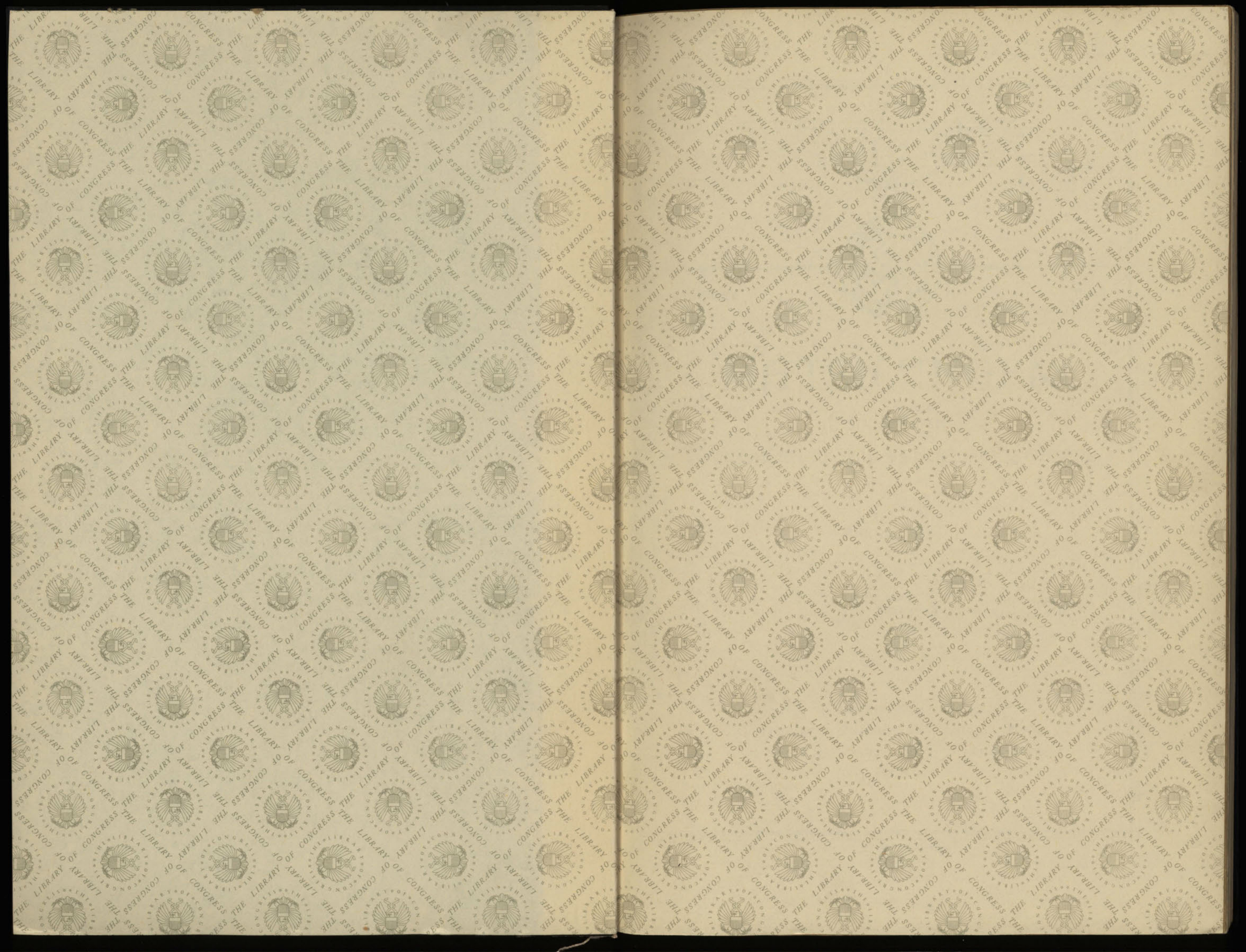


LIBRARY OF CONGRESS  
0 028 983 695 0

LG  
70  
35









1. Jahrgang

Heft 3

# MITTEILUNGEN

des Chefs des  
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

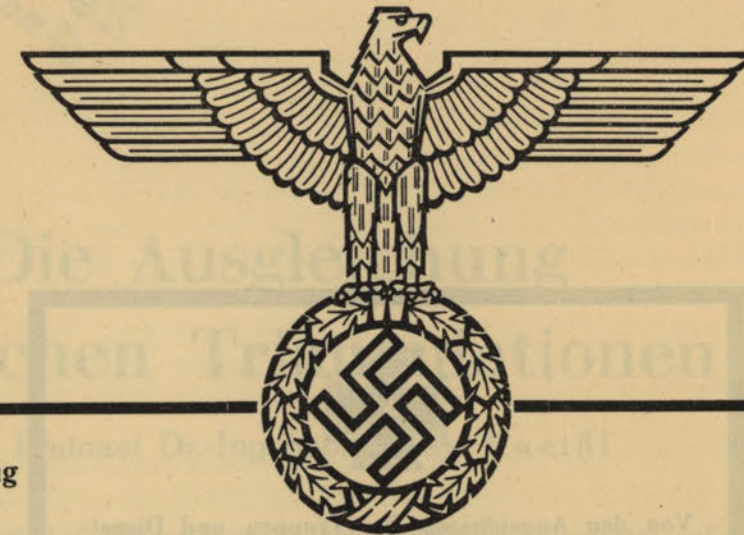
August 1942



*L. 155*

Herausgegeben vom  
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres  
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens  
Berlin





1. Jahrgang

Heft 3

*Germany. Heer. Oberkommando.*

# MITTEILUNGEN

des Chefs des  
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

August 1942

## INHALT:

- Lt. Dr.-Ing. habil. M. Kneißl: Die Ausgleichung der russischen Triangulationen I. O. . . . . S. 1  
Krassowsky (1931): Methoden zur Ausgleichung der staatl. Triangulation I. O. . . . . S. 3  
Krassowsky (1932): Methoden zur Ausgleichung der Triangulationen I. O. in der UdSSR. . . . . S. 62  
Urmajew (1931): Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten . . . . . S. 74

Herausgegeben vom  
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres  
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens  
Berlin

Die Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens erscheinen in zwangloser Folge in jährlich etwa sechs Heften. Sie werden vom Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens übersandt, eine Veröffentlichung im Buchhandel erfolgt vorläufig nicht. Abdruck nur mit Genehmigung des Kr. Kart. Verm. Chefs.

Beiträge sind zu richten an OKH./GenStdH./Kr. Kart. Verm. Chef, Berlin W 35, Lützowstraße 60





Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland:

Leutnant Koch, Peter, Führer eines Armeekartenlagers, gestorben nach der Verwundung durch Bombensplitter am 24.5.1942 in Russland;

Oberleutnant Klotz, Helmut, Führer einer Armeekartenstelle, gefallen durch Fliegerbombe am 24.6.1942 in Russland;

Gefreiter Pape, Ernst, Elektriker bei einer Armeekartenstelle, gefallen am 24.6.1942 durch Bombensplitter;

Gefreiter Eckel, Paul, Rotaprintdrucker bei einer Armeekartenstelle, gefallen am 24.6.1942 durch Bombensplitter;

Wachtmeister Geiger, Erich, Verm.-Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), gefallen bei einem Luftangriff am 1.7.1942 in Russland.

## Die Ausgleichung der russischen Triangulationen I. O.

Von Leutnant Dr.-Ing. habil. Max Kneißl

Zur Anregung theoretischer Untersuchungen und praktischer Vorschläge auf dem Gebiete Grossraumvermessung ist beabsichtigt, in den Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens bedeutendere Veröffentlichungen über die Landes- und Kolonialvermessungen Auslandes zu besprechen oder durch Übersetzungen der Originalschriften der deutschen Wissenschaft und Fachwelt zugänglich zu machen. Weiterhin wird mit Rücksicht auf die vermessungswissenschaftlichen Aufgaben im neuen Europa die historische Entwicklung der europäischen Landesvermessungen, insbesondere die Entwicklung der Triangulationen, des Nivellements, der kartographischen Arbeiten usw. auf Grund der jeweiligen amtlichen Veröffentlichungen und Druckwerke erstellt. Im Zuge dieser Darstellung wurde bereits im Heft 2 der vorliegenden Mitteilungen über grundlegenden russischen Triangulationen berichtet. Entsprechende Überblicke über die Triangulationen der baltischen Staaten, über Belgien, Holland, Frankreich und die südosteuropäischen usw. werden zur Zeit bearbeitet und laufend veröffentlicht. Durch diese Veröffentlichungen dem Vermessungsoffizier und dem Vermessungsingenieur die Geschichte der europäischen Landesvermessungen näher gebracht und das Verständnis für die gemeinsamen europäischen Aufgaben vertieft werden.

Zur praktischen Lösung der gemeinsamen europäischen Aufgaben auf dem Gebiete der Landesvermessungen wurden durch den Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens in enger Zusammenarbeit mit den europäischen Vermessungsinstituten die Arbeiten für einen grosszügigen atlantischen und kartographischen Zusammenschluss der europäischen Landesvermessungen eingeleitet. Im einzelnen wurden hierfür bereits eine Reihe von Vorarbeiten — wie z. B. die Zusammenstellung der Triangulationsgrundlagen und der Nivellementsnetze, die Berechnung und Aufstellung von Hilfstafeln für die verschiedenen Ellipsoidübergänge, eine Darstellung der verschiedenen Projektionssysteme und die Überführung der jeweiligen Landeskoordinaten in ein einheitliches System und verschiedene kartographische Arbeiten — durchgeführt. Über den Stand und die Fortschritte dieser Arbeiten wird von Fall zu Fall eine Mitteilung erscheinen.

In dem vorliegenden Heft wird die Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze von F. N. Krassowsky durch Übersetzungen der einschlägigen Originalschriften dargestellt. Diese Ausgleichungsmethode wurde für die Ausgleichung der ostwärts der Idiankette Pulkowo-Nikolajew gelegenen Dreiecksketten und Polygone I. O. der Triangulation UdSSR im grossen Umfang verwendet und hat damit grosse praktische Bedeutung gewonnen. Sie bildet neben der amerikanischen Bowie-Methode\*) einen der bemerkenswertesten Beiträge zur Bearbeitung und Berechnung umfangreicher Landestriangulationen unter Berücksichtigung astronomischer Ortsbestimmungen und Azimutmessungen. Die Methode von Krassowsky stützt sich im wesentlichen auf die Helmertsche Methode\*\*) zur Ausgleichung astronomisch-geodä-

\*) The Bowie — Method of triangulation adjustment as applied to the first — order net in the Western Part of the United States, Special Publication Nr. 159, U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, Washington 1930.

\*\*) F. R. Helmert Lotabweichungen, Heft 1, Veröff. des Preuss. Geodät. Instituts, Berlin 1886.



M. Kneißl

## 3



In den Gleichungen (a) ist  $v$  gleich der Summe der gemessenen Winkel des Dreiecks minus  $180^\circ + \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  der sphärische Exzess des Dreiecks ist. (i) sind die Richtungsverbesserungen  $v_i$  die Dreiecks widersprüche.

Zur Darstellung der Basisbedingung reduzieren wir die beobachteten Winkel zu ebenen Winkeln, indem wir sie um  $\frac{1}{3}$  des sphärischen Exzesses des zugehörigen Dreiecks kürzen. Dadurch erhalten wir folgende Winkel:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & - & 1 & - & \frac{\varepsilon_1}{3} & & 5 & - & 4 & - & \frac{\varepsilon_2}{3} & & 6 & - & 5 & - & \frac{\varepsilon_3}{3} \\ 4 & - & 3 & - & \frac{\varepsilon_1}{3} & & 35 & - & 34 & - & \frac{\varepsilon_2}{3} & & 8 & - & 7 & - & \frac{\varepsilon_3}{3} \\ 38 & - & 37 & - & \frac{\varepsilon_1}{3} & & 37 & - & 36 & - & \frac{\varepsilon_2}{3} & & 34 & - & 33 & - & \frac{\varepsilon_3}{3} \end{array}$$

usw.

Mit diesen Winkeln bilden wir die Basisbedingung und berechnen die Seiten  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  des Linienzuges  $AD$ .

