 zu gehen, um ξ'_3 und v'_3 zu erhalten; alsdann von P_1 bis P_4 und von P_4 bis P_3 zu gehen, um ξ'_3 und v'_3 nochmals, jedoch auf anderem Wege zu erhalten.

Die Bedingung, dass die beiden durch diese zwei Übertragungen erhaltenen Werte von ξ'_3 untereinander gleich sein sollen, führt zur Breitengleichung; die Bedingung, dass die beiden auf zweierlei Art aus den Gleichungen der Gruppe (10) erhaltenen Werte von v'_3 übereinstimmen sollen, führt zur Längengleichung; der Unterschied zwischen den auf dem ersten Wege aus den Gleichungen (10) und (11) ermittelten Werten von v'_3 ergibt die Laplacesche Gleichung für den Punkt P_3 , die wir mit $L'a_3$ bezeichnen; der Unterschied zwischen den auf dem zweiten Wege aus den Gleichungen (10) und (11) ermittelten Werten von v'_3 ergibt die Laplacesche Gleichung für P_3 , die wir mit $L''a_3$ bezeichnen.

Die Bedingung, dass $L'a_3 = L''a_3$

sein muss, führt zur Winkelsummengleichung im Polygon. (Für die Aufstellung der Polygonbedingungen haben wir die kreisförmige Umgehung des Polygons deshalb gewählt, weil dieselbe bei der Durchführung der Rechnung in allgemeiner Form die Möglichkeit gibt, für die Laplaceschen Gleichungen und die Winkelbedingungen in den Polygonen allgemeine Formeln abzuleiten, wie das in den folgenden Paragraphen aufgezeigt werden wird).

In die Breiten- und Längengleichungen gehen $(\delta \varphi_1 - \xi_1)$ und $\delta a_{1.2}$ mit sehr kleinen Koeffizienten ein; das Auftreten dieser Glieder ist dadurch bedingt, dass die Lage des Polygons nach der Breite [Einfluss von $(\delta \varphi_1 - \xi_1)$] und die Orientierung seiner ersten Linie (Wert von $a_{1.2}$) die Grösse des Polygonschlussfehlers in der Breiten- und Längenrichtung beeinflusst; dieser Einfluss ist natürlich sehr gering und $(\delta \varphi_1 - \xi_1)$ und $\delta a_{1.2}$ gehen daher in die Polyongleichungen mit so kleinen Koeffizienten ein, dass man mit Rücksicht auf die Kleinheit von $\delta a_{1.2}$ und $(\delta \varphi_1 - \xi_1)$ die diese Argumente enthaltenden Glieder stets vernachlässigen darf; unter $\delta \xi_1$ ist die Verbesserung des auf Grund vorläufiger Untersuchungen ermittelten Wertes von ξ_1 zu verstehen. Glieder, die die Längenfehler $\delta \lambda$ und die Grössen v enthalten, gehen in die Breiten-, Längen- und Winkelsummengleichungen überhaupt nicht ein. Die Breiten- und Längengleichungen enthalten also die Argumente $\delta s_{1.2}, \delta s_{2.3}, \delta s_{3.4}$ und $\delta s_{4.1}$ sowie die Azimutverbesserungen $\delta a_{2.1}, \delta a_{2.3}, \delta a_{3.2}, \delta a_{3.4}, \delta a_{4.3}$ und $\delta a_{4.1}$, wobei der Koeffizient von $\delta a_{2.3}$ dem von $\delta a_{2.1}$ mit umgekehrtem Vorzeichen gleich ist, der Koeffizient von $\delta a_{3.4}$ dem von $\delta a_{3.2}$ und von $\delta a_{4.1}$ dem von $\delta a_{4.3}$ mit umgekehrten Vorzeichen gleich sind. Die Breiten- und Längenbedingungen können also in folgender Form dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi &= a_1 \delta s_{1.2} + a_2 \delta s_{2.3} + a_3 \delta s_{3.4} + a_4 \delta s_{4.1} + \\ &+ a_5 (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) + a_6 (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) + a_7 (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.1}) \\ \Delta l &= b_1 \delta s_{1.2} + b_2 \delta s_{2.3} + b_3 \delta s_{3.4} + b_4 \delta s_{4.1} + \\ &+ b_5 (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) + b_6 (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) + b_7 (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.1}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$\Delta\varphi$ und Δl stellen hierbei die Absolutglieder dar.

In die Winkelsummengleichung geht mit einem kleinen Koeffizienten das Argument $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ein (weil die Lage des Polygons auf die Winkelsumme Einfluss hat); die Verbesserungen δs , $\delta\lambda$ und die Grössen v kommen aber überhaupt nicht vor; in diese Bedingung sind also nur die Verbesserungen der Azimute und der Gegenazimute sämtlicher Linien des Polygons einzuführen, wobei die Verbesserungen solcher Azimute, die einen Winkel des Polygons bilden, in der Gleichung Koeffizienten mit gleichen Absolutwerten, aber entgegengesetzten Vorzeichen haben. Die allgemeine Form der Winkelsummengleichungen ist daher:

$$\Delta\Sigma = c_1(\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + c_2(\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) + c_3(\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.1}) + c_4(\delta\alpha_{1.4} - \delta\alpha_{1.2}), \quad (15)$$

wobei die Koeffizienten c_1 , c_2 , c_3 und c_4 praktisch untereinander gleich angenommen werden können; $\Delta\Sigma$ ist das Absolutglied.

In die Laplaceschen Gleichungen gehen ein: $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , die Verbesserungen der Azimute und Gegenazimute sämtlicher geodätischer Linien, die bei der Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen zur Übertragung benutzt wurden und die Verbesserungen zweier astronomischer Längen (des Punktes P_i und des Punktes P_1).

Nach der Aufstellung der Polygon- und der Laplaceschen Gleichungen wird die Verbesserung $\delta\alpha$ des astronomischen Azimuts einer jeden geodätischen Linie durch den Fehler, mit dem das Azimut der entsprechenden Ausgangsseite des Teilstücks I.O. bestimmt ist, sowie den Richtungsfehler der gegebenen geodätischen Linie ausgedrückt. Bezeichnet man den Fehler der im Punkt P_i erfolgten Azimutbestimmung für die erste Seite des Triangulationsteilstücks mit δ_i^* und die Richtungsverbesserung für die geodätische Linie von P_i nach P_k mit $v_{i.k}$, so hat man

$$\delta\alpha_{i.k} = \delta_i^* + v_{i.k} \quad (16)$$

Die für sämtliche geschlossenen Triangulationspolygone gebildeten Gleichungen (14) und (15) werden zusammen mit den Laplaceschen Gleichungen aufgelöst, die in der o. a. Weise für jede geodätische Linie des Netzes aufgestellt werden. Indem man diese Auflösung für sämtliche Polygonbedingungen und Laplaceschen Bedingungen im Zusammenhang ausführt, verbindet man dadurch augenscheinlich die Ermittlung der Verbesserungen rein geodätisch bestimmter Grössen, d. h. der Abstände s und der von den Polygonlinien eingeschlossenen Winkel, mit der Ermittlung der Verbesserungen der astronomischen Azimute. Mit anderen Worten: Die Fehlerfortpflanzung, die unvermeidlich wäre, wenn die Ausgleichung nur auf die Polygonbedingungen beschränkt würde, wird bei einer solchen Rechnungsweise durch die Feststellung der Azimute aus den Laplaceschen Bedingungen reguliert.

In die Polygonbedingungen und die Laplaceschen Bedingungen gehen die Verbesserungen der Grössen α , λ , der Richtungen der geodätischen Linien und der Strecken s ein. Daher ist zur Auflösung der betreffenden Gleichungen die Kenntnis der relativen Gewichte dieser Grössen erforderlich. Diese Frage soll im folgenden Paragraphen behandelt werden.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Gedankengänge Helmerts nicht allein auf die Ausarbeitung des angegebenen Verfahrens zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen für ein astronomisch-geodätisches Netz gerichtet waren. Er führte in die Gleichungen (8) auch noch solche Glieder ein, die von den Verbesserungen da und dc der grossen Halbachse bzw. der Abplattung des Ellipsoids abhängig sind.

In die Laplacesche Gleichung gehen dann auch die Glieder mit da und dc ein; dabei werden die $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc enthaltenden Glieder von Helmert gewissermassen als Bestandteile der Absolutglieder der Gleichungen behandelt, obgleich sie besonders geschrieben werden und bei den Zahlenwerten der betreffenden Koeffizienten die Grössen $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc als Faktoren erhalten bleiben. Darum erhält Helmert die Korrelaten der Bedingungsgleichungen in der Gestalt von Funktionen der Absolutglieder und der $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc enthaltenden Glieder.

) In δ_i^ geht—wie leicht einzusehen—auch der Fehler ein, mit dem das unmittelbar beobachtete astronomische Azimut auf diese Seite der Triangulation übertragen wurde.

Ebenso werden die mit diesen Korrelaten berechneten Verbesserungen der astronomischen Längen, sowie die Verbesserungen der Azimute, Winkel und Abstände in den Polygonen auch als Funktionen der Absolutglieder und der $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc enthaltenden Glieder erhalten.

Diese Verbesserungen werden eingeführt: in die Gleichungen (9,a), (10, α), (11,e); in die umgewandelten Gleichungen (9,b), (10, β) und (11,f), deren rechte Seiten mit ξ_3' und v_3' bezeichnet wurden; in die früher umgeformten Gleichungen (9,c), (10, γ) und (11,g), deren rechte Seiten mit ξ_1' und v_4' bezeichnet wurden, usw. Auf solche Weise erhalten wir ein System von Lotablenkungen: $\xi_2, v_2, \xi_3, v_3, \dots, \xi_n, v_n$, die auch als Funktionen der Absolutglieder und der $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc enthaltenden Glieder dargestellt sind. Für das System der Gleichungen, aus denen sich die Ausdrücke für $\xi_2, v_2, \xi_3, v_3, \dots, \xi_n, v_n$ ergeben, führen wir die Bezeichnung (LW) ein. Hat man bezüglich der Ausmasse und der Orientierung des Ellipsoids, also der von der Wahl der Elemente ξ_1 und v_1 abhängigen geodätischen Ausgangsdaten, gewisse Annahmen gemacht, so sind damit die Lotablenkungen in allen Laplaceschen Punkten bestimmt; zugleich auch die Verbesserungen der Azimute, Abstände und Winkel in den Polygonen der Triangulation.

Die Grundidee Helmerts bestand also darin, auf Grund des Gesamtmaterials der Triangulation und aller diesbezüglichen astronomischen Bestimmungen und der in der angegebenen Weise ausgeführten Ausgleichung des Netzes die Verbesserungen als Funktionen der Unbekannten $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc darzustellen,—um auf solche Weise ein System von Lotablenkungen zu erhalten, die im System der Gleichungen (LW) ebenfalls als Funktionen von $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc erscheinen. Hier ist also die Ausgleichung der Triangulation eine Angelegenheit von sekundärer Bedeutung, der Hauptzweck besteht in der Ableitung der Gleichungen (LW) zur Ermittlung der Grössen ξ und η für alle Laplaceschen Punkte, wobei allerdings das Gesamtmaterial des astronomisch-geodätischen Netzes benutzt wird, um die wahrscheinlichsten Werte der ξ und η zu ermitteln.

Aus der zuletzt erwähnten Forderung ergibt sich die Notwendigkeit, sämtliche Laplaceschen Gleichungen und sämtliche Polygonbedingungen zu benutzen; aber die Auflösung dieser Bedingungsgleichung (nach der MdklQ) erscheint als eine Zwischenaufgabe, die zur Lösung der Hauptaufgabe gehört. Eine andere Möglichkeit zur strengen Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte der ξ und η ist nicht vorhanden.

In den erwähnten Gleichungen (LW), die nach Helmert zur Ermittlung des Systems der ξ und η benutzt werden, gibt es für jeden Laplaceschen Punkt zwei Gleichungen für v : eine derselben ergibt sich aus dem Vergleich der Längen, die andere aus dem Vergleich der Azimute [dieses entspricht den zwei früheren Gruppen der Gleichungen (10) und (11)]; diese zwei Gleichungen für v in einem gegebenen Punkt müssen vollkommen identisch sein. Daher hat man im System der Gleichungen (LW) für die folgende Rechnung für jeden Laplaceschen Punkt nur zwei Gleichungen beizubehalten; eine für ξ und die andere für v .

Durch Auflösung der Gleichungen (LW) unter der Bedingung des Minimums der Quadratsummen der ξ und η erhält man die wahrscheinlichsten Werte der $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc . Darauf ergeben sich die geodätischen Ausgangskordinaten aus den Formeln

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 + \delta\varphi_1 \\ L_1 &= \lambda_1 + \delta\lambda_1 - v_1 \\ A_{1.2} &= \alpha_{1.2} + \delta\alpha_{1.2} - v_1 \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

Nach der Ermittlung der $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$, v_1 , da und dc berechnet man, wie bereits erwähnt, aus den Gleichungen (LW) die entsprechenden Werte ξ und η ; andererseits erhält man die Verbesserungen sämtlicher Azimute, sämtlicher Winkel und Seiten im Netz (wobei angenommen wird, dass dasselbe aus den die benachbarten Laplaceschen Punkte verbindenden geodätischen Linien gebildet sei). Man hat dann nur noch mit den Ausgangsgrössen B_1 , L_1 und $A_{1.2}$ auf dem Ellipsoid mit den Ausmassen $a + da$ und $c + dc$ und mit den verbesserten Winkeln und Abständen die geodätischen Koordinaten und die Azimute der Laplaceschen Punkte des Netzes zu berechnen.

Die angegebene Art der Auflösung der Gleichungen (LW) ist nicht die einzig mögliche. Helmerts Bestrebungen zielten darauf hin, solche auf einen und denselben Ausgangspunkt bezogene Gleichungen (LW) für ganz Mitteleuropa zu sammeln, um auf diesem Material weitere wissenschaftliche Untersuchungen aufbauen zu können.

§ 3. Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten und der Ausmasse des Bezugsellipsoids für das zu vermessende Gebiet.

Für die Lösung geodätischer Aufgaben hat man in bezug auf die Wahl der Ausmasse des für den zu vermessenden Staat am besten geeigneten Ellipsoids eine ziemliche Freiheit. Wenn nun aber jeder Staat tatsächlich in der geodätischen Praxis sein eigenes Ellipsoid mit besonderen Abmassen einführen würde, so würde dies zu ziemlichen Unzuträglichkeiten führen. Deshalb soll man sich in Ansehung der Aufgabe bei der Auswahl des bestgeeigneten Ellipsoids darauf beschränken, zu bestimmen, welches von den anerkannten Ellipsoiden (Bessel, Clarke, Hayford) sich am besten für den zu vermessenden Staat eignet.

Für die UdSSR. insbesondere ist zu entscheiden, ob man das Hayfordsche Ellipsoid übernehmen oder ob man an dem bisher in der UdSSR. und in Europa gebräuchlichen Besselschen Ellipsoid festhalten soll.

Ausserdem darf darauf hingewiesen werden, dass die Bestimmung der Abplattung des Ellipsoids durch die Ausgleichung der Lotabweichungen nicht zuverlässig ist, insbesondere wenn hierzu astronomisch-geodätische Netze in mittel-nördlichen (mittleren) Breiten verwendet werden. Auch bei der Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten hat man eine beträchtliche Freiheit; die Einführung topographisch-isostatischer Reduktionen in den astronomischen Breiten, Längen und Azimuten hat bei der Lösung dieser Aufgabe eine unvergleichlich grössere Bedeutung, als die Ausnutzung nicht nur der astronomischen Breiten und Längen, sondern auch der astronomischen Azimute auf den astronomischen Punkten.

Die Ausnutzung des gesamten Materials der Triangulation, dh. aller ihrer geodätischen Linien mit der dabei unvermeidlichen Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen kann bei neuzeitlichen Triangulationen I.O., selbst wenn sie bedeutende Ausdehnung haben, in den Grössen ξ und η lediglich einen Einfluss von einigen Zehntelsekunden (weniger als $0,5''$) ausüben (insbes. wenn eine vorläufige Ausgleichung der Triangulationsreihen in Teilstücken durchgeführt worden ist). Selbstverständlich können, weil die rein örtlichen Einflüsse in den Grössen ξ und η Lotstörungen im Mittel bis zu $\pm 1,8''$ ausmachen, diese Unsicherheiten von $\pm 0,1'' - 0,4''$ vernachlässigt werden.

Beabsichtigt man bei der Bestimmung der Ausmasse des Ellipsoids und der geodätischen Ausgangsdaten keine genaue Bestimmung der Lotabweichungskomponenten, so kann die Lösung wesentlich vereinfacht werden. Verzichtet man bei der Lösung der Aufgabe für das Gebiet der UdSSR. auf die Bestimmung der Abplattung, so kann man einfach die Besselsche Abplattung beibehalten. Dadurch wird die Umrechnung aller früheren Triangulationen, die durch die Neubestimmung der grossen Halbachse erforderlich wird, wesentlich vereinfacht, andererseits erübrigt sich auch die Aufstellung neuer geodätischer Tafelwerke.

Zur Lösung der gestellten Aufgaben sind die geodätischen Linien nicht erforderlich, die die Polygone schliessen. Diese geodätischen Linien dienen lediglich zur Kontrolle der Übertragung der Koordinaten. Schliesslich kann man in dem angestrebten Sinne—wie schon bei der Ausgleichung der Teilstücke erläutert wurde—auf die freien Glieder in den Azimutbedingungen und auf die Ausnutzung der Laplaceschen Bedingungen sowie auf die Gegenüberstellung der astronomischen und geodätischen Azimute verzichten, wenn man für jeden Laplaceschen Punkt lediglich die astronomischen und geodätischen Breiten und Längen gegenüberstellt.

Aus der Ausgleichung der Teilstücke der in Abb. 1 dargestellten Triangulation erhielten wir die Längen $s_{1,2}, s_{2,3}, s_{3,4}, \dots, s_{19,20}$ der geodätischen Linien $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{19}P_{20}$ und die Winkel zwischen diesen Linien bei $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$. Damit berechnen wir ausgehend von P_1 , wobei

die astronomische Breite φ_1 und die astronomische Länge λ_1 als Ausgangsdaten angenommen werden, und mit dem astronomischen Azimut $\alpha_{1,2}$ die geodätischen Koordinaten aller Laplaceschen Punkte $P_2, P_3, P_4, \dots, P_{24}$, aber ohne die Polygone zu schliessen. Wir führen also z.B. die Koordinatenberechnung in folgender Weise aus:

$$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_{13}, P_{13}P_{12}, P_{12}P_{11}, P_3P_9, P_9P_{10}, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_{18}, \\ P_{18}P_{17}, P_{17}P_{16}, P_5P_{14}, P_{14}P_{15}, P_1P_{19}, P_{19}P_{20}, P_7P_{21}, P_{21}P_{22}, P_{17}P_{24}, P_{24}P_{23}, P_1P_8.$$

Damit benutzten wir die in Abb. 1 durch Doppelstrich (ausgezogen und punktiert) angegebenen Linien ($P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{20}P_{21}, P_{22}P_{23}$) überhaupt nicht. (Praktisch verproben wir jedoch die Koordinaten der Punkte $P_{11}, P_{16}, P_8, P_{20}$ und P_{22} durch Übertragung mit $P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{21}P_{20}$ und $P_{22}P_{23}$; die dabei erhaltenen Ergebnisse werden aber in der Folge nicht verwertet).

Die hierdurch erhaltenen geodätischen Koordinaten B_n° und L_n° des Punktes P_n unterscheiden sich von den entsprechenden astronomischen Koordinaten φ_n und λ_n infolge:

- 1) der Fehler in den Ausmassen des gewählten Ellipsoids;
- 2) der Lotabweichungen im Ausgangspunkt P_1 ;
- 3) der Lotabweichungen im Punkt P_n ;
- 4) der Fehler in den geodätischen und astronomischen Beobachtungen.

In der Folge bleiben die Fehler in den geodätischen und astronomischen Beobachtungen zunächst unberücksichtigt; bei der Bestimmung der Ausmasse des Ellipsoids wird lediglich eine Verbesserung da für die grosse Halbachse bestimmt.

Wir bezeichnen, wie in § 2, die geodätischen Koordinaten und die geodätischen Azimute, die nach der Verbesserung der grossen Halbachse um da und nach der Verbesserung der astronomischen Koordinaten und des Azimuts in P_1 (mit denen die vorläufigen Koordinaten B° und L° von P_1 aus berechnet wurden) um den Betrag der Lotabweichung in P_1 erhalten werden, mit B, L und A .

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \xi_1 &= B_1^\circ = \varphi_1 \\ L_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= L_1^\circ = \lambda_1 \\ A_{1,2} + \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= A_{1,2}^\circ = \alpha_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wir müssen also zum Übergang von B_n° auf B_n und von L_n° auf L_n die Verbesserungen der Ausgangsbreite $d\varphi = -\xi_1$, der Ausgangslänge $-\eta_1 \sec \varphi_1$ und des Ausgangsazimuts $-\gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ berücksichtigen und schliesslich noch die Verbesserung der grossen Halbachse um da beachten.

Mit der (angenommenen) geodätischen Linie zwischen P_n und P_1 wird:

$$\left. \begin{aligned} dB_n^\circ &= B_n - B_n^\circ = -p_1^{1,n} \xi_1 - p_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + p_5 da \\ dL_n^\circ &= L_n - L_n^\circ = -\gamma_1 \sec \varphi_1 - q_1^{1,n} \xi_1 - q_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + q_5 da \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Bedeutung der Koeffizienten p_1, p_4, q_1 und q_4 in (18) wurde in (2) § 2 angegeben*), ausserdem ist

$$p_5 = \frac{\partial B_n}{\partial a} \quad \text{und} \quad q_5 = \frac{\partial (L_n^\circ - L_1^\circ)}{\partial a}.$$

*) Hierbei sind die Zeiger „ $n-1$ “ durch „ 1 “ ersetzt!

Diese Koeffizienten werden in folgender Tabelle zusammengefasst:

$$\left. \begin{aligned} P_1^{1..n} &= \frac{M_1}{M_n} \cos l_{1..n}; \quad l_{1..n} = L_n^\circ - L_1^\circ \\ q_1^{1..n} &= \frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \operatorname{tg} \varphi_n \\ P_4^{1..n} &= \frac{s_{1..n}}{M_n} \sin A_{n..1}^\circ \\ q_4^{1..n} &= -\frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{N_n \cos \varphi_n} \\ P_5^{1..n} &= \frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{a \sin l'' \cdot M_n} \\ q_5^{1..n} &= \frac{s_{1..n} \sin A_{n..1}^\circ}{aN_n \cos \varphi_n \sin l''} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (18) von φ_n bzw. λ_n erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= \varphi_n - B_n^\circ + P_1^{1..n} \xi_1 + P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} - P_5^{1..n} da \\ \lambda_n - L_n &= \lambda_n - L_n^\circ + \eta_{11} \sec \varphi_1 + q_1^{1..n} \xi_1 + q_4^{1..n} \eta_{11} \operatorname{tg} \varphi_1 - q_5^{1..n} da. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= + \xi_n \\ \lambda_n - L_n &= + \eta_n \sec \varphi_n. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir noch:

$$\begin{aligned} \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) + P_1^{1..n} \xi_1 + P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + P_5^{1..n} da \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n + \eta_{11} \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} + q_1^{1..n} \cos \varphi_n \cdot \xi_1 + q_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_n \cdot \eta_{11} + Q_5^{1..n} \frac{da}{a}, \end{aligned}$$

wobei

$$Q_5^{1..n} = -\frac{s_{1..n} \sin A_{n..1}^\circ}{N_n \sin l''}; \quad P_5^{1..n} = -\frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{M_n \sin l''}. \quad (20)$$

Mit den Bezeichnungen (7) § 2 wird:

$$\left. \begin{aligned} P_1^{1..n} &= -\frac{M_1}{M_n} \cos l_{1..n} = -P_1^{1..n}; \quad P_4^{1..n} = -\frac{s_{1..n}}{M_n} \sin A_{n..1}^\circ = -P_4^{1..n} \\ Q_1^{1..n} &= -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \operatorname{tg} \varphi_n = -q_1^{1..n} \\ Q_4^{1..n} &= +\frac{s_{1..n}}{N_n} \frac{\cos A_{n..1}^\circ}{\cos \varphi_n} = -q_4^{1..n} \\ S_1^{1..n} &= Q_1^{1..n} \cos \varphi_n = -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \sin \varphi_n \\ S_4^{1..n} &= +\frac{s_{1..n}}{N_n} \cos A_{n..1}^\circ = Q_4^{1..n} \cos \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Mit (20) und (21) erhält man für ξ und η die endgültigen Ausdrücke (22):

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) - P_1^{1..n} \xi_1 - P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - S_1^{1..n} \xi_1 - \left(S_4^{1..n} - \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_1} \right) \eta_{11} \operatorname{tg} \varphi_1 + Q_5^{1..n} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Mit diesen Gleichungen, die für die Punkte $P_2, P_3, P_4 \dots P_n$ aufzustellen sind, müssen noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= & \xi_1 \\ \eta_{11} &= & \eta_{11} \end{aligned}$$

für Punkt P_1 verbunden werden.

Zur Aufstellung dieser Gleichungen müssen die geodätischen Linien $P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, \dots, P_1P_{15}, \dots, P_1P_{21} \dots$ und die zugehörigen Azimute und Gegenazimute berechnet werden, wobei man sich auf eine geringe Genauigkeit, die lediglich für die Berechnung der Koeffizienten P_1, P_4, P_5, S_1, S_4 u. Q_5 ausreicht, beschränken darf. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt nach den Gleichungen (20) und (21); damit erhält man dann folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= & \xi_1 \\ \eta_{11} &= & \eta_{11} \\ \xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^\circ) - P_1^{1..2} \xi_1 - & P_4^{1..2} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + P_5^{1..2} \frac{da}{a} \\ \eta_{12} &= (\lambda_2 - L_2^\circ) \cos \varphi_2 - S_1^{1..2} \xi_1 - \left(S_4^{1..2} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + Q_5^{1..2} \frac{da}{a} \\ \xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^\circ) - P_1^{1..3} \xi_1 - & P_4^{1..3} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + P_5^{1..3} \frac{da}{a} \\ \eta_{13} &= (\lambda_3 - L_3^\circ) \cos \varphi_3 - S_1^{1..3} \xi_1 - \left(S_4^{1..3} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + Q_5^{1..3} \frac{da}{a} \\ &\dots & \dots & \dots \\ \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) - P_1^{1..n} \xi_1 - & P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - S_1^{1..n} \xi_1 - \left(S_4^{1..n} - \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_{11} + Q_5^{1..n} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Als Unbekannte treten hierbei $\xi_1, \eta_{11} \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\frac{da}{a}$ auf. Durch Auflösung des Gleichungssystems (23) nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate von ξ und η $\left(\sum_1^n \xi^2 + \sum_1^n \eta^2 \right)$ ein Minimum wird, ergeben sich die Unbekannten da, ξ_1 und η_{11} und damit die neuen Ausgangsdaten:

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 = B_1^\circ - \xi_1 \\ L_1 &= \lambda_1 - \eta_{11} \sec \varphi_1 = L_1^\circ - \eta_{11} \sec \varphi_1 \\ A_{1..2} &= \alpha_{1..2} - \eta_{11} \operatorname{tg} \varphi_1. \end{aligned}$$

Beachtet man für die Breiten und Längen noch die topographisch-isostatische Reduktion und setzt man sie anstelle von ξ und η mit der Bezeichnung ξ' und η' in (23) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\delta\xi_1' &= -\xi_1' + \xi_1 \\
\delta\eta_1' &= -\eta_1' \\
\delta\xi_2' &= (\varphi_2 - \xi_2' - B_2^\circ) - P_1^{1.2} \xi_1 - P_4^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1.2} \frac{da}{a} \\
\delta\eta_2' &= (\lambda_2 - L_2^\circ) \cos \varphi_2 - \eta_2' - S_1^{1.2} \xi_1 - \left(S_4^{1.2} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.2} \frac{da}{a} \\
\delta\xi_3' &= (\varphi_3 - \xi_3' - B_3^\circ) - P_1^{1.3} \xi_1 - P_4^{1.3} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1.3} \frac{da}{a} \\
\delta\eta_3' &= (\lambda_3 - L_3^\circ) \cos \varphi_3 - \eta_3' - S_1^{1.3} \xi_1 - \left(S_4^{1.3} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.3} \frac{da}{a} \\
\delta\xi_n' &= (\varphi_n - \xi_n' - B_n^\circ) - P_1^{1.n} \xi_1 - P_4^{1.n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1.n} \frac{da}{a} \\
\delta\eta_n' &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - \eta_n' - S_1^{1.n} \xi_1 - \left(S_4^{1.n} - \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.n} \frac{da}{a}
\end{aligned} \tag{24}$$

Das Gleichungssystem (24) ist wiederum nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen, unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate von $\delta\xi'$ und $\delta\eta'$ ein Minimum wird.

Für die derzeitige Triangulierung I.O. im europäischen Teil der UdSSR. — die noch nicht bis zum Ural und Kaukasus vorgetrieben ist — kann man sich vorläufig mit der Lösung der Gleichungen (23) begnügen, dh. auf die Einführung der topographisch-isostatischen Reduktion verzichten. Die weitere Entwicklung der Triangulation bedingt die Einführung der topographisch-isostatischen Reduktion und die neuerliche Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten unter Beachtung der Gleichung (24).

Nach Berechnungen des Autors kann aus der derzeitigen Triangulation im europ. Teil d. UdSSR. die grosse Halbachse mit einem mittleren Fehler von $\pm 90 m$ abgeleitet werden.

§ 4. Formeln zur Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen.

(Allgemeine Formeln von Prof. F. N. Krassowsky).

Bei der Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen gehen wir vom Ausgangspunkt P_1 der Triangulation nach P_2 (Abb. 3), dann von P_2 nach P_3 , von P_3 nach P_4 , von P_4 nach P_5 , von P_5 nach P_6 und so fort.

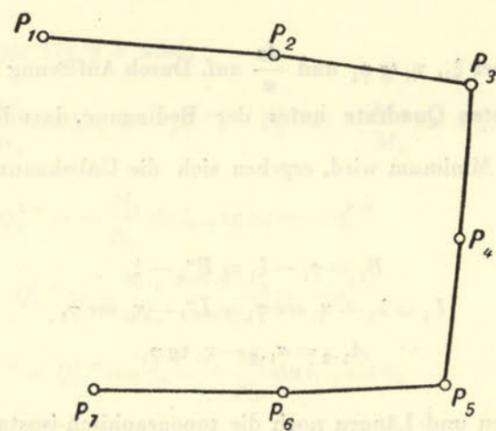


Abb. 3.

Im einzelnen nehmen wir an, dass die einleitenden Aufgaben des vorigen § bereits erledigt sind, dass also im Punkt P_1 ξ_1 und η_1 bereits bestimmt sind.

Damit stehen auch die Ausgangswerte

$$\begin{aligned}
B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\
L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\
A_{1.2} &= \alpha_{1.2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1
\end{aligned}$$

fest.

Die Ausgangsdaten B_1 und L_1 unterliegen keinen Veränderungen mehr. Wir berechnen dann mit diesen Ausgangswerten auf einem Ellipsoid mit der grossen Halbachse $(a + da)$ und der Besselschen Abplattung die Näherungskoodinaten für die Laplaceschen Punkte, auf die schon im § 2 hingewiesen wurde, und die mit B_n° und L_n° bezeichnet wurden. Dann werden ebenso wie im § 2 die geodätischen Azimute A° und die Längen s° der geodätischen Linien, die die aufeinander folgenden Laplaceschen Punkte verbinden, in aller Strenge berechnet.

Ausserdem setzen wir den Fehler $\delta\varphi_1$ der astronomischen Breite in P_1 gleich Null; dies ist ohne weiteres angängig, weil dieser Fehler sehr klein ist. Setzen wir daher in den Gleichungen (1) § 2 dB_1 gleich Null, so gehen die Gleichungen (3) § 2 für Punkt P_2 in folgende über:

$$\begin{aligned}
dB_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} dA_{1.2} \\
dL_2 &= dL_1 + q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} dA_{1.2} \\
dA_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} dA_{1.2}
\end{aligned}$$

Da auch L_1 als unveränderlich gilt, wird auch $dL_1 = 0$. Für die Folge setzen wir jedoch nach (1) § 2 $dL_1 = \delta\lambda_1$, unter der Voraussetzung, dass $\delta\lambda_1$ ebenfalls Null ist.