Damit wird die Basisbedingung in folgender Form angeschrieben:

$$\begin{aligned} & \Delta_{2,1}[(2)-(1)] - \Delta_{3,4}[(4)-(3)] + \Delta_{37,33}[(37)-(36)] - \Delta_{34,35}[(35)-(34)] + \\ & + \Delta_{6,5}[(6)-(5)] - \Delta_{3,7}[(8)-(7)] + \Delta_{33,32}[(33)-(32)] - \Delta_{31,30}[(31)-(30)] + \\ & + \dots + \Delta_{18,17}[(18)-(17)] - \Delta_{20,19}[(20)-(19)] + \\ & + \lg \frac{\sin \left[ 2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[ 37 - 36 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[ 18 - 17 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[ 4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[ 35 - 34 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[ 20 - 19 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]} + \\ & + \lg S_1^\circ - \lg S_2^\circ = 0. \end{aligned} \quad (b)$$

In der Gleichung (b) bedeutet  $\Delta$  die logarithmische Sinusdifferenz für  $1''$  und die Zeiger bei  $\Delta$  geben die entsprechenden Richtungen an. Die Seiten  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$  erhält man in folgender Weise:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{S_1^\circ \sin \left[ 38 - 37 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]}{\sin \left[ 4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right]} \\ s_2 &= \frac{S_1^\circ \sin \left[ 2 - 1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[ 37 - 36 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[ 34 - 33 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]}{\sin \left[ 4 - 3 - \frac{\varepsilon_1}{3} \right] \sin \left[ 35 - 34 - \frac{\varepsilon_2}{3} \right] \sin \left[ 8 - 7 - \frac{\varepsilon_3}{3} \right]} \end{aligned}$$

und so weiter.

Die Berechnung der Seiten  $s_1, s_2, \dots, s_5$  führt selbstverständlich auf den Widerspruch der Basisbedingung.

Wir bemerken noch, dass die Seiten  $s$  auf diese Weise aus den unverbesserten beobachteten Richtungen erhalten werden.

Das nächste Stadium umfasst die Aufstellung der Azimutbedingungen.

Diese Arbeit beginnt mit der Berechnung geodätischer Koordinaten für den Linienzug  $AD$ .

Wir berechnen mit Hilfe der Schreiberschen Formeln, ausgehend von  $B_1, L_1$  und dem Azimut der Richtung 2

$$\beta = A_{AB} + 2 - 1,$$

die geodätischen Koordinaten der Punkte  $a, b, c, d$  und  $D$  und die Azimute  $Aa, aA, ab, ba, bc, cb, cd, dc, dD, DC$  mit den Strecken  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  und den Winkeln

$$\begin{aligned} \text{bei } a & \dots 6 - 3 \\ \text{,, } b & \dots 10 - 7 \\ \text{,, } c & \dots 14 - 11 \\ \text{,, } d & \dots 18 - 15 \\ \text{,, } D & \dots 20 - 19. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann:

die geodätische Breite  $B_2$  des Punktes  $D$ ,  
" " Länge  $L_2$  " "  $D$   
und das geodätische Azimut  $A_{DC}$  von  $D$  nach  $C$ .

Werden die Azimute der Seiten mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  und ihre Gegenazimute mit  $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4, \beta'_5$  bezeichnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= A_{AB} + 2 - 1 \\ \beta'_1 &= 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + \delta_1 \\ \beta_2 &= 180^\circ + A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1 \\ \beta'_2 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ \\ \beta_3 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + 180^\circ \\ \beta'_3 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + 180^\circ \\ \beta_4 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ \beta'_4 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ \\ \beta_5 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 180^\circ \\ \beta'_5 &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \\ A_{DC} &= A_{AB} + 2 - 1 + 6 - 3 + 10 - 7 + 14 - 11 + 18 - 15 + \\ & + 20 - 19 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5. \end{aligned} \quad (c)$$

Hierin ist annähernd

$$\delta = (2) s \sin \beta \operatorname{tg} \varphi. \quad (d)$$

Die Verbesserung  $\Delta_A$  des geodätischen Azimuts  $A_{DC}$  ist dann

$$\Delta_A = (2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19) + \sum_1^5 d\delta,$$

wobei unter  $d\delta$  [die Änderung der Meridiankonvergenz infolge der Änderung der Seiten, der Breite und des Azimuts] zu verstehen ist:

$$d\delta = (2) \sin \beta \operatorname{tg} \varphi \cdot ds + (2) s \sin \beta \frac{d\varphi'' \cdot \sin 1''}{\cos^2 \varphi} + (2) s \cos \beta \operatorname{tg} \varphi \sin 1'' \cdot d\beta.$$

Wenn wir die Verbesserungen von  $\alpha_{AB}, \alpha_{CD}, \lambda_1$  und  $\lambda_2$  vernachlässigen, kann die vorläufige Laplacesche Bedingung für  $D$  so geschrieben werden:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2 - \Delta L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + \Delta_A. \quad (e)$$

In der Gleichung (e) ist  $\Delta L_2$  die Verbesserung der geodätischen Länge, die den Richtungsverbesserungen entspricht. Unter Vernachlässigung kleiner Glieder 2. Ordnung wird:

$$L_2 - L_1 = \sum_1^5 (2) s \sin \beta \sec \varphi$$

und daher

$$\Delta L_2 = \sum_1^5 \left\{ (2) \sin \beta \sec \varphi \cdot ds + (2) s \sin \beta \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi + (2) s \cos \beta \sec \varphi \cdot d\beta \cdot \sin 1'' \right\}.$$



Hiernach ist leicht einzusehen, dass:

$$\Delta L_2 \sin \varphi_2 - \sum d\delta = - \sum (2) s \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi \cdot \sin 1'' +$$

$$+ \sum (2) \sin \beta \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi) ds + \sum (2) s \cos \beta \sec \varphi (\sin \varphi_2 - \sin \varphi) d\beta \sin 1''.$$

Bei langen Teilstücken ist das 2. Glied das grössere; auf 200 km wird

$$\frac{\sum ds}{6400 \sin 1''} \cdot \frac{140}{6400} < \frac{1}{500}''.$$

Für dasselbe Teilstück und für  $s = 40$  km ist der Wert des 1. Gliedes:

$$- \sum (2) s \sin \beta \frac{(1 - \sin \varphi \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi} d\varphi'' \cdot \sin 1'' < \frac{1''}{1600}.$$

Deshalb können wir in Bezug auf das Azimut ohne Bedenken annehmen, dass

$$\Delta L_2 \sin \varphi_2 = \sum d\delta \text{ ist.}$$

Mit Rücksicht hierauf kann die Azimutbedingung in folgender Form geschrieben werden:

$$\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 - (\alpha_{AB} - A_{AB}) = A_{DC} + (2) - (1) + (6) - (3) +$$

$$+ (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19)$$

oder endgültig

$$(2) - (1) + (6) - (3) + (10) - (7) + (14) - (11) + (18) - (15) + (20) - (19) -$$

$$- [\alpha_{DC} - (\lambda_2 - L_2) \sin \varphi_2 - A_{DC}] + (\alpha_{AB} - A_{AB}) - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \quad (g)$$

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen (a), (b) und (g) nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt die Verbesserungen der in diesem Teilstück beobachteten Richtungen.

Bei Anwendung des hier dargelegten Verfahrens werden die Widersprüche der Basis- und Azimut-Bedingungen aus den unmittelbar beobachteten Grössen erhalten, die nicht durch irgendwelche willkürliche Korrekturen entsteht sind, wie dies bei anderen Ausgleichungsmethoden geschieht; deshalb entsprechen die Widersprüche der Basis- und Azimut-Bedingungen in unserem Ausgleichungsverfahren tatsächlich den Beobachtungsfehlern in den Punkten des beobachteten Teilstücks.

Die Auflösung der Bedingungen (a), (b) und (g) darf als bekannt vorausgesetzt werden.

In die Azimut-Bedingung könnten auch Verbesserungen für die astronomisch bestimmten Längen und Azimute eingeführt werden, natürlich könnten aber diese Verbesserungen nur sehr unzuverlässig bestimmt werden. Sie werden daher in der Folge aus der allgemeinen Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes bestimmt.

Nach der beschriebenen Ausgleichung der beobachteten Richtungen und der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Richtungen müssen die Dreiecke nochmals zusammengestellt und die Seiten dieser Dreiecke nochmals berechnet werden. Dann müssen über den Linienzug  $AabcdD$ , ausgehend von  $B_1$  und  $L_1$  und  $A_{AB}$  nochmals die geodätischen Koordinaten und Azimute berechnet werden.

Bei dieser Berechnung erhält man für den Punkt  $D$

die geodätische Breite  $B'_2$ ,

die geodätische Länge  $L'_2$

und das geodätische Azimut  $A'_{DC}$  von  $D$  nach  $C$ .

Dann kann aus den Koordinaten

für  $A$ .....  $B_1$  und  $L_1$   
für  $D$ .....  $B'_2$  und  $L'_2$

die Länge  $S'$  der geodätischen Linie  $AD$ , das geodätische Azimut  $A'_{AD}$  von  $A$  nach  $D$  und das geodätische Gegenazimut  $A'_{DA}$  von  $D$  nach  $A$  berechnet werden.

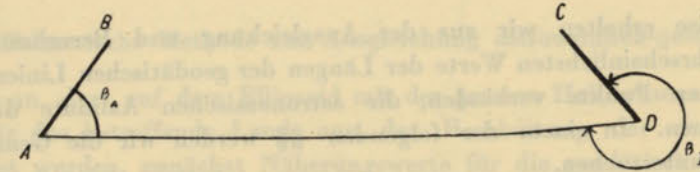


Abb. B.

Damit erhalten wir die Winkel  $\beta_A$  und  $\beta_D$  in den Punkten  $A$  und  $D$  (Abb. B) zwischen den Ausgangsseiten des Teilstücks und der geodätischen Linie  $AD$  und für die geodätische Linie  $AD$  die astronomischen Azimute:

$$\left. \begin{aligned} \beta_A &= A'_{AD} - A_{AB} \\ \beta_D &= A'_{DA} - A'_{DC} \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{AD} &= \alpha_{AB} + \beta_A \\ \alpha_{DA} &= \alpha_{DC} + \beta_D = A'_{DA} + (\alpha_{DC} - A'_{DC}) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Wenn auch die Azimute  $\alpha_{AD}$  und  $\alpha_{DA}$  nicht unmittelbar beobachtet wurden, so dürfen sie dennoch als astronomische Azimute bezeichnet werden.

In der Folge beachten wir, dass die Differenz

$$A'_{DA} - 180^\circ - A'_{AD}$$

der Differenz der geodätischen Azimute der geodätischen Linie  $S'$  mit dem Anfangsazimut  $\alpha_{AD}$  in der Breite  $B_1$  auf dem angenommenen Ellipsoid entspricht. Weiter nehmen wir eine Reihe von Teilstücken an, von denen sich eins an das andere anschliesst (Abb. C).

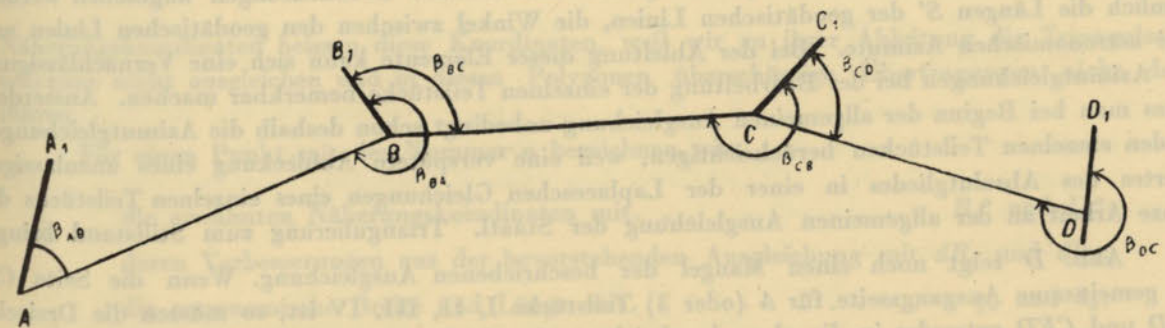


Abb. C.

Die Ausgangsseiten dieser Teilstücke werden mit  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ ..... bezeichnet. Dann behandeln wir alle Teilstücke in der oben beschriebenen Weise und erhalten die Länge  $S'_{AB}$ ,  $S'_{BC}$ ,  $S'_{CD}$  der geodätischen Linien  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ..., die die Laplaceschen Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ..... verbinden, und die Winkel  $\beta_{AB}$ ,  $\beta_{BA}$ ,  $\beta_{BC}$ ,  $\beta_{CB}$ ,  $\beta_{CD}$ ..... Somit erhält man offensichtlich die Winkel zwischen den geodätischen Linien folgendermassen:



$$\begin{aligned} \text{bei } B & \dots \beta_{BA} - \beta_{BC} = \alpha_{BA} - \alpha_{BC} \\ \text{bei } C & \dots \beta_{CB} - \beta_{CD} = \alpha_{CB} - \alpha_{CD} \\ \text{bei } D & \dots \beta_{DC} - \beta_{DE} = \alpha_{DC} - \alpha_{DE}, \end{aligned}$$

wobei es nach der Art der Ableitung dieser Winkel klar ist, dass ihre Werte nicht durch Fehler entstehen, die ihre Ursache in der Bestimmung der astronomischen Azimute der Ausgangspunkte\*) und den Verzerrungen dieser astronomischen Azimute durch den Einfluss der Lotabweichungen haben.

Auf diese Weise erhalten wir aus der Ausgleichung und Berechnung der Teilstücke der Triangulation die wahrscheinlichsten Werte der Längen der geodätischen Linien, die die aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkte verbinden, die astronomischen Azimute dieser Linien und den Winkel zwischen ihnen. In einem der folgenden §§ werden wir die Genauigkeit dieser Längen und Azimute näher untersuchen.

Die Elemente  $S'$  und  $\alpha$  und die Winkel zwischen den geodätischen Linien unterliegen weiteren Verbesserungen, die den Polygonschlussbedingungen und den Laplaceschen Gleichungen entsprechen, in die noch die Verbesserungen der astronomischen Azimute und der astronomischen Längen als Unbekannte eingeführt werden müssen. Soweit wir die Laplacesche Gleichung schon bei der Ausgleichung der Teilstücke benutzt haben, geschah dies in so vereinfachter Form, dass Verbesserungen der astronomischen Azimute und Längen nicht eingeführt werden konnten, weshalb auch die Frage der Orientierung der Teilstücke auf dem Ellipsoid offen blieb.

Durch die Einführung der Laplaceschen Bedingung in Gleichung (e), wurde im wesentlichen nur die Differenz der geodätischen Azimute der beiden Ausgangsseiten des Teilstücks ausgeglichen, während die geodätische Orientierung unbeachtet blieb. Deshalb wissen wir noch nicht, inwieweit sich das Azimut  $A_{AB}$  dem endgültigen nähert, das zur Orientierung der ganzen Triangulation auf dem angenommenen Ellipsoid zu benutzen ist. Diese Frage wird allein durch die Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes unter Beachtung der Polygongleichungen und der sogenannten Laplaceschen Gleichungen entschieden, die in genauer und ausführlicher Form anzuwenden sind. Da bei der Ausgleichung des ganzen astronomischen Netzes an und für sich die Laplaceschen Gleichungen eingeführt werden müssen, die im wesentlichen Azimutbedingungen sind, hätten wir uns bei der beschriebenen Ausgleichung eines einzelnen Teilstücks auf die Berücksichtigung der Dreiecksbedingungen und der Basisgleichung beschränken können. So ging insbesondere Helmert in Deutschland vor, wodurch sich selbstverständlich bei der Berechnung und Ausgleichung der einzelnen Teilstücke einige Kürzungen ergaben. Aber mir erscheint es sehr wichtig schon vor der allgemeinen Ausgleichung des Polygonnetzes diejenigen Elemente mit möglichst grosser Zuverlässigkeit zu erhalten, die in dieser Ausgleichung wie unmittelbare Beobachtungen angesehen werden können, nämlich die Längen  $S'$  der geodätischen Linien, die Winkel zwischen den geodätischen Linien und ihre astronomischen Azimute. Bei der Ableitung dieser Elemente kann sich eine Vernachlässigung der Azimutgleichungen bei der Bearbeitung der einzelnen Teilstücke bemerkbar machen. Ausserdem muss man bei Beginn der allgemeinen Ausgleichung unbedingt schon deshalb die Azimutgleichungen in den einzelnen Teilstücken berücksichtigen, weil eine verspätete Aufdeckung eines unzulässigen Wertes des Absolutgliedes in einer der Laplaceschen Gleichungen eines einzelnen Teilstücks die ganze Arbeit an der allgemeinen Ausgleichung der Staatl. Triangulation zum Stillstand bringt.

Abb. D zeigt noch einen Mangel der beschriebenen Ausgleichung. Wenn die Seite  $CD$  die gemeinsame Ausgangsseite für 4 (oder 3) Teilstücke I, II, III, IV ist, so müssen die Dreiecke  $ECD$  und  $CFD$  entweder in die oben beschriebene Ausgleichung eingeführt, oder als starr und unveränderlich angesehen werden. Werden zuerst die Teilstücke I und II und dann erst die Teilstücke III und IV ausgeglichen, dann müssen bei der Ausgleichung der beiden letzten Teilstücke die Seiten  $CF$  und  $ED$  als Ausgangsseiten mit den Werten übernommen werden, die für sie bei der Ausgleichung der Teilstücke I und II bestimmt wurden. Werden zuerst die Teilstücke

\*) Das ist nur insoweit richtig, als die Fehler der Azimute keinen Einfluss auf das Resultat der Ausgleichung der Winkel der Dreiecke hatten.

III und IV ausgeglichen, so müssen bei der Ausgleichung der Teilstücke I und II als Ausgangswerte  $EC$  und  $DF$  angenommen werden. Hierin liegt eine Willkür, die allerdings auf das Ergebnis wenig Einfluss haben wird. Daraus folgt, dass man eigentlich die Figur  $CFDE$  für sich bearbeiten, ihre Dreieckswinkel mit besonders grosser Sorgfalt messen und alle 4 Punkte  $C, D, E, F$  als Laplacesche Punkte bestimmen müsste. Leider war dies bisher in der UdSSR. nicht möglich.

## § 2. Die Helmertsche Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze.

Wir nehmen an, dass auf dem Ellipsoid mit der grossen Halbachse  $a$  und der Abplattung  $c$ , dessen Ausmasse für das betreffende Land aus der Bearbeitung der astronomisch-geodätischen Ergebnisse abgeleitet wurden, zunächst Näherungswerte für die geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte der Triangulation bestimmt werden.\*)

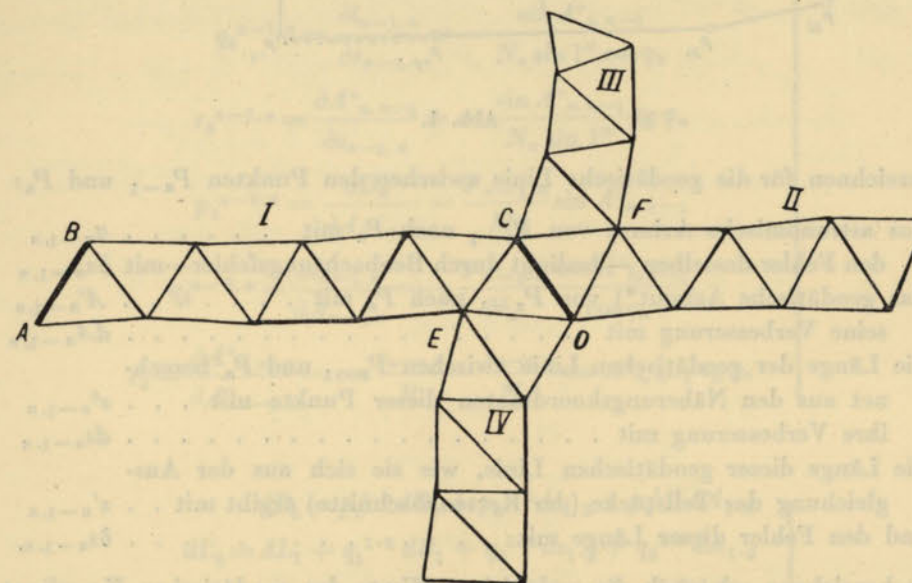


Abb. D.

Näherungskordinaten heissen diese Koordinaten, weil wir zu ihrer Ableitung die Triangulationspolygone nicht ausgleichen und in diesen Polygonen überschüssige Übertragungen nicht durchführen.

Für einen Punkt mit der Nummer  $n$  bezeichnen wir:

- die erwähnten Näherungskordinaten mit. . . . .  $B_n^\circ$  und  $L_n^\circ$ ;
- deren Verbesserungen aus der bevorstehenden Ausgleichung mit  $dB_n$  und  $dL_n$ ;
- die astronomische Breite und Länge mit. . . . .  $\varphi_n$  und  $\lambda_n$ ;
- die Fehler der astronomischen Koordinatenbestimmungen mit. . .  $\delta\varphi_n$  und  $\delta\lambda_n$ .

Mit den Näherungskordinaten berechnen wir in aller Strenge die geodätischen Azimute  $A$  und die Längen  $s$  der geodätischen Linien, die die aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkte verbinden (s. Abb. 1); wir berechnen hierbei die Azimute, die Gegenazimute und die Längen der geodätischen Linien  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, \dots, P_3P_9, P_9P_{10}, \dots$ . Diese Azimute und Längen entsprechen also streng den Werten der Näherungskordinaten  $B^\circ$  und  $L^\circ$ .

\*) Die Laplaceschen Punkte sollen in den Dreiecksketten I.O. etwa 80 — 100 km auseinanderliegen.







Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \varphi_2 - B_2 - P_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1) - P_3^{1,2}(s'_{1,2} - s^o_{1,2}) - P_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A^o_{1,2}) + \\ &+ P_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\varphi_2 - P_3^{1,2}\delta s_{1,2} + P_4^{1,2}\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - P_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) - (L^o_2 - L^o_1) - q_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1) - q_3^{1,2}(s'_{1,2} - s^o_{1,2}) - q_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A^o_{1,2}) + \\ &+ q_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 - q_3^{1,2}\delta s_{1,2} + (1 + q_4^{1,2} \sin \varphi_1) \eta_1 \sec \varphi_1 - q_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2,1} - A^o_{2,1}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_1^{1,2}(\varphi_1 - B_1) \operatorname{cosec} \varphi_2 - r_3^{1,2}(s'_{1,2} - s^o_{1,2}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &- r_4^{1,2}(\alpha_{1,2} - A^o_{1,2}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + r_1^{1,2}(\xi_1 - \delta\varphi_1) \operatorname{cosec} \varphi_2 + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - r_4^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{1,2} - \\ &- r_3^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \eta_1 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) müssen nochmals etwas umgeformt werden. Vorher führen wir ab noch neue Bezeichnungen ein.

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n - P_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - P_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s^o_{n-1,n}) - \\ - P_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A^o_{n-1,n}) = \omega_\varphi^{n-1,n} \\ (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L^o_n - L^o_{n-1}) - q_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - \\ - q_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s^o_{n-1,n}) - q_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A^o_{n-1,n}) = \omega_\lambda^{n-1,n} \\ \operatorname{cosec} \varphi_n [(\alpha_{n,n-1} - A^o_{n,n-1}) - r_1^{n-1,n}(\varphi_{n-1} - B_{n-1}) - \\ - r_3^{n-1,n}(s'_{n-1,n} - s^o_{n-1,n}) - r_4^{n-1,n}(\alpha_{n-1,n} - A^o_{n-1,n})] = \omega_\alpha^{n-1,n} \\ \eta_n \sec \varphi_n = v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{M_n} \cos l_{n-1,n} = -P_1^{n-1,n} \\ P_3^{n-1,n} &= \frac{\cos A^o_{n,n-1}}{M_n \sin l''} = -P_3^{n-1,n} \\ P_2^{n-1,n} &= P_4^{n-1,n} \sin \varphi_{n-1}; P_4^{n-1,n} = -\frac{s_{n-1,n}}{N_n} \sin A^o_{n,n-1} = -P_4^{n-1,n} \\ Q_1^{n-1,n} &= -\frac{M_{n-1}}{N_n} \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n = -Q_1^{n-1,n} \\ Q_3^{n-1,n} &= \frac{\sin A^o_{n,n-1}}{N_n \sin l'' \cos \varphi_n} = -Q_3^{n-1,n} \\ Q_2^{n-1,n} &= 1 - \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^o_{n,n-1} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\ Q_4^{n-1,n} &= \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^o_{n,n-1} = -Q_4^{n-1,n} \\ R_1^{n-1,n} &= -\frac{\sin l_{n-1,n}}{\sin \varphi_n \cos \varphi_n} = -R_1^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\ R_3^{n-1,n} &= Q_3^{n-1,n} = -r_3^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \\ R_2^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n \sin \varphi_{n-1} + \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^o_{n,n-1} \frac{\sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \\ R_4^{n-1,n} &= -\cos \frac{s_{n-1,n}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_n + \frac{s_{n-1,n}}{N_n} \cos A^o_{n,n-1} \sec \varphi_n = \\ &= R_2^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_{n-1} = -r_4^{n-1,n} \operatorname{cosec} \varphi_n \end{aligned}$$

Dann erhalten wir die Gleichungen (5) in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \omega_\varphi^{1,2} + \delta\varphi_2 + P_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1,2}v_1 + P_3^{1,2}\delta s_{1,2} + P_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} \\ v_2 &= \omega_\lambda^{1,2} + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1,2}v_1 + Q_3^{1,2}\delta s_{1,2} + Q_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} \\ v_2 &= \omega_\alpha^{1,2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + R_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1,2}v_1 + R_3^{1,2}\delta s_{1,2} + R_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Gleichungen (8) sind für die Linie  $P_1P_2$  angesetzt; dieselbe Form haben sie auch für die Linie  $P_{n-1}P_n$ , nur müssen dann die Indizes  $1,2$  durch  $n-1,n$  ersetzt werden. Nun stellen wir uns vor, dass wir das Polygon  $P_1P_2P_3P_4P_1$  (Abb. 2) haben, in dem  $P_1, P_2, P_3, P_4$  Laplacesche Punkte sind. Wenn wir das Polygon im Uhrzeigersinn umschreiten, wird  $P_1$  identisch mit  $P_5$ . Die Gleichungen (8) für die  $\xi$  der geodätischen Linien dieses Polygons lauten dann:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \omega_\varphi^{1,2} + \delta\varphi_2 + P_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - P_2^{1,2}v_1 + P_3^{1,2}\delta s_{1,2} + P_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} & (a) \\ \xi_3 &= \omega_\varphi^{2,3} + \delta\varphi_3 + P_1^{2,3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2,3}v_2 + P_3^{2,3}\delta s_{2,3} + P_4^{2,3}\delta\alpha_{2,3} & (b) \\ \xi_4 &= \omega_\varphi^{3,4} + \delta\varphi_4 + P_1^{3,4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) - P_2^{3,4}v_3 + P_3^{3,4}\delta s_{3,4} + P_4^{3,4}\delta\alpha_{3,4} & (c) \\ \xi_1 &= \xi_5 = \omega_\varphi^{4,1} + \delta\varphi_1 + P_1^{4,1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) - P_2^{4,1}v_4 + P_3^{4,1}\delta s_{4,1} + P_4^{4,1}\delta\alpha_{4,1} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

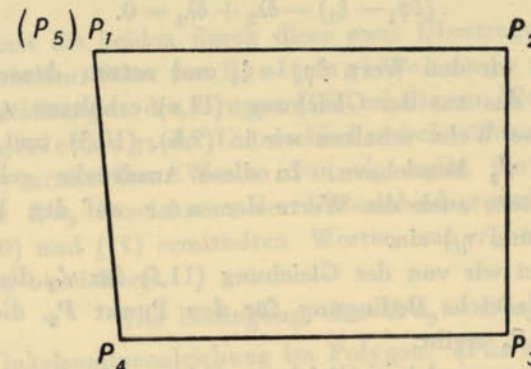


Abb. 2.