Dann wird

$$\left. \begin{aligned}
dB_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} dA_{1.2} \\
dL_2 &= q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} dA_{1.2} + \delta\lambda_1 \\
dA_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} dA_{1.2}
\end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Ferner hat man die Gleichungen (4) § 2:

$$\left. \begin{aligned}
dB_2 &= \varphi_2 - B_2^\circ - \xi_2 + \delta\varphi_2 \\
dL_2 &= \lambda_2 - L_2^\circ - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 \\
dA_{1.2} &= \delta\alpha_{1.2} \\
dA_{2.1} &= \alpha_{2.1} - A_{2.1}^\circ - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2.1}
\end{aligned} \right\} \tag{26}$$

oder allgemein — unter Ausschluss des Punktes P_1 :

$$\left. \begin{aligned}
dB_n &= \varphi_n - B_n^\circ - \xi_n + \delta\varphi_n \\
dL_n &= \lambda_n - L_n^\circ - \eta_n \sec \varphi_n + \delta\lambda_n \\
dA_{n-1,n} &= \alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^\circ - \eta_{n-1} \operatorname{tg} \varphi_{n-1} + \delta\alpha_{n-1,n} \\
dA_{n,n-1} &= \alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^\circ - \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n + \delta\alpha_{n,n-1}
\end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Wird (26) in (25) eingesetzt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_2 - B_2^\circ - \xi_2 + \delta\varphi_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\
\lambda_2 - L_2^\circ - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta\lambda_2 &= \delta\lambda_1 + q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\
\alpha_{1.2} - A_{2.1}^\circ - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta\alpha_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}
\end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Hier darf nochmals darauf hingewiesen werden, dass die dritte Gleichung von (26) $dA_{1.2}^{\circ} = \delta\alpha_{1.2}$ und damit natürlich auch die Gleichungen (28) nur unter der Voraussetzung gelten, dass bei der Berechnung der Näherungskordinaten B_2°, L_2° für den Ausgangspunkt die Koordinaten $B_1 = \varphi_1 - \xi_1, I_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1$ und das Azimut $A_{1.2} = \alpha_{1.2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ angesetzt wurden.

Von den Gleichungen (28) gehen wir, wie im § 2, über zu

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \delta\varphi_2 - P_3^{1.2} \delta s_{1.2} - P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - L_2^{\circ}) - Q_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 - Q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} - Q_3^{1.2} \delta s_{1.2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_3^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_4^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta\alpha_{1.2} - r_3^{1.2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta s_{1.2}.\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen von (7) § 2, erhalten wir daraus

$$\left. \begin{aligned}\xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + \delta\varphi_2 + P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - L_2^{\circ}) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ Q_3^{1.2} \delta s_{1.2} + Q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \nu_2 &= \eta_2 \sec \varphi_2 = (\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Subtrahieren wir in (29) die 2. Gleichung von der dritten, so erhalten wir die Laplacesche Gleichung für P_2 in folgender Form:

$$\begin{aligned}(\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - (\lambda_2 - L_2^{\circ}) - \delta\lambda_2 + \delta\lambda_1 + \\ + \delta\alpha_{2.1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R_4^{1.2} - Q_4^{1.2}) \delta\alpha_{1.2} = 0.\end{aligned} \quad (29a)$$

Hierin ist

$$R_4^{1.2} - Q_4^{1.2} = -\cos \frac{s_{1.2}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_2 = -\operatorname{cosec} \varphi_2.$$

Für ein maximales $s = 250$ ergibt sich, wenn $\cos \frac{s}{R} = 1$ gesetzt wird, ein Fehler von $\frac{1}{1250} \delta\alpha$; dies entspricht in der Laplaceschen Gleichung einem Fehler von $0,0003''$, der vernachlässigt werden darf.

Damit wird

$$\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ} - [(\lambda_2 - L_2^{\circ})] \sin \varphi_2 - (\delta\lambda_2 - \delta\lambda_1) \sin \varphi_2 + \delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{1.2} = 0.$$

Allgemein schreiben wir die Laplacesche Gleichung in folgender Form:

$$\begin{aligned}\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{1.2} - \delta\lambda_2 \sin \varphi_2 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) - (\alpha_{1.2} - A_{1.2}^{\circ}) - \\ - (\lambda_2 - L_2^{\circ}) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0.\end{aligned} \quad (30)$$

Für Punkt P_3 ergibt sich nach den Gleichungen (9), (10) und (11) § 2:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^{\circ}) + P_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + P_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) + P_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) + \\ &+ P_1^{2.3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2.3} \nu_2 + P_3^{2.3} \delta s_{2.3} + P_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} + \delta\varphi_3 \\ \nu_3 &= (\lambda_3 - \lambda_2) - (L_3^{\circ} - L_2^{\circ}) + Q_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + Q_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) + \\ &+ Q_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + Q_1^{2.3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2.3} \nu_2 + Q_3^{2.3} \delta s_{2.3} + Q_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} \\ \nu_3 &= (\alpha_{3.2} - A_{3.2}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + R_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + R_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) + \\ &+ R_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} + R_1^{2.3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2.3} \nu_2 + R_3^{2.3} \delta s_{2.3} + R_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3}.\end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin $(\delta\varphi_2 - \xi_2)$ und ν_2 durch die entsprechenden Ausdrücke gemäss der ersten und dritten Gleichung von (29), so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^{\circ}) + P_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) - P_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ P_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) + \delta\varphi_3 + P_3^{2.3} \delta s_{2.3} - P_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + \\ &+ P_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - P_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} - P_2^{2.3} (\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &- P_2^{2.3} R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) - P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - P_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} - \\ &- P_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \nu_3 &= \omega_{\lambda}^{2.3} - Q_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - Q_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 - Q_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + Q_3^{2.3} \delta s_{2.3} + Q_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - \\ &- Q_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} + Q_2^{2.3} \omega_{\alpha}^{1.2} + Q_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + \\ &+ Q_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + Q_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \nu_3 &= \omega_{\alpha}^{2.3} - R_1^{2.3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - R_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ &+ \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} - R_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} - R_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} + \\ &+ R_3^{2.3} \delta s_{2.3} + R_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - R_2^{2.3} \omega_{\alpha}^{1.2} - R_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - \\ &- R_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} - R_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Hierin bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned}\omega^{n-1, n} &= (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L_n^{\circ} - L_{n-1}^{\circ}) + Q^{n-1, n} (\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ}) + \\ &+ Q_3^{n-1, n} (s'_{n-1, n} - s^{\circ}_{n-1, n}) + Q_4 (\alpha_{n-1, n} - A_{n-1, n}^{\circ}) \\ \omega_{\alpha}^{n-1, n} &= (\alpha_{n, n-1} - A_{n, n-1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_n + R_1^{n-1, n} (\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ}) + \\ &+ R_3^{n-1, n} (s'_{n-1, n} - s^{\circ}_{n-1, n}) + R_4^{n-1, n} (\alpha_{n-1, n} - A_{n-1, n}^{\circ})\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

[Die Glieder mit $(\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ})$ gehen in die Gleichungen für $\omega_{\lambda}^{1.2}$ und $\omega_{\alpha}^{1.2}$ nicht ein.]

Aus (31) erhalten wir durch Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung unter Beachtung von (32)

$$\begin{aligned}(\alpha_{3.2} - A_{3.2}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + (R_4^{2.3} - Q_4^{2.3}) (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) - \\ - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L_3^{\circ} - L_2^{\circ})] - P_1^{2.3} (R_1^{2.3} - Q_1^{2.3}) (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) - \\ - (R_2^{2.3} + Q_2^{2.3}) [(\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2})] - \\ - \delta\lambda_3 + \delta\lambda_2 - P_3^{1.2} (R_2^{2.3} - Q_1^{2.3}) \delta s_{1.2} - (R_2^{2.3} + Q_2^{2.3}) R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + \\ + (R_4^{2.3} - Q_4^{2.3}) \delta\alpha_{2.3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} - (R_2^{2.3} + Q_2^{2.3}) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - \\ - (R_1^{2.3} - Q_1^{2.3}) P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} - (R_2^{2.3} + Q_2^{2.3}) R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} = 0.\end{aligned} \quad (33)$$

Zur Umformung der Koeffizienten in (33) werden die Bezeichnungen (7) eingeführt. Wir erhalten dann unter der Annahme $\frac{s}{R} < \frac{1}{25}$

$$\left. \begin{aligned}R_4^{2.3} - Q_4^{2.3} &= -\operatorname{cosec} \varphi_3 \dots \text{mit der Näherung } \cos \frac{s}{R} = 1 \\ R_2^{2.3} + Q_2^{2.3} &= 1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \\ R_1^{2.3} - Q_1^{2.3} &= -\sin I_{2.3} \left(\frac{1}{\sin \varphi_3 \cos \varphi_3} - \frac{\sin \varphi_3}{\cos \varphi_3} \right) = -\sin I_{2.3} \operatorname{cotg} \varphi_3\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

unter Vernachlässigung der Grössen e^{2l} .

Damit sieht man, dass in (33) der allgemeine Koeffizient bei $\delta\alpha_{1.2}$ gleich ist

$$-\sin l_{2.3} \cotg \varphi_3 \cdot \frac{s_{1.2}}{N_2} \sin A_{2.1} + \operatorname{cosec} \varphi_2 - \frac{1}{\sin \varphi_3} - \frac{s_{1.2}}{N_2} \cos A_{2.1} \sec \varphi_2 + \\ + \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \sec \varphi_2 \cdot \frac{s_{1.2}}{N_2} \cos A_{2.1} = \operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3,$$

wenn die Glieder mit $\frac{s^2}{R^2}$ vernachlässigt werden.

Der allgemeine Koeffizient von $\delta s_{1.2}$ (oder von $s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}$) ist

$$\sin l_{2.3} \cotg \varphi_3 \cdot \frac{\cos A_{2.1}}{M_2 \sin l''} \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \right) \frac{\sin A_{2.1}}{N_2 \sin l'' \cos \varphi_2} = \\ = -\frac{s_{2.3} \sin A_{3.2}}{N_2 M_2 \sin l''} \cdot \frac{\cos A_{2.1}}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2.3} \cos A_{3.2} \sin A_{2.1}}{M_2 N_2 \sin l'' \sin \varphi_3} = \\ = -\frac{s_{2.3}}{N_2 M_2 \sin l''} \cdot \frac{\sin(A_{3.2} - A_{2.1})}{\sin \varphi_3},$$

wobei wiederum die Grössen mit $\frac{s^2}{R^2}$ vernachlässigt wurden. Für $\delta s = 3 m$ wird der Einfluss des

Gliedes mit $\delta s_{1.2}$ kleiner als $\pm 0,003''$.

Deshalb darf die Gleichung (33) in folgender Form geschrieben werden:

$$(\alpha_{3.2} - A_{3.2}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] - \\ - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \right) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) - \delta\lambda_3 + \delta\lambda_2 + \\ + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2.3} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \right) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + \\ + (\operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3) \delta\alpha_{1.2} + \\ + \frac{s_{2.3}}{M_2 N_2 \sin l''} \frac{\sin(A_{2.3}^{\circ} - A_{2.1}^{\circ})}{\sin \varphi_3} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) = 0. \quad (35a)$$

Damit erhalten wir die endgültige Form der Laplaceschen Gleichung für P_3 :

$$\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{2.3} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \right) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{1.2}) - (\delta\lambda_3 - \delta\lambda_2) \sin \varphi_3 + \\ + \left\{ (\alpha_{3.2} - A_{3.2}^{\circ}) - (\alpha_{2.3} - A_{2.3}^{\circ}) + [(\alpha_{2.1} - A_{2.1}^{\circ}) - (\alpha_{1.2} - A_{1.2}^{\circ})] \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \right) - \right. \\ \left. - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] \sin \varphi_3 \right\} + (\lambda_1 - L_1) \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \right) \sin \varphi_1 + \\ + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \right) \sin \varphi_1 \delta\lambda_1 + \frac{s_{2.3} \sin(A_{2.3}^{\circ} - A_{2.1}^{\circ})}{M_2 N_2 \sin l''} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) = 0. \quad (35)$$

Die Gleichung (35) gilt allgemein, sodass sie die allgemeine Form für die Laplacesche Bedingung für beliebige Punkte darstellt, umso mehr als $s^{\circ}_{1.2}$ immer $s'_{1.2}$ gleichgesetzt werden kann.

Für den Punkt P_4 erhalten wir für v

$$v_4 = \omega_{\lambda}^{3.4} + \delta\lambda_1 - \delta\lambda_3 + Q_1^{3.4} (\delta\varphi_3 - \xi_3) + Q_2^{3.4} v_3 + Q_3^{3.4} \delta s_{3.4} + Q_4^{3.4} \delta\alpha_{3.4} \\ v_1 = \omega_{\alpha}^{3.4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4.3} + R_1^{3.4} (\delta\varphi_3 - \xi_3) - R_2^{3.4} v_3 + R_3^{3.4} \delta s_{3.4} + R_4^{3.4} \delta\alpha_{3.4}.$$

Werden hierin ξ_3 und v_3 durch die 1. und 3. Gleichung von (31) ersetzt, so wird

$$v_1 = \omega_{\lambda}^{3.4} + \delta\lambda_1 - \delta\lambda_3 - Q_1^{3.4} [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) - P_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2})] - \\ - Q_1^{3.4} [P_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A^{\circ}_{2.3}) + P_3^{2.3} \delta s_{2.3} - P_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - P_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] - \\ - Q_1^{3.4} [P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) + P_2^{2.3} R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \\ + P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + P_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] + \\ + Q_2^{3.4} [\omega_{\alpha}^{2.3} - R_1^{2.3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} - \\ - R_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2}] + Q_2^{3.4} [-R_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} + R_3^{2.3} \delta s_{2.3} + R_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - R_2^{2.3} \omega_{\alpha}^{1.2} - \\ - R_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - R_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} - R_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] + Q_3^{3.4} \delta s_{3.4} + Q_4^{3.4} \delta\alpha_{3.4}. \quad (36)$$

$$v_4 = \omega_{\alpha}^{3.4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4.3} - R_1^{3.4} [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P_3^{2.3} (s'_{2.3} - s^{\circ}_{2.3}) - \\ - P_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + P_4^{2.3} (\alpha_{2.3} - A^{\circ}_{2.3})] - R_1^{3.4} [P_3^{2.3} \delta s_{2.3} - P_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2} + \\ + P_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - P_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] + R_1^{3.4} P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2.1} - A^{\circ}_{2.1}) + \\ + R_1^{3.4} [P_2^{2.3} R_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + P_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] - \\ - R_2^{3.4} [\omega_{\alpha}^{2.3} - R_1^{2.3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2.3} P_3^{1.2} (s'_{1.2} - s^{\circ}_{1.2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3.2} - R_1^{2.3} P_3^{1.2} \delta s_{1.2}] - \\ - R_2^{3.4} [-R_1^{2.3} P_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} + R_3^{2.3} \delta s_{2.3} + R_4^{2.3} \delta\alpha_{2.3} - R_2^{2.3} \omega_{\alpha}^{1.2} - \\ - R_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} - R_2^{2.3} R_3^{1.2} \delta s_{1.2} - R_2^{2.3} R_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2}] + R_3^{3.4} \delta s_{3.4} + R_4^{3.4} \delta\alpha_{3.4}. \quad (37)$$

Wir subtrahieren nun (36) von (37), wobei wir die Beziehungen (34) (unter Vertauschung der Indizes) benutzen.

Der allgemeine Koeffizient von $\delta s_{1.2}$ wird:

$$-\sin l_{3.4} \cotg \varphi_4 (P_1^{2.3} P_3^{1.2} + P_2^{2.3} R_3^{1.2}) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} \right) (R_1^{2.3} P_3^{1.2} + R_2^{2.3} R_3^{1.2}) = \\ = + \frac{\sin l_{3.4} \cotg \varphi_4 \cos A_{2.1}}{M \sin l''} \frac{\sin \varphi_4 - \sin \varphi_3 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_4} \frac{\sin A_{2.1}}{\sin \varphi_3 N \sin l'' \cos \varphi_2} = \\ = \frac{s_{3.4} \sin A_{3.4} \cos A_{2.1}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3.4} \cos A_{3.4} \sin A_{2.1}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} = \frac{s_{3.4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin(A_{3.4} - A_{2.1})}{\sin \varphi_4}.$$

Der allgemeine Koeffizient von $\delta s_{2.3}$ wird:

$$\sin l_{3.4} \cotg \varphi_4 \cdot \frac{\cos A_{3.2}}{M_3 \sin l''} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} \right) \frac{\sin A_{3.2}}{N_3 \sin l'' \cos \varphi_3} = \\ = \frac{s_{3.4} \sin A_{3.4} \cos A_{3.2}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3.4} \cos A_{3.4} \sin A_{3.2}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} = \frac{s_{3.4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin(A_{3.4} - A_{3.2})}{\sin \varphi_4}.$$

Der Koeffizient von $\delta s_{3.4}$ wird Null.

Der allgemeine Koeffizient von $\delta\alpha_{1.2}$ wird:

$$-\sin l_{3.4} \cotg \varphi_4 (P_1^{2.3} P_4^{1.2} + P_2^{2.3} R_4^{1.2}) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} \right) (R_1^{2.3} P_4^{1.2} + R_2^{2.3} R_4^{1.2}) = \\ = \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} \right) (\operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \operatorname{cosec} \varphi_2) = \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.$$

Der allgemeine Koeffizient bei $\delta\alpha_{2.1}$ wird:

$$-\sin l_{3.4} \cotg \varphi_4 P_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R_2^{3.4} + Q_2^{3.4}) R_2^{2.3} \operatorname{cosec} \varphi_2 = \\ = - \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4} \right) \operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4).$$

Der allgemeine Koeffizient bei $\delta\alpha_{2,3}$ wird:

$$\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.$$

Der Koeffizient bei $\delta\alpha_{3,2}$ wird:

$$-\left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \operatorname{cosec} \varphi_3 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4).$$

Der Koeffizient bei $\delta\alpha_{3,4}$ wird $-\operatorname{cosec} \varphi_4$; damit wird die Laplacesche Gleichung für P_4 :

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha}^{3,4} - \omega_{\lambda}^{3,4} - (R_1^{3,4} - Q_1^{3,4}) [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + \\ & + P_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) - P_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + P_4^{2,3} (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3})] + \\ & + (R_1^{3,4} - Q_1^{3,4}) [P_2^{2,3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) + P_2^{2,3} R_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2})] - \\ & - (R_2^{3,4} + Q_2^{3,4}) [\omega_{\alpha}^{2,3} - R_1^{2,3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - R_2^{2,3} \omega_{\alpha}^{1,2}] + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3,4} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{3,2} + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,3} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,1} + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,1} + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{3,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,3} + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{2,1})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,1} - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) \operatorname{cosec} \varphi_4 - [(\lambda_1 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3,1} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [(\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2})] + \\ & + (\lambda_1 + \delta\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2})}{\sin \varphi_4} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{2,1})}{\sin \varphi_4} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3,4} + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}] + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}] + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,3} + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{1,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,1} = 0. \end{aligned} \quad (37-a)$$

Unter Vernachlässigung der Glieder, die einen Fehler bis 0,01'' bewirken, kann die Laplacesche Gleichung endgültig in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{3,4} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}) + (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}) + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1] - \\ & - (\delta\lambda_4 - \delta\lambda_3) \sin \varphi_4 + (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) - (\alpha_{3,4} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2})] - \\ & - [(\lambda_4 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] \sin \varphi_4 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2}) (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Damit wird für den Punkt P_n , wenn die Übertragung der Koordinaten längs der Linien $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n$ erfolgt, die Laplacesche Gleichung:

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{n,n-1} - \delta\alpha_{n-1,n} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) [(\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-2,n-1}) + \\ & + (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-3,n-2}) + \dots + (\delta\alpha_{5,4} - \delta\alpha_{4,5}) + (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{3,4}) + \\ & + (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}) + (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}) + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1] - (\delta\lambda_n - \delta\lambda_{n-1}) \sin \varphi_n + \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A^{\circ}_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) [(\alpha_{n-1,n-2} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) - (\alpha_{n-2,n-1} - A^{\circ}_{n-2,n-1}) + \\ & + (\alpha_{n-2,n-3} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) - (\alpha_{n-3,n-2} - A^{\circ}_{n-3,n-2}) + \dots + \\ & + (\alpha_{5,4} - A^{\circ}_{5,4}) - (\alpha_{4,5} - A^{\circ}_{4,5}) + (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) - (\alpha_{3,4} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2})] - \\ & - [(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L^{\circ}_n - L^{\circ}_{n-1})] \sin \varphi_n + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) \sin \varphi_1 (\lambda_1 - L_1) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) (s'_{n-2,n-1} - s^{\circ}_{n-2,n-1}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) (s'_{n-3,n-2} - s'_{n-3,n-2}) + \\ & \dots \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{5,4}) (s'_{4,5} - s^{\circ}_{4,5}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{4,3}) (s'_{3,4} - s^{\circ}_{3,4}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{3,2}) (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Anstelle dieser allgemeinen Formeln können die Laplaceschen Gleichungen auch auf folgende Weise aufgestellt werden. Wir multiplizieren Gleichung (30) mit $\operatorname{cosec} \varphi_2$ und addieren sie zu (35a). Dann wird für P_3 :

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2,1} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{1,2} - \delta\lambda_3 + \\ & + \delta\lambda_1 + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2,3}}{M_2 N_2 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{2,3} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + \\ & + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_3 (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (\alpha_{1,2} - A_{1,2}) - (\lambda_3 - L^{\circ}_3) - (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} = 0, \end{aligned} \quad (39-a)$$

oder

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3} + \delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2} - \delta\lambda_3 \sin \varphi_3 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + \\ & + (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}) - (\lambda_3 - L_3) \sin \varphi_3 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{2,3}}{M_2 N_2 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{2,3} - A_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Die Addition von (37-a) und (39-a) ergibt die Laplacesche Gleichung in P_4 in folgender Form:

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{3,4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{3,2} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{2,1} - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_4 + \delta \lambda_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} + \frac{\operatorname{cosec} \varphi_4}{MN \sin 1''} s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \frac{\operatorname{cosec} \varphi_4}{MN \sin 1''} [s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + s_{2,3} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ)] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{4,3} - A_{4,3}^\circ) - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3,4} - A_{3,4}^\circ) + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3,2} - A_{3,2}^\circ) - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^\circ) + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ) - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - \\ & - (\lambda_4 - L_4) + (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} = 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{4,3} + (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) + (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_4 \sin \varphi_4 + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \frac{1}{MN \sin 1''} [s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + s_{2,3} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ)] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\ & + (\alpha_{4,3} - A_{4,3}^\circ) + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^\circ - A_{3,4}^\circ)] + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^\circ - A_{2,3}^\circ)] - \\ & - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - (\lambda_4 - L_4) \sin \varphi_4 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Damit wird die allgemeine Form für die Laplacesche Gleichung im Punkt P_n bei einer Übertragung über $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n$:

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{n,n-1} + (\delta \alpha_{n-1,n-2} - \delta \alpha_{n-1,n}) + (\delta \alpha_{n-2,n-3} - \delta \alpha_{n-2,n-1}) + \dots + \\ & + (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) + (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) + (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_n \sin \varphi_n + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \\ & + \left[\frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) \right] (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \\ & + \left[\frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-2,n-3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) \right] (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) + \\ & \dots + \left[\frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{3,2}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3,2}^\circ) + \right. \\ & \dots + \left. \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) \right] (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \left[\frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \right. \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{2,3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ) \left] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \right. \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^\circ) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,n}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - (A_{n-3,n-4}^\circ - A_{n-3,n-2}^\circ)] + \\ & \dots + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^\circ - A_{4,5}^\circ)] + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^\circ - A_{3,4}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^\circ - A_{2,3}^\circ)] - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - \\ & - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Die Richtigkeit der Verallgemeinerung beim Übergang von den Einzelformeln zu den allgemeinen Formeln (39) und (42) ist hinreichend begründet. Zur Prüfung der richtigen Aufstellung dieser Ausdrücke wurde noch die Laplacesche Gleichung für Punkt P_8 über das Polygon $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$ aufgestellt.

Die Ausdrücke für ν_λ^8 und ν_α^8 zeigen für die Koeffizienten von δs das Ergebnis dieser Aufstellung.

Koeffizient in ν_α^8 :

$$\begin{aligned} & R_3^{7,8} \delta s_{7,8} + (-R_1^{7,8} P_3^{6,7} - R_2^{7,8} R_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{5,6} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{5,6} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{4,5} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{4,5} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{4,5} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{3,4} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{3,4} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{3,4} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{3,4} + \\ & + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{2,3} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{2,3} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{2,3} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{2,3} - \\ & - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{2,3} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{1,2} - \\ & - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{1,2} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} P_3^{1,2} + \\ & + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_1^{2,3} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_2^{2,3} R_3^{1,2}) \delta s_{1,2}. \end{aligned}$$

Koeffizient in $\nu_{\lambda,8}$:

$$\begin{aligned} & Q_3^{7,8} \delta s_{7,8} + (-Q_1^{7,8} P_3^{6,7} + Q_2^{7,8} R_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{5,6} + Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{5,6} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{4,5} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{4,5} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{4,5} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{3,4} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{3,4} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{3,4} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{3,4} - \\ & - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{2,3} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{2,3} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{2,3} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{2,3} + \\ & + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{2,3} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{1,2} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{1,2} + \\ & + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_2^{2,3} P_3^{1,2} - \\ & - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_2^{2,3} R_3^{1,2}) \delta s_{1,2}. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken sind die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt worden. (P_1 wurde — 1 gesetzt, die Glieder mit $R_1 P_2$ abgeworfen usw.).

Die Glieder mit δs werden für die Laplacesche Gleichung für P_8 nach (30) in folgender Form erhalten:

$$\frac{\operatorname{cosec} \varphi_n}{MN \sin 1''} s_{7.8} \left\{ \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{7.6}^{\circ}) \delta s_{6.7} + \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{6.5}^{\circ}) \delta s_{5.6} + \right. \\ \left. + \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{5.4}^{\circ}) \delta s_{4.5} + \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{4.3}^{\circ}) \delta s_{3.4} + \right. \\ \left. + \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{3.2}^{\circ}) \delta s_{2.3} + \sin(A_{7.8}^{\circ} - A_{2.1}^{\circ}) \delta s_{1.2} \right\}. \quad (43)$$

In (42) sind die Glieder der Art (43) zu summieren.

In den Formeln (39) und (42) wurden die Glieder mit δs vernachlässigt; unter der Voraussetzung, dass δs kaum grösser als 1,5 m sein wird, können die Glieder mit δs in den Laplaceschen Gleichungen keinen grösseren Einfluss als 0,001'' haben; die Glieder mit $(s' - s^{\circ})$ hingegen können hin und wieder 0,01'' erreichen; es müssen daher bei der Berechnung der freien Glieder der Laplaceschen Gleichung diese Glieder berücksichtigt werden.

Nach Abb. 4 stellt das Glied in (42) mit $(s'_{n-2, n-1} - s^{\circ}_{n-2, n-1})$ die Projektion von $s_{n-1, n}$ auf das Lot zur Richtung P_{n-2}, P_{n-1} dar (Abschnitt k_{n-1} mit neg. Zeichen).

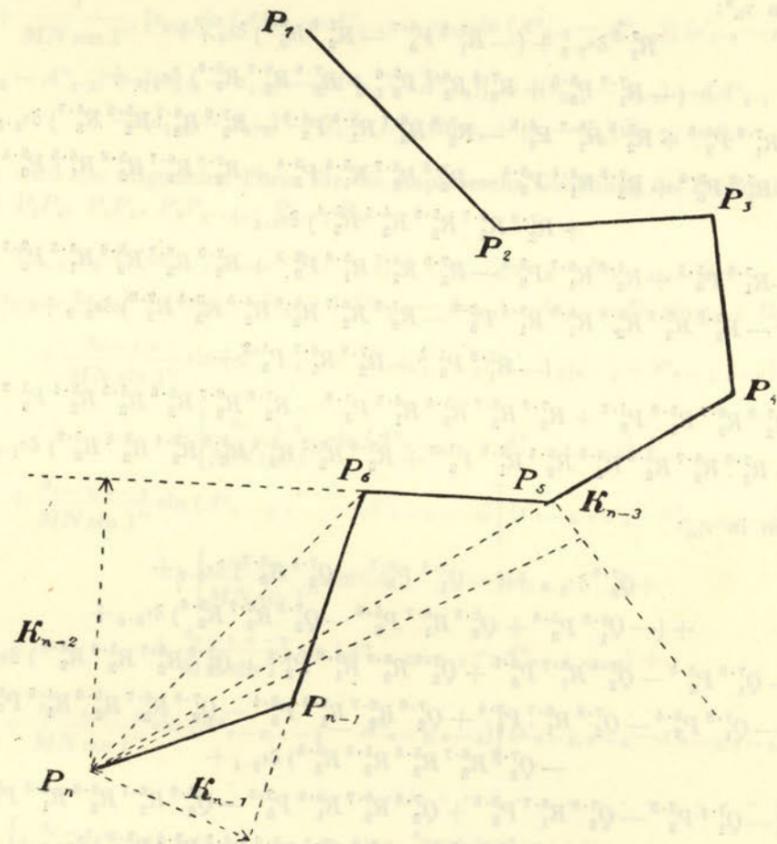


Abb. 4.

Das Glied derselben Formel mit $(s'_{n-3, n-2} - s^{\circ}_{n-3, n-2})$ ist die Projektion der Diagonalen $P_n P_{n-2}$ auf das Lot zu $P_{n-2} P_{n-3}$; das Glied mit $(s'_{n-4, n-3} - s^{\circ}_{n-4, n-3})$ ist die Projektion der Diagonalen $P_n P_{n-3}$ auf das Lot zu $P_{n-3} P_{n-4}$ (Absolut-Abschnitt k_{n-3}) usw. Auf diese Weise kann man die Koeffizienten von $(s' - s^{\circ})$ in (42) graphisch aus dem Triangulationsschema im Massstab 1:1 000 000 oder 1:1 500 000 bestimmen. Daher wird zweckmässig die Formel (42) benutzt.

Beim Vergleich von (39) und (42) müssen folgende Ausgangsdaten für die Berechnung von B° und L° genommen werden

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 = \lambda_1 - \gamma_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1.2} = \alpha_{1.2} - \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1$$

und die Berechnung auf dem endgültig bestimmten Ellipsoid durchgeführt werden.

Da bei der Berechnung von B° und L° für 2/3 der geodätischen Linien die s' benutzt werden können, die aus der Ausgleichung der Teilstücke erhalten wurden, so werden für 2/3 der Glieder mit $(s' - s^{\circ})$ in (42) die Faktoren $(s' - s^{\circ})$ Null sein, wodurch die Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen erheblich erleichtert wird.

Damit wurde das Ziel erreicht, unabhängig von ξ und γ der Helmertschen Methode eine allgemeine Formel für die Laplaceschen Gleichungen zu entwickeln.

§ 5. Aufstellung der Polygonbedingungen.