Für die Gleichungen für  $\eta$ , die sich aus dem Vergleich der Längen ergeben, bekommen wir für unser Polygon:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \omega_\lambda^{1,2} + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) + Q_2^{1,2}v_1 + Q_3^{1,2}\delta s_{1,2} + Q_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} & (a) \\ v_3 &= \omega_\lambda^{2,3} + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + Q_1^{2,3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2,3}v_2 + Q_3^{2,3}\delta s_{2,3} + Q_4^{2,3}\delta\alpha_{2,3} & (b) \\ v_4 &= \omega_\lambda^{3,4} + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 + Q_1^{3,4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) + Q_2^{3,4}v_3 + Q_3^{3,4}\delta s_{3,4} + Q_4^{3,4}\delta\alpha_{3,4} & (c) \\ v_5 = v_1 &= \omega_\lambda^{4,1} + \delta\lambda_1 - \delta\lambda_4 + Q_1^{4,1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) + Q_2^{4,1}v_4 + Q_3^{4,1}\delta s_{4,1} + Q_4^{4,1}\delta\alpha_{4,1} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für die Gleichungen für  $\eta$ , die sich aus dem Vergleich der Azimute ergeben, bekommen wir endlich:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \omega_\alpha^{1,2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + R_1^{1,2}(\delta\varphi_1 - \xi_1) - R_2^{1,2}v_1 + R_3^{1,2}\delta s_{1,2} + R_4^{1,2}\delta\alpha_{1,2} & (e) \\ v_3 &= \omega_\alpha^{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} + R_1^{2,3}(\delta\varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2,3}v_2 + R_3^{2,3}\delta s_{2,3} + R_4^{2,3}\delta\alpha_{2,3} & (f) \\ v_4 &= \omega_\alpha^{3,4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} + R_1^{3,4}(\delta\varphi_3 - \xi_3) - R_2^{3,4}v_3 + R_3^{3,4}\delta s_{3,4} + R_4^{3,4}\delta\alpha_{3,4} & (g) \\ v_5 = v_1 &= \omega_\alpha^{4,1} + \operatorname{cosec} \varphi_1 \cdot \delta\alpha_{1,4} + R_1^{4,1}(\delta\varphi_4 - \xi_4) - R_2^{4,1}v_4 + R_3^{4,1}\delta s_{4,1} + R_4^{4,1}\delta\alpha_{4,1} & (h) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Beim Helmertschen Verfahren müssen die Gleichungen (9), (10) und (11) für jedes Teilstück I.O. (das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkten liegt) angesetzt werden, wobei die vorher berechneten Zahlenwerte der Koeffizienten bei  $(\delta\varphi_i - \xi_i)$ ,  $\delta s_{i,i+1}$ ,  $v_i$ ,  $\delta\alpha_{i,i+1}$



und  $\delta\alpha_{i,i+1}$  sowie die nach Formel (6) berechneten Werte der Absolutglieder dieser Gleichungen eingesetzt werden.

Der weitere Rechengang besteht dann in der Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Netzes mittels der Gleichungen (9), (10) und (11); hierbei treten folgende Gleichungen auf: 1) in jedem geschlossenen Polygon die Breiten-, Längen- und Winkelsummenbedingung (also 3 Gleichungen), 2) die Laplaceschen Gleichungen für jede geodätische Linie zwischen 2 Laplaceschen Punkten, wobei die Laplacesche Bedingung erfordert, dass die Grössen  $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ , die aus den Gleichungen (10) abgeleitet werden, den entsprechenden Grössen  $v_2, v_3, v_4, v_5, \dots$ , die aus den Gleichungen (11) hervorgehen, genau gleich werden.

Zur Aufstellung der Polyongleichungen und der Laplaceschen Gleichungen müssen nach einander aus (9), (10) und (11) die Komponenten der Lotabweichungen eliminiert werden, damit in diesen Gleichungen ausschliesslich der Zusammenhang zwischen den Verbesserungen der beobachteten Grössen zum Ausdruck gelangt.

Hierbei kann man verschieden verfahren; wir wählen folgenden Weg:

1) Durch Subtraktion der Gleichung (10,a) von der Gleichung (11,e) erhalten wir die Laplacesche Bedingung für den Punkt  $P_2$ :

$$\omega_{\alpha}^{1.2} - \omega_{\lambda}^{1.2} + \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2.1} + (R_4^{1.2} - Q_4^{1.2}) \delta\alpha_{1.2} - (R_2^{1.2} + Q_2^{1.2}) v_1 + (R_1^{1.2} - Q_1^{1.2}) (\delta\varphi_1 - \xi_1) - \delta\lambda_2 + \delta\lambda_1 = 0. \quad (12)$$

2) Aus (9,a) ermitteln wir den Wert  $\delta\varphi_2 - \xi_2$  und setzen denselben in (9,b), (10,β) und (11,f) ein. Ferner setzen wir das aus der Gleichung (11,e) erhaltene  $v_2$  in die Gleichungen (9,b), (10,β) und (11,f) ein; auf diese Weise erhalten wir in (9,b), (10,β) und (11,f) neue Ausdrücke für  $\xi_3$  und  $v_3$ , die wir mit  $\xi'_3$  und  $v'_3$  bezeichnen. In diese Ausdrücke gehen, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, auch die Werte der nur auf den Punkt  $P_1$  bezüglichen Lotabweichungskomponenten ( $\xi_1$  und  $\eta_1$ ) ein.

3) Alsdann subtrahieren wir von der Gleichung (11,f) für  $v'_3$  die Gleichung (10,β) für  $v'_3$ ; dadurch erhalten wir die Laplacesche Bedingung für den Punkt  $P_3$ , die sich durch Übertragung längs der Linien  $P_1P_2$  und  $P_2P_3$  ergibt.

4) Aus der nach 2) umgewandelten Gleichung (9,b) ermitteln wir  $\delta\varphi_3 - \xi'_3 = \delta\varphi_3 - \xi_3$  und führen diese Grösse in (9,c), (10,γ) und (11,g) ein; ferner führen wir  $v_3$ , das aus der nach 2) umgewandelten Gleichung (11,f) erhalten wurde, in die Gleichungen (9,c), (10,γ) und (11,g) ein; dadurch ergeben sich neue Ausdrücke für  $\xi_4$  in (9,c), für  $v_4$  in (10,γ) und für  $v_4$  in (11,g). Diese neuen Ausdrücke bezeichnen wir mit  $\xi'_4, v'_4$ , wobei in diese Ausdrücke, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, auch noch die nur für den Punkt  $P_1$  geltenden Lotabweichungskomponenten ( $\xi_1, \eta_1$ ) eingehen.

5) Von der nach 4) umgewandelten Gleichung (11,g) für  $v'_4$  subtrahieren wir die umgeformte Gleichung (10,γ) für dieselbe Grösse  $v'_4$ ; damit ergibt sich dann die Laplacesche Gleichung für  $P_4$ , die durch Übertragung längs der Linien  $P_1P_2, P_2P_3$  und  $P_3P_4$  erhalten wurde (s. Abb. 2).

6) Aus der nach 4) umgewandelten Gleichung (9,c) ermitteln wir die Grösse  $\delta\varphi_4 - \xi_4 = \delta\varphi_4 - \xi'_4$ , die wir in die Gleichungen (9,d), (10,δ) und (11,h) einsetzen; ferner setzen wir  $v'_4$ , das aus der Umformung von (11,g) nach 4) erhalten wurde, in (9,d), (10,δ) und (11,h) ein. Im Ergebnis erhalten wir neue Ausdrücke für  $\xi_1$  in (9,d), für  $v_1$  in (10,δ) und für  $v_1$  in (11,h); diese neuen Ausdrücke bezeichnen wir mit  $\xi'_1$  und  $v'_1$ ; in diese gehen, ausser den Verbesserungen der beobachteten Grössen, die Lotabweichungskomponenten im Punkt  $P_1$  ein.

7) Führen wir die unter 6) aufgeführten Umformungen durch, so ergibt sich folgendes: Die rechte Seite der Gleichung für  $\xi'_1$  wird der Grösse  $\xi_1$  und die rechte Seite der Gleichung für  $v'_1$  der Grösse  $v_1$  selbst gleich sein. Die Bedingung, dass nach Durchlaufen des ganzen Polygons  $P_1P_2P_3P_4P_1$  für die Lotabweichungskomponenten im Punkt  $P_1$  die Grössen  $\xi_1$  und  $\eta_1$  erhalten werden müssen, kann folgendermassen formuliert werden:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 - \xi'_1 &= 0 \\ v_1 - v'_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hier bedeuten  $\xi'_1$  und  $v'_1$  die rechten Seiten der Gleichungen für  $\xi_1$  und  $\eta_1$ , die nach 6) erhalten wurden.

Die erste Gleichung von (13) ist die Breitengleichung für unser Polygon; die zweite Gleichung von (13) ist die betreffende Längengleichung.

8) Subtrahiert man von der nach 6) umgeformten Gleichung (11,h) für  $v'_1$  die umgeformte Gleichung (10,δ) für  $v'_1$ , so erhält man die Laplacesche Gleichung für den Punkt  $P_1$ , die der Übertragung längs der geodätischen Linien  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$  und  $P_4P_1$  entspricht.

9) Nun setzen wir den nach 6) aus der umgeformten Gleichung (9,d) erhaltenen Wert  $\xi'_1$  und den aus der umgeformten Gleichung (11,h) erhaltenen Wert  $v'_1$  in die rechten Seiten der Gleichungen (10,a) und (11,e) ein. Wir erhalten dann in (10,a) und (11,e) neue Ausdrücke für  $v'_2$ ; ziehen wir dieselben voneinander ab, so erhalten wir in neuer Form die Laplacesche Gleichung in Punkt  $P_2$ ; subtrahieren wir von dieser neuen Laplaceschen Gleichung für den Punkt  $P_2$ , die der Übertragung längs der Linien  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$  und  $P_1P_2$  entspricht, die Gleichung (12) — d. i. die frühere Laplacesche Gleichung für  $P_2$  — so erhalten wir die Winkelsummengleichung für unser Polygon.

Bei der zahlenmässigen Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen und der Polyongleichungen ist es einfacher und zweckmässiger, nicht das ganze Polygon in einer Richtung zu umgehen, sondern zuerst von  $P_1$  bis  $P_2$  und von  $P_2$  bis  $P_3$  zu gehen, um  $\xi'_3$  und  $v'_3$  zu erhalten; alsdann von  $P_1$  bis  $P_4$  und von  $P_4$  bis  $P_3$  zu gehen, um  $\xi'_3$  und  $v'_3$  nochmals, jedoch auf anderem Wege zu erhalten.

Die Bedingung, dass die beiden durch diese zwei Übertragungen erhaltenen Werte von  $\xi'_3$  untereinander gleich sein sollen, führt zur Breitengleichung; die Bedingung, dass die beiden auf zweierlei Art aus den Gleichungen der Gruppe (10) erhaltenen Werte von  $v'_3$  übereinstimmen sollen, führt zur Längengleichung; der Unterschied zwischen den auf dem ersten Wege aus den Gleichungen (10) und (11) ermittelten Werten von  $v'_3$  ergibt die Laplacesche Gleichung für den Punkt  $P_3$ , die wir mit  $L'a_3$  bezeichnen; der Unterschied zwischen den auf dem zweiten Wege aus den Gleichungen (10) und (11) ermittelten Werten von  $v'_3$  ergibt die Laplacesche Gleichung für  $P_3$ , die wir mit  $L''a_3$  bezeichnen.

Die Bedingung, dass  $L'a_3 = L''a_3$

sein muss, führt zur Winkelsummengleichung im Polygon. (Für die Aufstellung der Polygonbedingungen haben wir die kreisförmige Umgehung des Polygons deshalb gewählt, weil dieselbe bei der Durchführung der Rechnung in allgemeiner Form die Möglichkeit gibt, für die Laplaceschen Gleichungen und die Winkelbedingungen in den Polygonen allgemeine Formeln abzuleiten, wie das in den folgenden Paragraphen aufgezeigt werden wird).

In die Breiten- und Längengleichungen gehen  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$  und  $\delta\alpha_{1.2}$  mit sehr kleinen Koeffizienten ein; das Auftreten dieser Glieder ist dadurch bedingt, dass die Lage des Polygons nach der Breite [Einfluss von  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ] und die Orientierung seiner ersten Linie (Wert von  $\alpha_{1.2}$ ) die Grösse des Polygonschlussfehlers in der Breiten- und Längenrichtung beeinflusst; dieser Einfluss ist natürlich sehr gering und  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$  und  $\delta\alpha_{1.2}$  gehen daher in die Polyongleichungen mit so kleinen Koeffizienten ein, dass man mit Rücksicht auf die Kleinheit von  $\delta\alpha_{1.2}$  und  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$  diese Argumente enthaltenden Glieder stets vernachlässigen darf; unter  $\delta\xi_1$  ist die Verbesserung des auf Grund vorläufiger Untersuchungen ermittelten Wertes von  $\xi_1$  zu verstehen. Glieder, die die Längenfehler  $\delta\lambda$  und die Grössen  $v$  enthalten, gehen in die Breiten-, Längen- und Winkelsummengleichungen überhaupt nicht ein. Die Breiten- und Längengleichungen enthalten also die Argumente  $\delta s_{1.2}, \delta s_{2.3}, \delta s_{3.4}$  und  $\delta s_{4.1}$  sowie die Azimutverbesserungen  $\delta\alpha_{2.1}, \delta\alpha_{2.3}, \delta\alpha_{3.2}, \delta\alpha_{3.4}, \delta\alpha_{4.3}$  und  $\delta\alpha_{4.1}$ , wobei der Koeffizient von  $\delta\alpha_{2.3}$  dem von  $\delta\alpha_{2.1}$  mit umgekehrtem Vorzeichen gleich ist, der Koeffizient von  $\delta\alpha_{3.4}$  dem von  $\delta\alpha_{3.2}$  und von  $\delta\alpha_{4.1}$  dem von  $\delta\alpha_{4.3}$  mit umgekehrten Vorzeichen gleich sind. Die Breiten- und Längenbedingungen können also in folgender Form dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= a_1 \delta s_{1.2} + a_2 \delta s_{2.3} + a_3 \delta s_{3.4} + a_4 \delta s_{4.1} + \\ &+ a_5 (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + a_6 (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) + a_7 (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.1}) \\ \Delta l &= b_1 \delta s_{1.2} + b_2 \delta s_{2.3} + b_3 \delta s_{3.4} + b_4 \delta s_{4.1} + \\ &+ b_5 (\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + b_6 (\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) + b_7 (\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.1}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$



$\Delta\varphi$  und  $\Delta l$  stellen hierbei die Absolutglieder dar.

In die Winkelsummengleichung geht mit einem kleinen Koeffizienten das Argument  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$  ein (weil die Lage des Polygons auf die Winkelsumme Einfluss hat); die Verbesserungen  $\delta s$ ,  $\delta\lambda$  und die Grössen  $v$  kommen aber überhaupt nicht vor; in diese Bedingung sind also nur die Verbesserungen der Azimute und der Gegenazimute sämtlicher Linien des Polygons einzuführen, wobei die Verbesserungen solcher Azimute, die einen Winkel des Polygons bilden, in der Gleichung Koeffizienten mit gleichen Absolutwerten, aber entgegengesetzten Vorzeichen haben. Die allgemeine Form der Winkelsummengleichungen ist daher:

$$\Delta\Sigma = c_1(\delta\alpha_{2.1} - \delta\alpha_{2.3}) + c_2(\delta\alpha_{3.2} - \delta\alpha_{3.4}) + c_3(\delta\alpha_{4.3} - \delta\alpha_{4.1}) + c_4(\delta\alpha_{1.4} - \delta\alpha_{1.2}), \quad (15)$$

wobei die Koeffizienten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$  praktisch untereinander gleich angenommen werden können;  $\Delta\Sigma$  ist das Absolutglied.

In die Laplaceschen Gleichungen gehen ein:  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ , die Verbesserungen der Azimute und Gegenazimute sämtlicher geodätischer Linien, die bei der Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen zur Übertragung benutzt wurden und die Verbesserungen zweier astronomischer Längen (des Punktes  $P_i$  und des Punktes  $P_1$ ).

Nach der Aufstellung der Polygon- und der Laplaceschen Gleichungen wird die Verbesserung  $\delta\alpha$  des astronomischen Azimuts einer jeden geodätischen Linie durch den Fehler, mit dem das Azimut der entsprechenden Ausgangsseite des Teilstücks I.O. bestimmt ist, sowie den Richtungsfehler der gegebenen geodätischen Linie ausgedrückt. Bezeichnet man den Fehler der im Punkt  $P_i$  erfolgten Azimutbestimmung für die erste Seite des Triangulationsteilstücks mit  $\delta_i^*$  und die Richtungsverbesserung für die geodätische Linie von  $P_i$  nach  $P_k$  mit  $v_{i.k}$ , so hat man

$$\delta\alpha_{i.k} = \delta_i^* + v_{i.k} \quad (16)$$

Die für sämtliche geschlossenen Triangulationspolygone gebildeten Gleichungen (14) und (15) werden zusammen mit den Laplaceschen Gleichungen aufgelöst, die in der o. a. Weise für jede geodätische Linie des Netzes aufgestellt werden. Indem man diese Auflösung für sämtliche Polygonbedingungen und Laplaceschen Bedingungen im Zusammenhang ausführt, verbindet man dadurch augenscheinlich die Ermittlung der Verbesserungen rein geodätisch bestimmter Grössen, d. h. der Abstände  $s$  und der von den Polygonlinien eingeschlossenen Winkel, mit der Ermittlung der Verbesserungen der astronomischen Azimute. Mit anderen Worten: Die Fehlerfortpflanzung, die unvermeidlich wäre, wenn die Ausgleichung nur auf die Polygonbedingungen beschränkt würde, wird bei einer solchen Rechnungsweise durch die Feststellung der Azimute aus den Laplaceschen Bedingungen reguliert.

In die Polygonbedingungen und die Laplaceschen Bedingungen gehen die Verbesserungen der Grössen  $\alpha$ ,  $\lambda$ , der Richtungen der geodätischen Linien und der Strecken  $s$  ein. Daher ist zur Auflösung der betreffenden Gleichungen die Kenntnis der relativen Gewichte dieser Grössen erforderlich. Diese Frage soll im folgenden Paragraphen behandelt werden.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass die Gedankengänge Helmerts nicht allein auf die Ausarbeitung des angegebenen Verfahrens zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen für ein astronomisch-geodätisches Netz gerichtet waren. Er führte in die Gleichungen (8) auch noch solche Glieder ein, die von den Verbesserungen  $da$  und  $dc$  der grossen Halbachse bzw. der Abplattung des Ellipsoids abhängig sind.

In die Laplacesche Gleichung gehen dann auch die Glieder mit  $da$  und  $dc$  ein; dabei werden die  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  enthaltenden Glieder von Helmert gewissermassen als Bestandteile der Absolutglieder der Gleichungen behandelt, obgleich sie besonders geschrieben werden und bei den Zahlenwerten der betreffenden Koeffizienten die Grössen  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  als Faktoren erhalten bleiben. Darum erhält Helmert die Korrelaten der Bedingungsgleichungen in der Gestalt von Funktionen der Absolutglieder und der  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  enthaltenden Glieder.

\*) In  $\delta_i^*$  geht —wie leicht einzusehen— auch der Fehler ein, mit dem das unmittelbar beobachtete astronomische Azimut auf diese Seite der Triangulation übertragen wurde.

Ebenso werden die mit diesen Korrelaten berechneten Verbesserungen der astronomischen Längen, sowie die Verbesserungen der Azimute, Winkel und Abstände in den Polygonen auch als Funktionen der Absolutglieder und der  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  enthaltenden Glieder erhalten.

Diese Verbesserungen werden eingeführt: in die Gleichungen (9,a), (10,a), (11,e); in die umgewandelten Gleichungen (9,b), (10,b) und (11,f), deren rechte Seiten mit  $\xi_3'$  und  $v_3'$  bezeichnet wurden; in die früher umgeformten Gleichungen (9,c), (10,c) und (11,g), deren rechte Seiten mit  $\xi_1'$  und  $v_1'$  bezeichnet wurden, usw. Auf solche Weise erhalten wir ein System von Lotablenkungen:  $\xi_2, v_2, \xi_3, v_3, \dots, \xi_n, v_n$ , die auch als Funktionen der Absolutglieder und der  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  enthaltenden Glieder dargestellt sind. Für das System der Gleichungen, aus denen sich die Ausdrücke für  $\xi_2, v_2, \xi_3, v_3, \dots, \xi_n, v_n$  ergeben, führen wir die Bezeichnung (LW) ein. Hat man bezüglich der Ausmasse und der Orientierung des Ellipsoids, also der von der Wahl der Elemente  $\xi_1$  und  $v_1$  abhängigen geodätischen Ausgangsdaten, gewisse Annahmen gemacht, so sind damit die Lotablenkungen in allen Laplaceschen Punkten bestimmt; zugleich auch die Verbesserungen der Azimute, Abstände und Winkel in den Polygonen der Triangulation.

Die Grundidee Helmerts bestand also darin, auf Grund des Gesamtmaterials der Triangulation und aller diesbezüglichen astronomischen Bestimmungen und der in der angegebenen Weise ausgeführten Ausgleichung des Netzes die Verbesserungen als Funktionen der Unbekannten  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  darzustellen, — um auf solche Weise ein System von Lotablenkungen zu erhalten, die im System der Gleichungen (LW) ebenfalls als Funktionen von  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  erscheinen. Hier ist also die Ausgleichung der Triangulation eine Angelegenheit von sekundärer Bedeutung, der Hauptzweck besteht in der Ableitung der Gleichungen (LW) zur Ermittlung der Grössen  $\xi$  und  $\eta$  für alle Laplaceschen Punkte, wobei allerdings das Gesamtmaterial des astronomisch-geodätischen Netzes benutzt wird, um die wahrscheinlichsten Werte der  $\xi$  und  $\eta$  zu ermitteln.

Aus der zuletzt erwähnten Forderung ergibt sich die Notwendigkeit, sämtliche Laplaceschen Gleichungen und sämtliche Polygonbedingungen zu benutzen; aber die Auflösung dieser Bedingungsgleichung (nach der MdklQ) erscheint als eine Zwischenaufgabe, die zur Lösung der Hauptaufgabe gehört. Eine andere Möglichkeit zur strengen Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte der  $\xi$  und  $\eta$  ist nicht vorhanden.

In den erwähnten Gleichungen (LW), die nach Helmert zur Ermittlung des Systems der  $\xi$  und  $\eta$  benutzt werden, gibt es für jeden Laplaceschen Punkt zwei Gleichungen für  $v$ : eine derselben ergibt sich aus dem Vergleich der Längen, die andere aus dem Vergleich der Azimute [dieses entspricht den zwei früheren Gruppen der Gleichungen (10) und (11)]; diese zwei Gleichungen für  $v$  in einem gegebenen Punkt müssen vollkommen identisch sein. Daher hat man im System der Gleichungen (LW) für die folgende Rechnung für jeden Laplaceschen Punkt nur zwei Gleichungen beizubehalten; eine für  $\xi$  und die andere für  $v$ .