Im nachstehenden geschlossenen Polygon $P_1 P_2 P_3 \dots P_8 P_1$ (Abb. 5) wurden nach der Ausgleichung der Teilstücke die geodätischen Koordinaten in folgender Weise berechnet:

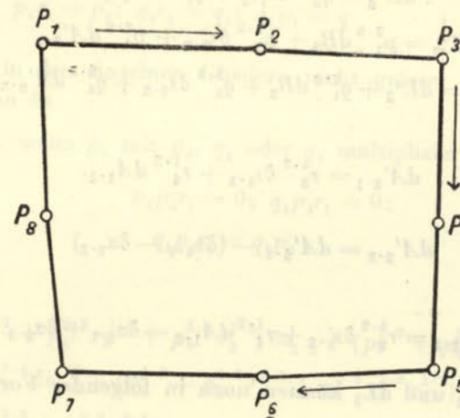


Abb. 5.

a) für P_1^* wurden die Koordinaten, die nach Festlegung der geodätischen Ausgangsdaten (§ 2) und der Ausmasse des Ellipsoids vom Ausgangspunkt der ganzen Triangulation her übertragen wurden, als Ausgangswerte angenommen;

b) mit diesen Koordinaten B_1° und L_1° berechneten wir mit dem geodätischen Azimut $A_{1.2}$ und der Entfernung $s'_{1.2}$, die aus der Ausgleichung der Teilstücke erhalten wurde, die Koordinaten von P_2 ; auf diesem Wege erhielten wir für P_2 die Koordinaten B_2° und L_2° und das geodätische Azimut $A'_{2.1}$;

c) mit dem Winkel $P_1 P_2 P_3$ aus der Ausgleichung der Teilstücke, der gleich ist $\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}$, und mit dem Azimut $A'_{2.1}$ bestimmen wir das geodätische Azimut:

$$A'_{2.3} = A'_{2.1} - (\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) \quad (44)$$

Mit dem Azimut $A'_{2.3}$ und der Entfernung $s'_{2.3}$ berechnen wir die geodätischen Koordinaten B_3° und L_3° und das geodätische Azimut $A'_{3.2}$;

*) Hier ist P_1 der Anfangspunkt irgendeines Polygons, der keineswegs mit dem Ausgangspunkt P_1 der ganzen Triangulierung zusammenfällt. (Abb. 1).

d) auf dieselbe Weise erhalten wir mit (44) die Koordinaten von $P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_1$ und die geodätischen Azimute $A'_{3,4}, A'_{4,3}, \dots, A'_{8,1}, A'_{1,8}$. Wenn wir die auf diese Weise erhaltenen Koordinaten von P_1 mit $(B^{\circ}_1)'$ und $(L^{\circ}_1)'$ bezeichnen, so ergibt

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 - (B^{\circ}_1)' & \text{ den Widerspruch des Polygons in der Breite} \\ L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)' & \text{ ,, ,, ,, ,, in der Länge.} \end{aligned}$$

Die Widersprüche des Polygons werden von den Verbesserungen der geographischen Lage des Polygons und seiner Orientierung so wenig abhängen, dass wir in der folgenden Polygon-Ausgleichung

$$dB^{\circ}_1 = 0; dL^{\circ}_1 = 0 \text{ setzen dürfen.}$$

Aus demselben Grunde könnten wir

$$dA_{1,2} = 0 \text{ setzen.}$$

Aber die letzte Gleichung wollen wir im Hinblick auf die gemeinsame Auflösung der Polygon-Bedingungen und der Laplaceschen Bedingungen einstweilen nicht anwenden.

Mit den Bezeichnungen des § 2 schreiben wir

$$\begin{aligned} dB^{\circ}_2 &= p_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dL^{\circ}_2 &= q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + q_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dB^{\circ}_3 &= p_1^{2,3} dB_2 + p_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{2,3} dA'_{2,3} \\ dL^{\circ}_3 &= dL^{\circ}_2 + q_1^{2,3} dB_2 + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + q_4^{2,3} dA'_{2,3}. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$dA'_{2,1} = r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2}.$$

Nach (44) wird

$$dA'_{2,3} = dA'_{2,1} - (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3})$$

und damit

$$dA'_{2,3} = r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2} - \delta \alpha_{2,1} + \delta \alpha_{2,3}.$$

Die Gleichungen für dB_3 und dL_3 können noch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} dB_3 &= (p_1^{2,3} p_3^{1,2} + p_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + p_3^{2,3} \delta s_{2,3} \\ &+ (p_1^{2,3} p_4^{1,2} + p_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - p_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} dL_3 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - q_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}). \end{aligned} \quad (46)$$

Ferner haben wir:

$$\begin{aligned} dB_4 &= p_1^{3,4} dB_3 + p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{3,4} dA'_{3,4} \\ dL_4 &= dL_3 + q_1^{3,4} dB_3 + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + q_4^{3,4} dA'_{3,4} \\ dA'_{3,2} &= r_1^{2,3} dB_2 + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + r_4^{2,3} dA'_{2,3} \\ dA'_{3,2} &= (r_1^{2,3} p_3^{1,2} + r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ (r_1^{2,3} p_4^{1,2} + r_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} - r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) \\ dA'_{3,4} &= dA'_{3,2} - (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \\ dA'_{3,4} &= (r_1^{2,3} p_3^{1,2} + r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + (r_1^{2,3} p_4^{1,2} + r_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} - \\ &- r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} dB_4 &= (p_1^{3,4} p_3^{1,2} + p_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_1^{2,3} p_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (p_1^{3,4} p_3^{2,3} + p_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (p_1^{3,4} p_4^{2,3} p_4^{1,2} + p_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_1^{2,3} p_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} - \\ &- (p_1^{3,4} p_4^{2,3} + p_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \\ dL_4 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2} + \\ &+ q_4^{3,4} r_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (q_3^{2,3} + q_1^{3,4} p_3^{2,3} + q_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + \\ &+ q_4^{3,4} r_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} - \\ &- (q_4^{2,3} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} + q_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}). \end{aligned} \quad (48)$$

Nach der Ausgleichung der Teilstücke wird $\frac{\delta s}{R \sin 1''}$ kaum grösser als 0,06'' sein, deshalb darf:

a) in den Ausdrücken (48) und (49) in den Koeffizienten für δs

$$p_1 = 1; p_4 r_1 = 0; q_4 r_1 = 0; q_1 p_4 = 0;$$

$$p_4 r_4 = p_4; q_4 r_4 = q_4; q_1 p_1 = q$$

gesetzt werden.

Dadurch wird der Fehler in den einzelnen Gliedern nicht grösser als 0,00007'' werden.

b) in den Koeffizienten von $\delta \alpha$

$$p_1 = 1 \dots \text{ wenn } p_1 \text{ mit } p_4, q_4 \text{ oder } q_1 \text{ multipliziert wird, und}$$

$$p_4 p_4 r_1 = 0; q_4 p_4 r_1 = 0;$$

$$q_1 p_4 r_4 = q_1 p_4$$

gesetzt werden.

Damit wird

$$\begin{aligned} dB_4 &= (p_3^{1,2} + p_4^{2,3} r_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (p_3^{2,3} + p_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ &+ p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + (p_4^{1,2} + p_4^{2,3} r_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} - \\ &- (p_4^{2,3} + p_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} dL_4 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (q_3^{2,3} + q_1^{3,4} p_3^{2,3} + q_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + \\ &- (q_4^{2,3} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} + q_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}). \end{aligned} \quad (51)$$

Ferner haben wir

$$dB_5 = p_1^{4,5} dB_4 + p_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{4,5} dA'_{4,5}$$

$$dL_5 = dL_4 + q_1^{4,5} dB_4 + q_3^{4,5} \delta s_{4,5} + q_4^{4,5} dA'_{4,5}$$

$$dA'_{4,5} = dA'_{4,3} + (d\alpha_{4,5} - d\alpha_{4,3}) = dA'_{4,3} - (d\alpha_{4,3} - d\alpha_{4,5})$$

$$dA'_{4,3} = r_1^{3,4} dB_3 + r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + r_4^{3,4} dA'_{3,4}$$

$$dA'_{4,5} = (r_1^{3,4} p_3^{1,2} + r_1^{3,4} p_3^{2,3} + r_4^{3,4} r_3^{1,2} + r_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{1,2} +$$

$$+ (r_1^{3,4} p_3^{2,3} + r_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + r_3^{3,4} \delta s_{3,4} +$$

$$+ (r_1^{3,4} p_4^{1,2} + r_1^{3,4} p_4^{2,3} + r_4^{3,4} p_4^{1,2} + r_4^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2}) \delta A_{1,2} -$$

$$- (r_1^{3,4} p_4^{2,3} + r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \quad (52)$$

$$dB_5 = (p_3^{1.2} + p_4^{2.3} r_3^{1.2} + p_4^{3.4} r_3^{1.2} + p_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} +$$

$$+ (p_3^{2.3} + p_4^{3.4} r_3^{2.3} + p_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + (p_3^{3.4} + p_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + p_3^{4.5} \delta s_{4.5} +$$

$$+ (p_4^{1.2} + p_4^{2.3} r_4^{1.2} + p_4^{3.4} r_4^{1.2} + p_4^{4.5} r_4^{1.2}) \delta A_{1.2} -$$

$$- (p_4^{2.3} + p_4^{3.4} r_4^{2.3} + p_4^{4.5} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) -$$

$$- (p_4^{3.4} + p_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - p_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) \quad (53)$$

$$dL_5 = (q_3^{1.2} + q_1^{2.3} p_3^{1.2} + q_4^{2.3} r_3^{1.2} + q_1^{3.4} p_3^{1.2} + q_4^{3.4} r_3^{1.2} + q_1^{4.5} p_3^{1.2} + q_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} +$$

$$+ (q_3^{2.3} + q_1^{3.4} p_3^{2.3} + q_4^{3.4} r_3^{2.3} + q_1^{4.5} p_3^{2.3} + q_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} +$$

$$+ (q_3^{3.4} + q_1^{4.5} p_3^{3.4} + q_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + q_3^{4.5} \delta s_{4.5} +$$

$$+ (q_4^{1.2} + q_1^{2.3} p_4^{1.2} + q_4^{2.3} r_4^{1.2} + q_1^{3.4} p_4^{1.2} + q_4^{3.4} r_4^{1.2} + q_1^{4.5} p_4^{1.2} + q_4^{4.5} r_4^{1.2}) \delta A_{1.2} +$$

$$+ q_1^{4.5} p_4^{1.2} + q_1^{4.5} p_4^{2.3} + q_1^{4.5} p_4^{3.4} + q_4^{4.5} r_4^{2.3} r_4^{1.2}) \delta A_{1.2} -$$

$$- (q_4^{2.3} + q_1^{3.4} p_4^{2.3} + q_4^{3.4} r_4^{2.3} + q_1^{4.5} p_4^{2.3} + q_4^{4.5} r_4^{2.3}) (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) -$$

$$- (q_4^{3.4} + q_1^{4.5} p_4^{3.4} + q_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}). \quad (54)$$

Unter der Annahme, dass das Polygon aus vier Linien (Abb. 6) besteht, sind in (53) und (54) die Koeffizienten von $\delta A_{1.2}$ kleine Grössen zweiter Ordnung und der Koeffizient von $\delta A_{1.2}$ in (53) wird:

$$G = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{MN} (\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4),$$

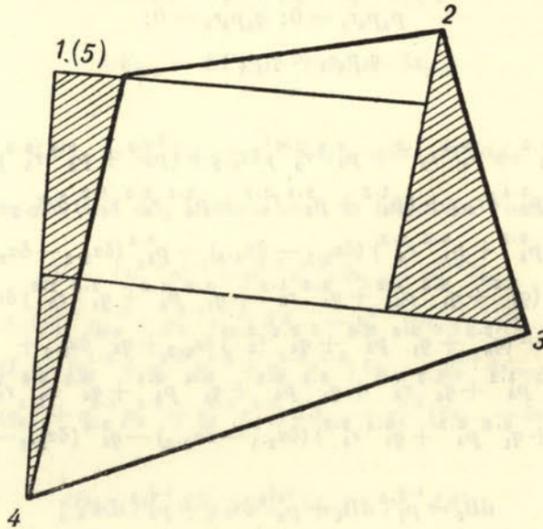


Abb. 6.

wo $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ und Δ_4 den Flächen der Dreiecke in Abb. 6 gleich sind. Der Koeffizient G ergibt in dem Ausdruck für dB_5 für $\delta A_{1.2} = 2,5''$ und für Polygonseiten von ungefähr 300 km etwa $0,002''$.

Da wir nur Formeln für die Polygon-Widersprüche in Breite und Länge ableiten wollen, können wir in (53) und (54) die Glieder mit $\delta A_{1.2}$ überhaupt vernachlässigen.

Für Triangulationspolygone aus vier geodätischen Linien können daher mit den Formeln (53) und (54), die Polygonegleichungen für den Breiten- und Längenschluss unmittelbar aufgestellt werden.

Für diesen besonderen Fall erhalten wir:

$$B_1 - (B_1)' = [p_3^{1.2} + (p_4^{2.3} + p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} +$$

$$+ [p_3^{2.3} + (p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} + [p_3^{3.4} + p_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} +$$

$$+ p_3^{4.1} \delta s_{4.1} - [p_4^{2.3} + (p_4^{3.4} + p_4^{4.1} r_4^{3.4}) r_4^{2.3}] (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) -$$

$$- [p_4^{3.4} + p_4^{4.1} r_4^{3.4}] (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - p_4^{4.1} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.1}) \quad (55)$$

$$L_1 - (L_1)' =$$

$$= [q_3^{1.2} + (q_1^{2.3} + q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{1.2} + (q_4^{2.3} + q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} +$$

$$+ [q_3^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{2.3} + (q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} +$$

$$+ [q_3^{3.4} + q_1^{4.1} p_3^{3.4} + q_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} + q_3^{4.1} \delta s_{4.1} -$$

$$- [q_4^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_4^{2.3} + q_4^{3.4} r_4^{2.3} + q_1^{4.1} p_4^{3.4} + q_4^{4.1} r_4^{3.4} r_4^{2.3}] (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) -$$

$$- [q_4^{3.4} + q_1^{4.1} (p_4^{3.4} + r_4^{3.4})] (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - q_4^{4.1} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}). \quad (56)$$

Die Formeln (55) und (56) können oft unmittelbar zur Aufstellung der Polygonbedingungen in Breite und Länge bei viereckigen Polygonen verwendet werden; in der Folge müssen sie aber noch etwas umgeformt werden.

Zur Ableitung der Formeln für Polygone mit einer grösseren Zahl von geodätischen Linien berechnen wir nicht mehr die Differentiale dB_n und dL_n sondern die Unterschiede

$$dB_n - dB_{n-1} = \delta \varphi_{n-1, n} \quad \text{und} \quad dL_n - dL_{n-1} = \delta l_{n-1, n}.$$

Wir haben aus Vorhergehendem

$$\delta \varphi_{1.2} = p_3^{1.2} \delta s_{1.2}$$

$$\delta \varphi_{2.3} = p_4^{2.3} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_3^{2.3} \delta s_{2.3} - p_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3})$$

$$\delta \varphi_{3.4} = p_4^{3.4} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_4^{3.4} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + p_3^{3.4} \delta s_{3.4} -$$

$$- p_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - p_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4})$$

$$\delta \varphi_{4.5} = p_4^{4.5} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_4^{4.5} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + p_4^{4.5} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + p_3^{4.5} \delta s_{4.5} -$$

$$- p_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) - p_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) - p_4^{4.5} (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) \quad (57)$$

Aus der allgemeinen Formel:

$$dB_n = p_1^{n-1, n} dB_{n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} + p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n}$$

erhalten wir noch

$$dB_n = p_1^{n-1, n} dB_{n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} +$$

$$+ p_4^{n-1, n} [dA'_{n-1, n-2} - (\delta \alpha_{n-1, n-2} - \delta \alpha_{n-1, n})]$$

$$dB_{n-1} = p_1^{n-2, n-1} dB_{n-2} + p_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} +$$

$$+ p_4^{n-2, n-1} [dA'_{n-2, n-3} - (\delta \alpha_{n-2, n-3} - \delta \alpha_{n-2, n-1})].$$

In den Koeffizienten von δs ist $p_1 \approx 1$ und $p_1 p_4 \approx p_4$. Mit Rücksicht hierauf und weil alle Glieder, die von der Veränderung der Azimute abhängen, in dB_n mit dem Faktor p_4 eingehen, können wir schreiben:

$$\delta \varphi_{n-1, n} = dB_n - dB_{n-1} = \delta \varphi_{n-2, n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} -$$

$$- p_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - p_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} -$$

$$- p_4^{n-1, n} (\delta \alpha_{n-1, n-2} - \delta \alpha_{n-1, n}) + p_3^{n-2, n-1} (\delta \alpha_{n-2, n-3} - \delta \alpha_{n-2, n-1}). \quad (58)$$

Ferner:

$$dA'_{n-1, n-2} = r_1^{n-2, n-1} dB_{n-2} + r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + r_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1}$$

$$dA'_{n-2, n-3} = r_1^{n-3, n-2} dB_{n-3} + r_3^{n-3, n-2} \delta s_{n-2, n-3} + r_4^{n-3, n-2} dA'_{n-3, n-2}$$

In der Differenz $P_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - P_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3}$ erhalten die Glieder mit dB_{n-2} und dB_{n-3} in den Summanden mit δs die Faktoren $p_4 r_1$ und in den Summanden mit $\delta \alpha$ die Faktoren $p_4 r_1 p_4$. Daher ist

$$P_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - P_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} = P_4^{n-1, n} r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} - P_4^{n-2, n-1} r_3^{n-3, n-2} \delta s_{n-2, n-3} + P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1} - P_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} dA'_{n-3, n-2} \quad (59)$$

Durch Addition der Formel (59) und (58) erhält man ausgehend von $\delta \varphi_{4,5}$ alle folgenden $\delta \varphi$. Wir haben:

$$P_4^{5,6} dA'_{5,4} - P_4^{4,5} dA'_{4,3} = P_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} - P_4^{4,5} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - P_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,2}) + P_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4})$$

$$\delta \varphi_{5,6} = P_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) \quad (60)$$

Ferner

$$\delta \varphi_{6,7} = \delta \varphi_{5,6} + P_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{5,6} dA'_{5,4} - P_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + P_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6})$$

$$P_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{5,6} dA'_{5,4} = P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,6} - P_4^{5,6} r_4^{4,5} dA'_{4,5}$$

$$dA'_{5,6} = dA'_{5,4} + \delta \alpha_{5,6} - \delta \alpha_{5,4}$$

$$dA'_{4,5} = dA'_{4,3} + \delta \alpha_{4,5} - \delta \alpha_{4,3}$$

$$P_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{5,6} dA'_{5,4} = P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,4} - P_4^{5,6} r_4^{4,5} dA'_{4,3} - P_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + P_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \quad (61)$$

$$P_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{5,6} dA'_{5,4} = P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - P_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{6,7} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + P_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + P_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \quad (62)$$

$$\delta \varphi_{6,7} = P_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{6,7} r_4^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{6,7} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - P_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) \quad (63)$$

$$\delta \varphi_{7,8} = \delta \varphi_{6,7} + P_3^{7,8} \delta s_{7,8} - P_3^{6,7} \delta s_{6,7} + P_4^{7,8} dA'_{7,6} - P_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + P_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7})$$

$$P_4^{7,8} dA'_{7,6} - P_4^{6,7} dA'_{6,5} = P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,7} - P_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,6} = P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,4} - P_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + P_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6})$$

$$P_4^{7,8} dA'_{7,6} - P_4^{6,7} dA'_{6,5} = P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{6,7} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} - P_4^{6,7} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - P_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + P_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + P_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5})$$

$$\delta \varphi_{7,8} = P_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_3^{7,8} \delta s_{7,8} - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - P_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - P_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) \quad (64)$$

$$\delta \varphi_{8,9} = \delta \varphi_{7,8} + P_3^{8,9} \delta s_{8,9} - P_3^{7,8} \delta s_{7,8} + P_4^{8,9} dA'_{8,7} - P_4^{7,8} dA'_{7,6} - P_4^{8,9} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}) + P_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8})$$

$$P_4^{8,9} dA'_{8,7} - P_4^{7,8} dA'_{7,6} = P_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + P_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,8} - P_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,7} = P_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + P_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,6} - P_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,5} - P_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + P_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7})$$

$$P_4^{8,9} dA'_{8,7} - P_4^{7,8} dA'_{7,6} = P_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - P_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + P_4^{8,9} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - P_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - P_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - P_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + P_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + P_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7})$$

$$\delta \varphi_{8,9} = P_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + P_4^{8,9} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + P_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + P_3^{8,9} \delta s_{8,9} - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) - P_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}) \quad (65)$$

Damit erhält man die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{n-1, n} = & P_4^{n-1, n} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + P_4^{n-1, n} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + P_4^{n-1, n} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + \dots + \\ & + P_4^{n-1, n} r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + P_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{2.3} (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{3.4} (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) - \dots - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} r_4^{n-4, n-3} (\delta\alpha_{n-4, n-5} - \delta\alpha_{n-4, n-3}) - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} (\delta\alpha_{n-3, n-4} - \delta\alpha_{n-3, n-2}) - \\ & - P_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} (\delta\alpha_{n-2, n-3} - \delta\alpha_{n-2, n-1}) - \\ & - P_4^{n-1, n} (\delta\alpha_{n-1, n-2} - \delta\alpha_{n-1, n}). \end{aligned} \quad (66)$$

Nun gehen wir zu den Formeln für δl über.

Aus dem Vorhergehenden haben wir:

$$\begin{aligned} \delta l_{1.2} = & q_3^{1.2} \delta s_{1.2} + q_4^{1.2} \delta\alpha_{1.2} \\ \delta l_{2.3} = & (q_1^{2.3} P_3^{1.2} + q_4^{2.3} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + q_3^{2.3} \delta s_{2.3} - q_4^{2.3} (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) \\ \delta l_{3.4} = & (q_1^{3.4} P_3^{1.2} + q_4^{3.4} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{3.4} P_3^{2.3} + q_2^{3.4} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + q_3^{3.4} \delta s_{3.4} - \\ & - (q_1^{3.4} P_4^{2.3} + q_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - q_4^{3.4} (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) \\ \delta l_{4.5} = & (q_1^{4.5} P_3^{1.2} + q_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{4.5} P_3^{2.3} + q_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ & + (q_1^{4.5} P_3^{3.4} + q_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + q_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \\ & - (q_1^{4.5} P_4^{2.3} + q_4^{4.5} P_4^{3.4} + q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - (q_1^{4.5} P_4^{3.4} + q_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - q_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}). \end{aligned} \quad (67)$$

Ferner

$$\begin{aligned} dL_n = & dL_{n-1} + q_1^{n-1, n} dB_{n-1} + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n} \\ \frac{\delta l_{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} = & dB_{n-1} + \frac{q_3^{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} \delta s_{n-1, n} + \frac{q_4^{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} dA'_{n-1, n} \\ \frac{\delta l_{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} = & dB_{n-2} + \frac{q_3^{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta s_{n-2, n-1} + \frac{q_4^{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} dA'_{n-2, n-1} \\ \delta l_{n-1, n} = & \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta l_{n-2, n-1} + q_1^{n-1, n} \delta\varphi_{n-2, n-1} + \\ & + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + \\ & + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n} + \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1} \\ \delta l_{n-1, n} = & \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta l_{n-2, n-1} + q_1^{n-1, n} \delta\varphi_{n-2, n-1} + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \\ & - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - \\ & - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} - q_4^{n-1, n} (\delta\alpha_{n-1, n-2} - \delta\alpha_{n-1, n}) + \\ & + \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} (\delta\alpha_{n-2, n-3} - \delta\alpha_{n-2, n-1}). \end{aligned} \quad (68)$$

Mit der Formel (68) für δl erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & \left(q_1^{5.6} P_3^{1.2} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2} \right) \delta s_{1.2} + \left(q_1^{5.6} P_3^{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3} \right) \delta s_{2.3} + \\ & + \left(q_1^{5.6} P_3^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4} \right) \delta s_{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{2.3} + q_1^{5.6} P_4^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - \\ & - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) + q_1^{5.6} P_3^{4.5} \delta s_{4.5} - q_1^{5.6} P_4^{4.5} (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - q_1^{5.6} P_4^{4.5} (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - q_1^{5.6} P_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) + q_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} \delta s_{4.5} + \\ & + q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3} - q_4^{5.6} (\delta\alpha_{5.4} - \delta\alpha_{5.6}) + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}). \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & \left(q_1^{5.6} P_3^{1.2} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2} \right) \delta s_{1.2} + \left(q_1^{5.6} P_3^{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3} \right) \delta s_{2.3} + \\ & + q_1^{5.6} P_3^{4.5} \delta s_{4.5} + q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + \left(q_1^{5.6} P_3^{3.4} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4} \right) \delta s_{3.4} - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{2.3} + q_1^{5.6} P_4^{3.4} + q_1^{5.6} P_4^{4.5} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{3.4} + q_4^{5.6} P_4^{4.5} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - \\ & - q_1^{5.6} P_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) - q_4^{5.6} (\delta\alpha_{5.4} - \delta\alpha_{5.6}) + q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3} \\ & + q_4^{5.6} dA'_{5.4} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} dA'_{4.3} = q_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + \\ & + q_4^{5.6} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + q_4^{5.6} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + q_4^{5.6} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} - q_4^{5.6} r_4^{1.5} r_4^{2.3} r_4^{3.4} (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - q_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} - \\ & - \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + \frac{q_1^{5.6}}{q_1^{4.5}} q_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}). \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \delta l_{5.6} = & \left(q_1^{5.6} P_3^{1.2} + q_4^{5.6} r_3^{1.2} \right) \delta s_{1.2} + \left(q_1^{5.6} P_3^{2.3} + q_4^{5.6} r_3^{2.3} \right) \delta s_{2.3} + \\ & + \left(q_1^{5.6} P_3^{3.4} + q_4^{5.6} r_3^{3.4} \right) \delta s_{3.4} + \left(q_1^{5.6} P_3^{4.5} + q_4^{5.6} r_3^{4.5} \right) \delta s_{4.5} + q_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{2.3} + q_1^{5.6} P_4^{3.4} + q_1^{5.6} P_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{1.5} r_4^{2.3} r_4^{3.4} \right) (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{3.4} + q_1^{5.6} P_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) - \\ & - \left(q_1^{5.6} P_4^{4.5} + q_4^{5.6} r_4^{4.5} \right) (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) - q_4^{5.6} (\delta\alpha_{5.4} - \delta\alpha_{5.6}). \end{aligned} \quad (69)$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta l_{6.7} &= \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} \delta l_{5.6} + q_1^{6.7} \delta \varphi_{5.6} + q_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \\ &- \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} - q_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) \\ \delta l_{6.7} &= (q_1^{6.7} P_3^{1.2} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + (q_1^{6.7} P_3^{2.3} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ &+ (q_1^{6.7} P_3^{3.4} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + (q_1^{6.7} P_3^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5}) \delta s_{4.5} + \\ &+ \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} + q_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{2.3} + q_1^{6.7} P_4^{3.4} + q_1^{6.7} P_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{3.4} + q_1^{6.7} P_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) + \\ &+ q_1^{6.7} P_3^{5.6} \delta s_{5.6} - q_1^{6.7} P_4^{5.6} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - q_1^{6.7} P_4^{5.6} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- q_1^{6.7} P_4^{5.6} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - q_1^{6.7} P_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) - q_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) + \\ &+ \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} \end{aligned}$$

Aus Vorangegangenem haben wir

$$\begin{aligned} q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} &= q_4^{6.7} r_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \\ &- \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + q_4^{6.7} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + q_4^{6.7} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + q_4^{6.7} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} - \\ &- q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \\ &+ \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}). \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \delta l_{6.7} &= (q_1^{6.7} P_3^{1.2} + q_4^{6.7} r_3^{1.3}) \delta s_{1.2} + (q_1^{6.7} P_3^{2.3} + q_4^{6.7} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ &+ (q_1^{6.7} P_3^{3.4} + q_4^{6.7} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + (q_1^{6.7} P_3^{4.5} + q_4^{6.7} r_3^{4.5}) \delta s_{4.5} + \\ &+ (q_1^{6.7} P_3^{5.6} + q_4^{6.7} r_3^{5.6}) \delta s_{5.6} + q_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{2.3} + q_1^{6.7} P_4^{3.4} + q_1^{6.7} P_4^{4.5} + q_1^{6.7} P_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{3.4} + q_1^{6.7} P_4^{4.5} + q_1^{6.7} P_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{4.5} + q_1^{6.7} P_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - \\ &- (q_1^{6.7} P_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6}) (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) - q_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}). \end{aligned} \tag{70}$$

Beim Übergang zu $\delta l_{7.8}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta l_{7.8} &= \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \delta l_{6.7} + q_1^{7.8} \delta \varphi_{6.7} + q_3^{7.8} \delta s_{7.8} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_3^{6.7} \delta s_{6.7} + \\ &+ q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} - q_4^{7.8} (\delta a_{7.6} - \delta a_{7.8}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) \\ \delta l_{7.8} &= \left(q_1^{7.8} P_3^{1.2} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{1.2} \right) \delta s_{1.2} + \left(q_1^{7.8} P_3^{2.3} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{2.3} \right) \delta s_{2.3} + \\ &+ \left(q_1^{7.8} P_3^{3.4} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{3.4} \right) \delta s_{3.4} + \left(q_1^{7.8} P_3^{4.5} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{4.5} \right) \delta s_{4.5} + \\ &+ \left(q_1^{7.8} P_3^{5.6} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{5.6} \right) \delta s_{5.6} + q_3^{7.8} \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \delta s_{6.7} + q_1^{7.8} P_3^{6.7} \delta s_{6.7} + \\ &+ q_3^{7.8} \delta s_{7.8} - q_3^{6.7} \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \delta s_{6.7} - \left(q_1^{7.8} P_4^{2.3} + q_1^{7.8} P_4^{3.4} + q_1^{7.8} P_4^{4.5} + q_1^{7.8} P_4^{5.6} + \right. \\ &\left. + q_1^{7.8} P_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\delta a_{1.2} - \delta a_{2.3}) - \\ &- \left(q_1^{7.8} P_4^{3.4} + q_1^{7.8} P_4^{4.5} + q_1^{7.8} P_4^{5.6} + q_1^{7.8} P_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - \\ &- \left(q_1^{7.8} P_4^{4.5} + q_1^{7.8} P_4^{5.6} + q_1^{7.8} P_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} \right) (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - \\ &- \left(q_1^{7.8} P_4^{5.6} + q_1^{7.8} P_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} r_4^{5.6} \right) (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) - \\ &- \left(q_1^{7.8} P_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} \right) (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) - q_4^{7.8} (\delta a_{7.6} - \delta a_{7.8}) + \\ &+ \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) + q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} + \\ &+ q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} = q_4^{7.8} r_3^{6.7} \delta s_{6.7} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{5.6} \delta s_{5.6} + \\ &+ q_4^{7.8} r_3^{5.6} \delta s_{5.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} + q_4^{7.8} r_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + \\ &+ q_4^{7.8} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + q_4^{7.8} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + q_4^{7.8} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ &- q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} - \\ &- \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) + \\ &+ \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} (\delta a_{6.5} - \delta a_{6.7}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) - \\ &- q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} (\delta a_{5.4} - \delta a_{5.6}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}). \end{aligned}$$

Mithin wird:

$$\begin{aligned} \delta l_{7,8} = & (q_1^{7,8} P_3^{1,2} + q_4^{7,8} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{7,8} P_3^{2,3} + q_4^{7,8} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{7,8} P_3^{3,4} + q_4^{7,8} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + (q_1^{7,8} P_3^{4,5} + q_4^{7,8} r_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + (q_1^{7,8} P_3^{5,6} + q_4^{7,8} r_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (q_1^{7,8} P_3^{6,7} + q_4^{7,8} r_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + q_3^{7,8} \delta s_{7,8} - (q_1^{7,8} P_4^{2,3} + q_1^{7,8} P_4^{3,4} + \\ & + q_1^{7,8} P_4^{4,5} + q_1^{7,8} P_4^{5,6} + q_1^{7,8} P_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{7,8} P_4^{3,4} + q_1^{7,8} P_4^{4,5} + q_1^{7,8} P_4^{5,6} + q_1^{7,8} P_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - (q_1^{7,8} P_4^{4,5} + q_1^{7,8} P_4^{5,6} + q_1^{7,8} P_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5}) (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ & - (q_1^{7,8} P_4^{5,6} + q_1^{7,8} P_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6}) (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ & - (q_1^{7,8} P_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7}) (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - q_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}). \end{aligned} \quad (71)$$

Nun können wir noch den Ausdruck $\delta l_{8,9}$ anschreiben:

$$\begin{aligned} \delta l_{8,9} = & (q_1^{8,9} P_3^{1,2} + q_4^{8,9} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{8,9} P_3^{2,3} + q_4^{8,9} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{8,9} P_3^{3,4} + q_4^{8,9} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + (q_1^{8,9} P_3^{4,5} + q_4^{8,9} r_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (q_1^{8,9} P_3^{5,6} + q_4^{8,9} r_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + (q_1^{8,9} P_3^{6,7} + q_4^{8,9} r_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (q_1^{8,9} P_3^{7,8} + q_4^{8,9} r_3^{7,8}) \delta s_{7,8} + q_3^{8,9} \delta s_{8,9} - \\ & - (q_1^{8,9} P_4^{2,3} + q_1^{8,9} P_4^{3,4} + q_1^{8,9} P_4^{4,5} + q_1^{8,9} P_4^{5,6} + q_1^{8,9} P_4^{6,7} + q_1^{8,9} P_4^{7,8} + \\ & + q_4^{8,9} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{1,2} - \delta \alpha_{2,3}) - (q_1^{8,9} P_4^{3,4} + q_1^{8,9} P_4^{4,5} + \\ & + q_1^{8,9} P_4^{5,6} + q_1^{8,9} P_4^{6,7} + q_1^{8,9} P_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - (q_1^{8,9} P_4^{4,5} + q_1^{8,9} P_4^{5,6} + q_1^{8,9} P_4^{6,7} + q_1^{8,9} P_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5}) (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ & - (q_1^{8,9} P_4^{5,6} + q_1^{8,9} P_4^{6,7} + q_1^{8,9} P_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6}) (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ & - (q_1^{8,9} P_4^{6,7} + q_1^{8,9} P_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7}) (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - (q_1^{8,9} P_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8}) (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) - \\ & - q_4^{8,9} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}). \end{aligned} \quad (72)$$

Mithin erhält man die allgemeine Formel in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \delta l_{n-1,n} = & (q_1^{n-1,n} P_3^{1,2} + q_4^{n-1,n} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{n-1,n} P_3^{2,3} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \dots + (q_1^{n-1,n} P_3^{i,k} + q_4^{n-1,n} r_3^{i,k}) \delta s_{i,k} + \dots + *) \\ & + (q_1^{n-1,n} P_3^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_3^{n-2,n-1}) \delta s_{n-2,n-1} + \\ & + q_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - (q_1^{n-1,n} P_4^{2,3} + q_1^{n-1,n} P_4^{3,4} + \dots + \\ & + q_1^{n-1,n} P_4^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{n-1,n} P_4^{3,4} + q_1^{n-1,n} P_4^{4,5} + \dots + q_1^{n-1,n} P_4^{n-2,n-1} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & \dots \dots \dots \\ & - (q_1^{n-1,n} P_4^{i,k} + q_1^{n-1,n} P_4^{k,k+1} + \dots + q_1^{n-1,n} P_4^{n-2,n-1} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{i,k}) (\delta \alpha_{i,i-1} - \delta \alpha_{i,k}) - \dots - \\ & - (q_1^{n-1,n} P_4^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1}) (\delta \alpha_{n-2,n-3} - \delta \alpha_{n-2,n-1}) - \\ & - q_4^{n-1,n} (\delta \alpha_{n-1,n-2} - \delta \alpha_{n-1,n}). \end{aligned} \quad (73)$$

*) $k = i + 1$.

Damit haben wir die allgemeinen Formeln für den Anschluss in Breite und Länge im geschlossenen Polygon erhalten.

Es wird nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass wegen der Vernachlässigung der Glieder mit $\delta A_{1,2}$ diese Formeln nur für geschlossene Polygone und nur für den Anschluss in Breite und Länge brauchbar sind; es ist nicht angängig (wenn $\delta A_{1,2}$ nicht Null ist) die Formeln (66) und (73) oder die vorhergehenden Formeln für dB und dL für die Berechnung der Veränderungen in den Koordinaten einer beliebigen Polygonecke anzuwenden. Die Formeln (66) und (73) dürfen nur angewandt werden, wenn die Berechnung der Azimute A' des Polygons in der zu Beginn dieses § angeführten Reihenfolge durchgeführt wird d. h. wenn in jedem Polygon die Berechnung der Azimute A im selben Umgehungssinn unter Benutzung der Strecken s' und der Winkel zwischen den geodätischen Linien erfolgt, die nach der Ausgleichung der Teilstücke berechnet wurden. Die Berechnung wird mit der letzten Linie des Polygons (vom $(n-1)$ -ten bis zum n -ten Polygonpunkt) abgeschlossen. Sie wird über alle Linien des Polygons unabhängig davon ausgeführt, dass in angrenzenden Polygonen dieselben Berechnungen schon gemacht worden sind. Hierbei können natürlich die Berechnungen für eine oder zwei Linien, die an vorhergehende Polygone angrenzen, verwendet werden. In Abb. 7 stellen 1, 2; 2, 3; ...; $(n-1), n; n, n+1$ die geodätischen Linien

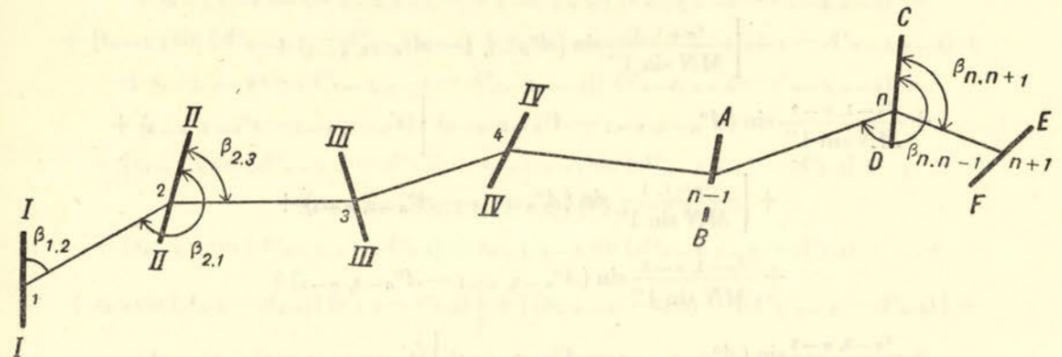


Abb. 7.

dar, die die Laplaceschen Punkte verbinden. Die (Ausgangs-) Seiten der Triangulation, für welche astronomische Azimute bestimmt wurden, bezeichnen wir durch I I, II II, III III, ..., AB, CD, EF; die Fehler in der Bestimmung dieser Azimute werden entsprechend mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{n-1}, \delta_n, \delta_{n+1}$ bezeichnet. Die Fehler der Winkel: $\beta_{1,2}$ — bei P_1 zwischen I I und 1,2; $\beta_{2,1}$ — bei P_2 zwischen II II und 2,1; $\beta_{2,3}$ — bei P_2 zwischen II II und 2,3; $\beta_{n,n-1}$ und $\beta_{n,n+1}$ bei P_n zwischen CD und $n, n-1$ bezeichnen wir entsprechend durch $v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,3}, \dots, v_{n,n-1}, v_{n,n+1}$ unter der Voraussetzung, dass die Winkel β im Uhrzeigersinn gezählt werden (vgl. Abb. 7).

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{1,2} = & \delta_1 + v_{1,2}; \quad \delta \alpha_{2,1} = \delta_2 + v_{2,1}; \quad \delta \alpha_{2,3} = \delta_2 + v_{2,3} \\ \delta \alpha_{n,n-1} = & \delta_n + v_{n,n-1}; \quad \delta \alpha_{n,n+1} = \delta_n + v_{n,n+1}. \end{aligned} \quad (74)$$

Beachtet man die Gleichung (74) so verschwinden in den Gleichungen (66) und (73) die Beobachtungsverbesserungen δ der Azimute vollkommen und es verbleiben nur noch die Unterschiede v in folgender Form

$$v_{2,1} - v_{2,3}; \quad v_{3,2} - v_{3,4}; \quad v_{4,3} - v_{4,5}; \dots; \quad v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n},$$

d. h. in die Bedingungen für den Polygonschluss in Breite und Länge gehen ausser den Verbesserungen der Längen der Seiten des Polygons noch die Verbesserungen aller seiner Winkel ein — mit Ausnahme des Winkels im Ausgangspunkt. In die Laplaceschen Gleichungen gehen die Verbesserungen der Winkel zwischen den Seiten des Polygons ein, mit Ausnahme des ersten Punkts P_1

und des letzten Punkts P_n des Linienzuges $P_1P_2P_3\dots P_n$, für welchen die Laplacesche Bedingung aufzustellen ist: auf P_1 geht ein $\delta_1 + v_{1.2}$ und auf P_n geht ein $\delta_n + v_{n,n-1}$. Die Umbildung der erhaltenen Gleichungen mit Hilfe von (74) wird weiter unten durchgeführt.

Aus (73) ist ersichtlich, dass die Berechnung der Koeffizienten dieser Gleichung erheblich vereinfacht wird, wenn die Koeffizienten von $(\delta\alpha_{i,i-1} - \delta\alpha_{i,k})$ durch schrittweises Hinzufügen nur eines einzigen neuen Summanden und durch Multiplikation des q_4 enthaltenden Gliedes mit einem neuen Faktor beim Übergang von $(\delta\alpha_{i,i-1} - \delta\alpha_{i,k})$ zu $(\delta\alpha_{i-1,i-2} - \delta\alpha_{i-1,i})$ berechnet werden.

Wenden wir uns jetzt der sogenannten Winkelbedingung im Polygon zu. Wir benutzen dabei die Gleichung (42) § 4 und stellen uns vor, dass wir es mit einem geschlossenen Linienzug zu tun haben und nehmen die n -te Ecke als Ausgangspunkt des Polygons an. Dann wird die Laplacesche Gleichung für die Linie $n-1, 1$ folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned}
 & (\delta\alpha_{1,n-1} - \delta\alpha_{1.2}) + (\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-1,1}) + (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-2,n-1}) + \\
 & + \dots + (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.5}) + (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) + (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + \\
 & + \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s^\circ_{n-2,n-1}) + \\
 & + \left[\frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) \right] (s'_{n-2,n-3} - s^\circ_{n-2,n-3}) + \\
 & + \left[\frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{n-2,n-3}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) \right] (s'_{n-3,n-4} - s^\circ_{n-3,n-4}) + \\
 & + \left[\frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \dots + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{3.4}}{MN \sin 1''} \sin(A_{3.4}^\circ - A_{3.2}^\circ) \right] (s'_{2.3} - s^\circ_{2.3}) + \\
 & + \left[\frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \dots + \right. \\
 & + \left. \frac{s_{2.3}}{MN \sin 1''} \sin(A_{2.3}^\circ - A_{2.1}^\circ) \right] (s'_{1.2} - s^\circ_{1.2}) + \\
 & + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1.2}) - (A_{1,n-1}^\circ - A_{1.2}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,1}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \dots + \\
 & + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^\circ - A_{4.5}^\circ)] + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^\circ - A_{3.4}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^\circ - A_{2.3}^\circ)] = 0. \tag{75}
 \end{aligned}$$

Es ist verständlich, dass dies auch die Winkelbedingung des Polygons ist, und dass dieselbe in die Zahl der Laplaceschen Gleichungen eingeht, wenn alle benutzten astronomischen Punkte Laplacesche Punkte sind.

Die Zahl q der Laplaceschen Gleichung ist gleich der Zahl der geodätischen Linienzüge, die jeweils in einem Laplaceschen Punkt beginnen und enden; nach den bisherigen Entwicklungen fällt ein derartiger geodätischer Linienzug mit der geodätischen Linie für ein einzelnes Teilstück zusammen; falls im Netz p geschlossene Polygone auftreten, wird die Zahl der Laplaceschen Gleichungen $q-p$ sein, weil p davon in die Winkelbedingungen übergehen.

Mit den Verbesserungen v der Winkel β schreiben wir die Winkelbedingung in folgender Form:

$$\begin{aligned}
 & (v_{1,n-1} - v_{1.2}) + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \dots + \\
 & + (v_{4.3} - v_{4.5}) + (v_{3.2} - v_{3.4}) + (v_{2.1} - v_{2.3}) + \\
 & + \frac{1}{MN \sin 1''} \left\{ s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s^\circ_{n-2,n-1}) + \right. \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \\
 & + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ)] (s'_{n-2,n-3} - s^\circ_{n-2,n-3}) + \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \\
 & + s_{n-2,n-3} \sin(A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ)] (s'_{n-3,n-4} - s^\circ_{n-3,n-4}) + \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \dots + \\
 & + s_{3.4} \sin(A_{3.4}^\circ - A_{3.2}^\circ)] (s'_{2.3} - s^\circ_{2.3}) + \\
 & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \dots + \\
 & + s_{2.3} \sin(A_{2.3}^\circ - A_{2.1}^\circ)] (s'_{1.2} - s^\circ_{1.2}) \left. \right\} + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1.2}) - (A_{1,n-1}^\circ - A_{1.2}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,1}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \dots + \\
 & + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^\circ - A_{4.5}^\circ)] + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^\circ - A_{3.4}^\circ)] + \\
 & + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^\circ - A_{2.3}^\circ)] = 0. \tag{76}
 \end{aligned}$$

In den Laplaceschen Gleichungen (40), (41), (42) müssen die Verbesserungen $\delta\alpha_{i,k}$ durch die Gleichung

$$\delta\alpha_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}$$

ersetzt werden.

§ 6. Mittlere Fehler der Größen, die in die Laplaceschen Gleichungen und Polygon-Bedingungen eingehen; Bestimmung der Gewichte.

Der mittlere Fehler μ , einer beobachteten Richtung muss aus der Ausgleichung der Teilstücke der Triangulation (§ 1) nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Den mittleren Fehler μ einer ausgeglichenen Richtung in einem Teilstück erhält man aus:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{D-C}{D}}, \tag{77}$$

wobei D —die Zahl aller beobachteten Richtungen und C —die Zahl der Bedingungen in dem Teilstück ist; in vorliegendem Fall wird $\frac{D-C}{D}$ etwa 0.7.

Nach § 5 ist der Fehler $\delta_{i,k}$ des astronomischen Azimuts $\alpha_{i,k}$ der geodätischen Linie gleich dem Beobachtungsfehler δ_i des astronomischen Azimuts α_i der Ausgangsseite im Punkte P plus dem Fehler $v_{i,k}$ des Winkels $\beta_{i,k}$ (Abb. 7)

$$\delta_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}.$$

Die Fehler der Richtungen, die den Winkel $\beta_{i,k}$ bilden, werden mit $v'_{i,k}$ und v'_i bezeichnet, wobei $v'_{i,k}$ sich auf die geodätischen Linien bezieht; es ist also

$$\delta_{i,k} = \delta_i - v'_i + v'_{i,k}. \quad (78)$$

Daraus erhält man:

$$\mu_{\alpha_{i,k}}^2 = \mu_{\alpha_i}^2 + \mu_{\beta}^2 + \mu_{v'_{i,k}}^2. \quad (79)$$

$\mu_{\alpha_i}^2$ muss man den astronomischen Berechnungen in den Basis-Netzen und der geodätischen Berechnung des unmittelbar beobachteten Azimuts auf der Ausgangsseite P_i entnehmen.

Zur Bestimmung von $\mu_{v'_{i,k}}^2$ kann die Näherungsformel dienen:

$$\mu_{v'_0}^2 + \mu_{v'_{i,k}}^2 = \frac{\mu^2}{3n} [2n^2 + 1], \quad (80)$$

wobei man unter n die Zahl der Seiten zwischen den Punkten P_i und P_k (d. i. die Zahl der Dreiecksseiten in dem Linienzug $AabcdD$ der Abb. A) versteht.

Die mittleren Längenfehler, die in die Laplacesche Gleichung eingehen, werden aus den Berichten über die astronomischen Berechnungen in der Triangulation I. Ordnung entnommen.

Es darf noch besonders darauf hingewiesen werden, dass in allen Gleichungen des § 5

$$v_{k,i} - v_{k,(k+1)} \text{ durch } v'_{k,i} - v'_{k,(k+1)}$$

ersetzt werden darf, weil beide Winkel β im Punkte P_i durch den Fehler in α_i gleichmässig verzerrt sind.

Der Fehler der Länge $s'_{i,k}$ der geodätischen Linie $P_i P_k$ wird nach der Formel (81) bestimmt:*)

$$\mu_{s'}^2 = s^2 2\mu_0^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{4n^2 + 3n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{b^2} s^2, \quad (81)$$

wenn $s'_{i,k}$ aus nur einer Basis abgeleitet wurde. Da aber jede geodätische Linie aus 2 Basen bestimmt wird, so ist

$$\mu_{s'}^2 = s^2 2\mu^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{n^2 + \frac{3}{2}n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{2b^2} s^2. \quad (82)$$

Wenn wir die mittleren Fehler der Grössen s , α , $v_{i,k}$, λ , haben so können wir zu den Gewichten übergehen. Hier setzen wir fest, dass dem Fehler mit dem Gewicht = 1 ein mittlerer Winkelfehler von $\pm 1''$ und ein mittlerer Längenfehler von $\pm 1 m$ entspricht.

§ 7. Allgemeine Zusammenfassung der Formeln. Hinweis auf die Reihenfolge der Berechnungen. Allgemeine Folgerung.

Die Bezeichnungen werden nun noch so geändert, dass die Niederschrift der Formeln vereinfacht wird; dann vereinfacht man noch alle Koeffizienten durch Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung bei δs und dritter Ordnung bei $\delta \alpha$.

*) Hierin ist $\frac{m_b}{b}$ der relative Fehler der Ausgangsseite.

Hierzu werden folgende Bezeichnungen eingeführt. Die Länge der Linie zwischen den Punkten P_n und P_{n+1} wird mit s_n bezeichnet, die Koeffizienten p , q , r , die sich auf diese Linien beziehen, erhalten die entsprechenden Zeiger n .

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad p_4^n &= a_n = \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A_{n+1,n}^\circ \\ 6) \quad r_3^n &= b_n = -(2)_{n+1} \sin A_{n+1,n}^\circ \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = q_3^n \sin \varphi_{n+1} = h_n \sin \varphi_{n+1} \\ 5) \quad r_4^n &= c_n = 1 - \frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1,n}^\circ \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = 1 + f_n \sin \varphi_{n+1} \quad (\text{wird nach } f \text{ berechnet}). \\ 7) \quad q_1^n &= d_n = \sin l_{n,n+1} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \\ 1) \quad p_3^n &= l_n = -(1)_{n+1} \cos A_{n+1,n}^\circ \\ 4) \quad q_4^n &= f_n = -\frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1,n}^\circ \sec \varphi_{n+1} \\ 2) \quad q_3^n &= h_n = -(2)_{n+1} \sin A_{n+1,n}^\circ \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Die Reihenfolge der Berechnungen der Koeffizienten für die betreffende Linie entspricht der linksseitigen Bezifferung.

Ferner:

a) die Verbesserung des astronomisch bestimmten Azimuts der Ausgangsseite in P bezeichnen wir mit δ_i ;

b) die Azimutverbesserungen der geodätischen Linie $P_{i,k}$ nennen wir $v_{i,k}$ und $v_{k,i}$ (ohne die in § 6 gebrauchten Zeiger)

c) $\delta \varphi_{n,n+1}$ ersetzen wir durch $\delta \varphi_n$ entsprechend der Bezeichnung s_n ;

d) $\delta l_{n,n+1}$ ersetzen wir durch δl_n entsprechend der Bezeichnung s_n ;

e) $\delta \alpha_i = \delta_i - v_i$, wo v_i die Azimutverbesserung der Ausgangsseite ist.

Damit erhält man mit den oben abgeleiteten Formeln:

I. für ein geschlossenes Polygon mit $n - 1$ Linien und den Ecken $1, 2, 3, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} B_1^\circ - (B_1^\circ)' &= \\ &= [e_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) b_1] \delta s_1 + \\ &+ [e_2 + (a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) b_2] \delta s_2 + \\ &+ [e_3 + (a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1}) b_3] \delta s_3 + \dots + \\ &+ [e_i + (a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1}) b_i] \delta s_i + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ [e_{n-2} + a_{n-1} b_{n-2}] \delta s_{n-2} + \\ &+ e_{n-1} \delta s_{n-1} - \\ &- [a_2 + (a_3 + a_4 c_3 + a_5 c_4 c_3 + a_6 c_5 c_4 c_3 + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} c_{n-4} \dots c_3) c_2] (v_{2,1} - v_{2,3}) - \\ &- [a_3 + (a_4 + a_5 c_4 + a_6 c_5 c_4 + a_7 c_6 c_5 c_4 + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_4) c_3] (v_{3,2} - v_{3,4}) - \\ &- [a_i + (a_k + a_{k+1} c_k + a_{k+2} c_{k+1} c_k + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_k) c_i] (v_{i,i-1} - v_{i,k}) - \\ &\dots \dots \dots \\ &- [a_{n-4} + (a_{n-3} + a_{n-2} c_{n-3} + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3}) c_{n-4}] (v_{n-4,n-5} - v_{n-4,n-3}) - \\ &- [a_{n-3} + (a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}) c_{n-3}] (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) - \\ &- [a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}] (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) - \\ &- a_{n-1} (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}). \end{aligned} \quad (84)$$

In (84) ist B_1° die Ausgangsbreite des ersten Polygonpunktes im ersten Polygon; $(B_1^{\circ})'$ die entsprechende Breite, die über das ganze Polygon übertragen wurde.

Die Gleichung (84) ist die Bedingungsgleichung für den Polygonschluss in der Breite.

II.

$$\begin{aligned}
 L_1^{\circ} - (L_1^{\circ})' = & [h_1 + (d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{n-1})e_1 + (f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1})b_1] \delta s_1 + \\
 & + [h_2 + (d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{n-1})e_2 + (f_3 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-1})b_2] \delta s_2 + \\
 & + [h_3 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})e_3 + (f_4 + f_5 + f_6 + \dots + f_{n-1})b_3] \delta s_3 + \\
 & + [h_i + (d_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})e_i + (f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_{n-1})b_i] \delta s_i + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + [h_{n-3} + (d_{n-2} + d_{n-1})e_{n-3} + (f_{n-2} + f_{n-1})b_{n-3}] \delta s_{n-3} + \\
 & + [h_{n-2} + d_{n-1}e_{n-2} + f_{n-1}b_{n-2}] \delta s_{n-2} + h_{n-1} \delta s_{n-1} - \\
 & \quad - [f_2 + (d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{n-1})a_2 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})a_3 + \\
 & \quad + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & \quad + (f_3 + f_4c_3 + f_5c_4c_3 + f_6c_5c_4c_3 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_3)c_2] (v_{2.1} - v_{2.3}) - \\
 & \quad - [f_3 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})a_3 + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + \\
 & \quad + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + \dots + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \\
 & \quad + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & \quad + (f_4 + f_5c_4 + f_6c_5c_4 + f_7c_6c_5c_4 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4} \dots c_4)c_3] (v_{3.2} - v_{3.4}) - \\
 & \quad - [f_4 + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + \dots + \\
 & \quad + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & \quad + (f_5 + f_6c_5 + f_7c_6c_5 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4} \dots c_5)c_4] (v_{4.3} - v_{4.5}) - \\
 & \quad - [f_5 + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + (d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_6 + \dots + \\
 & \quad + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & \quad + (f_6 + f_7c_6 + f_8c_7c_6 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_6)c_5] (v_{5.4} - v_{5.6}) - \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & - [f_i + (d_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})a_i + (d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})a_k + \dots + \\
 & \quad + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + (f_k + f_{k+1}c_k + f_{k+2}c_{k+1}c_k + \\
 & \quad + f_{k+3}c_{k+2}c_{k+1}c_k + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_k)c_i] (v_{i,i-1} - v_{i,k}) - \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & - [f_{n-3} + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-1}c_{n-2})c_{n-3}] (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) - \\
 & - [f_{n-2} + d_{n-1}a_{n-2} + f_{n-1}c_{n-2}] (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) - f_{n-1}(v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n}). \quad (85)
 \end{aligned}$$

In (85) ist L_1° die Ausgangslänge des ersten Polygonpunktes; $(L_1^{\circ})'$ die entsprechende Länge die über das ganze Polygon übertragen wurde.

Die Gleichung (85) ist die Bedingungsgleichung für den Polygonschluss in der Länge (hierbei ist $k = i + 1$).

Die allgemeine Formel für die Laplacesche Gleichung für den Linienzug $P_1P_2P_3P_4 \dots P_n$ lautet:

$$\begin{aligned}
 \delta_n^{\circ} + v_{n,n-1} + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \\
 + (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) + \dots + (v_{4,3} - v_{4,5}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + \\
 + (v_{2,1} - v_{2,3}) - \delta_1^{\circ} - v_{1,2} - \delta \lambda_n \sin \varphi_n + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\
 + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^{\circ}) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^{\circ} - A_{n-1,n}^{\circ})] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^{\circ} - A_{n-2,n-1}^{\circ})] + \\
 & + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - (A_{n-3,n-4}^{\circ} - A_{n-3,n-2}^{\circ})] + \\
 & \quad + \dots + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^{\circ} - A_{4,5}^{\circ})] + \\
 & + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^{\circ} - A_{3,4}^{\circ})] + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^{\circ} - A_{2,3}^{\circ})] - \\
 & \quad - [\alpha_{1,2} - A_{1,2}^{\circ}] - (\lambda_n - L_n^{\circ}) \sin \varphi_n + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \\
 & \quad + \frac{1}{MN \sin 1''} \left\{ s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^{\circ} - A_{n-1,n-2}^{\circ}) (s'_{n-2} - s_{n-2}^{\circ}) + \right. \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^{\circ} - A_{n-2,n-3}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{n-2,n-3}^{\circ})] (s'_{n-3} - s_{n-3}^{\circ}) + \\
 & \quad + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ}) + \\
 & \quad \quad + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ})] (s'_{n-4} - s_{n-4}^{\circ}) + \\
 & \quad \dots \dots \dots \\
 & \quad + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \\
 & \quad + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \dots + s_4 \sin (A_{4,5}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \\
 & \quad + s_3 \sin (A_{3,4}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ})] (s'_2 - s_2^{\circ}) + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \\
 & \quad + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \dots + s_3 \sin (A_{3,4}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \\
 & \quad \quad + s_2 \sin (A_{2,3}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ})] (s'_1 - s_1^{\circ}) \Big\} = 0. \quad (86)
 \end{aligned}$$

Bei geschlossenen Linienzügen geht in jedem Polygon eine der Laplaceschen Bedingungen in die Polygonwinkel-Bedingung über und erhält für den Linienzug $P_1P_2P_3P_4 \dots P_{n-1}P_1$ folgende Form:

$$\begin{aligned}
 (v_{1,n-1} - v_{1,2}) + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \\
 + (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) + \dots + (v_{4,3} - v_{4,5}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + \\
 + (v_{2,1} - v_{2,3}) + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1,2}) - (A_{1,n-1}^{\circ} - A_{1,2}^{\circ})] + \\
 + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^{\circ} - A_{n-1,n}^{\circ})] + \\
 + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^{\circ} - A_{n-2,n-1}^{\circ})] + \dots + \\
 + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^{\circ} - A_{4,5}^{\circ})] + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^{\circ} - A_{3,4}^{\circ})] + \\
 + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^{\circ} - A_{2,3}^{\circ})] + \\
 + \left\{ s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^{\circ} - A_{n-1,n-2}^{\circ}) (s'_{n-2} - s_{n-2}^{\circ}) + \right. \\
 + [s_{n-1,1} \sin (A_{n-1,1}^{\circ} - A_{n-2,n-3}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{n-2,n-3}^{\circ})] (s'_{n-3} - s_{n-3}^{\circ}) + \\
 + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ}) + \\
 + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^{\circ} - A_{n-3,n-4}^{\circ})] (s'_{n-4} - s_{n-4}^{\circ}) + \\
 \dots \dots \dots \\
 \quad + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \\
 + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + \dots \dots \dots + \\
 + s_4 \sin (A_{4,5}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ}) + s_3 \sin (A_{3,4}^{\circ} - A_{3,2}^{\circ})] (s'_2 - s_2^{\circ}) + \\
 + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \\
 + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \dots + s_4 \sin (A_{4,5}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + s_3 \sin (A_{3,4}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ}) + \\
 \quad + s_2 \sin (A_{2,3}^{\circ} - A_{2,1}^{\circ})] (s'_1 - s_1^{\circ}) \Big\} \frac{1}{MN \sin 1''} = 0. \quad (87)
 \end{aligned}$$

Reihenfolge der Berechnungen:

Unter der Annahme, dass die Ausmasse des Ellipsoids und die geodätischen Ausgangsdaten feststehen, erfolgt:

a) die Ausgleichung der Teilstücke (§ 1).

Dadurch werden die Längen s' der geodätischen Linien $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, \dots, P_{16}P_{17}, P_{17}P_{24}, \dots$ (Abb. 1) und die astronomischen Azimute $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}, \dots, \alpha_{16,17}, \alpha_{17,16}, \alpha_{17,24}, \alpha_{24,17}, \dots$ dieser geodätischen Linien erhalten. Die Winkel zwischen den geodätischen Linien werden dann bei $P_2 \dots \alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}$ bei $P_{17} \dots \alpha_{17,16} - \alpha_{17,24}$; usw.

b) Die Berechnung der angenäherten geodätischen Koordinaten und die genaue Berechnung der Längen s_0 und der Azimute A° der ihnen entsprechenden geodätischen Linien. Im Hinblick auf die Verwendung der Ergebnisse dieser Berechnungen bei der folgenden Aufstellung der Polygonbedingungen, führen wir jedoch für eine Reihe von Linien diese Berechnung der genäherten Koordinaten mit voller Genauigkeit durch. Erläutern wir das am Beispiel der Abb. 1: Ausgehend von den angenommenen geodätischen Koordinaten von P_1 und dem geodätischen Azimut $A_{1,2}$ berechnen wir in aller Schärfe mit $s'_{1,2}$ die geographischen Koordinaten und das geodätische Gegenazimut in P_2 ; von diesem geodätischen Azimut wird $(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3})$ subtrahiert und mit dem auf diese Weise erhaltenen geodätischen Azimut der Linie P_2P_3 und der Länge dieser Linie $s'_{2,3}$ werden die geodätischen Koordinaten von P_2 auf P_3 übertragen usw; mit derselben Rechenschärfe gehen wir zu den Linien $P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_8$ über. Aus den Koordinaten von P_8 und von P_1 bestimmen wir dann $s^\circ_{1,8}$ und $A^\circ_{8,1}, A^\circ_{1,8}$. Im Netzriss bezeichnen wir durch besondere Zeichen und Farben die Linien bei deren Berechnung $s^\circ = s'$ gesetzt wurde und die Art und Weise der Übertragung der Koordinaten und Azimute längs des Linienzugs, um eine klare Darstellung für die Aufstellung der Polygonbedingungen zu bekommen.

Ferner erhalten wir mit dem in dieser Weise berechneten geodätischen Azimut der Linie P_3P_4 nach Abzug von $(\alpha_{3,4} - \alpha_{3,9})$ das geodätische Azimut $A'_{3,9}$; mit $A'_{3,9}$ und mit $s'_{3,9}$ und mit den Koordinaten P_3 , die aus der Übertragung $P_1P_2P_3$ erhalten wurden, übertragen wir mit aller Schärfe die Koordinaten und Azimute auf P_9 und gehen auf diese Weise über zu P_{10} , zu P_{11} , zu P_{12} , zu P_{13} . Aus den Koordinaten von P_{13} und P_5 (die aus dem ersten Polygon erhalten wurden) berechnen wir umgekehrt $A^\circ_{13,5}, A^\circ_{5,13}$ und $s^\circ_{13,5}$.