Durch Auflösung der Gleichungen (LW) unter der Bedingung des Minimums der Quadratsummen der  $\xi$  und  $\eta$  erhält man die wahrscheinlichsten Werte der  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$ . Darauf ergeben sich die geodätischen Ausgangskordinaten aus den Formeln

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1 + \delta\varphi_1$$

$$L_1 = \lambda_1 + \delta\lambda_1 - v_1$$

$$A_{1.2} = \alpha_{1.2} + \delta\alpha_{1.2} - v_1 \sin \varphi_1.$$

Nach der Ermittlung der  $(\delta\varphi_1 - \xi_1)$ ,  $v_1$ ,  $da$  und  $dc$  berechnet man, wie bereits erwähnt, aus den Gleichungen (LW) die entsprechenden Werte  $\xi$  und  $\eta$ ; andererseits erhält man die Verbesserungen sämtlicher Azimute, sämtlicher Winkel und Seiten im Netz (wobei angenommen wird, dass dasselbe aus den die benachbarten Laplaceschen Punkte verbindenden geodätischen Linien gebildet sei). Man hat dann nur noch mit den Ausgangsgrössen  $B_1$ ,  $L_1$  und  $A_{1.2}$  auf dem Ellipsoid mit den Ausmassen  $a + da$  und  $c + dc$  und mit den verbesserten Winkeln und Abständen die geodätischen Koordinaten und die Azimute der Laplaceschen Punkte des Netzes zu berechnen.



Die angegebene Art der Auflösung der Gleichungen ( $LW$ ) ist nicht die einzig mögliche. Helmerts Bestrebungen zielten darauf hin, solche auf einen und denselben Ausgangspunkt bezogene Gleichungen ( $LW$ ) für ganz Mitteleuropa zu sammeln, um auf diesem Material weitere wissenschaftliche Untersuchungen aufbauen zu können.

### § 3. Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten und der Ausmasse des Bezugsellipsoids für das zu vermessende Gebiet.

Für die Lösung geodätischer Aufgaben hat man in bezug auf die Wahl der Ausmasse des für den zu vermessenden Staat am besten geeigneten Ellipsoids eine ziemliche Freiheit. Wenn nun aber jeder Staat tatsächlich in der geodätischen Praxis sein eigenes Ellipsoid mit besonderen Abmassen einführen würde, so würde dies zu ziemlichen Unzuträglichkeiten führen. Deshalb soll man sich in Ansehung der Aufgabe bei der Auswahl des bestgeeigneten Ellipsoids darauf beschränken, zu bestimmen, welches von den anerkannten Ellipsoiden (Bessel, Clarke, Hayford) sich am besten für den zu vermessenden Staat eignet.

Für die UdSSR, insbesondere ist zu entscheiden, ob man das Hayfordsche Ellipsoid übernehmen oder ob man an dem bisher in der UdSSR. und in Europa gebräuchlichen Besselschen Ellipsoid festhalten soll.

Ausserdem darf darauf hingewiesen werden, dass die Bestimmung der Abplattung des Ellipsoids durch die Ausgleichung der Lotabweichungen nicht zuverlässig ist, insbesondere wenn hierzu astronomisch-geodätische Netze in mittel-nördlichen (mittleren) Breiten verwendet werden. Auch bei der Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten hat man eine beträchtliche Freiheit; die Einführung topographisch-isostatischer Reduktionen in den astronomischen Breiten, Längen und Azimuten hat bei der Lösung dieser Aufgabe eine unvergleichlich grössere Bedeutung, als die Ausnutzung nicht nur der astronomischen Breiten und Längen, sondern auch der astronomischen Azimute auf den astronomischen Punkten.

Die Ausnutzung des gesamten Materials der Triangulation, dh. aller ihrer geodätischen Linien mit der dabei unvermeidlichen Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen kann bei neuzeitlichen Triangulationen I.O., selbst wenn sie bedeutende Ausdehnung haben, in den Grössen  $\xi$  und  $\eta$  lediglich einen Einfluss von einigen Zehntelsekunden (weniger als 0,5'') ausüben (insbes. wenn eine vorläufige Ausgleichung der Triangulationsreihen in Teilstücken durchgeführt worden ist). Selbstverständlich können, weil die rein örtlichen Einflüsse in den Grössen  $\xi$  und  $\eta$  Lotstörungen im Mittel bis zu  $\pm 1,8''$  ausmachen, diese Unsicherheiten von  $\pm 0,1'' - 0,4''$  vernachlässigt werden.

Beabsichtigt man bei der Bestimmung der Ausmasse des Ellipsoids und der geodätischen Ausgangsdaten keine genaue Bestimmung der Lotabweichungskomponenten, so kann die Lösung wesentlich vereinfacht werden. Verzichtet man bei der Lösung der Aufgabe für das Gebiet der UdSSR. auf die Bestimmung der Abplattung, so kann man einfach die Besselsche Abplattung beibehalten. Dadurch wird die Umrechnung aller früheren Triangulationen, die durch die Neubestimmung der grossen Halbachse erforderlich wird, wesentlich vereinfacht, andererseits erübrigt sich auch die Aufstellung neuer geodätischer Tafelwerke.

Zur Lösung der gestellten Aufgaben sind die geodätischen Linien nicht erforderlich, die die Polygone schliessen. Diese geodätischen Linien dienen lediglich zur Kontrolle der Übertragung der Koordinaten. Schliesslich kann man in dem angestrebten Sinne—wie schon bei der Ausgleichung der Teilstücke erläutert wurde—auf die freien Glieder in den Azimutbedingungen und auf die Ausnutzung der Laplaceschen Bedingungen sowie auf die Gegenüberstellung der astronomischen und geodätischen Azimute verzichten, wenn man für jeden Laplaceschen Punkt lediglich die astronomischen und geodätischen Breiten und Längen gegenüberstellt.

Aus der Ausgleichung der Teilstücke der in Abb. 1 dargestellten Triangulation erhielten wir die Längen  $s_{1,2}, s_{2,3}, s_{3,4}, \dots, s_{19,20}$  der geodätischen Linien  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{19}P_{20}$  und die Winkel zwischen diesen Linien bei  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ . Damit berechnen wir ausgehend von  $P_1$ , wobei

die astronomische Breite  $\varphi_1$  und die astronomische Länge  $\lambda_1$  als Ausgangsdaten angenommen werden, und mit dem astronomischen Azimut  $\alpha_{1,2}$  die geodätischen Koordinaten aller Laplaceschen Punkte  $P_2, P_3, P_4, \dots, P_{24}$ , aber ohne die Polygone zu schliessen. Wir führen also z.B. die Koordinatenberechnung in folgender Weise aus:

$$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_{13}, P_{13}P_{12}, P_{12}P_{11}, P_3P_9, P_9P_{10}, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_{18}, \\ P_{18}P_{17}, P_{17}P_{16}, P_5P_{14}, P_{14}P_{15}, P_1P_{19}, P_{19}P_{20}, P_7P_{21}, P_{21}P_{22}, P_{17}P_{24}, P_{24}P_{23}, P_1P_8.$$

Damit benutzen wir die in Abb. 1 durch Doppelstrich (ausgezogen und punktiert) angegebenen Linien ( $P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{20}P_{21}, P_{22}P_{23}$ ) überhaupt nicht. (Praktisch verproben wir jedoch die Koordinaten der Punkte  $P_{11}, P_{16}, P_8, P_{20}$  und  $P_{22}$  durch Übertragung mit  $P_{10}P_{11}, P_{15}P_{16}, P_7P_8, P_{21}P_{20}$  und  $P_{22}P_{23}$ ; die dabei erhaltenen Ergebnisse werden aber in der Folge nicht verwertet).

Die hierdurch erhaltenen geodätischen Koordinaten  $B_n^\circ$  und  $L_n^\circ$  des Punktes  $P_n$  unterscheiden sich von den entsprechenden astronomischen Koordinaten  $\varphi_n$  und  $\lambda_n$  infolge:

- 1) der Fehler in den Ausmassen des gewählten Ellipsoids;
- 2) der Lotabweichungen im Ausgangspunkt  $P_1$ ;
- 3) der Lotabweichungen im Punkt  $P_n$ ;
- 4) der Fehler in den geodätischen und astronomischen Beobachtungen.

In der Folge bleiben die Fehler in den geodätischen und astronomischen Beobachtungen zunächst unberücksichtigt; bei der Bestimmung der Ausmasse des Ellipsoids wird lediglich eine Verbesserung da für die grosse Halbachse bestimmt.

Wir bezeichnen, wie in § 2, die geodätischen Koordinaten und die geodätischen Azimute, die nach der Verbesserung der grossen Halbachse um  $da$  und nach der Verbesserung der astronomischen Koordinaten und des Azimuts in  $P_1$  (mit denen die vorläufigen Koordinaten  $B^\circ$  und  $L^\circ$  von  $P_1$  aus berechnet wurden) um den Betrag der Lotabweichung in  $P_1$  erhalten werden, mit  $B, L$  und  $A$ .

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \xi_1 &= B_1^\circ = \varphi_1 \\ L_1 + \eta_1 \sec \varphi_1 &= L_1^\circ = \lambda_1 \\ A_{1,2} + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= A_{1,2}^\circ = \alpha_{1,2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wir müssen also zum Übergang von  $B_n^\circ$  auf  $B_n$  und von  $L_n^\circ$  auf  $L_n$  die Verbesserungen der Ausgangsbreite  $d\varphi = -\xi_1$ , der Ausgangslänge  $-\eta_1 \sec \varphi_1$  und des Ausgangsazimuts  $-\eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$  berücksichtigen und schliesslich noch die Verbesserung der grossen Halbachse um  $da$  beachten.

Mit der (angenommenen) geodätischen Linie zwischen  $P_n$  und  $P_1$  wird:

$$\left. \begin{aligned} dB_n^\circ &= B_n - B_n^\circ = -p_1^{1,n} \xi_1 - p_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + p_5 da \\ dL_n^\circ &= L_n - L_n^\circ = -q_1^{1,n} \sec \varphi_1 - q_4^{1,n} \xi_1 - q_4^{1,n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + q_5 da \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Die Bedeutung der Koeffizienten  $p_1, p_4, q_1$  und  $q_4$  in (18) wurde in (2) § 2 angegeben\*), ausserdem ist

$$p_5 = \frac{\partial B_n}{\partial a} \text{ und } q_5 = \frac{\partial (L_n^\circ - L_1^\circ)}{\partial a}.$$

\*) Hierbei sind die Zeiger „ $n-1$ “ durch „ $1$ “ ersetzt!



Diese Koeffizienten werden in folgender Tabelle zusammengefasst:

$$\left. \begin{aligned} P_1^{1..n} &= \frac{M_1}{M_n} \cos l_{1..n}; \quad l_{1..n} = L_n^\circ - L_1^\circ \\ q_1^{1..n} &= \frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \operatorname{tg} \varphi_n \\ P_4^{1..n} &= \frac{s_{1..n}}{M_n} \sin A_{n..1}^\circ \\ q_4^{1..n} &= -\frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{N_n \cos \varphi_n} \\ P_5^{1..n} &= \frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{a \sin l'' \cdot M_n} \\ q_5^{1..n} &= \frac{s_{1..n} \sin A_{n..1}^\circ}{aN_n \cos \varphi_n \sin l''} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (18) von  $\varphi_n$  bzw.  $\lambda_n$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= \varphi_n - B_n^\circ + P_1^{1..n} \xi_1 + P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 - P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \lambda_n - L_n &= \lambda_n - L_n^\circ + \gamma_1 \sec \varphi_1 + q_1^{1..n} \xi_1 + q_4^{1..n} \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - q_5^{1..n} \frac{da}{a}. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \varphi_n - B_n &= + \xi_n \\ \lambda_n - L_n &= + \eta_n \sec \varphi_n. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir noch:

$$\begin{aligned} \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) + P_1^{1..n} \xi_1 + P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n + \gamma_1 \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} + q_1^{1..n} \cos \varphi_n \cdot \xi_1 + q_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_n \cdot \eta_1 + Q_5^{1..n} \frac{da}{a}, \end{aligned}$$

wobei

$$Q_5^{1..n} = -\frac{s_{1..n} \sin A_{n..1}^\circ}{N_n \sin l''}; \quad P_5^{1..n} = -\frac{s_{1..n} \cos A_{n..1}^\circ}{M_n \sin l''}. \quad (20)$$

Mit den Bezeichnungen (7) § 2 wird:

$$\left. \begin{aligned} P_1^{1..n} &= -\frac{M_1}{M_n} \cos l_{1..n} = -P_1^{1..n}; \quad P_4^{1..n} = -\frac{s_{1..n}}{M_n} \sin A_{n..1}^\circ = -P_4^{1..n} \\ Q_1^{1..n} &= -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \operatorname{tg} \varphi_n = -q_1^{1..n} \\ Q_4^{1..n} &= +\frac{s_{1..n}}{N_n} \frac{\cos A_{n..1}^\circ}{\cos \varphi_n} = -q_4^{1..n} \\ S_1^{1..n} &= Q_1^{1..n} \cos \varphi_n = -\frac{M_1}{N_n} \sin l_{1..n} \sin \varphi_n \\ S_4^{1..n} &= +\frac{s_{1..n}}{N_n} \cos A_{n..1}^\circ = Q_4^{1..n} \cos \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Mit (20) und (21) erhält man für  $\xi$  und  $\eta$  die endgültigen Ausdrücke (22):

$$\left. \begin{aligned} \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) - P_1^{1..n} \xi_1 - P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - S_1^{1..n} \xi_1 - \left( S_4^{1..n} - \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_1} \right) \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + Q_5^{1..n} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Mit diesen Gleichungen, die für die Punkte  $P_2, P_3, P_4 \dots P_n$  aufzustellen sind, müssen noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 \\ \eta_1 &= \eta_1 \end{aligned}$$

für Punkt  $P_1$  verbunden werden.