Im Polygon $P_7P_6P_5P_{14}P_{15}P_{16}P_{17}P_{18}$ beginnen wir die Berechnung mit P_5 und einem Azimut, das gleich ist dem geodätischen Azimut P_5P_6 minus $(\alpha_{5,6} - \alpha_{5,14})$ und führen in der angegebenen Weise die Berechnung bis P_{18} ; P_7P_{18} bestimmen wir wieder umgekehrt aus den Koordinaten von P_{18} und P_7 ; usw.

c) Durch die Bestimmung der geodätischen Näherungs-Koordinaten B°, L° und der angenäherten geodätischen Azimute und Entfernungen A° und s° sind alle Vorbereitungen für die Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen beendet. Die Resultate müssten noch in ein besonderes Netz-Schema unter Angabe der Linien eingetragen werden, für die $s_0 = s'$ ist. Hierauf können die Polygon-Widersprüche in Breite und Länge berechnet werden. Hierzu müssen in jedem geschlossenen und — von anderen — unabhängigen Polygon fortlaufend in Richtung des Uhrzeigers die geodätischen Koordinaten und Azimute A'^* mit den Seiten s' und den Polygonwinkeln (mit Ausnahme des Winkels im Ausgangspunkt), die den Unterschieden der astronomischen Azimute gleich sind, genau berechnet werden. Ein Teil dieser Berechnungen wurde schon unter b) durchgeführt. So ist im Polygon $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$ nur über das Azimut der geodätischen Linie P_8P_7 ($A^\circ_{8,7}$) durch Subtraktion des Winkels $(\alpha_{8,7} - \alpha_{8,1})$ das Azimut $A'_{8,1}$ zu berechnen, um ausgehend von den früher erhaltenen B_0^s und L_0^s mit diesem Azimut $A'_{8,1}$ und $s'_{8,1}$ die geodätischen Koordinaten von P_1 zu berechnen. Im Polygon $P_3P_9P_{10}P_{11}P_{12}P_{13}P_5P_4P_3$ muss man die oben erwähnte Berechnung von P_{13} aus längs den Linien $P_{13}P_5, P_5P_4, P_4P_3$ usw. durchführen.

Hierbei muss unbedingt in jedem Polygon die genaue geodätische Übertragung der Koordinaten und Azimute fortlaufend im Uhrzeigersinn und mit den Seiten s' und den Winkeln durchgeführt werden, die dem Unterschied der astronomischen Azimute entsprechen. Die hierbei aus

*) Diese Azimute A' fallen mit A° nicht zusammen!

verschiedenen Polygonen erhaltenen Werte der Azimute A' für die zwei Polygonen gemeinsam an Linien werden selbstverständlich voneinander abweichen; ebenso werden auch die geodätischen Koordinaten der zwei oder mehreren Polygonen gemeinsam angehörenden Punkte, die durch die obige Berechnung erhalten wurden, voneinander und von den Näherungskoordinaten B° und L° , die nach b) berechnet wurden, abweichen.

d) Die Koeffizienten a, b, c, d, e, f, h sind nach Formel (83) zu berechnen; hierzu wird für jedes der Polygone, das schon bei c) benutzt wurde (also bei der Berechnung der Widersprüche in Breite und Länge) eine besondere Skizze angefertigt, auf welcher die Ecken des Polygons mit einer bestimmten Farbe numeriert werden. Diese Numerierung wird über das ganze Schema des Netzes ausgedehnt. Mit einer anderen Farbe wird dann noch eine eigene polygonweise Numerierung durchgeführt, 1, 2, 3, ..., $n - 1$, wobei die Nummer 1 stets auf die Ecke entfällt, die als Ausgangspunkt für die Berechnung der Polygonwidersprüche gewählt wurde. An jede Seite des Polygons schreiben wir die entsprechenden Werte s, A°, l und die Werte a, b, c, d, e, f, h ; den Ecken des Polygons werden die entsprechenden Werte B° beige geschrieben.

Ferner stellen wir für jedes Polygon in besonderen Übersichten noch die Koeffizienten der Formeln (84) und (85) und gleichzeitig auch noch die Bedingungsgleichungen der Breiten und Längen zusammen.

Endlich ist noch für jedes Polygon die Winkelbedingung (oder eine Laplacesche Gleichung) nach (87) aufzustellen, wozu noch vorher das Absolutglied dieser Gleichung berechnet werden muss; hierzu werden die Ergebnisse der Berechnungen für s_0 und A° nach den Anmerkungen auf dem Netzschema nach c) benutzt; es ist klar, dass viele Glieder mit $(s' - s^\circ)$ in (87) Null werden.

e) Nun müssen noch die Laplaceschen Gleichungen nach (86) aufgestellt werden. Unter der Annahme, dass jede geodätische Linie in einem Laplaceschen Punkt beginnt und endet, wird die Anzahl der Laplaceschen Gleichungen der Anzahl aller geodätischen Linien im Netz minus der Zahl der Polygone, für welche die Winkelbedingungen als Laplacesche Gleichungen niedergelegt sind, gleich sein. Die Bildung der Linienzüge, die bei der Zusammenstellung der Laplaceschen Bedingungen benutzt wurden, erläutern wir nach dem Beispiel der Abb. 1:

Die erste Gleichung schreiben wir für die Linie						
						P_1P_2
2.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3$
3.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4$
4.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5$
5.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$
6.	"	"	"	"	"	P_1P_8
7.	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7$
8.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9$
9.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9P_{10}$
10.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9P_{10}P_{11}$
11.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{13}$
12.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{13}P_{12}$
13.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{14}$
14.	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{14}P_{15}$
15.	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}$
16.	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}P_{17}$
17.	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}P_{17}P_{16}$
18.	"	"	"	"	"	P_1P_{19}
19.	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}$
20.	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}$
21.	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}$
22.	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}P_{23}$
23.	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}P_{23}P_{21}$

(N)

Die Laplacesche Gleichung, die sich in die Winkelbedingung des Polygons verwandelt, entsteht dadurch, dass man in einer Richtung fortschreitend nacheinander die Laplaceschen Gleichungen für sämtliche Linien des Polygons aufstellt und summiert. Wenn wir bei der Aufstellung der Winkelbedingungen die Form der Gleichung (87) anwenden, tritt die Frage auf, ob es notwendig ist, diese Winkelbedingungen durch Schliessung des Polygons oder durch die Aufstellung der Laplaceschen Gleichung für einen und denselben Punkt auf zwei verschiedenen Wegen zu bestimmen. Zum Beispiel könnte man die Gleichungen für die Linienzüge $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, und $P_1P_8P_7P_6$ einander gleichsetzen, um die Winkelbedingung im ersten Polygon zu erhalten, anstatt die Gleichung (87) anzuwenden. Offenbar sind aber, wenn die eine oder auch die andere Methode zur Aufstellung der Winkelbedingung angewendet wird, die Glieder mit δv und mit $[(\alpha_{k,i} - \alpha_{k,k+1}) - (A^{\circ}_{k,i} - A^{\circ}_{k,k+1})]$ vollkommen identisch. Daraus ersieht man, dass auch die Summe der Glieder mit $(s' - s^{\circ})$ eine und dieselbe Bedeutung haben wird, obwohl ihre Einzelglieder bei Anwendung der beiden Methoden verschieden sind.

Anstatt die Laplacesche Gleichung immer von P_1 zu P_n über alle dazwischenliegenden Laplaceschen Punkte aufzustellen, können und sollen die Laplaceschen Gleichungen unmittelbar für die geodätischen Linien zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkten aufgestellt werden. Dadurch werden die Berechnungsarbeiten vereinfacht. Zur Aufstellung der Laplaceschen Gleichung für die geodätische Linie zwischen den Punkten P_{n-1} und P_n schreiben wir die Gleichung (86) für n gleich $n-1$ und erhalten durch Subtraktion des Ergebnisses von (86):

$$\begin{aligned} & \delta^{\circ}_n - \delta^{\circ}_{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,n} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \delta\lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A^{\circ}_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n}) - \\ & - (\lambda_n - L^{\circ}_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L^{\circ}_{n-1}) \sin \varphi_{n-1} + \\ & + \frac{s_{n-1}}{MN \sin 1''} \left\{ \sin (A^{\circ}_{n,n-1} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) (s'_{n-2} - s^{\circ}_{n-2}) + \right. \\ & + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) (s'_{n-3} - s^{\circ}_{n-3}) + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-3,n-4}) (s'_{n-4} - s^{\circ}_{n-4}) + \\ & \left. + \dots + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_1 - s^{\circ}_1) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Nach (88) können für das in Abb. 1 dargestellte Netz die Laplaceschen Gleichungen für die folgenden Linien aufgestellt werden:

$$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_1P_8, P_8P_7, P_3P_9, P_9P_{10}, P_{10}P_{11}, P_5P_{13}, P_5P_{14}, \\ P_{14}P_{15}, P_7P_{18}, P_{18}P_{17}, P_{17}P_{16}, P_{16}P_{19}, P_{19}P_{20}, P_{20}P_{21}, P_{21}P_{22}, P_{22}P_{23}, P_{23}P_{24},$$

wobei wir annehmen wollen, dass die Übertragung von P_1 auf dem in dem Verzeichnis (N) angegebenen Wege durchgeführt wird.

Schliesslich darf noch daran erinnert werden, dass bei Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen nach (86) oder (88) vorausgesetzt wurde, dass bei der Berechnung der Näherungskordinaten

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 = L^{\circ}_1 &= \lambda_1 - \gamma_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1,2} = A^{\circ}_{1,2} &= \alpha_{1,2} - \gamma_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \\ d\varphi_1 &= 0; dB^{\circ}_1 = 0 \\ dL^{\circ}_1 &= d\lambda_1 \end{aligned}$$

angenommen wurde.

f) Nach Aufstellung aller Polygonbedingungen und der Laplaceschen Gleichungen müssen alle diese Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden, wozu vorläufig nach § 6 noch in den verschiedenen Teilstücken die mittleren Fehler μ_0 der beobachteten Richtungen, die mittleren Fehler μ der ausgeglichenen Richtungen, die mittleren Fehler μ_{α} der Azimute der Ausgangsseiten, die mittleren Fehler μ_v der Azimute der geodätischen Linien zwischen

benachbarten Laplaceschen Punkten, die mittleren Fehler μ , der Längen dieser geodätischen Linien und endlich noch die mittleren Fehler der astronomischen Längen λ berechnet werden müssen. Nach der Berechnung der mittleren Fehler können die Gewichte der entsprechenden Elemente bestimmt werden. Bei 16 geschlossenen Polygonen — dies entspricht dem astronomisch-geodätischen Netz im Europ. Teile Russlands — und bei Polygonseiten von ungefähr 300 km werden 48 Polygonbedingungen und 64 Laplacesche Gleichungen erhalten, wenn die Laplaceschen Punkte je 200 km verteilt sind. Mithin müssen bei einem Netz von solcher Ausdehnung 112 Bedingungsgleichungen zusammen aufgelöst werden. Hierbei beansprucht die Auflösung der 64 Laplaceschen Gleichungen und der 12 Winkelbedingungen verhältnismässig wenig Arbeit. Die Hauptarbeit verursachen die übrigbleibenden 32 Polygon-Bedingungen. Hieraus sieht man, dass der Umfang der Berechnungsarbeit hauptsächlich von der Zahl der Gleichungen für Anschluss in Breite und Länge abhängt; demnach braucht man vor den 112 Bedingungsgleichungen nicht zu erschrecken, ihre Auflösung in einer Gruppe ist durchaus möglich.

Bis jetzt haben wir die Laplaceschen Punkte, die in der Mitte der Teilstücke zwischen zwei Ausgangsseiten liegen, überhaupt noch nicht berücksichtigt. Es ist nicht erforderlich, diese Punkte in die allgemeine Ausgleichung des Netzes einzubeziehen: sie müssen aber bei der Ausgleichung der Teilstücke berücksichtigt werden, indem in § 1 nicht nur eine sondern zwei oder drei Azimutbedingungen (je nach der Zahl der Laplaceschen Zwischenpunkte) angesetzt werden. Im übrigen bleibt das Schema und die Reihenfolge der Ableitung der Azimute $\alpha_{k,i}$ und $\alpha_{i,k}$ und der Länge $s'_{i,k}$ der geodätischen Linie, die die Endpunkte P_i und P_k des Teilstückes zwischen den Ausgangsseiten verbindet, unverändert. Dadurch erhöht sich zweifellos die Genauigkeit der Ableitung von α und s' wesentlich, was sich auf die folgenden Berechnungen vorteilhaft auswirkt.

g) Nach der Auflösung der Bedingungsgleichungen müssen die Verbesserungen der Seitenlängen s' und der Azimute α angebracht werden, worauf dann mit den geodätischen Ausgangsdaten in P_1 die endgültige Berechnung der geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte, die die Endpunkte der Teilstücke der Triangulation bilden, durchgeführt werden kann.

h) Schliesslich müssen noch die Dreiecke der einzelnen Teilstücke endgültig zwischen die jetzt festliegenden Laplaceschen Punkte P_i und P_k , die die Endpunkte dieser Teilstücke bilden (—zwischen die endgültigen Ausgangsseiten — deren Längen aus den Basisnetzen übernommen werden — und zwischen die geodätischen Azimute dieser Ausgangsseiten — die aus dem endgültigen geodätischen Azimut der Linie $P_i P_k$ und mit dem aus der Ausgleichung hervorgegangenen Wert für $\beta_{i,k}$ abgeleitet wurden —), eingerechnet werden (Abb. C).

Die endgültige Ausgleichung der Teilstücke wird am besten nach der in USA angewandten Methode gelöst, die mit sehr vorteilhaften Abänderungen in der UdSSR in einer besonderen Broschüre durch den wissenschaftlichen Mitarbeiter des staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie, den Adjunkten N. A. Urmajew dargestellt wurde.

Eine Darlegung der Methode von Urmajew zur Ausgleichung der Kettenabschnitte zwischen zwei festen Ausgangsseiten folgt in dem nächsten Paragraphen.

Die Einführung der Azimutgleichungen in die vorläufige Ausgleichung der Teilstücke führt offenbar dazu, dass die Absolutglieder in den Laplaceschen Gleichungen und in den Winkelbedingungen der Polygone nahezu Null werden. Nichtsdestoweniger behalten die Laplaceschen Gleichungen zur gemeinsamen Bestimmung der Verbesserungen der astronomisch und der rein geodätisch bestimmten Elemente ihre volle Bedeutung. Ich nehme an, dass die vorläufige Ausnutzung aller Laplaceschen Punkte bei der Ausgleichung der Teilstücke auch zu einer Verminderung der Absolutglieder in den Polygonbedingungen führen wird. Da infolge der zuverlässigen Bestimmung von α und s' in der Ausgleichung der Teilstücke diese geringeren Veränderungen unterworfen sein werden, vergrössert sich bei der Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze die Wahrscheinlichkeit einer gerechten Verteilung der Fehler. Endlich spielt hier noch die Vermehrung der Laplaceschen Punkte in jedem einzelnen Teilstück eine wesentliche Rolle. Daher rechne ich auch auf eine günstige Verteilung der Verbesserungen bei der gleichzeitigen Ausgleichung aller Elemente

des Netzes unter Berücksichtigung der vorläufig abgeleiteten Längen und astronomischen Azimute der geodätischen Linien aus den einzelnen Teilstücken, die im weiteren als gleichsam unmittelbar beobachtete Größen angesehen werden. Aber der vollkommenere Weg ist wohl der folgende: Ausgleichung der Teilstücke nur aufgrund der Dreiecksbedingungen und der Basen; Ableitung der Länge und Azimute der geodätischen Linien, die die Endpunkte des Teilstücks verbinden; Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen für diese geodätischen Linien und ihre Auflösung in bekannter Weise, aber getrennt von den Polygon-Bedingungen; zweitens nochmalige Ausgleichung der Teilstücke aufgrund der Dreiecksbedingungen, der Basen und der Azimut-Bedingungen unter Berücksichtigung der Verbesserungen der astronomischen Azimute und Längen, die aus der Ausgleichung der Laplaceschen Gleichungen erhalten wurden; alsdann Aufstellung der Polygon-Bedingungen und ihre Auflösung unter Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen, die jetzt neue Absolutglieder haben, und schliesslich die Einrechnung der Teilstücke zwischen ihre endgültig festgelegten Endpunkte.

Ergänzungs-§ 8. Ausgleichung der Dreiecksketten zwischen zwei festen Ausgangsseiten
(nach N. A. Urmajew. *)

Nun betrachten wir eine einfache Dreieckskette (Abb. 8) zwischen den Ausgangsseiten P_1A und P_2B . Die geodätischen Koordinaten ihrer Endpunkte P_1, A, P_2 und B sind endgültig berechnet. Damit liegen auch die geodätischen Azimute und Längen der Seiten P_1A und P_2B endgültig fest und unterliegen keinen Veränderungen mehr.

Aus dieser Dreieckskette wählen wir den mit Doppellinien dargestellten Linienzug aus, der die Punkte A und P_2 verbindet.

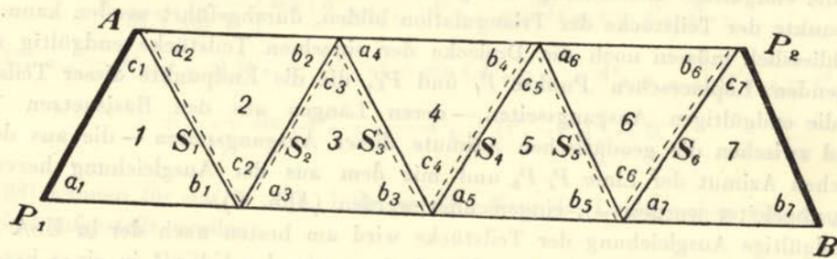


Abb. 8.

Wenn wir die Breitenänderungen der Punkte dieses Linienzuges, die der Änderung der Logarithmen seiner Seiten s und der Änderung der Azimute A dieser Seiten entsprechen, mit $dB_1, dB_2, dB_3, \dots, dB_6$ bezeichnen, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= p_1 d \lg s_1 + p_1' dA_1 \\ dB_2 &= p_2 d \lg s_2 + p_2' dA_2 + dB_1 \\ dB_3 &= p_3 d \lg s_3 + p_3' dA_3 + dB_2 \\ dB_4 &= p_4 d \lg s_4 + p_4' dA_4 + dB_3 \\ dB_5 &= p_5 d \lg s_5 + p_5' dA_5 + dB_4 \\ dB_6 &= p_6 d \lg s_6 + p_6' dA_6 + dB_5 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Durch rückläufige Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

$$dB_6 = p_1 d \lg s_1 + p_2 d \lg s_2 + p_3 d \lg s_3 + p_4 d \lg s_4 + p_5 d \lg s_5 + p_6 d \lg s_6 + p_1' dA_1 + p_2' dA_2 + p_3' dA_3 + p_4' dA_4 + p_5' dA_5 + p_6' dA_6. \quad (90)$$

*) Wegen der praktischen Bedeutung dieser Arbeit von Urmajew folgt noch eine Übersetzung der Originalarbeit.

Jetzt können noch die Änderungen der Logarithmen der Seiten und der Azimute durch die Winkelverbesserungen ausgedrückt werden. Vorher werden jedoch noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\Delta a_i (a_i) - \Delta b_i (b_i) = \Delta_i. \quad (91)$$

Hierbei sind Δa_i und Δb_i die Änderungen der Logarithmen der Sinuse der Winkel a_i und b_i für je 1'', (a_i) und (b_i) die Verbesserungen dieser Winkel selbst und endlich

$$\left. \begin{aligned} d \lg s_1 &= \Delta_1 \\ d \lg s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ d \lg s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ &\dots \\ d \lg s_6 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Für die Verbesserung der Azimute haben wir dann:

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= -(c_1) \\ dA_2 &= -(c_1) + (c_2) \\ dA_3 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) \\ dA_4 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) \\ dA_5 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) \\ dA_6 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

wobei wir in (93) den Einfluss der Fehler der Dreieckswinkel auf die Bestimmung der Meridiankonvergenzen δ aus den Elementen des Linienzuges vernachlässigten.

Da die Veränderungen dieser Größen

$$\delta = (2) s \sin A \operatorname{tg} \varphi,$$

soweit sie durch die Fehler der Dreieckswinkel verursacht sind, bei $s = 30 \text{ km}$ und bei einer Länge der Kette von $200 \text{ km} \pm 0,07''$ nicht überschreiten, so können diese Fehler in (93) unbeachtet bleiben, wenn (93) lediglich in (90) eingeführt wird.

Dann ist

$$p'_i = \frac{s_i}{R} \sin A_{k.i.}$$

Der Einfluss der angegebenen Fehler wird in den einzelnen Gliedern der Gleichung (90) in dA kleiner als $0,0003''$.

Setzt man (93) und (92) in (90) ein, so wird

$$\begin{aligned} dB_6 &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_2 + \\ &+ (p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_3 + (p_4 + p_5 + p_6) \Delta_4 + (p_5 + p_6) \Delta_5 + p_6 \Delta_6 - \\ &- (p_1' + p_2' + p_3' + p_4' + p_5' + p_6') (c_1) + (p_2' + p_3' + p_4' + p_5' + p_6') (c_2) - \\ &- (p_3' + p_4' + p_5' + p_6') (c_3) + (p_4' + p_5' + p_6') (c_4) - (p_5' + p_6') (c_5) + p_6' (c_6). \end{aligned} \quad (94)$$

Das Gesetz für die Aufstellung der Koeffizienten in (94) ist einfach: der Koeffizient bei Δ_i ist gleich der Summe der Koeffizienten p der Seiten des Linienzuges, die eingeschlossen sind zwischen dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer i und dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des letzten Dreiecks in der Kette; ebenso ist der Koeffizient bei (c_i) gleich der absoluten Summe der Koeffizienten p' für die Seiten des Linienzuges, die eingeschlossen sind zwischen dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer i und dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des letzten Dreiecks in der Kette.

Die Bezeichnung der Koeffizienten bei (c) kann der Abb. leicht entnommen werden.

In Abb. 9 ist eine Kette dargestellt, in der die richtige Reihenfolge der Winkel a, b und c nicht eingehalten ist; für sie wird das obige Gesetz für die Aufstellung der Koeffizienten voll beibehalten und wir erhalten für diese Kette:

$$dB_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_2 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_3 + \\ + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_4 + (p_3 + p_4) \Delta_5 + p_4 \Delta_6 + (p_1' + p_2' + p_3' + p_4') (c_1) - \\ - (p_2' + p_3' + p_4') (c_2) - (p_2' + p_3' + p_4') (c_3) - (p_2' + p_3' + p_4') (c_4) + (p_3' + p_4') (c_5) - p_4' (c_6).$$

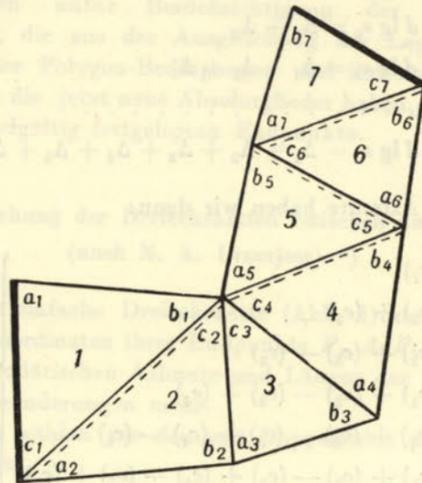


Abb. 9.

Ferner bezeichnen wir

$$\left. \begin{aligned} p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_r &= P_i' \\ p_i' + p_{i+1}' + p_{i+2}' + \dots + p_r' &= P_i'' \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Dann erhält mit (91) die Gleichung für die Breite folgende und endgültige Form:

$$\Sigma [P \Delta_a (a) - \Delta_b P (b)] + \Sigma (\pm P' (c)) + W_1 = 0. \quad (96)$$

Hier ist W_1 gleich dem Unterschied der Breite des Punktes P_2 , die auf dem Linienzuge berechnet wurde, und der gegebenen Breite des Punktes P_2 .

Für die Unterschiede der aus dem Linienzug berechneten Längen erhalten wir die Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dL_1 &= q_1 d \lg s_1 + q_1' dA_1 \\ dL_2 &= q_2 d \lg s_2 + q_2' dA_2 + dL_1 \\ dL_3 &= q_3 d \lg s_3 + q_3' dA_3 + dL_2 \\ &\dots \\ dL_6 &= q_6 d \lg s_6 + q_6' dA_6 + dL_5 \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Analog wie bei der Ableitung der Bedingungsgleichung (96) für die Breite werden die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} q_i + q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_r &= Q_i' \\ q_i' + q_{i+1}' + q_{i+2}' + \dots + q_r' &= Q_i'' \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$\Sigma [Q \Delta_a (a) - Q \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm Q' (c)] + W_2 = 0. \quad (99)$$

In der Bedingungsgleichung (99) für die Länge ist W_2 gleich der auf dem Linienzug berechneten Länge des Punktes P_2 minus der gegebenen Länge desselben Punktes. Die Koeffizienten Q und Q' werden in derselben Weise wie die Koeffizienten P und P' gebildet.

Die Koeffizienten p, p', q und q' entsprechen vollständig den Koeffizienten p und q in den Formeln (2) § 2; demnach ist

$$\left. \begin{aligned} p_n &= -(1) \frac{1}{M 10^6} s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= -(2) \frac{1}{M 10^6} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

In den Formeln (100) ist M der Modul der Napierschen Logarithmen; $\Delta \lg s$ ist in Einheiten der 6. Dezimalstelle der Logarithmen ausgedrückt.

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} p_n' &= \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A_{n+1, n} \\ q_n' &= -\frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Die Ausdrücke (100) und (101) für die Koeffizienten p, q, p' und q' werden zweckmässig umgebildet. Die Gleichungen müssen so multipliziert werden, dass die sehr kleinen Koeffizienten der Unbekannten in (96) und (99) ungefähr gleich 1 werden. Coast and Geodetic Survey führt hierzu den Faktor

$$\frac{M 10^4}{6} = 723.824 \text{ ein.}$$

Da:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= -(1) \frac{1}{600} s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= -(2) \frac{1}{600} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \\ p_n' &= -\frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} q_n \cos \varphi_{n+1} & \rho'' &= \frac{1}{\sin 1''} \\ q_n' &= \frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p_n \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}$$

ist, werden noch die Bezeichnungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{600} &= b_1; & -\frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} &= c_1 \\ -\frac{(2)}{600} &= b_2; & +\frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Damit erhält man endgültig

$$\left. \begin{aligned} p_n &= b_1 s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= b_2 s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \\ p_n' &= c_1 q_n \cos \varphi_{n+1} \\ q_n' &= c_2 p_n \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Nachstehend bringen wir noch eine kleine Tabelle der Werte b_1, b_2, c_1 und c_2 für verschiedene Breiten.

Breite	lg b_1	lg b_2	lg c_1	lg c_2
35°	5.7331 n	5.7312 n	0.3253 n	0.3214 n
40°	5.7327 n	5.7310 n	0.3251 n	0.3216 n
45°	5.7324 n	5.7309 n	0.3248 n	0.3219 n
50°	5.7320 n	5.7308 n	0.3246 n	0.3222 n
55°	5.7316 n	5.7307 n	0.3243 n	0.3224 n
60°	5.7313 n	5.7305 n	0.3241 n	0.3226 n
65°	5.7310 n	5.7304 n	0.3239 n	0.3228 n

Mit den nach (103) berechneten Koeffizienten p und q erhalten wir dann die Gleichungen (96) und (99) in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [P \Delta_a(a) - P \Delta_b(b)] + \Sigma [\mp P' (c)] + 723.824 W_1 &= 0 \\ \Sigma [Q \Delta_a(a) - Q \Delta_b(b)] + \Sigma [\pm Q' (c)] + 723.824 W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Die Bedingungsgleichung für die Ausgangsseiten (Basisgleichung) lautet

$$\Sigma [\Delta_a(a) - \Delta_b(b)] + W_3 = 0; \quad (105)$$

hierbei ist W_3 gleich dem Logarithmus der Seite P_2B , der aus der Dreiecksberechnung der Kette erhalten wurde, minus dem gegebenen Logarithmus der Seite P_2B (Abb. 8).

Die Azimutbedingung wurde schon im § 1 abgeleitet.

Bezeichnet man den Unterschied des Azimuts und des Gegenazimuts einer Seite gegenüber 180° mit δ und mit A_0 und A_7 die gegebenen geodätischen Azimute der Seiten AP_1 und P_2B , so wird

$$A_0 - c_1 - (c_1) + \delta_1 + d\delta_1 + c_2 + (c_2) + \delta_2 + d\delta_2 - c_3 - (c_3) + \delta_3 + d\delta_3 + c_4 + (c_4) + \delta_4 + d\delta_4 - c_5 - (c_5) + \delta_5 + d\delta_5 + c_6 + (c_6) + \delta_6 + d\delta_6 - c_7 - (c_7) = A_7$$

oder

$$-(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + \Sigma d\delta + A'_7 - A_7 = 0. \quad (106)$$

In (106) ist A'_7 das berechnete Azimut der Richtung P_2B . Ferner wird, wenn unter dl das Differential des Längenunterschieds l verstanden wird,

$$d\delta = (2) ds \sin A \operatorname{tg} \varphi + (2) s \cos A \operatorname{tg} \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$dl = (2) ds \sin A \sec \varphi + (2) s \cos A \sec \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$d\delta - dl \sin \varphi = (2) s \sin A \cdot d\varphi.$$

Hieraus schliessen wir, dass man (wie im § 1)

$$\Sigma d\delta = \Sigma dl \sin \varphi = (L_2 - L'_2) \sin \varphi_m$$

setzen kann.

Hier bedeuten L_2 und L'_2 die gegebene und die berechnete Länge des Punktes P_2 . Deshalb wird die Azimutbedingung endgültig:

$$\left. \begin{aligned} -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + W_4 &= 0 \\ W_4 = A'_7 - A_7 - (L'_2 - L_2) \sin \varphi_m \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

also gleich dem Unterschied des berechneten und gegebenen Azimuts minus der Verbesserung $(L'_2 - L_2) \sin \varphi_m$.

Da die Kette schon einmal ausgeglichen wurde, werden für dieselbe in den Winkelsummenbedingungen und in den Basis-Gleichungen die absoluten Glieder Null sein. Zu den Gleichungen (104), (105) und (107) können die Winkelsummengleichungen angefügt und dann alle Gleichungen gemeinsam aufgelöst werden. Hierbei können noch die Winkelverbesserungen durch die entsprechenden Richtungsverbesserungen ersetzt und die Ausgleichung kann nach Richtungen durchgeführt werden, oder man behält in den Bedingungsgleichungen die Winkelverbesserungen bei und gleicht die Kette nach Winkeln aus.

Wenn wir nach Winkeln ausgleichen und beachten, dass die absoluten Glieder in den Winkelsummenbedingungen Null sind, so können diese unbeschadet der Forderung abgespalten werden, dass die Auflösung unter der Bedingung erfolgt, dass die Summe der Quadrate aller Winkelverbesserungen — und zwar sowohl der Verbindungswinkel als auch der Zwischenwinkel — zu einem Minimum wird.

Demnach wird folgender Grundsatz angewendet: *wann in irgendeinem Dreieck die Winkelverbesserungen in eine (beliebige) Bedingungsgleichung mit den Koeffizienten: r_{i-1}, r_i, r_{i+1} eingehen, so führt die Abspaltung der Winkelsummengleichung dieses Dreiecks in der betreffenden Bedingungsgleichung zur nachstehenden Umformung der Koeffizienten:*

$$\left. \begin{aligned} r_{i-1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \\ r_i - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \\ r_{i+1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Diese Umformung vereinfacht naturgemäss die Rechenarbeit und führt zu einer bemerkenswerten Veränderung der Methode der Netzausgleichung, die als „britannische“ Methode bezeichnet wird.

Nun betrachten wir nochmals die Ausdrücke (103). Wir können mit ausreichender Genauigkeit für die Bestimmung der Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen schreiben

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} &= (B_{n+1} - B_n)' \\ -\frac{(2)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} &= (L_{n+1} - L_n)' \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

In (109) sind rechts die Breiten- und Längendifferenzen in Bogenminuten ausgedrückt.

Nach (103) und (109) ist dann:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10}; q_n = \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} \\ p'_n &= \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} a_1; q'_n = \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10} a_2 \\ a_1 &= -\frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} \cos B_{n+1} \\ a_2 &= \frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} \sec B_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Da die Koeffizienten P, P', Q und Q' in (104) die Summen der aufeinanderfolgenden Koeffizienten p, p', q und q' darstellen, werden sie folgendermassen gebildet: der Koeffizient P oder Q ,

der sich auf das Dreieck mit der Nummer i bezieht, ist gleich dem Unterschied der Breiten oder dem entsprechenden Unterschied der Längen des Endpunktes des Linienzuges und des Scheitelpunktes des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer i . Infolgedessen wird:

$$\left. \begin{aligned} P_i &= (B_r - B_i)' \\ Q_i &= (L_r - L_i)' \\ P' &= a_1 (L_r - L_i)' \\ Q' &= a_2 (B_r - L_i)' \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

In (111) werden mit B_r und L_r die gegebenen Koordinaten des letzten Punktes (P_r) des Linienzuges bezeichnet. In (111) ist zu beachten, dass die linken Teile gegenüber (103) zehnmal vergrößert sind.

Deshalb wird endgültig:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma[(B_r - B_i) \Delta_a(a) - (B_r - B_i) \Delta_b(b)] + \Sigma[\pm a_1 (L_r - L_i) (c)] + 7 \ 238.24 \ W_1 &= 0 \\ \Sigma[(L_r - L_i) \Delta_a(a) - (L_r - L_i) \Delta_b(b)] + \Sigma[\pm a_2 (B_r - B_i) (c)] + 7 \ 238.24 \ W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Die Grössen $B_r - B_i$ und $L_r - L_i$ erhält man sehr einfach, weil die Berechnungen der Breiten und Längen auf dem Linienzug schon zur Berechnung von W_1 und W_2 durchgeführt worden sind. Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die Breite und Länge in der Form (112) ist daher sehr einfach.

Prof. F. Krassowsky

Methoden zur Ausgleichung der Triangulationen I. O. in der UdSSR

von Prof. Krassowsky *)

VORWORT.

Bis jetzt wurde die Triangulation I. O. im Europäischen Teile der UdSSR aus 12 geschlossenen Polygonen mit 30 Grundlinien und 40 Laplaceschen Punkten gebildet (ungerechnet 26 Punkten, die auf Doppelpunkten der Basisnetze bestimmt wurden). Die Ausgleichung und Berechnung einer derartigen gewaltigen Triangulation stellt nicht nur eine schwierige, sondern auch sehr umfangreiche Aufgabe dar. In Indien war die sogenannte Britannische Methode zur Polygonausgleichung eingeführt worden, die den Vorzug hat, dass in die Ausgleichung die Elemente der Dreiecke eingeführt werden, die die Polygone bilden; beachtet man hierbei aber, dass diese Methode eine Ausgleichung der Triangulation in Teilen darstellt und nur die gleichzeitige Bearbeitung von nicht mehr als drei bis vier Polygonen zulässt, wobei für die Ausgleichung von 12 bis 15 Polygonen eine Arbeitszeit von 5 — 6 Jahren erforderlich ist, so muss man diese Methode als vollkommen wertlos ablehnen. Selbst wenn man von dem unverantwortlichen Arbeits- und Zeitaufwand absieht, muss man bedenken, dass die Ausgleichung von Polygonnetzen nach Teilen zu fühlbaren Verzerrungen in den einzelnen Teilen führen kann.

*) Arbeiten des Staatl. Institutes für Geodäsie u. Kartographie Fünfter Teil. Goskartogeodesia Moskau-Leningrad 1932.

Helmert schuf die nach ihm benannte Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze, die auch in Deutschland angewandt wird. Hierbei werden die Polygone durch geodätische Linien gebildet, die die Dreiecksketten zwischen den angrenzenden Laplaceschen Punkten ersetzen. Gleichzeitig mit den Verbesserungen der Elemente, die auf geodätischem Wege gefunden wurden, werden hierbei auch noch die Verbesserungen der astronomischen Längen und Azimute bestimmt, wodurch eine richtige Orientierung der Polygonseiten erreicht wird. Die Helmerische Methode wurde praktisch jedoch nur bei einem Netz angewandt, das nur annähernd den achten Teil unserer Triangulation darstellt. Andererseits werden durch die Helmerische Methode keineswegs die systematischen Fehler in den Dreieckswinkeln berücksichtigt und die Laplaceschen Punkte vollkommen ausgenutzt, die sich nicht nur in den Enden sondern auch in der Mitte der einzelnen Kette befinden, die durch geodätische Linien ersetzt werden.

Wenn wir die Helmerische Methode unverändert übernehmen, würden wir kaum richtig handeln und verschiedene Elemente der Polygone entstellen. Andererseits ist die Arbeit bei dieser Methode schon bei 12 Polygonen so gewaltig und auch ermüdend, dass man kaum damit rechnen kann, die Arbeit zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen. Im Jahre 1930 wurde daher von mir der Vorschlag gemacht, die Helmerische Methode durch eine andere Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes zu ersetzen. (Siehe hierzu „Arbeiten des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie“ Ausg. 2, 1931.) Als wesentliche Veränderungen erscheinen hierbei:

1) Eine vorläufige Ausgleichung der einzelnen Teilstücke der Triangulation unter Berücksichtigung der Winkelsummen- und Seitengleichungen, der Basisbedingungen und der Azimutbedingungen (dadurch wird der Einfluss der systematischen Fehler in den Polygonwinkeln bei Bestimmung der Polygon-Elemente ausgeschaltet).

2) Das ermüdende zahlenmässige Abspalten der Lotabweichungen bei der Aufstellung der Polygonegleichungen wird durch allgemeine Formeln ersetzt, die es gestatten, sofort die Bedingungsgleichung für ein beliebiges Polygon niederzuschreiben, wobei die Zahlenwerte der Koeffizienten sofort eingesetzt werden, die ohne besondere Schwierigkeiten sogar für ein Polygon mit 8 Laplaceschen Punkten berechnet werden können. Durch die von mir vorgeschlagene Methode kann die Berechnung der geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte schätzungsweise im Verlaufe von anderthalb Jahren bei ununterbrochener Arbeit von drei Rechenpaaren durchgeführt werden.

Auf diese Weise erhält man erstens eine in Bezug auf die Methode und technische Ausführung vollkommen klare Arbeit und zweitens würden sich die Termine grosser Arbeiten wesentlich verkürzen lassen. Trotzdem zwang die Dringlichkeit der Anforderung geodätischer Koordinaten für die Dreieckspunkte I. O. im Winter 1930/31 zu noch weiteren Vereinfachungen bei der Bearbeitung der Triangulation I. O., wodurch die Arbeitszeit um weitere $1\frac{1}{2}$ bis 2 Monate verkürzt wurde.

Im nachstehenden Artikel sind kurz der Weg und die Methoden zur Bearbeitung der Triangulationen I. O. dargelegt, die zurzeit vom Rechnungsbüro der Geodätischen Hauptverwaltung unter Leitung des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie angewandt werden; bei der endgültigen Bearbeitung dieser Methoden waren mir die Mitarbeiter am Staatl. Institut für Geodäsie und Kartographie Prof. W. W. Danilow und N. A. Urmajew behilflich.

F. H. Krassowsky

Methode zur Ausgleichung der Triangulation I. O. in der UdSSR.

I.

Bei der Ausgleichung der Polygone der Triangulation I. O. wird zunächst die Ausgleichung einzelner Teilstücke der Triangulation durchgeführt, wobei man unter Teilstück einen Kettenabschnitt zwischen zwei benachbarten Basisnetzen versteht. Die Ausgleichung jedes Teilstücks endet mit der Bestimmung der Richtungsverbesserungen unter Berücksichtigung der Dreiecks- und Seitenbedingungen der Basis- und Laplaceschen Bedingungen. Hierbei erhalten die astronomischen Messungen (Azimute und Längen), die in den Endpunkten des Teilstücks bestimmt wurden, keine Verbesserungen. Die Ausgleichung jedes Teilstücks wird mit der Ableitung der Längen der geodätischen Linien, welche die Endpunkte des Teilstücks verbinden, und der Ableitung der astronomischen Azimute dieser Linien beendet.

II.

Durch das Staatl. Institut für Geodäsie und Kartographie war im Jahre 1930 eine Arbeit zur Bestimmung des Ausmasses der grossen Halbachse des Ellipsoids ausgeführt worden, das sich am besten dem mit neuen Triangulationen I. O. bedeckten Territorium anschliesst. Hierbei wurden zugleich die Komponenten der Lotabweichungen ξ , und η , für Pulkowo bestimmt nach der Gleichung:

$$\xi_i = \varphi_i - B_i - p_1 \xi_0 - p_4 \operatorname{tg} \varphi_i \cdot \eta_i + p_5 \frac{da}{a}$$

$$\eta_i = (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i - q_1 \xi_0 - (q_1 \operatorname{tg} \varphi_i - \sec \varphi_i \cos \varphi_i) \eta_i + q_5 \frac{da}{a}$$

Die Abplattung des Ellipsoids wurde der Besselschen Abplattung gleichgesetzt, weil die mittleren Breiten eine zuverlässige Bestimmung der Verbesserung der Abplattung nicht gestatten. Bezeichnen wir mit a die wahrscheinlichste grosse Halbachse des Ellipsoids und mit a_0 die grosse Halbachse nach Bessel, so wird

$$a = a_0 + 684 m \pm 170 m$$

Da ξ_0 für Pulkowo nur ungefähr eine halbe Sekunde ist, wurden die astronomischen Koordinaten von Pulkowo*) als geodätische Ausgangs-Koordinaten angenommen (Mittelpunkt des runden Saales). Ebenso wurde mit Rücksicht auf die Umformung der umfangreichen Triangulation II. O. der militärtopographischen Verwaltung und der geodätischen Hauptverwaltung beschlossen, die Triangulation auf dem Besselschen Ellipsoid zu berechnen.

Hierbei ist zu beachten, dass in Pulkowo selbst überhaupt kein Azimut unmittelbar bestimmt worden ist. Der Pulkowo nächstgelegene astronomische Punkt der Triangulation I. O. ist Sablino. Daher musste Sablino anstatt Pulkowo als Ausgangspunkt der Triangulation genommen werden. Nach der Feststellung des geodätischen Ausgangs-Azimuts in Sablino können mit dem Unterschied der geodätischen Koordinaten von Sablino und Pulkowo über die astronomischen Koordinaten von Pulkowo die geodätischen Ausgangskoordinaten von Sablino berechnet werden.

Das geodätische Ausgangs-Azimut in Sablino kann man aus dem astronomischen Azimut für Sablino nach Verbesserung um $-\eta \operatorname{tg} \varphi$ ableiten, weil bei der Bestimmung von ξ , und η , auch die Grössen ξ und η für Sablino erhalten werden.

*) Obwohl $\eta_0 \approx 2,5''$ ist, wurde dennoch die geodätische Breite der astronomischen Breite von Pulkowo gleichgesetzt, um die Ergebnisse der bereits ausgeführten staatlichen Aufnahmen nicht merklich zu verändern.

Ausserdem wurde von mir noch folgende Methode zur Ableitung des geodätischen Ausgangs-Azimuts in Sablino vorgeschlagen:

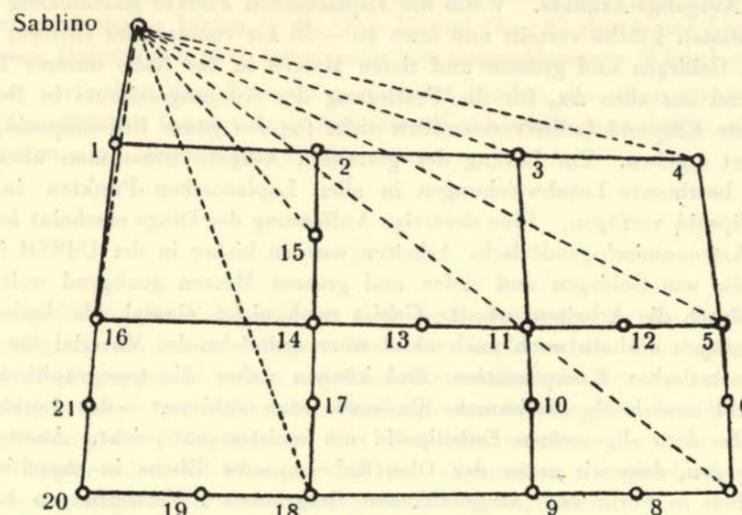


Abb. 1.

Ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut in Sablino, die durch die Arbeiten der Militärtopographischen Verwaltung bestimmt wurden, berechnen wir die geodätischen Azimute in den Punkten 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 18, 20, 21, usw. d. h. für die Knotenpunkte der Polygone und für die Laplaceschen Punkte, die sich in den zwischen den Knotenpunkten gelegenen Basisnetzen befinden. Diese Azimute die auf dem Besselschen Ellipsoid berechnet wurden, bezeichnen wir mit G .

Obwohl die Triangulation noch nicht ausgeglichen ist, so werden durch die Berücksichtigung der Laplaceschen Bedingungen bei der Ausgleichung der Teilstücke und bei der Ableitung der Winkel in den Drehpunkten 1, 2, 3, ..., 7, 20, 16 aus den astronomischen Azimuten der geodätischen Linien 1—2, 2—3, 4—5, usw. nur kleine Widersprüche zwischen den verschiedenen Werten der Azimute G erhalten, die aus dem Polygonnetz auf verschiedenen Wegen unter Benutzung der Polygonabschlüsse abgeleitet wurden.

Das astronomische Azimut im Punkt K wird mit A_k bezeichnet. Das geodätische Azimut G_k in demselben Punkte erhält beim Übergang von der grossen Besselschen Halbachse a_0 zur Halbachse a die Verbesserung δG_k . Damit wird

$$G'_k = G_k + \delta G_k.$$

Nachdem der Unterschied

$$A_k - G'_k$$

für alle in Abb. 1 bezeichneten Punkte bestimmt ist, berechnen wir die Verbesserungen des Anfangs-Azimuts in Sablino unter der Voraussetzung, dass das Azimut im Punkte K die Korrektur

$$+ (A_k - G'_k)$$

erhielt, wobei wir diese Berechnung für alle Linien durchführen, die Sablino mit den in Abb. 1 angegebenen Punkten verbinden (diese Linien sind punktiert).

Hierzu müssen wir zuerst näherungsweise die 2. geodätische Hauptaufgabe zur Bestimmung der geodätischen Linien, die Sablino mit den Punkten 2, 3, 4, ..., 20, 21, 16 verbinden, auflösen und dann die Formel

$$\Delta \alpha_2 = \left(\cos \frac{s}{R} - \frac{R \sin \frac{s}{R}}{N_2} \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right) (A_k - G'_k)$$

anwenden, wobei $\Delta \alpha_2$ auch die Verbesserung des Azimuts in Sablino ist.

Aus den Werten der $\Delta\alpha_2$ für alle Übertragungen auf Sablino bilden wir einen gewissen Mittelwert. Die Ableitung des Mittelwerts aus den verschiedenen $\Delta\alpha_2$ ist ebenso schwierig wie die Feststellung des Ausgangs-Azimuths. Wenn die Laplaceschen Punkte gleichmässig auf der von der Triangulation erfassten Fläche verteilt und etwa 40 — 50 km voneinander entfernt wären, so würde beim Fehlen von Gebirgen und grossen und tiefen Meeren in der Nähe unserer Triangulation das arithmetische Mittel aus allen $\Delta\alpha_2$ für die Festlegung des Ausgangsazimuths in Beziehung auf das bestanschliessende Ellipsoid (selbstverständlich nicht für das ganze Erd-Ellipsoid) einen genügend zuverlässigen Wert ergeben. Zur Lösung der gestellten Aufgabe muss man über mehr oder weniger zuverlässig bestimmte Lotabweichungen in allen Laplaceschen Punkten in Bezug auf das allgemeine Erdellipsoid verfügen. Eine derartige Auffassung der Dinge erscheint bei uns noch reichlich nebelhaft. Astronomisch-geodätische Arbeiten wurden bisher in der UdSSR in ebenen Gegenden ausgeführt, die von Gebirgen und tiefen und grossen Meeren genügend weit entfernt waren; dabei kann das durch die Arbeiten erfasste Gebiet noch nicht einmal als bedeutend angesehen werden. Wir verfügen deshalb auch noch nicht über ausreichendes Material für eine zuverlässige Untersuchung isostatischer Kompensation und können daher die topographisch-isostatische Reduktion auch nicht zuverlässig bestimmen, die — wie man annimmt — das Lotabweichungssystem ergeben würde, das dem allgemeinen Erdellipsoid am meisten entspricht. Ausserdem muss noch berücksichtigt werden, dass wir unter der Oberfläche unserer Ebene in verschiedenen Gegenden unterirdische Reliefs in Form von „ingesunkenen Bergrücken“, Verwerfungen haben. Das zeigt sich darin, dass in dieser Ebene häufig Stellen mit Lotabweichungen bis zu 10'' vorkommen. Bei der Berücksichtigung der topographisch-isostatischen Reduktion muss daher offenbar die Methode geändert werden, weil man so oder anders mit dem Einfluss auch dieser „ingesunkenen Bergrücken“ rechnen muss.

Nachdem wir jetzt über eine Reihe von Werten für $\Delta\alpha_2$ verfügen, müssen wir dieselben sichten, um diejenigen auszuschneiden, die bei der Übertragung von Punkten mit grösseren und rein zufälligen Lotabweichungen in der Länge erhalten wurden.

Wenn bei einer Reihe benachbarter Laplacescher Punkte η für alle Punkte innerhalb $\pm 3''$ schwankt, in einem einzigen dieser Punkte aber einen stark abweichenden Wert hat, so folgt daraus, dass das diesem Punkt entsprechende $\Delta\alpha_2$ verworfen werden muss.

Wenn η einmal aus Parallelkreisketten und dann aus Meridionalketten berechnet wird, so können leicht die Punkte festgestellt werden, in denen sich η sprunghaft ändert; solche Punkte dürfen für die Ableitung von $\Delta\alpha_2$ nicht benutzt werden. Natürlich ist diese Bestimmung von $\Delta\alpha_2$ eine vereinfachte. Auf diese Weise wurden bei der Bestimmung des Ausgangsazimuths für die neue Triangulation I. O. im Europäischen Teil der UdSSR von 39 Laplaceschen Punkten 7 verworfen; diese verworfenen Punkte beeinflussten das Ausgangs-Azimuth um 1''. Durch den Vergleich des auf diesem Wege erhaltenen Ausgangsazimuths mit dem aus dem astronomischen Azimuth durch Verbesserung um $-\eta \operatorname{tg} \varphi$ berechneten Wert kann die Zuverlässigkeit der verschiedenen Ableitungen beurteilt werden.

Da die Längen, die durch die staatlichen topographischen Aufnahmen für umfangreiche Gebiete schon festgelegt wurden, beibehalten werden müssen, muss auch die geodätische Länge von Pulkowo, die dort durch die astronomische Länge festgesetzt worden ist, beibehalten werden. Damit muss aber auch das fiktive astronomische Azimuth von Pulkowo nach Sablino gleich dem geodätischen Azimuth derselben Richtung sein, es muss also dem von Sablino nach der oben angegebenen Methode erhaltenen Ausgangs-Azimuth gleich sein. Wenn unter diesen Bedingungen die Laplacesche Gleichung in Sablino aufgestellt wird, so wird der Widerspruch rd. 3,5''; dieser Widerspruch muss gleichmässig verteilt werden auf die Verbesserung der astronomischen Länge in Sablino, auf die Verbesserung des astronomischen Azimuths in Sablino und auf die Verbesserung des geodätischen Ausgangs-Azimuths Pulkowo — Sablino. Infolgedessen ist das geodätische Azimuth bei der Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes in der Folge nochmals um etwa 1 — 1,5'' zu verbessern.

Würde man diese Verbesserung der Orientierung des Netzes nicht einführen, so würden die Laplaceschen Bedingungen nach der Netzausgleichung in sämtlichen Laplaceschen Punkten Widersprüche aufweisen, die der Grösse dieser Verbesserung entsprechen.

III.

Hierauf werden Polygone mit nur je vier Ecken gebildet. Dabei handelt es sich (Abb. 2) um den Ersatz zweier geodätischer Linien (z. B. 11 — 12 und 12 — 5) durch eine Linie 11 — 5, indem man ein sphärisches Dreieck mit zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel streng auflöst.

Dabei ist es vertretbar, dass Formeln angewendet werden, die schon Struwe bei der Berechnung von Polar-Koordinaten benutzt hat. Auf diese Weise erhält man das in Abb. 3 dargestellte Polygonnetz, das nun noch ausgeglichen werden muss.

IV.

Bei der Ausgleichung des Polygonnetzes sind die Bedingungen für die Breite und Länge, die Winkelsummenbedingung in jedem Polygon und die Laplaceschen Gleichungen zu beachten. Obwohl die Azimutbedingungen in jedem einzelnen Kettenabschnitt bereits bei seiner Teilausgleichung berücksichtigt wurden und daher die Absolutglieder der Laplaceschen Gleichungen bei der allgemeinen Ausgleichung des Polygonnetzes fast Null sein werden, so würde dennoch eine Vernachlässigung der Laplaceschen Gleichungen bei der allgemeinen Ausgleichung unvermeidlich zu einer verminderten Genauigkeit der Orientierung der Polygone führen.

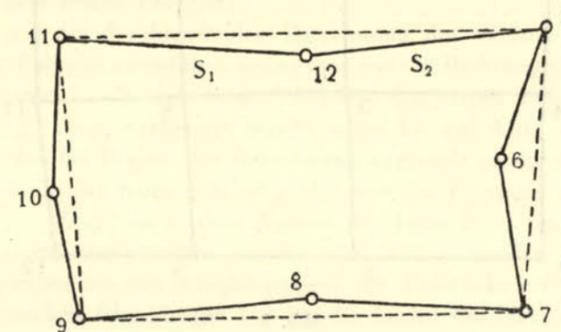


Abb. 2

Das geodätische Azimuth A_k im Punkte K (Abb. 3) wird durch die Fehler in den Polygonwinkeln beeinflusst, die bei der Übertragung des Azimuths von Sablino bis zum Punkte K benutzt wurden. Hierbei kann der Fehler eines Winkels auf ungefähr $\pm 0,9''$ geschätzt werden.

Bei der Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichung bei der allgemeinen Ausgleichung wird das Azimuth A_k bestimmt durch die Formel

$$A_k = \alpha_k - (\alpha_1 - A_1) - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1,$$

wobei α_k das astronomische Azimuth in K und λ_k und L_k die astronomische und geodätische Länge von K und α_1 , A_1 , λ_1 und L_1 das astronomische und geodätische Azimuth, die astronomische und geodätische Länge in Sablino sind.

Demnach wird die Anhäufung von Fehlern in A_k nur durch die Anhäufung von Fehlern bei der Übertragung der geodätischen Längen bedingt werden und für einen Punkt K, der von Sablino 2 000 km entfernt ist, wird dieser Fehler im Mittel $\pm 0,2''$ nicht übersteigen. Die Laplacesche Gleichung für die Linie zwischen dem Punkt P_n und P_{n-1} lautet:

$$\begin{aligned} \partial^n - \partial^{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,n} - \partial \lambda_n \sin \varphi_n + \partial \lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}) - \\ - (\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}) - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L_{n-1}) \sin \varphi_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (L)$$

In der Formel (L) bedeuten

$\alpha_{n,n-1}$ und $\alpha_{n-1,n}$ die astronomischen Azimute in P_n und P_{n-1} für die Linie $P_n P_{n-1}$, abgeleitet aus der Ausgleichung des Teilstücks;

λ_n und λ_{n-1} die astronomischen Längen von P_n und P_{n-1} ;

$A_{n,n-1}$ und $A_{n-1,n}$ die geodätischen Azimute der Richtungen von P_n nach P_{n-1} und von P_{n-1} nach P_n ;

I_n und I_{n-1} die geodätischen Längen von P_n und P_{n-1} ;

δ_n° und δ_{n-1}° *) die Verbesserungen der astronomischen Azimute der Ausgangsseiten der Teilstücke in P_n und P_{n-1} ;

$v_{n,n-1}$ die Verbesserung der Richtung der geodätischen Linie $P_n P_{n-1}$ in P_n ;

$v_{n-1,n}$ die Verbesserung der Richtung der geodätischen Linie $P_{n-1} P_n$ in P_{n-1} ;

$\delta_n^\circ + v_{n,n-1}$ die Verbesserung des Azimuts $\alpha_{n,n-1}$;

$\delta_{n-1}^\circ + v_{n-1,n}$ „ „ „ $\alpha_{n-1,n}$;

$\delta\lambda_n$ und $\delta\lambda_{n-1}$ „ „ der astronomischen Längen λ_n und λ_{n-1} .

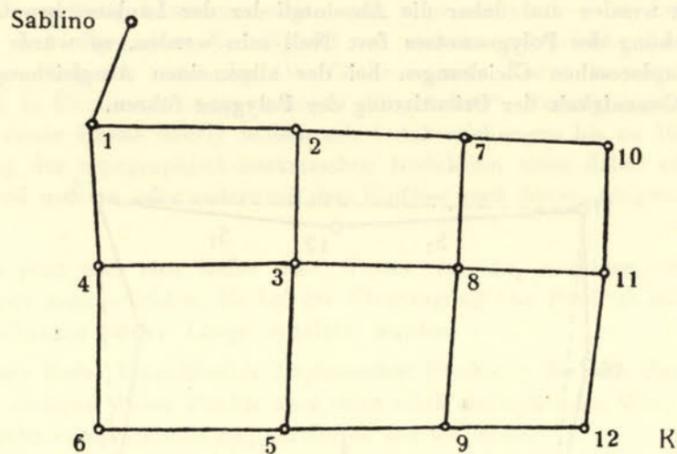


Abb. 3

Wenn wir die Laplacesche Gleichung für alle Linien aufstellen: Sablino — 1, 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 1, 2 — 7, 7 — 8, 8 — 3, 7 — 10, 10 — 11, 11 — 8, 11 — 12, 12 — 9, 9 — 8, 9 — 5, 5 — 3, 5 — 6 und 6 — 4, so fallen die Winkelsummen in den Polygonen aus, weil sie als Summen der Laplaceschen Gleichungen ausgedrückt werden, die für alle Seiten des geschlossenen Polygons angeschrieben werden.

Wir könnten auch die Winkelsummenbedingung für jedes Polygon aufstellen, aber dann dürfen wir nicht sämtliche oben aufgezählten Laplaceschen Gleichungen benutzen. Wir müssen dann z. B. die Gleichungen für die Linien

$$1 - 4, 4 - 6, 7 - 8, 8 - 9, 8 - 11, 9 - 12$$

fortlassen.

Die geodätischen Grössen A und L , die in die Laplace-Gleichungen eingehen, werden folgendermassen bestimmt:

Die geodätischen Ausgangskordinaten und das Azimut in Sablino werden streng auf Punkt 1 übertragen; dann werden die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4 streng berechnet; mit den für den Punkt 4 erhaltenen Koordinaten und den Koordinaten des Punktes 1 werden die Azimute der Richtungen 4 — 1 und 1 — 4 streng berechnet; ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut des Punktes 2, die durch Übertragung auf der Linie 1 — 2 erhalten wurden, werden dann die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 2 — 7, 7 — 8 streng berechnet; mit den Koordinaten der Punkte 8 und 3 werden die Azi-

*) Hier ist auch die Verbesserung der Richtung der Ausgangsseite einbegriffen.

mute der Richtungen 8 — 3 und 3 — 8 streng berechnet. Ausgehend von den Koordinaten des Punktes 7 und dem Azimut 7 — 2, die durch einfache Übertragung über die Linien 1 — 2 und 2 — 7 erhalten wurden, werden streng die Koordinaten und Azimute für die Linien 7 — 20, 20 — 11, 11 — 12, 12 — 9 berechnet; aus den Koordinaten der Punkte 11 und 8, 8 und 9 dann die Azimute der Richtungen 8 — 11, 11 — 8, 12 — 9 und 9 — 12 usw. bestimmt. Mit anderen Worten, die Grössen A in den Laplaceschen Gleichungen sollen sich auf die Linien beziehen, die die identischen Punkte in den verschiedenen Polygonen verbinden. Die Berechnungen zur Bestimmung von A und L werden, soweit sie für die Aufstellung der Laplace-Gleichungen notwendig sind, bei der Aufstellung der Breiten- und Längenbedingungsgleichungen ausgeführt.

Wir gehen nun zur Aufstellung der Bedingungen für den Breiten- und Längenanschluss über. Ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut im Punkt 1, die streng über die Linie Sablino — 1 übertragen wurden, berechnen wir streng die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 1, 1 — 2 (Abb. 3) und erhalten den Widerspruch in Breite, Länge und Azimut.

Ferner bezeichnen wir mit B_1° und L_1° die Ausgangslänge und Breite des Punktes 1, mit $(B_1^\circ)'$ und $(L_1^\circ)'$ die Breite und Länge des Punktes 1, die durch die geschlossene durchlaufende Berechnung erhalten wurden. Als geodätische Ausgangskordinaten des Punktes 2 nehmen wir dann die Werte, die bei der durchlaufenden Berechnung des ersten Polygons erhalten wurden, und das geodätische Azimut der Linie 2 — 1 und berechnen streng die geodätischen Koordinaten und Azimute der Linien 2 — 7, 7 — 8, 8 — 3, 3 — 2, 2 — 7 und erhalten damit für den Punkt 2:

B_2° und L_2° aus dem ersten Polygon;

$(B_2^\circ)'$ und $(L_2^\circ)'$ aus der durchlaufenden Berechnung des zweiten Polygons. Diese Berechnungen werden für jedes Polygon ausgeführt, wobei man stets in Richtung des Uhrzeigers fortschreitet.

Das Azimut der Linie 1 — 2, das beim Schliessen des ersten Polygons erhalten und durch die Grösse $+ [L_1^\circ - (L_1^\circ)'] \sin \varphi_1$ verbessert wurde, muss bis auf $0,01'' - 0,02''$ dem Azimut derselben Linie gleich sein, das bei Beginn der Berechnung zugrunde gelegt wurde. Ebenso muss sich das Azimut der Linie 2 — 7, das beim Schliessen des zweiten Polygons erhalten wurde, nach der Verbesserung um $+ [L_2^\circ - (L_2^\circ)'] \sin \varphi_2$ dem Azimut der Linie 2 — 7 gleich sein, das bei der Berechnung als Ausgangsazimut angenommen worden war. Damit werden alle Berechnungen, soweit die Laplaceschen Bedingungen bei den Ausgleichungen der Teilstücke erfüllt wurden, verprobt.

Ausser den Laplaceschen Gleichungen (L) für die Linien des Netzes muss noch die Laplace-Bedingung in Sablino berücksichtigt werden:

$$\alpha_{1,0} + \delta\alpha_{1,0} - A_{1,0} - \delta A_{1,0} = (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1.$$

Der Zeiger „0“ bezieht sich auf Pulkowo, der Zeiger „1“ dagegen auf Sablino. Die angegebene Laplacesche Bedingung in Sablino unterliegt noch einigen Umbildungen, wobei der Umstand in Betracht gezogen werden muss, dass in Sablino das astronomische Azimut bestimmt worden ist.

V.

Der Aufstellung der Bedingungsgleichungen in jedem Polygon geht die Berechnung der Koeffizienten nach den Formeln (1) voraus:

$$\left. \begin{aligned} q_1^{n-1,n} &= \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n \cdot \frac{M_{n-1}}{N_n} \\ p_3^{n-1,n} &= -\frac{\cos A_{n,n-1}}{M_n \sin l''} = -(1)_n \cos A_{n,n-1} \\ q_3^{n-1,n} &= -(2)_n \sin A_{n,n-1} \sec \varphi_n \\ r_3^{n-1,n} &= q_3^{n-1,n} \cdot \sin \varphi_n \\ p_4^{n-1,n} &= (1)_n S_{n,n-1} \sin A_{n,n-1} \sin l'' \\ q_4^{n-1,n} &= -(2)_n S_{n-1,n} \cos A_{n,n-1} \sec \varphi_n \sin l'' \\ r_4^{n-1,n} &= 1 + q_4^{n-1,n} \sin \varphi_n \end{aligned} \right\} (1)$$

In (1) bedeuten:

$n-1$ und n die Nummern des Anfangs- und Endpunktes der Polygonseite ($n-1, n$),

$S_{n-1,n}$ die Länge dieser Seite,

$l_{n-1,n}$ den Längenunterschied der Punkte $n-1$ und n ,

$A_{n,n-1}$ das Azimut im n -ten Punkt nach dem $(n-1)$ -ten Punkt.