Zur Aufstellung dieser Gleichungen müssen die geodätischen Linien  $P_1 P_2, P_1 P_3, P_1 P_4, \dots, P_1 P_{15}, \dots, P_1 P_{21} \dots$  und die zugehörigen Azimute und Gegenazimute berechnet werden, wobei man sich auf eine geringe Genauigkeit, die lediglich für die Berechnung der Koeffizienten  $P_1, P_4, P_5, S_1, S_4$  u.  $Q_5$  ausreicht, beschränken darf. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt nach den Gleichungen (20) und (21); damit erhält man dann folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 \\ \eta_1 &= \eta_1 \\ \xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^\circ) - P_1^{1..2} \xi_1 - P_4^{1..2} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1..2} \frac{da}{a} \\ \eta_2 &= (\lambda_2 - L_2^\circ) \cos \varphi_2 - S_1^{1..2} \xi_1 - \left( S_4^{1..2} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1..2} \frac{da}{a} \\ \xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^\circ) - P_1^{1..3} \xi_1 - P_4^{1..3} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1..3} \frac{da}{a} \\ \eta_3 &= (\lambda_3 - L_3^\circ) \cos \varphi_3 - S_1^{1..3} \xi_1 - \left( S_4^{1..3} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1..3} \frac{da}{a} \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_n &= (\varphi_n - B_n^\circ) - P_1^{1..n} \xi_1 - P_4^{1..n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1..n} \frac{da}{a} \\ \eta_n &= (\lambda_n - L_n^\circ) \cos \varphi_n - S_1^{1..n} \xi_1 - \left( S_4^{1..n} - \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1..n} \frac{da}{a} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Als Unbekannte treten hierbei  $\xi_1, \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1$  und  $\frac{da}{a}$  auf. Durch Auflösung des Gleichungssystems (23) nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate von  $\xi$  und  $\eta$   $\left( \sum_1^n \xi^2 + \sum_1^n \eta^2 \right)$  ein Minimum wird, ergeben sich die Unbekannten  $da, \xi_1$  und  $\eta_1$  und damit die neuen Ausgangsdaten:

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 = B_1^\circ - \xi_1 \\ L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 = L_1^\circ - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1..2} &= \alpha_{1..2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1. \end{aligned}$$

Beachtet man für die Breiten und Längen noch die topographisch-isostatische Reduktion und setzt man sie anstelle von  $\xi$  und  $\eta$  mit der Bezeichnung  $\xi'$  und  $\eta'$  in (23) ein, so erhält man



$$\begin{aligned}
\delta \xi_1' &= -\xi_1' + \xi_1 \\
\delta \eta_1' &= -\eta_1' \\
\delta \xi_2' &= (\varphi_2 - \xi_2' - B_2^0) - P_1^{1.2} \xi_1 - P_4^{1.2} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1.2} \frac{da}{a} \\
\delta \eta_2' &= (\lambda_2 - L_2^0) \cos \varphi_2 - \eta_2' - S_1^{1.2} \xi_1 - \left( S_4^{1.2} - \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.2} \frac{da}{a} \\
\delta \xi_3' &= (\varphi_3 - \xi_3' - B_3^0) - P_1^{1.3} \xi_1 - P_4^{1.3} \operatorname{tg} \varphi \cdot \eta_1 + P_5^{1.3} \frac{da}{a} \\
\delta \eta_3' &= (\lambda_2 - L_3^0) \cos \varphi_3 - \eta_3' - S_1^{1.3} \xi_1 - \left( S_4^{1.3} - \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.3} \frac{da}{a} \\
&\dots \dots \dots \\
\delta \xi_n' &= (\varphi_n' - \xi_n' - B_n^0) - P_1^{1.n} \xi_1 - P_4^{1.n} \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + P_5^{1.n} \frac{da}{a} \\
\delta \eta_n' &= (\lambda_n - L_n^0) \cos \varphi_n - \eta_n' - S_1^{1.n} \xi_1 - \left( S_4^{1.n} - \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_1} \right) \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \eta_1 + Q_5^{1.n} \frac{da}{a}
\end{aligned} \quad (24)$$

Das Gleichungssystem (24) ist wiederum nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen, unter der Bedingung, dass die Summe der Quadrate von  $\delta \xi_n'$  und  $\delta \eta_n'$  ein Minimum wird.

Für die derzeitige Triangulierung I.O. im europäischen Teil der UdSSR, — die noch nicht bis zum Ural und Kaukasus vorgetrieben ist — kann man sich vorläufig mit der Lösung der Gleichungen (23) begnügen, dh. auf die Einführung der topographisch-isostatischen Reduktion verzichten. Die weitere Entwicklung der Triangulation bedingt die Einführung der topographisch-isostatischen Reduktion und die neuerliche Bestimmung der geodätischen Ausgangsdaten unter Beachtung der Gleichung (24).

Nach Berechnungen des Autors kann aus der derzeitigen Triangulation im europ. Teil d. UdSSR. die grosse Halbachse mit einem mittleren Fehler von  $\pm 90 m$  abgeleitet werden.

#### § 4. Formeln zur Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen.

(Allgemeine Formeln von Prof. F. N. Krassowsky).

Bei der Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen gehen wir vom Ausgangspunkt  $P_1$  der Triangulation nach  $P_2$  (Abb. 3), dann von  $P_2$  nach  $P_3$ , von  $P_3$  nach  $P_4$ , von  $P_4$  nach  $P_5$ , von  $P_5$  nach  $P_6$  und so fort.

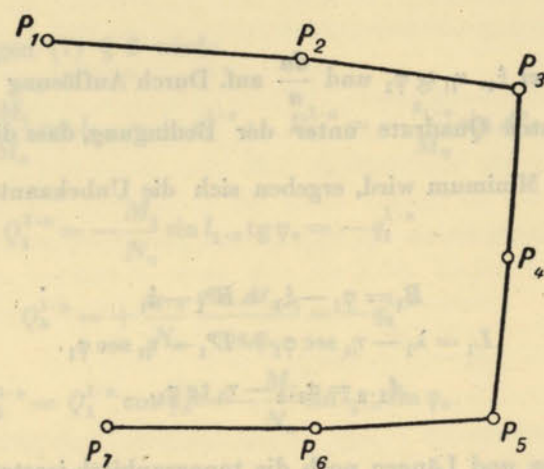


Abb. 3.

Im einzelnen nehmen wir an, dass die einleitenden Aufgaben des vorigen § bereits erledigt sind, dass also im Punkt  $P_1$   $\xi_1$  und  $\eta_1$  bereits bestimmt sind.

Damit stehen auch die Ausgangswerte

$$\begin{aligned}
B_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\
L_1 &= \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\
A_{1.2} &= \alpha_{1.2} - \eta_1 \operatorname{tg} \varphi_1
\end{aligned}$$

fest.

Die Ausgangsdaten  $B_1$  und  $L_1$  unterliegen keinen Veränderungen mehr. Wir berechnen dann mit diesen Ausgangswerten auf einem Ellipsoid mit der grossen Halbachse  $(a + da)$  und der Besselschen Abplattung die Näherungskordinaten für die Laplaceschen Punkte, auf die schon im § 2 hingewiesen wurde, und die mit  $B_n^0$  und  $L_n^0$  bezeichnet wurden. Dann werden ebenso wie im § 2 die geodätischen Azimute  $A^0$  und die Längen  $s^0$  der geodätischen Linien, die die aufeinander folgenden Laplaceschen Punkte verbinden, in aller Strenge berechnet.

Ausserdem setzen wir den Fehler  $\delta \varphi_1$  der astronomischen Breite in  $P_1$  gleich Null; dies ist ohne weiteres angängig, weil dieser Fehler sehr klein ist. Setzen wir daher in den Gleichungen (1) § 2  $dB_1$  gleich Null, so gehen die Gleichungen (3) § 2 für Punkt  $P_2$  in folgende über:

$$\begin{aligned}
dB_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} dA_{1.2} \\
dL_2 &= dL_1 + q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} dA_{1.2} \\
dA_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} dA_{1.2}
\end{aligned}$$

Da auch  $L_1$  als unveränderlich gilt, wird auch  $dL_1 = 0$ . Für die Folge setzen wir jedoch nach (1) § 2  $dL_1 = \delta \lambda_1$ , unter der Voraussetzung, dass  $\delta \lambda_1$  ebenfalls Null ist.

Dann wird

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} dA_{1.2} \\ dL_2 &= q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} dA_{1.2} + \delta \lambda_1 \\ dA_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} dA_{1.2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ferner hat man die Gleichungen (4) § 2:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= \varphi_2 - B_2^0 - \xi_2 + \delta \varphi_2 \\ dL_2 &= \lambda_2 - L_2^0 - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta \lambda_2 \\ dA_{1.2}^0 &= \delta \alpha_{1.2} \\ dA_{2.1}^0 &= \alpha_{2.1} - A_{2.1}^0 - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta \alpha_{2.1} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

oder allgemein — unter Ausschluss des Punktes  $P_1$ :

$$\left. \begin{aligned} dB_n &= \varphi_n - B_n^0 - \xi_n + \delta \varphi_n \\ dL_n &= \lambda_n - L_n^0 - \eta_n \sec \varphi_n + \delta \lambda_n \\ dA_{n-1,n} &= \alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^0 - \eta_{n-1} \operatorname{tg} \varphi_{n-1} + \delta \alpha_{n-1,n} \\ dA_{n,n-1} &= \alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^0 - \eta_n \operatorname{tg} \varphi_n + \delta \alpha_{n,n-1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wird (26) in (25) eingesetzt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - B_2^0 - \xi_2 + \delta \varphi_2 &= p_3^{1.2} ds_{1.2} + p_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2} \\ \lambda_2 - L_2^0 - \eta_2 \sec \varphi_2 + \delta \lambda_2 &= + \delta \lambda_1 + q_3^{1.2} ds_{1.2} + q_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2} \\ \alpha_{1.2} - A_{2.1}^0 - \eta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta \alpha_{2.1} &= r_3^{1.2} ds_{1.2} + r_4^{1.2} \delta \alpha_{1.2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$



Hier darf nochmals darauf hingewiesen werden, dass die dritte Gleichung von (26)  $dA_{1,2}^{\circ} = \delta\alpha_{1,2}$  und damit natürlich auch die Gleichungen (28) nur unter der Voraussetzung gelten, dass bei der Berechnung der Näherungskordinaten  $B_2^{\circ}, L_2^{\circ}$  für den Ausgangspunkt die Koordinaten  $B_1 = \varphi_1 - \xi_1, L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1$  und das Azimut  $A_{1,2} = \alpha_{1,2} - \eta_1 \tan \varphi_1$  angesetzt wurden.

Von den Gleichungen (28) gehen wir, wie im § 2, über zu

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \delta\varphi_2 - P_3^{1,2} \delta s_{1,2} - P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - L_2^{\circ}) - Q_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 - Q_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} - Q_3^{1,2} \delta s_{1,2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - R_3^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ \delta\alpha_{2,1} \operatorname{cosec} \varphi_2 - R_4^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta\alpha_{1,2} - R_3^{1,2} \operatorname{cosec} \varphi_2 \delta s_{1,2}.\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen von (7) § 2, erhalten wir daraus

$$\left. \begin{aligned}\xi_2 &= (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + \delta\varphi_2 + P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + P_3^{1,2} \delta s_{1,2} + P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} \\ \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\lambda_2 - L_2^{\circ}) + \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 + Q_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ Q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + Q_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} \\ \nu_2 = \eta_2 \sec \varphi_2 &= (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ \delta\alpha_{2,1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1,2} \delta s_{1,2} + R_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2}\end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Subtrahieren wir in (29) die 2. Gleichung von der dritten, so erhalten wir die Laplacesche Gleichung für  $P_2$  in folgender Form:

$$\begin{aligned}(\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - (\lambda_2 - L_2^{\circ}) - \delta\lambda_2 + \delta\lambda_1 + \\ + \delta\alpha_{2,1} \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R_4^{1,2} - Q_4^{1,2}) \delta\alpha_{1,2} = 0.\end{aligned} \quad (29a)$$

Hierin ist

$$R_4^{1,2} - Q_4^{1,2} = -\cos \frac{s_{1,2}}{R} \operatorname{cosec} \varphi_2 = -\operatorname{cosec} \varphi_2.$$

Für ein maximales  $s = 250$  ergibt sich, wenn  $\cos \frac{s}{R} = 1$  gesetzt wird, ein Fehler von  $\frac{1}{1250} \delta\alpha$ ; dies entspricht in der Laplaceschen Gleichung einem Fehler von  $0,0003''$ , der vernachlässigt werden darf.