Numerieren wir das Polygon nach Abb. 4 und bezeichnen wir die Verbesserungen der Längen seiner Seiten mit $\delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta s_{3,4}$ und $\delta s_{4,1}$, die Richtungsverbesserungen seiner Seiten mit $v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,4}, \dots$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung des Polygons in folgender Form:

$$B_1^0 - (B_1^0)' = [p_3^{1,2} + (p_4^{2,3} + p_4^{3,4} + p_4^{4,1}) r_3^{1,2}] \delta s_{1,2} + [p_3^{2,3} + (p_4^{3,4} + p_4^{4,1}) r_3^{2,3}] \delta s_{2,3} + [p_3^{3,4} + p_4^{4,1} r_3^{3,4}] \delta s_{3,4} + p_3^{4,1} \delta s_{4,1} - [p_4^{2,3} + (p_4^{3,4} + p_4^{4,1} r_4^{2,3}) r_4^{2,3}] (v_{2,1} - v_{2,3}) - [p_4^{3,4} + p_4^{4,1} r_4^{3,4}] (v_{3,2} - v_{3,4}) - p_4^{4,1} (v_{4,3} - v_{4,1}) \quad (2)$$

$$L_1^0 - (L_1^0)' = [q_3^{1,2} + (q_1^{2,3} + q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_3^{1,2} + (q_4^{2,3} + q_4^{3,4} + q_4^{4,1}) r_3^{1,2}] \delta s_{1,2} + [q_3^{2,3} + (q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_3^{2,3} + (q_4^{3,4} + q_4^{4,1}) r_3^{2,3}] \delta s_{2,3} + [q_3^{3,4} + q_1^{4,1} p_3^{3,4} + q_4^{4,1} r_3^{3,4}] \delta s_{3,4} + q_3^{4,1} \delta s_{4,1} - [q_4^{2,3} + (q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_4^{2,3} + q_1^{4,1} p_4^{3,4} + (q_4^{3,4} + q_4^{4,1} r_4^{2,3}) r_4^{2,3}] (v_{2,1} - v_{2,3}) - [q_4^{3,4} + q_1^{4,1} p_4^{3,4} + q_4^{4,1} r_4^{3,4}] (v_{3,2} - v_{3,4}) - q_4^{4,1} (v_{4,3} - v_{4,1}) \quad (2^1)$$

Diese Formeln wurden von F. N. Krassowsky in seinem Aufsatz „Methoden zur Ausgleichung der staatlichen Triangulation I. O.“*) abgeleitet und angegeben.

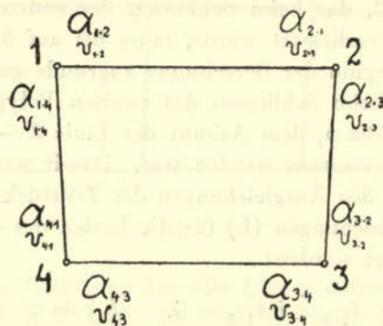


Abb. 4.

In der Folge bezeichnen wir: a) die astronomischen Azimute der geodätischen Linien, die unser Polygon bilden durch $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{4,1}$; b) die geodätischen Azimute, mit denen wir die Koordinaten der Polygonpunkte zur Bestimmung von $B_1^0 - (B_1^0)'$ und $L_1^0 - (L_1^0)'$ berechneten, entsprechend mit $A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,3}, A_{3,2}, A_{3,4}, A_{4,3}$; c) mit $A'_{4,1}$ und $A'_{1,4}$ die Azimute der Linie $4-1$, die streng aus den Koordinaten des Punktes 4 und den Ausgangskordinaten B_4^0 und L_4^0 des Punktes 1 berechnet wurden, wobei die Koordinaten des Punktes 4 dieselben sind, die beim Schliessen unseres Polygons erhalten wurden. Damit erhält man die Winkelbedingung dieses Polygons in folgender Form:

$$(v_{1,4} - v_{1,2}) + (v_{2,1} - v_{2,3}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + (v_{4,3} - v_{4,1}) + [(a_{2,1} - a_{2,3}) - (A_{2,1} - A_{2,3})] + [(a_{3,2} - a_{3,4}) - (A_{3,2} - A_{3,4})] + [(a_{4,3} - a_{4,1}) - (A_{4,3} - A'_{4,1})] + [(a_{1,4} - a_{1,2}) - (A'_{1,4} - A_{1,2})] = 0 \quad (3)$$

In dieser Gleichung werden die Komponenten $[(a_{2,1} - a_{2,3}) - (A_{2,1} - A_{2,3})]$ und $[(a_{3,2} - a_{3,4}) - (A_{3,2} - A_{3,4})]$ Null sein und die Komponenten $[(a_{4,3} - a_{4,1}) - (A_{4,3} - A'_{4,1})]$ und

*) Arbeiten des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie, 2 Teil, 1931.

$[(a_{1,4} - a_{1,2}) - (A'_{1,4} - A_{1,2})]$ zusammen nur einige Hundertstel Sekunden ergeben. Das Absolutglied der Winkelbedingung wird immer sehr klein sein.

Dies ist bedingt durch die vorangegangene Ausgleichung der Teilstücke der Triangulation unter Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen und durch die anschließende Ableitung der Polygonwinkel als Differenzen der entsprechenden astronomischen Azimute der geodätischen Linien, die die Dreiecksketten ersetzen.

Die Gleichungen (2) und (2¹) müssen mit $\frac{100}{3}$ multipliziert werden, damit sich die Koeffizienten in ganzen Einheiten und Zehnteln derselben ergeben.

VI.

Bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen (2) und (2¹), die für jedes Polygon gebildet werden, und bei der Auflösung der Laplaceschen Gleichung müssen die Gewichte der gesuchten Verbesserungen δs und v_i, k, δ^0 und $\delta \lambda$ berücksichtigt werden. Für die Querverschiebung des Endpunktes der geodätischen Linie haben wir:

$$q^2 = 2 \left[\frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{S}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1)} \right]^2 + m_z^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{S^2}{4} \quad (4)$$

wobei n der halben Zahl der Dreiecke des Teilstücks der Triangulation gleich ist, das durch die gegebene geodätische Linie S ersetzt wird; m ist der mittlere Fehler der Winkelmessung.

Die Querverschiebung q ist beinahe mit der Längsverschiebung ds im Endpunkt der geodätischen Linie gleich; m_z ist der mittlere Fehler der Orientierung der Ausgangsseite im Endpunkt der geodätischen Linie S , der von der Verwendung der Laplaceschen Azimute bei der Orientierung der Ausgangsseite herrührt.

Ersetzt man zwei geodätische Linien durch eine (Abb. 2), so muss man in (4) $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$ setzen und auf der rechten Seite die Glieder

$$2 \left[\frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \frac{(S_1 + S_2)}{4} \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1)} \right]^2 + m_z^2 \sin^2 1'' \frac{(S_1 + S_2)^2}{4}; n = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

hinzufügen, wo n_1 der halben Anzahl der Dreiecke für die Kette S_1 und n_2 der halben Anzahl der Dreiecke für die Kette S_2 entspricht (Abb. 2).

Die Längsverschiebung dS des Endpunktes der geodätischen Linie ergibt sich aus

$$dS^2 = 2 \left(\frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5 \frac{S}{2}} \right)^2 + \frac{S^2}{2(300\,000)^2} \quad (5)$$

In der Formel (5)*) ist der Bruch $\frac{1}{300\,000}$ der mittlere Fehler der Ausgangsseite der Triangulation, der durch die Fehler der Winkel bedingt wird. Der Fehler m kann angenommen werden zu $\pm 0,6''$, der Fehler m_z zu $\pm 0,8''$, wenn die astronomischen Azimute der Ausgangsseiten unmittelbar bestimmt wurden und zu $\pm \sqrt{1,4}''$, wenn das Azimut mittelbar im Basisnetz bestimmt

*) Werden zwei geodätische Linien durch eine ersetzt, so muss in (5) $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$ (Abb. 2) gesetzt und im rechten Teil der Formel

$$2 \left(\frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5 \frac{S_1 + S_2}{4}} \right)^2 + \frac{(S_1 + S_2)^2}{4(300\,000)^2}$$

addiert werden; $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$, wobei n_1 der halben Anzahl der Dreiecke für s_1 und n_2 der für s_2 entspricht.

wird. Berechnet man q , $v_{i,k}$ und dS für $S = 400 \text{ km}$ bei einer Länge der Dreiecksseiten von 30 km und für ein entsprechendes $n = 13$ oder 14 , so erhält man

$$dS^2 = 3,28$$

$$V^2 = 3,38 \text{ bei } m_z = 1,2''$$

$$v^2 = 0,72$$

$$v^2 = \frac{q^2}{S^2 \sin^2 1''} - \frac{m^2}{2}$$

Da sich bei den meisten Polygonen der Geodätischen Hauptverwaltung in der Mitte der geodätischen Linien von 400 km eine Basis und ein Laplacescher Punkt befinden, muss man für diese Polygone die Berechnung anders durchführen. Zuerst sind dS^2 und q^2 für die Seiten des Polygons von 200 km zu berechnen; hierbei ergibt sich

$$dS^2 = 0,60$$

$$q^2 = 0,67$$

$$v^2 = 0,52.$$

Für die Polygone der Geodätischen Hauptverwaltung mit $S = 400 \text{ km}$ mit den Zwischenbasisnetzen ergibt sich dann

$$dS^2 = 1,20$$

$$q^2 = 2,25$$

$$v^2 = 0,42.$$

Es ist vorteilhaft, den Gewichtseinheitsfehler mit $\pm \sqrt{1,2}$ anzunehmen. Dann werden wir für die Polygone der Geodätischen Hauptverwaltung mit $S = 400 \text{ km}$ mit den Zwischenbasisnetzen folgende abgeänderte Gewichtszahlen erhalten

- für $S \dots \dots \dots 1,0$
- „ $v \dots \dots \dots 2,8$
- für Polygone mit $S = 200 \text{ km}$:
- für $S \dots \dots \dots 2$
- „ $v \dots \dots \dots 2,4$
- für Polygone mit $S = 400 \text{ km}$, ohne Zwischenbasisnetze
- für $S \dots \dots \dots 0,4$
- „ $v \dots \dots \dots 1,5.$

Es ist klar, dass das Gewicht der Grössen S und v merklich vom Abstand der Laplaceschen Punkte und von den tatsächlichen Werten der Fehler m und m_z in den verschiedenen Teilstücken abhängt. Man muss also m_z und m für die verschiedenen Teilstücke einzeln bestimmen, weil die Übertragung der astronomisch beobachteten Azimute auf die Ausgangsseiten keineswegs einheitlich ist*) und weil die aus der Ausgleichung der Teilstücke abgeleiteten Werte ebenfalls für die einzelnen Teilstücke recht verschieden sind. (4) und (5) sind natürlich Näherungsformeln, sie reichen aber völlig aus für richtig aufgebaute Teilstücke und bei normaler Grösse der Absolutglieder in den Basis- und Azimutbedingungen.

*) Das Gewicht $\delta \lambda \sin \varphi$ ist ungefähr 10; das Gewicht δ^0 ist dem Fehler der unmittelbaren Beobachtung des Azimutes (m_α) und den Fehlern der Winkelbeobachtungen anzupassen. Wenn das Azimut der Ausgangsseite bestimmt ist, so ist das Gewicht δ^0 ungefähr das vierfache von $\left[m_\delta^2 = m_\alpha^2 + \frac{(0.6)^2}{2} \right]$; wenn das Azimut des Basisnetzes unmittelbar bestimmt wurde, so wird das Gewicht δ ungefähr 2,3. In diesem Falle ist $m_\delta^2 = m_\alpha^2 + \frac{(0.6)^2}{2} + (0.6)^2$.

VII.

Nach Aufstellung der Korrelatennormalgleichungen, die dem System der Bedingungsgleichungen der Polygone entsprechen, und nach Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Verbesserungen dS und v und zugleich die endgültigen Werte der Elemente der Polygone. Hierauf folgt

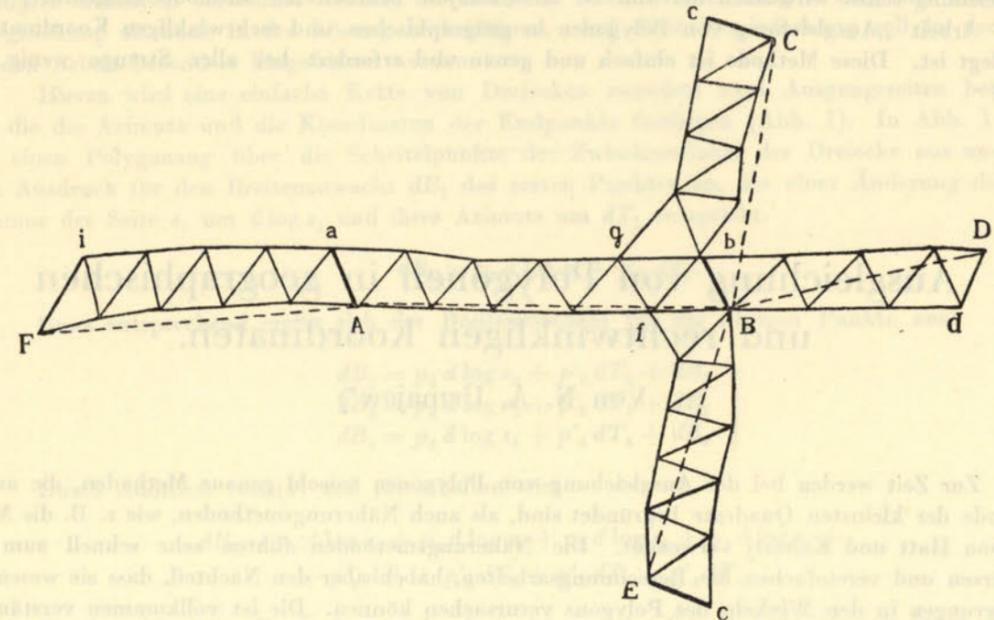


Abb. 5.

die endgültige genaue Berechnung der geodätischen Koordinaten und Azimute für die Polygonpunkte und die Festlegung der Laplaceschen Punkte, die den Zwischenbasisnetzen angehören (z. B. der Punkte 12, 6, 8, 10 in Abb. 2).

VIII.

Nun bezeichnen wir mit A, D, B, C, E, F (Abb. 5) die Knotenpunkte der Polygone, deren geodätische Koordinaten endgültig bestimmt sind. Damit sind auch die geodätischen Azimute der geodätischen Linien AB, BD, BE, BC, AF endgültig bestimmt.

Wenn in Abb. 5 Aa, Bb, dD, Ee, cC, Fi die Ausgangsseiten für die entsprechenden Teilstücke der Triangulation sind, so werden aus der Ausgleichung der Teilstücke die Winkel: $iFA, FAa, BAa, ABb, Ebb, DBb, Cbb, BDd$ usw. bekannt sein. Durch die geodätischen Azimute der Linien AF und AB und durch die Winkel FAa und BAa leiten wir zweimal das Azimut der Seite Aa ab und nehmen aus den zwei Ableitungen das Mittel; aus den Azimuten der Linien BE, BA, BC und BD und den Winkeln Ebb, ABb, bBC und DBb erhalten wir das Azimut der Seite Bb viermal und bilden wiederum das Mittel.

Für die folgende Ausgleichung der Teilstücke zwischen den Koordinaten der Punkte F und A, A und B, B und C, B und D, B und E , zwischen den Azimuten der Ausgangsseiten Fi, Aa, Bb, cC, dD, Ee muss man vorher die den Teilstücken gemeinsamen Figuren ausscheiden, z. B. müssen in Abb. 5 die Dreiecke fbB und fgb abgespalten und für die Ausgleichung der Teilstücke

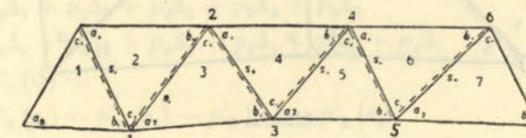


Abb. 6.

aus ihnen die geodätischen Azimute der Seiten Bf , fb , gf und gb bestimmt und die geodätischen Koordinaten der Punkte f und g berechnet werden.

Bei der folgenden Ausgleichung der Teilstücke werden die Verbesserungen der Winkel (aber nicht der Richtungen) bestimmt und der in Abb. 6. punktierte Linienzug bestimmt. Die Ausgleichung selbst wird nach der von N. A. Urmajew bearbeiteten Methode ausgeführt, die in seiner Arbeit „Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten“*) dargelegt ist. Diese Methode ist einfach und genau und erfordert bei aller Strenge wenig Zeit.

Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten.

Von N. A. Urmajew*)

Zur Zeit werden bei der Ausgleichung von Polygonen sowohl genaue Methoden, die auf der Methode der kleinsten Quadrate begründet sind, als auch Näherungsmethoden, wie z. B. die Methoden von Hatt und Kobsarj verwendet. Die Näherungsmethoden führen sehr schnell zum Ziel, verkürzen und vereinfachen die Berechnungsarbeiten, haben aber den Nachteil, dass sie wesentliche Verzerrungen in den Winkeln des Polygons verursachen können. Die ist vollkommen verständlich, weil in den Näherungsmethoden die Minimumsbedingung der Quadratsumme der Verbesserungen

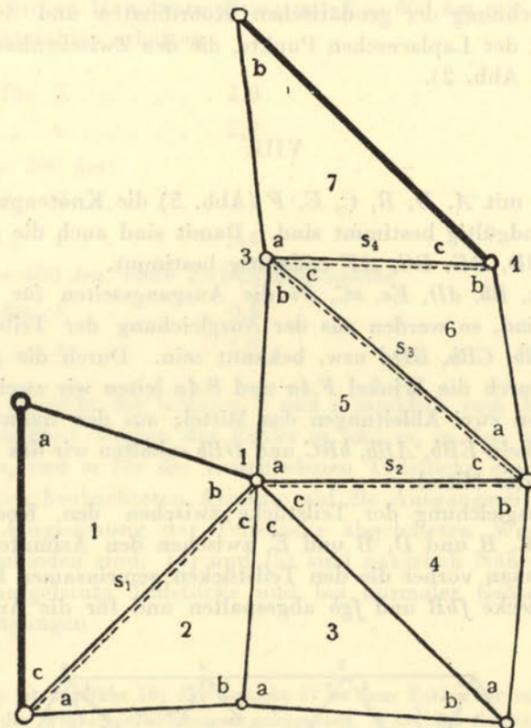


Abb. 1.

*) „Arbeiten des staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie“ 1. Teil, 1931.

der Winkel oder der Richtungen nicht eingehalten wird. Wenn auf Polygonen, die nach diesen Näherungsmethoden ausgeglichen sind, Folgetriangulationen aufgebaut werden, können sich solche Verzerrungen sehr unangenehm auswirken. Daher müssen bei der Ausgleichung von Polygonen, die in das allgemeine Schema der staatlichen Triangulationen eingefügt werden sollen, unbedingt strengere Methoden verwendet werden, die trotzdem eine Vereinfachung sowohl im Ansatz der Ausgleichung als auch in der Lösung herbeiführen. Auf diese Vereinfachung soll in der vorliegenden Arbeit besonders hingewiesen werden.

Hierzu wird eine einfache Kette von Dreiecken zwischen zwei Ausgangsseiten betrachtet, für die die Azimute und die Koordinaten der Endpunkte festliegen (Abb. 1). In Abb. 1 wählen wir einen Polygonzug über die Scheitelpunkte der Zwischenwinkel der Dreiecke aus und setzen den Ausdruck für den Breitenzuwachs dB_1 des ersten Punktes an, der einer Änderung des Logarithmus der Seite s_1 um $d \log s_1$ und ihres Azimuts um dT_1 entspricht.

$$dB_1 = p_1 d \log s_1 + p'_1 dT_1. \quad (1)$$

Ganz entsprechend ergibt sich der Breitenzuwachs für die übrigen Punkte aus:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_2 d \log s_2 + p'_2 dT_2 + dB_1 \\ dB_3 &= p_3 d \log s_3 + p'_3 dT_3 + dB_2 \\ dB_4 &= p_4 d \log s_4 + p'_4 dT_4 + dB_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch Addition von (1) und (2) erhalten wir:

$$dB_4 = p_1 d \log s_1 + p_2 d \log s_2 + p_3 d \log s_3 + p_4 d \log s_4 + p'_1 dT_1 + p'_2 dT_2 + p'_3 dT_3 + p'_4 dT_4. \quad (3)$$

Drücken wir jetzt die Änderung der Logarithmen der Seiten und Azimute durch die Winkelverbesserungen aus und führen wir noch die Bezeichnung (4) ein

$$\Delta a_i (a_i) - \Delta b_i (b_i) = \Delta_i, \quad (4)$$

wobei Δa_i und Δb_i die Änderung der Logarithmen der Sinusse der Winkel a_i und b_i bei Änderung der Winkel um $1''$ und (a_i) und (b_i) die Verbesserungen der Winkel a_i und b_i bedeuten, dann wird:

$$\begin{aligned} d \log s_1 &= \Delta_1 \\ d \log s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \\ d \log s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 \\ d \log s_4 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6. \end{aligned}$$

Für die Änderung der Azimute erhalten wir:

$$\begin{aligned} dT_1 &= + (c_1) \\ dT_2 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) \\ dT_3 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) + (c_5) \\ dT_4 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) + (c_5) - (c_6), \end{aligned}$$

wobei (c) die Verbesserung des Zwischenwinkels c ist.

Nach Einsetzen der beiden letzten Ausdrücke in (3) erhalten wir:

$$\begin{aligned} dB_4 &= p_1 \Delta_1 + \\ &+ p_2 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + p_2 \Delta_3 + p_2 \Delta_4 \\ &+ p_3 \Delta_1 + p_3 \Delta_2 + p_3 \Delta_3 + p_3 \Delta_4 + p_3 \Delta_5 \\ &+ p_4 \Delta_1 + p_4 \Delta_2 + p_4 \Delta_3 + p_4 \Delta_4 + p_4 \Delta_5 + p_4 \Delta_6 \\ &+ p'_1 (c_1) + \\ &+ p'_2 (c_1) - p'_2 (c_2) - p'_2 (c_3) - p'_2 (c_4) \\ &+ p'_3 (c_1) - p'_3 (c_2) - p'_3 (c_3) - p'_3 (c_4) + p'_3 (c_5) \\ &+ p'_4 (c_1) - p'_4 (c_2) - p'_4 (c_3) - p'_4 (c_4) + p'_4 (c_5) - p'_4 (c_6). \end{aligned}$$

Durch entsprechende Zusammenfassung erhält man daraus:

$$dB_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_2 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_3 + \\ + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_4 + (p_3 + p_4) \Delta_5 + p_4 \Delta_6 + \\ + (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_1) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_2) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_3) - \\ - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_4) + (p'_3 + p'_4) (c_5) - p'_4 (c_6).$$

Werden die Summen, die in Klammern stehen, mit P und P' bezeichnet, so geht der Ausdruck für den Breitenzuwachs des Endpunktes über in:

$$dB_4 = \Sigma P \Delta + \Sigma [\pm P' (c)]$$

oder unter Beachtung von (4)

$$dB_4 = \Sigma [P \Delta_a (a) - P \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm P' (c)].$$

Wenn w_1 das Absolutglied der Breitengleichung ist im Sinne: berechnete Breite minus gegebene, so erhält die Bedingungsgleichung für die Breite folgende Form:

$$\Sigma [P \Delta_a (a) - P \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm P' (c)] + w_1 = 0. \quad (5)$$

Für die Bildung der Koeffizienten P und P' gilt folgendes Gesetz: Der Koeffizient P_i ist gleich der Summe der letzten Koeffizienten P , die den Seiten des Linienzuges entsprechen, die zwischen den Scheitelpunkten der Zwischenwinkel des Dreiecks i und des letzten Dreiecks eingeschlossen sind.

Für die Länge kann nach dem Muster von (1) ein ähnlicher Ausdruck gebildet werden, nämlich

$$\Sigma [Q \Delta_a (a) - Q \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm Q' (c)] + w_2 = 0, \quad (6)$$

wobei Q und Q' die Summen der Koeffizienten q und q' sind, die ebenfalls nach dem oben genannten Gesetz gebildet werden. Die Koeffizienten p, p', q, q' können auf verschiedene Weise dargestellt werden. Nach der Formel von Walker ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$p = \frac{1}{\Delta \log \theta}; \quad p' = \frac{\Delta \log \cos T}{\Delta \log \theta} \\ q = \frac{1}{\Delta \log l}; \quad q' = \frac{\Delta \log \sin T}{\Delta \log l}$$

In diesen Formeln sind θ und l die Unterschiede der Breiten und Längen der Endpunkte des Linienzuges, $\Delta \log \theta$ und $\Delta \log l$ die Änderungen ihrer Logarithmen für eine Änderung um $1''$, $\Delta \log \cos T$ und $\Delta \log \sin T$ die Änderungen der Logarithmen der Kosinuse und Sinuse des Azimuts bei Änderung des letzteren um $1''$.

Die Formeln von Pronsky (s. „Astronomische Nachrichten“, Bd. 71, 1868) haben folgende Form:

$$p = \frac{\theta}{M \cdot 10^7}; \quad p' = -\theta \sin 1'' \operatorname{tg} T \\ q = \frac{l}{M \cdot 10^7}; \quad q' = l \sin 1'' \operatorname{ctg} T.$$

Etwas anderer Art sind die Formeln, die von dem ehem. Korps der Militär-Topographen zur Ausgleichung des ersten und zweiten Polygons der Triangulation I. O. angewandt wurden (s. „Materialien zur Triangulation I. O.“ Ausg. VI.—Aufzeichnungen der militärtopographischen Verwaltung, Bd. 73).

Alle diese Formeln wurden durch Differenzieren der Hauptglieder der Formeln zur Lösung der 1. geodätischen Hauptaufgabe erhalten, daher werden bei grossen Absolutgliedern die Bedin-

gungsgleichungen für den Breiten- und Längenschluss bei der Ausgleichung nicht ganz erfüllt. Mit Rücksicht hierauf ist es vorteilhafter, genauere Formeln anzuwenden, die man aus den Helmertschen Differentialformeln für die geodätische Linie ableiten kann. Diese Helmertschen Differentialformeln lauten:

$$\left. \begin{aligned} p &= -k \frac{s}{R} \cos T_{21}; & p' &= -\frac{s}{R} \sin T_{21} \\ q &= -k \frac{s}{N} \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= -\frac{s}{N} \cos T_{21} \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hierbei sind R und N Meridian- und Querkrümmungsradien und $k = \frac{\rho''}{M \cdot 10^6} = 0,47494$; ($\log k = -9,67664$); $\Delta \log s$ wird in Einheiten der sechsten Stelle des Logarithmus ausgedrückt.

Da die Koeffizienten p und q, p' und q' ihrem absoluten Wert nach klein sind, wird die rechte Seite der Gleichung (7) mit der Konstanten $\frac{M \cdot 10^4}{6} = 723,824$ multipliziert; hierbei müssen natürlich dann auch die Absolutglieder der Gleichungen mit demselben Faktor multipliziert werden. Damit gehen die Formeln (7) über in

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\rho''}{600 R} s \cos T_{21}; & p' &= +\frac{M \cdot 10^4}{6 R} s \sin T_{21} \\ q &= -\frac{\rho''}{600 N} s \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= -\frac{M \cdot 10^4}{6 N} s \cos T_{21} \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit der Substitution $s \sin T_{21} = -\frac{600 N}{\rho''} q \cos B_2$ erhalten wir für p' den Ausdruck:

$$p' = -\frac{M \cdot 10^6 N}{\rho'' R} q \cos B_2$$

und für q' in ähnlicher Weise

$$q' = +\frac{M \cdot 10^6 R}{\rho'' N} p \sec B_2$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\rho''}{R} = (1); \quad \frac{\rho''}{N} = (2); \quad \frac{N}{R} = \frac{(1)}{(2)}; \quad \frac{R}{N} = \frac{(2)}{(1)},$$

so wird endgültig

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{(1)}{600} s \cos T_{21}; & p' &= -\frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} q \cos B_2 \\ q &= -\frac{(2)}{600} s \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= +\frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bezeichnen wir noch

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{600} &= b_1 & -\frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} &= c_1 \\ -\frac{(2)}{600} &= b_2 & +\frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (9')$$

dann geht (9) über in

$$\left. \begin{aligned} p &= b_1 s \cos T_{21} \\ q &= b_2 s \sin T_{21} \sec B_2 \\ p' &= c_1 q \cos B_2 \\ q' &= c_2 p \sec B_2 \end{aligned} \right\} (10)$$

Die Logarithmen der Koeffizienten b_1, b_2, c_1, c_2 können für verschiedene Breiten der Tabelle 1 entnommen werden.

Tabelle 1

Breite:	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log c_1$	$\log c_2$
35°	5.7331 n	5.7312 n	0.3253 n	0.3214
40	5.7327 n	5.7310 n	0.3251 n	0.3216
45	5.7324 n	5.7309 n	0.3248 n	0.3219
50	5.7320 n	5.7308 n	0.3246 n	0.3222
55	5.7316 n	5.7307 n	0.3243 n	0.3224
60	5.7313 n	5.7305 n	0.3241 n	0.3226
65	5.7310 n	5.7304 n	0.3239 n	0.3228

Mit den Koeffizienten (10) nehmen die Bedingungsbedingungen für die Breite und Länge folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [P\Delta_a(a) - P\Delta_b(b)] + \Sigma [\pm P'(c)] + 723,824 w_1 &= 0 \\ \Sigma [Q\Delta_a(a) - Q\Delta_b(b)] + \Sigma [\pm Q'(c)] + 723,824 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

Die Formeln (10) und (11) stellen in Verbindung mit Tabelle 1 eine neue Methode zur Ausgleichung von Polygonen in geographischen Koordinaten dar, die sich von den übrigen Methoden durch die Einfachheit der Aufstellung der Bedingungsbedingungen unterscheidet.

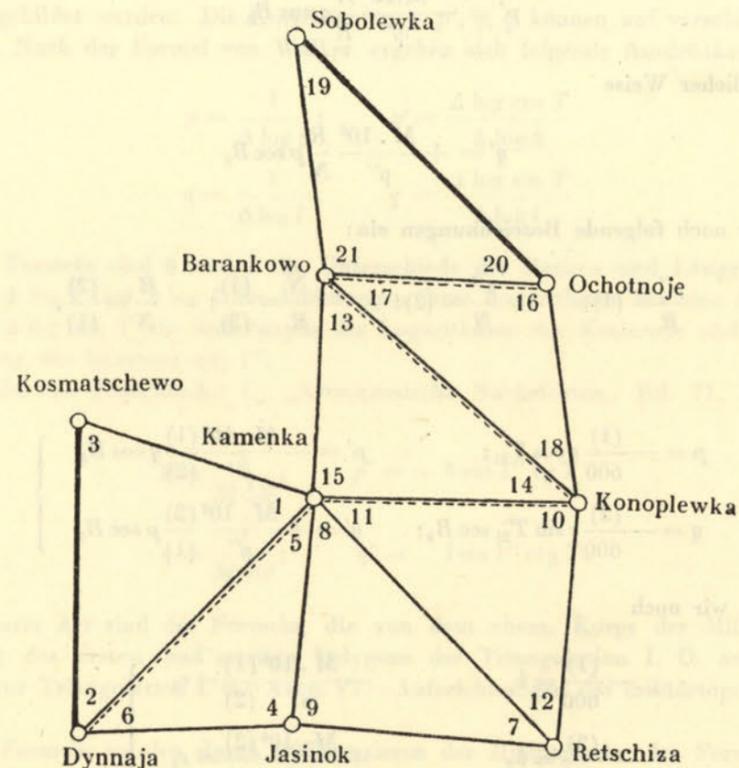


Abb. 2.

Als Beispiel wird die Ausgleichung einer Dreieckskette II. O. mit 7 Dreiecken zwischen den Seiten Kosmatschewo — Dynnaja und Sobolewka — Ochotnoje (Abb. 2) dargestellt. Zunächst folgt eine Zusammenstellung der Dreiecke dieser Kette, wobei die Winkel bereits vorläufig durch eine gleichmäßige Verteilung der Dreieckswidersprüche ausgeglichen sind.

Zusammenstellung der Dreiecke.

Nr. der Winkel	Dreieckspunkt	Vorl. ausgegl. sphär. Winkel	Nr. der Winkel	Dreieckspunkt	Vorl. ausgegl. sphär. Winkel
1	Kamenka	60° 49' 50'' .0	13	Barankowo	46° 52' 54'' .4
2	Dynnaja	45 52 6 .8	14	Konoplewka	35 20 54 .9
3	Kosmatschewo	73 18 3 .9	15	Kamenka	97 46 11 .2
		180° 0' 0'' .7			180° 0' 0'' .5
4	Jasinok	100° 56' 56'' .7	16	Ochotnoje	95° 4' 29'' .4
5	Kamenka	39 59 36 .4	17	Barankowo	42 9 41 .4
6	Dynnaja	39 3 27 .4	18	Konoplewka	42 45 49 .7
		180° 0' 0'' .5			180° 0' 0'' .5
7	Retschiza	43° 26' 27'' .0	19	Sobolewka	41° 25' 40'' .4
8	Kamenka	49 21 21 .5	20	Ochotnoje	49 31 6 .6
9	Jasinok	87 12 12 .0	21	Barankowo	89 3 13 .6
		180° 0' 0'' .5			180° 0' 0'' .6
10	Konoplewka	84° 36' 9'' .8			
11	Kamenka	43 17 55 .3			
12	Retschiza	52 5 55 .4			
		180° 0' 0'' .5			

Ausgangsdaten: \log der Seite Dynnaja — Kosmatschewo = 4.279604,

\log der Seite Ochotnoje — Sobolewka = 4.333987,

Koordinaten des Punktes „Dynnaja“: $B = 53^\circ 50' 37'' .479$

$L = 4^\circ 20' 25'' .307$

Azimut nach Kosmatschewo $T = 1^\circ 28' 54'' .31$

Koordinaten des Punktes „Ochotnoje“ $B = 54^\circ 5' 4'' .293$

$L = 4^\circ 46' 59'' .409$

Azimut nach Sobolewka $T = 317^\circ 45' 56'' .04$.

Bei der Berechnung der Koordinaten für den Punkt „Ochotnoje“ ergaben sich folgende Widersprüche: Für die Breite — 0'',036, für die Länge — 0'',156, für das Azimut + 0'',91 und für das Absolutglied der Basisbedingung 62 Einheiten der 6. Stelle des Logarithmus.

Nun sind nach (8) die Koeffizienten p, p', q, q' , zu berechnen. Nach Tab. 1 ist:

$$\log b_1 = 5.7317 n; \log b_2 = 5.7307 n; \log c_1 = 0.3244 n; \log c_2 = 0.3224.$$

Die Berechnung der Koeffizienten p, p', q und q' wird in Tab. 2 durchgeführt.

Tabelle 2

	1	2	3	4
1	Dynnaja	Kamenka	Konoplewka	Barankowo
2	Kamenka	Konoplewka	Barankowo	Ochotnoje
B_2	53° 58'.2	53° 57'.5	54° 4'.8	54° 5'.1
T_{21}	227 32.4	275 4.8	130 13.9	268 14.8
$\log p$	9.8809	8.8673 <i>n</i>	9.8630	8.3721
$\log s \cos_1 T_{21}$	4.1492 <i>n</i>	3.1356	4.1313 <i>n</i>	2.6404 <i>n</i>
$\log \cos T_{21}$	9.8294 <i>n</i>	8.9472	9.8102 <i>n</i>	8.4857 <i>n</i>
$\log s$	4.3198	4.1884	4.3211	4.1547
$\log \sin T_{21}$	9.8679 <i>n</i>	9.9983 <i>n</i>	9.8828	9.9998 <i>n</i>
$\log s \sin T_{21}$	4.1877 <i>n</i>	4.1867 <i>n</i>	4.2039	4.1545 <i>n</i>
$\log q \cos B_2$	9.9184	9.9174	9.9346 <i>n</i>	9.8852
$\log \sec B_2$	0.2304	0.2304	0.2317	0.2317
$\log q$	0.1488	0.1478	0.1663 <i>n</i>	0.1169
$\log p'$	0.2428 <i>n</i>	0.2418 <i>n</i>	0.2590	0.2096 <i>n</i>
$\log p \sec B_2$	0.1113	9.0977 <i>n</i>	0.0947	8.6038
$\log q'$	0.4337	9.4201 <i>n</i>	0.4171	8.9262
p	+0.7601	-0.0737	+0.7294	+0.0236
q	+1.409	+1.405	-1.467	+1.309
p'	-1.749	-1.745	+1.816	-1.620
q'	+2.714	-0.263	+2.613	+0.084

Hierauf können die Polygonegleichungen aufgestellt werden. Ihre Ableitung nach (11) zeigt Tab. 3. Als Beispiel wird auf die Bestimmung einiger Koeffizienten hingewiesen. Der Koeffizient Q im 4. Dreieck setzt sich zusammen aus

$$Q_4 = +1.405 - 1.467 + 1.309 = +1.247,$$

der Koeffizient P'_5 wird erhalten aus

$$P'_5 = +1.816 - 1.620 = +0.196.$$

Aus derselben Tabelle können auch die Basis- und Azimutbedingungen abgelesen werden, und zwar stehen die Basisbedingungen in der IV. Spalte (die Verbesserungen in der VIII.) und in der V. (Verbesserungen in der XI.). Die Azimute findet man in der XIV. Spalte.

Tabelle 3

Nr.Nr. Dreiecke	Scheitelpunkte der Zwischenwinkel	P	Δa	$-\Delta b$	Q	$\frac{B}{P\Delta a}$	(a)	$\frac{L}{Q\Delta a}$	$\frac{B}{(P-\Delta b)}$	(b)	$\frac{L}{Q(-\Delta b)}$	$\frac{B}{P'}$	(c)	$\frac{L}{Q'}$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	Dynnaja ...	+1.439	+0.63	-1.18	+2.656	+0.91	(3)	+1.67	-1.70	(1)	-3.13	-3.298	+(2)	+5.148
2	Kamenka ...	+0.679	+2.60	+0.40	+1.247	+1.77	(6)	+3.26	+0.27	(4)	+0.50	-1.549	-(5)	+2.434
3	Kamenka ...	+0.679	+0.10	-2.22	+1.247	+0.07	(9)	+0.13	-1.52	(7)	-2.78	-1.549	-(8)	+2.434
4	Kamenka ...	+0.679	-1.64	-0.20	+1.247	+1.12	(12)	+2.05	-0.14	(10)	-0.25	-1.549	-(11)	+2.434
5	Konoplewka.	+0.753	+0.29	-1.97	-0.158	-0.22	(15)	+0.04	-1.49	(13)	+0.30	+0.196	+(14)	+2.697
6	Barankowo..	+0.024	+2.28	+0.19	+1.309	+0.06	(18)	+2.98	0	(16)	+0.25	-1.620	-(17)	+0.084
7	Ochotnoje...	0	+0.03	-2.38	0	0	(21)	0	0	(19)	0	0	+(20)	0

Für die Multiplikationen der Spalten VII, IX, X und XII genügt der Rechenschieber. Die Spalten VII, X und XIII enthalten die Koeffizienten für den Breitenanschluss (B), die Spalten IX, XII und XV die Koeffizienten für den Längenanschluss (L).

In Tab. 4 sind die Bedingungs-gleichungen zusammengestellt.

Tabelle 4

Nr.Nr. der Dreiecke	Nr.Nr. der Winkel	a	b	c	d	A	B	C	D	S	v
1	1		-1.18	-1.70	-3.14	-1	-1.00	-0.34	-4.37	6.71	-8".1
	2	+1		-3.30	+5.15	+2	+0.19	-1.93	+3.93	+4.19	+5.2
	3		+0.63	+0.91	+1.67	-1	+0.81	+2.27	+0.44	+2.52	+2.9
2	4		+0.40	+0.27	+0.50	+1	-0.60	-0.93	+0.06	-0.47	-3.1
	5	-1		+1.55	-2.44	-2	-1.00	+0.35	-2.88	-5.53	-2.9
	6		+2.60	+1.78	+3.26	+1	+1.60	+0.58	+2.82	+6.00	+6.0
3	7		-2.22	-1.52	-2.78	+1	-1.51	-1.55	-1.08	-3.14	-6.8
	8	-1		+1.55	-2.44	-2	+0.70	+1.51	-0.74	-0.53	+4.1
	9		+0.10	+0.07	+0.12	+1	+0.81	+0.04	+1.82	+3.67	+2.7
4	10		-0.20	-0.14	-0.25	+1	-0.68	-0.98	-0.04	-0.70	-3.4
	11	-1		+1.55	-2.44	-2	-0.48	+0.70	-2.22	-4.00	-0.8
	12		+1.64	+1.12	+2.05	+1	+1.16	+0.28	+2.26	+4.70	+4.2
5	13		-1.97	-1.49	+0.30	-1	-1.22	-0.98	-0.71	-3.91	-0.2
	14	+1		+0.19	+2.69	+2	+0.76	+0.69	+1.68	+5.13	-1.5
	15		-0.29	-0.22	+0.04	-1	+0.46	+0.29	-0.97	-1.22	+1.7
6	16		+0.19		+0.25	+1	-0.63	-0.56	-0.80	-0.99	-5.4
	17	-1		+1.62	-0.09	-2	-0.83	+1.06	-1.13	-2.90	+0.2
	18		+2.28	+0.06	+2.98	+1	+1.46	-0.50	+1.93	+3.89	+5.2
7	19		-2.38			-1	-1.60			-2.60	-0.9
	20	+1				+2	+0.79			+2.79	-4.0
	21		+0.03			-1	+0.81			-0.19	-4.9
Σ		+0".91	-62.0	-26.06	-112.91	+2.73	-62.00	-26.06	-112.91	--	--

In Tab. 4 bedeuten a, b, c und d die Koeffizienten der Azimut-, Basis-, Breiten- und Längengleichungen. Zur Auflösung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, wobei die Summe der Quadrate der Verbesserungen aller Winkel—der Verbindungs- und Zwischenwinkel—ein Minimum werden muss, formen wir sie noch um nach der Methode von Krüger*). Diese Umformung besteht in folgendem: Wenn l_{i-1}, l_i und l_{i+1} die Koeffizienten der Gleichung sind, die sich auf das Dreieck $\frac{i+1}{3}$ bezieht, so wird zunächst die Summe $l_{i-1} + l_i + l_{i+1}$ gebildet. Werden dann die Koeffizienten l_{i-1}, l_i, l_{i+1} um $\frac{1}{3}$ dieser Summe gekürzt, so ergeben sich die Koeffizienten der umgeformten Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} L_{i-1} &= l_{i-1} - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \\ L_i &= l_i - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \\ L_{i+1} &= l_{i+1} - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

*) Über die Umformung nach Krüger siehe ausführliches in der Arbeit „Über zweckmässige Ausgleichung trigonometrischer Netze“ „Geodest“ 1930 Nr. 5 Seite 37.

Zur Prüfung dient der Ausdruck

$$L_{i-1} + L_i + L_{i+1} = 0, \quad (13)$$

Als Beispiel werden nachstehend die Koeffizienten der Breiten-Gleichung, die sich auf das sechste Dreieck beziehen, umgeformt:

$$C_{16} = 0; C_{17} = + 1.62; C_{18} = + 0.06$$

$$\frac{1}{3}(C_{16} + C_{17} + C_{18}) = + 0.56$$

$$C_{16} = 0 - 0.56 = - 0.56$$

$$C_{17} = + 1.62 - 0.56 = + 1.06$$

$$C_{18} = + 0.06 - 0.56 = - 0.50$$

$$C_{16} + C_{17} + C_{18} = - 0.56 + 1.06 - 0.50 = 0 \quad (\text{Probe}).$$

Die auf diese Weise umgeformten Gleichungen sind in den Spalten *A, B, C, D* der Tab. 4 zusammengestellt. Hierbei ist noch zu bemerken, dass alle Koeffizienten und Absolutglieder der umgeformten Azimutgleichung mit 3 multipliziert sind, um runde Koeffizienten zu erhalten. Aus den umgeformten Gleichungen werden in bekannter Weise die Normalgleichungen gebildet.

$$+ 42 k_1 + 10.05 k_2 - 14.58 k_3 + 37.74 k_4 + 2.73 = 0$$

$$+ 10.05 k_1 + 20.41 k_2 + 7.63 k_3 + 25.09 k_4 - 62.00 = 0$$

$$- 14.58 k_1 + 7.63 k_2 + 19.74 k_3 - 4.92 k_4 - 26.06 = 0$$

$$+ 37.74 k_1 + 25.09 k_2 - 4.92 k_3 + 75.96 k_4 - 112.91 = 0$$

Aus der Auflösung der Normalgleichungen ergeben sich die Korrelaten

$$k_1 = - 2.95; k_2 = + 2.43; k_3 = - 1.28; k_4 = + 2.07.$$

Mit den Korrelaten werden die Verbesserungen (letzte Spalte Tab. 4) berechnet. Mit Rücksicht auf die Formel (13), die für alle umgewandelten Gleichungen gilt, ist:

$$v_{i-1} + v_i + v_{i+1} = 0, \quad (14)$$

d. h. die Summe der Winkelverbesserungen ist in jedem Dreieck Null.

Die Formel (14) dient als Probe für die Berechnung der Verbesserungen.

Nun kehren wir nochmals zu den Formeln (9), (9') und (10) zurück. Näherungsweise ist:

$$-\frac{(1)}{60} s \cos T_{21} = (B_2 - B_1)'$$

$$-\frac{(2)}{60} s \sin T_{21} \sec B_2 = (L_2 - L_1)'$$

Damit ergibt sich aus (10):

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{(B_2 - B_1)'}{10}; & q &= \frac{(L_2 - L_1)'}{10} \\ p' &= \frac{(L_2 - L_1)'}{10} a_1; & q' &= \frac{(B_2 - B_1)'}{10} a_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

für

$$a_1 = - \frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} \cos B_2$$

$$a_2 = + \frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p \sec B_2,$$

wobei $(B_2 - B_1)'$ und $(L_2 - L_1)'$ in Bogenminuten ausgedrückt sind.

Bei nicht zu grossen Absolutgliedern ist es zulässig, die Koeffizienten a_1 und a_2 für die gegebene Dreieckskette als konstant zu betrachten und sie für eine mittlere Breite zu berechnen.

Da die Koeffizienten P, P', Q und Q' die Summe der aufeinanderfolgenden Koeffizienten p, p', q und q' darstellen, so werden sie folgendermassen gebildet: Der Koeffizient p , der sich auf das Dreieck i bezieht, ist gleich der Differenz der Breiten der Scheitelpunkte der Zwischenwinkel des letzten Dreiecks n und des Dreiecks i , d. h. $P_i = (B_n - B_i)'$; ebenso ist $Q_i = (L_n - L_i)'$, $P'_i = (L_n - L_i)' a_1$ und $Q'_i = (B_n - B_i)' a_2$. Nach Weglassung der Zeiger ist also:

$$\left. \begin{aligned} P &= (B_n - B)' \\ Q &= (L_n - L)' \\ P' &= a_1 (L_n - L)' \\ Q' &= a_2 (B_n - B)' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Da auf der rechten Seite der Formel (16) der Faktor $\frac{1}{10}$ weggelassen wurde, müssen die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen für die Breite und Länge mit 10 multipliziert werden.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [(B_n - B)' \Delta_a (a) - (B_n - B)' \Delta_b (b)] + \\ + \Sigma [\mp a_1 (L_n - L)' (c)] + 7238.24 w_1 &= 0 \\ \Sigma [(L_n - L)' \Delta_a (a) - (L_n - L)' \Delta_b (b)] + \\ \Sigma [\pm a_2 (B_n - B)' (c)] + 7238.24 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Tabelle 5

Nr. Nr der Dreiecke	Scheitelpunkte der Zwischenwinkel	B	L	$B_n - B$	$L_n - L$	Δa	$-\Delta b$	B	(a)	L	B	(b)	L	(c)	a_1	a_2
1	Dynnaja ...	53°50'.62	4°20'.42	+14'.45	+26'.57	+0.63	-1.18	+ 9.1	(3)	+16.7	-17.0	(1)	-31.3	-33.0	(2)	+51.5
2	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+2.60	+0.40	+17.8	(6)	+32.6	+ 2.7	(4)	+ 5.0	-15.5	(5)	+24.4
3	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+0.10	-2.22	+ 0.7	(9)	+ 1.2	-15.2	(7)	-27.8	-15.5	(8)	+24.4
4	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+1.64	-0.20	+11.2	(12)	+20.5	- 1.4	(10)	- 2.5	-15.5	(11)	+24.4
5	Konoplewka	53 57.524	48.52	+ 7.55	- 1.53	-0.29	-1.97	- 2.2	(15)	+ 0.4	-14.9	(13)	+ 3.0	+ 1.9	(14)	+26.9
6	Barankowo.	54 4.824	33.90	+ 0.25	+13.09	+2.28	+0.19	+ 0.6	(18)	+29.8	0.0	(16)	+ 2.5	-16.2	(17)	+ 0.9
7	Ochotnoje..	54 5.074	46.99	0	0	+0.03	-2.38	0	(21)	0	0	(19)	0	0	(20)	0

In dieser Form werden die Gleichungen beim Coast and Geodetic Survey bei Ausgleichung von Polygonen verwendet. Wird nach Richtungen ausgeglichen, so müssen an Stelle der Winkelverbesserungen $(a), (b), (c)$ die Differenzen der Richtungsverbesserungen eingeführt und die Polygon-Bedingungsgleichungen gleichzeitig mit den Netzbedingungen ausgeglichen werden. Als Beispiel für die Polygonausgleichung nach der amerikanischen Methode wählen wir wiederum die oben verwendete Dreieckskette. Die Berechnungen ordnen wir hierbei nach der Tabelle 5 s. o. an. Aus einer besonderen Tabelle (Tabelle für a_1 und a_2 S. 84) entnehmen wir für eine mittlere Breite die Koeffizienten a_1 und a_2 . Für die vorgegebene Kette ist $a_1 = - 1.24$; $a_2 = + 3.57$.

Dividiert man die so bestimmten Gleichungen für die Breite und Länge durch 10, so sieht man, dass ihre Koeffizienten mit den entsprechenden Koeffizienten, die bei den vorhergehenden Methoden erhalten wurden, übereinstimmen. Das amerikanische Verfahren vereinfacht die Aufstellung der Polygongleichungen noch etwas, die Berechnungen werden, insbesondere bei Verwendung

des Rechenschiebers, kürzer. Für die Aufstellung der Polygongleichungen für eine aus 7 Dreiecken bestehende Dreieckskette braucht man etwa 15—20 Minuten.

Tabelle der Koeffizienten a_1 und a_2 , (a_1 negativ, a_2 positiv)

B	a_1 —	a_2 +									
35°	1.73	2.56	43°	1.55	2.87	50°	1.36	3.27	58°	1.12	3.97
36	1.71	2.59	44	1.52	2.92	51	1.33	3.34	59	1.09	4.08
37	1.69	2.62	45	1.49	2.97	52	1.30	3.41	60	1.05	4.20
38	1.67	2.66	46	1.47	3.02	53	1.27	3.49	61	1.02	4.34
39	1.64	2.70	47	1.44	3.08	54	1.24	3.57	62	0.99	4.48
40	1.62	2.74	48	1.41	3.14	55	1.21	3.66	63	0.96	4.63
41	1.60	2.78	49	1.39	3.20	56	1.18	3.76	64	0.92	4.80
42	1.57	2.82	50	1.36	3.27	57	1.15	3.86	65	0.89	4.98

Nun werden noch Formeln zur Aufstellung von Polygongleichungen für die Ausgleichung in ebenen rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Trangulation nach der Gauss-Krügerschen Methode in die Ebene übertragen wurde (Abb. 3). Der Polygonzug wird wieder über die Scheitelpunkte der Zwischenwinkel der Dreiecke geführt. Die Koordinaten des Punktes C ergeben sich aus:

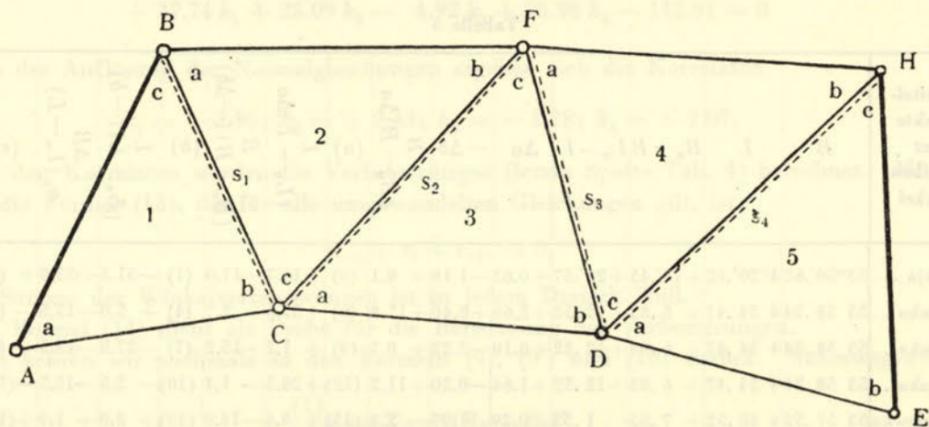


Abb. 3.

$$\left. \begin{aligned} x_C - x_B &= s_1 \cos \alpha_1 \\ y_C - y_B &= s_1 \sin \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wobei α_1 der Richtungswinkel in Punkt B nach Punkt C ist.

Durch Differenzieren des ersten Ausdrucks in (18) erhalten wir:

$$d(x_C - x_B) = \cos \alpha_1 \cdot ds_1 - \frac{1}{\rho''} s_1 \sin \alpha_1 \cdot d\alpha_1 \quad (19)$$

Ferner ist $\cos \alpha_1 = \frac{x_C - x_B}{s_1}$ und $\frac{ds_1}{s_1} = \frac{\Delta \log s_1}{M \cdot 10^6}$, wenn $\Delta \log s_1$ in Einheiten der 6. Stelle des

Logarithmus ausgedrückt wird. Unter Beachtung von (18) wird

$$d(x_C - x_B) = (x_C - x_B) \frac{\Delta \log s_1}{M \cdot 10^6} - \frac{1}{\rho''} (y_C - y_B) d\alpha_1 \quad (20)$$

Multiplizieren wir (20) mit $M \cdot 10^6$, so ist:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) \Delta \log s_1 - \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (y_C - y_B) d\alpha_1$$

Für $\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} = k$ wird:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) \Delta \log s_1 - k (y_C - y_B) d\alpha_1$$

Hierin kann man noch für $d \log s_1$ und für $d\alpha_1$ folgende Ausdrücke einführen [vgl. (4)]:

$$d \log s_1 = \Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)$$

und

$$d\alpha_1 = -(c_1)$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich die Änderung der Abszissendifferenzen für die Punkte C und B aus:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)] - k (y_C - y_B) [-(c_1)] \quad (21)$$

Ganz entsprechend können wir noch die gleichen Ausdrücke für die übrigen Punkte des Linienzuges anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} d(x_F - x_C) M \cdot 10^6 &= (x_F - x_C) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2)] - \\ &\quad - k (y_F - y_C) [-(c_1) + (c_2)] \\ d(x_D - x_F) M \cdot 10^6 &= (x_D - x_F) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2) + \\ &\quad + \Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3)] - k (y_D - y_F) [-(c_1) + (c_2) - (c_3)] \\ d(x_H - x_D) M \cdot 10^6 &= (x_H - x_D) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2) + \\ &\quad + \Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3) + \Delta a_4(a_4) - \Delta b_4(b_4)] - \\ &\quad - k (y_H - y_D) [-(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4)] \end{aligned} \right\} \quad (21)''$$

Die Addition der 4 Gleichungen in (21) ergibt:

$$\begin{aligned} d(x_B - x_H) M \cdot 10^6 &= (x_H - x_B) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)] + \\ &\quad + (x_H - x_C) [\Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2)] + \\ &\quad + (x_H - x_F) [\Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3)] + \\ &\quad + (x_H - x_D) [\Delta a_4(a_4) - \Delta b_4(b_4)] - \\ &\quad - k (y_H - y_B) [-(c_1)] - \\ &\quad - k (y_H - y_C) [+(c_2)] - \\ &\quad - k (y_H - y_F) [-(c_3)] - \\ &\quad - k (y_H - y_D) [+(c_4)] \end{aligned}$$

Wird das Absolutglied der Bedingungsgleichung für die Abszisse noch mit w_1 bezeichnet, so nimmt die Bedingungsgleichung selbst folgende Form an:

$$\Sigma [(x_n - x) \Delta a(a) - (x_n - x) \Delta b(b)] + \Sigma [-k (y_n - y) (c)] + M \cdot 10^6 w_1 = 0 \quad (22)$$

Für die Bedingungsgleichung der Ordinaten erhält man ganz ähnlich:

$$\Sigma [(y_n - y) \Delta a(a) - (y_n - y) \Delta b(b)] + \Sigma [k (x_n - x) (c)] + M \cdot 10^6 w_2 = 0 \quad (23)$$

Um grosse Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen zu vermeiden, werden (22) und (23) mit 10^3 multipliziert und die Abszissen- und Ordinattendifferenzen in Kilometern ausgedrückt. Damit wird endlich:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [(x_n - x)^{km} \Delta a (a) - (x_n - x)^{km} \Delta b (b)] + \Sigma [-k (y_n - y)^{km} (c)] + 434,29 w_1 &= 0 \\ \Sigma [(y_n - y)^{km} \Delta a (a) - (y_n - y)^{km} \Delta b (b)] + \Sigma [+k (x_n - x)^{km} (c)] + 434,29 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (24)$$

Die Formeln (24) werden zur Aufstellung der Polygongleichungen für eine einfache Dreieckskette (Abb. 3) verwendet.

Zusammenstellung der Dreiecke.

Nr. der Winkel	Bezeichnung der Dreieckspunkte	Vorläufig ausgeglichene Winkel	Nr. der Winkel	Bezeichnung der Dreieckspunkte	Vorläufig ausgeglichene Winkel
1	C	57°50' 20".0	10	H	64°50' 0".0
2	B	67 0 40.0	11	D	72 50 10.0
3	A	55 9 0.0	12	F	42 19 50.0
		180° 0' 0".0			180° 0' 0".0
4	F	50° 1' 20".0	13	E	46°50' 10".0
5	C	87 38 30.0	14	H	56 10 10.0
6	B	42 20 10.0	15	D	76 59 40.0
		180° 0' 0".0			180° 0' 0".0
7	D	47° 8' 30".0			
8	F	56 11 30.0			
9	C	76 40 0.0			
		180° 0' 0".0			

Tabelle 6

Nr. der Dreiecke	Scheitelpunkte der Zwischenwinkel	x	y	$x_n - x$	Δa	$-\Delta b$	$y_n - y$	$x (x_n - x) \Delta a$	(a)	$y (y_n - y) \Delta a$	$x (x_n - x) (-\Delta b)$	(b)	$y (y_n - y) (-\Delta b)$	$x (y_n - y) n$	(c)	$y (x_n - x) n$
		km	km													
1	B	5 970.19	+26.21	-10.34	+1.47	-1.32	+36.59	-15.2	(3)	+53.8	+13.6	(1)	-48.3	-77.1	(2)	-21.8
2	C	959.59	+37.64	+ 0.26	+2.31	-1.76	+25.16	+ 0.6	(6)	+58.1	- 0.5	(4)	-44.3	-53.0	(5)	+ 0.5
3	F	970.01	+46.52	-10.16	+0.50	-1.96	+16.28	- 5.1	(9)	+ 8.1	+19.9	(7)	-31.9	-34.3	(8)	-21.4
4	D	952.51	+51.44	+ 7.34	+2.31	-0.99	+11.36	+17.0	(12)	+26.2	- 7.3	(10)	-11.2	-23.9	(11)	+15.5
5	H	959.85	+62.80	0	+0.49	-1.97	0	0	(15)	0	0	(13)	0	-	(14)	-

Ausgangsdaten: Koordinaten von A: $x = 5\,955\,070,85\text{ m}$; $y = 20\,755,80\text{ m}$; Richtungswinkel nach B = $19^\circ 50' 50,0''$; $\log AB = 4,206\,0085$.

Nach einer vorläufigen Auflösung der Dreiecke und der Berechnung rechtwinkliger Koordinaten für die Punkte des Polygonzuges stellen wir nach (24) die Polygongleichung auf. Diese Aufstellung zeigt Tabelle 6, die vollkommen mit den vorhergehenden Tabellen übereinstimmt und keiner besonderen Erläuterung bedarf. Die Polygongleichungen selbst und ebenso die Basis- und Azimutbedingungen sind in Tab. 7 dargestellt.

Tabelle 7

	Bedingungsgleichungen für			
	das Azimut a	die Basis b	die Abszisse c	die Ordinate d
1	-1	-1.32	+1.36	-4.83
2			+7.71	+2.18
3		+1.47	-1.52	+5.38
4	+1	-1.76	-0.05	-4.43
5			-5.30	+0.05
6		+2.31	+0.06	+5.81
7	-1	-1.96	+1.99	-3.19
8			+3.43	+2.14
9		+0.50	-0.51	+0.81
10	+1	-0.99	-0.73	-1.12
11			-2.39	+1.55
12		+2.31	+1.70	+2.62
13	-1	-1.97	0	0
14			0	0
15		+0.49	0	0
W	W'	W''	43.43W ₁	43.43W ₂

Auf die Einführung der umgeformten Bedingungsgleichungen und auf die Darstellung der weiteren Auflösung kann unter Hinweis auf das oben aufgeführte Beispiel verzichtet werden.

N. Urmajew.

(22) Das Bild eines vollständigen Polygons (Abb. 7) ist die Abbildung eines vollständigen Polygons (Abb. 6) durch eine Projektion. Die Abbildung ist eine Projektion, die die Punkte des Polygons in die Punkte des Bildpolygons überführt. Die Abbildung ist eine Projektion, die die Punkte des Polygons in die Punkte des Bildpolygons überführt.

Abb. 7. Ein vollständiges Polygone mit seinen Bildpolygone.

No. der Punkte	Polygone		Bildpolygone		Verhältnis
	Original	Bild	Original	Bild	
1	10,0	10,0	10,0	10,0	1,0
2	12,2	12,2	12,2	12,2	1,0
3	15,5	15,5	15,5	15,5	1,0
4	20,0	20,0	20,0	20,0	1,0
5	25,0	25,0	25,0	25,0	1,0
6	30,0	30,0	30,0	30,0	1,0
7	35,0	35,0	35,0	35,0	1,0
8	40,0	40,0	40,0	40,0	1,0
9	45,0	45,0	45,0	45,0	1,0
10	50,0	50,0	50,0	50,0	1,0
11	55,0	55,0	55,0	55,0	1,0
12	60,0	60,0	60,0	60,0	1,0
13	65,0	65,0	65,0	65,0	1,0
14	70,0	70,0	70,0	70,0	1,0
15	75,0	75,0	75,0	75,0	1,0
16	80,0	80,0	80,0	80,0	1,0
17	85,0	85,0	85,0	85,0	1,0
18	90,0	90,0	90,0	90,0	1,0
19	95,0	95,0	95,0	95,0	1,0
20	100,0	100,0	100,0	100,0	1,0

Auf die Erklärung der angegebenen Beziehungen und auf die Darstellung der weiteren Ableitung kann unter Hinweis auf das oben angeführte Beispiel verzichtet werden.

A. 1. Aufgabe

No.	Original	Bild	Verhältnis
1	10,0	10,0	1,0
2	12,2	12,2	1,0
3	15,5	15,5	1,0
4	20,0	20,0	1,0
5	25,0	25,0	1,0
6	30,0	30,0	1,0
7	35,0	35,0	1,0
8	40,0	40,0	1,0
9	45,0	45,0	1,0
10	50,0	50,0	1,0
11	55,0	55,0	1,0
12	60,0	60,0	1,0
13	65,0	65,0	1,0
14	70,0	70,0	1,0
15	75,0	75,0	1,0
16	80,0	80,0	1,0
17	85,0	85,0	1,0
18	90,0	90,0	1,0
19	95,0	95,0	1,0
20	100,0	100,0	1,0

Die Abbildung ist eine Projektion, die die Punkte des Polygons in die Punkte des Bildpolygons überführt.