Damit wird

$$\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ} - [(\lambda_2 - L_2^{\circ})] \sin \varphi_2 - (\delta\lambda_2 - \delta\lambda_1) \sin \varphi_2 + \delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2} = 0.$$

Allgemein schreiben wir die Laplacesche Gleichung in folgender Form:

$$\begin{aligned}\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2} - \delta\lambda_2 \sin \varphi_2 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^{\circ}) - \\ - (\lambda_2 - L_2^{\circ}) \sin \varphi_2 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0.\end{aligned} \quad (30)$$

Für Punkt  $P_3$  ergibt sich nach den Gleichungen (9), (10) und (11) § 2:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^{\circ}) + P_1^{2,3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + P_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + P_4^{2,3} (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^{\circ}) + \\ &+ P_1^{2,3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) - P_2^{2,3} \nu_2 + P_3^{2,3} \delta s_{2,3} + P_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3} + \delta\varphi_3 \\ \nu_3 &= (\lambda_3 - \lambda_2) - (L_3^{\circ} - L_2^{\circ}) + Q_1^{2,3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + Q_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ &+ Q_4^{2,3} (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^{\circ}) + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 + Q_1^{2,3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) + Q_2^{2,3} \nu_2 + Q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + Q_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3} \\ \nu_3 &= (\alpha_{3,2} - A_{3,2}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + R_1^{2,3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) + R_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ &+ R_4^{2,3} (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^{\circ}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} + R_1^{2,3} (\delta\varphi_2 - \xi_2) - R_2^{2,3} \nu_2 + R_3^{2,3} \delta s_{2,3} + R_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3}.\end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin  $(\delta\varphi_2 - \xi_2)$  und  $\nu_2$  durch die entsprechenden Ausdrücke gemäss der ersten und dritten Gleichung von (29), so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}\xi_3 &= (\varphi_3 - B_3^{\circ}) + P_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) - P_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ P_4^{2,3} (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^{\circ}) + \delta\varphi_3 + P_3^{2,3} \delta s_{2,3} - P_1^{2,3} P_3^{1,2} \delta s_{1,2} + \\ &+ P_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3} - P_1^{2,3} P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} - P_2^{2,3} (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 - \\ &- P_2^{2,3} R_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - P_2^{2,3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - P_2^{2,3} R_3^{1,2} \delta s_{1,2} - \\ &- P_2^{2,3} R_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} \\ \nu_3 &= \omega_{\lambda}^{2,3} - Q_1^{2,3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - Q_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 - Q_1^{2,3} P_3^{1,2} \delta s_{1,2} + Q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + Q_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3} - \\ &- Q_1^{2,3} P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} + Q_2^{2,3} \omega_{\alpha}^{1,2} + Q_2^{2,3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + \\ &+ Q_2^{2,3} R_3^{1,2} \delta s_{1,2} + Q_2^{2,3} R_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} \\ \nu_3 &= \omega_{\alpha}^{2,3} - R_1^{2,3} (\varphi_2 - B_2^{\circ}) - R_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ &+ \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - R_1^{2,3} P_3^{1,2} \delta s_{1,2} - R_1^{2,3} P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} + \\ &+ R_2^{2,3} \delta s_{2,3} + R_4^{2,3} \delta\alpha_{2,3} - R_2^{2,3} \omega_{\alpha}^{1,2} - R_2^{2,3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - \\ &- R_2^{2,3} R_3^{1,2} \delta s_{1,2} - R_2^{2,3} R_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2}\end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Hierin bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned}\omega_{\lambda}^{n-1,n} &= (\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L_n^{\circ} - L_{n-1}^{\circ}) + Q^{n-1,n} (\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ}) + \\ &+ Q_{\lambda}^{n-1,n} (s'_{n-1,n} - s^{\circ}_{n-1,n}) + Q_4 (\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^{\circ}) \\ \omega_{\alpha}^{n-1,n} &= (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_n + R_1^{n-1,n} (\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ}) + \\ &+ R_3^{n-1,n} (s'_{n-1,n} - s^{\circ}_{n-1,n}) + R_4^{n-1,n} (\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}^{\circ})\end{aligned} \right\} \quad (32)$$

[Die Glieder mit  $(\varphi_{n-1} - B_{n-1}^{\circ})$  gehen in die Gleichungen für  $\omega_{\lambda}^{1,2}$  und  $\omega_{\alpha}^{1,2}$  nicht ein.]  
Aus (31) erhalten wir durch Subtraktion der 2. von der 3. Gleichung unter Beachtung von (32)

$$\begin{aligned}(\alpha_{3,2} - A_{3,2}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + (R_4^{2,3} - Q_4^{2,3}) (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^{\circ}) - \\ - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L_3^{\circ} - L_2^{\circ})] - P_3^{1,2} (R_1^{2,3} - Q_1^{2,3}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - \\ - (R_2^{2,3} + Q_2^{2,3}) [(\alpha_{2,1} - A_{2,1}^{\circ}) \operatorname{cosec} \varphi_2 + R_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2})] - \\ - \delta\lambda_3 + \delta\lambda_2 - P_3^{1,2} (R_1^{2,3} - Q_1^{2,3}) \delta s_{1,2} - (R_2^{2,3} + Q_2^{2,3}) R_3^{1,2} \delta s_{1,2} + \\ + (R_4^{2,3} - Q_4^{2,3}) \delta\alpha_{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - (R_2^{2,3} + Q_2^{2,3}) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - \\ - (R_1^{2,3} - Q_1^{2,3}) P_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} - (R_2^{2,3} + Q_2^{2,3}) R_4^{1,2} \delta\alpha_{1,2} = 0.\end{aligned} \quad (33)$$

Zur Umformung der Koeffizienten in (33) werden die Bezeichnungen (7) eingeführt. Wir erhalten dann unter der Annahme  $\frac{s}{R} < \frac{1}{25}$

$$\left. \begin{aligned}R_4^{2,3} - Q_4^{2,3} &= -\operatorname{cosec} \varphi_3 \dots \text{mit der Näherung } \cos \frac{s}{R} = 1 \\ R_2^{2,3} + Q_2^{2,3} &= 1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \\ R_1^{2,3} - Q_1^{2,3} &= -\sin l_{2,3} \left( \frac{1}{\sin \varphi_3 \cos \varphi_3} - \frac{\sin \varphi_3}{\cos \varphi_3} \right) = -\sin l_{2,3} \cotg \varphi_3\end{aligned} \right\} \quad (34)$$

unter Vernachlässigung der Grössen  $e^2 l$ .



Damit sieht man, dass in (33) der allgemeine Koeffizient bei  $\delta\alpha_{1,2}$  gleich ist

$$-\sin l_{2,3} \cotg \varphi_3 \cdot \frac{s_{1,2}}{N_2} \sin A_{2,1} + \operatorname{cosec} \varphi_2 - \frac{1}{\sin \varphi_3} - \frac{s_{1,2}}{N_2} \cos A_{2,1} \sec \varphi_2 + \\ + \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} \sec \varphi_2 \cdot \frac{s_{1,2}}{N_2} \cos A_{2,1} = \operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3,$$

wenn die Glieder mit  $\frac{s^2}{R^2}$  vernachlässigt werden.

Der allgemeine Koeffizient von  $\delta s_{1,2}$  (oder von  $s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}$ ) ist

$$\sin l_{2,3} \cotg \varphi_3 \cdot \frac{\cos A_{2,1}}{M_2 \sin l''} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3}\right) \frac{\sin A_{2,1}}{N_2 \sin l'' \cos \varphi_2} = \\ = -\frac{s_{2,3} \sin A_{3,2}}{N_2 M_2 \sin l''} \cdot \frac{\cos A_{2,1}}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2,3} \cos A_{3,2} \sin A_{2,1}}{M_2 N_2 \sin l'' \sin \varphi_3} = \\ = -\frac{s_{2,3}}{N_2 M_2 \sin l''} \cdot \frac{\sin(A_{3,2} - A_{2,1})}{\sin \varphi_3},$$

wobei wiederum die Grössen mit  $\frac{s^2}{R^2}$  vernachlässigt wurden. Für  $\delta s = 3 m$  wird der Einfluss des Gliedes mit  $\delta s_{1,2}$  kleiner als  $\pm 0,003''$ .

Deshalb darf die Gleichung (33) in folgender Form geschrieben werden:

$$(\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] - \\ - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3}\right) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - \delta\lambda_3 + \delta\lambda_2 + \\ + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2,3} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3}\right) \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + \\ + (\operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_3) \delta\alpha_{1,2} + \\ + \frac{s_{2,3}}{M_2 N_2 \sin l''} \frac{\sin(A^{\circ}_{2,3} - A^{\circ}_{2,1})}{\sin \varphi_3} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \quad (35a)$$

Damit erhalten wir die endgültige Form der Laplaceschen Gleichung für  $P_3$ :

$$\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}) - (\delta\lambda_3 - \delta\lambda_2) \sin \varphi_3 + \\ + \left\{ (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + [(\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A^{\circ}_{1,2})] \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) - \right. \\ \left. - [(\lambda_3 - \lambda_2) - (L^{\circ}_3 - L^{\circ}_2)] \sin \varphi_3 \right\} + (\lambda_1 - L_1) \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) \sin \varphi_1 + \\ + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2}\right) \sin \varphi_1 \delta\lambda_1 + \frac{s_{2,3} \sin(A^{\circ}_{2,3} - A^{\circ}_{2,1})}{M_2 N_2 \sin l''} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \quad (35)$$

Die Gleichung (35) gilt allgemein, sodass sie die allgemeine Form für die Laplacesche Bedingung für beliebige Punkte darstellt, umso mehr als  $s^{\circ}_{1,2}$  immer  $s'_{1,2}$  gleichgesetzt werden kann. Für den Punkt  $P_4$  erhalten wir für  $v$

$$v_4 = \omega^{3,4}_\lambda + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 + Q^{3,4}_1 (\delta\varphi_3 - \xi_3) + Q^{3,4}_2 v_3 + Q^{3,4}_3 \delta s_{3,4} + Q^{3,4}_4 \delta\alpha_{3,4} \\ v_1 = \omega^{3,4}_\alpha + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} + R^{3,4}_1 (\delta\varphi_3 - \xi_3) - R^{3,4}_2 v_3 + R^{3,4}_3 \delta s_{3,4} + R^{3,4}_4 \delta\alpha_{3,4}.$$

Werden hierin  $\xi_3$  und  $v_3$  durch die 1. und 3. Gleichung von (31) ersetzt, so wird

$$v_1 = \omega^{3,4}_\lambda + \delta\lambda_4 - \delta\lambda_3 - Q^{3,4}_1 [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P^{2,3}_3 (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) - P^{2,3}_1 P^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2})] - \\ - Q^{3,4}_1 [P^{2,3}_4 (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + P^{2,3}_3 \delta s_{2,3} - P^{2,3}_1 P^{1,2}_3 \delta s_{1,2} + P^{2,3}_4 \delta\alpha_{2,3} - P^{2,3}_1 P^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] - \\ - Q^{3,4}_1 [P^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) + P^{2,3}_2 R^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \\ + P^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + P^{2,3}_2 R^{1,2}_3 \delta s_{1,2} + P^{2,3}_2 R^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] + \\ + Q^{3,4}_2 [\omega^{2,3}_\alpha - R^{2,3}_1 (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R^{2,3}_1 P^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - \\ - R^{2,3}_1 P^{1,2}_3 \delta s_{1,2}] + Q^{3,4}_2 [-R^{2,3}_1 P^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2} + R^{2,3}_3 \delta s_{2,3} + R^{2,3}_4 \delta\alpha_{2,3} - R^{2,3}_2 \omega^{1,2}_\alpha - \\ - R^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - R^{2,3}_2 R^{1,2}_3 \delta s_{1,2} - R^{2,3}_2 R^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] + Q^{3,4}_3 \delta s_{3,4} + Q^{3,4}_4 \delta\alpha_{3,4}, \quad (36)$$

$$v_4 = \omega^{3,4}_\alpha + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} - R^{3,4}_1 [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + P^{2,3}_3 (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) - \\ - P^{2,3}_1 P^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + P^{2,3}_4 (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3})] - R^{3,4}_1 [P^{2,3}_3 \delta s_{2,3} - P^{2,3}_1 P^{1,2}_3 \delta s_{1,2} + \\ + P^{2,3}_4 \delta\alpha_{2,3} - P^{2,3}_1 P^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] + R^{3,4}_1 P^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) + \\ + R^{3,4}_1 [P^{2,3}_2 R^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + P^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} + P^{2,3}_2 R^{1,2}_3 \delta s_{1,2} + P^{2,3}_2 R^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] - \\ - R^{3,4}_2 [\omega^{2,3}_\alpha - R^{2,3}_1 (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R^{2,3}_1 P^{1,2}_3 (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - R^{2,3}_1 P^{1,2}_3 \delta s_{1,2}] - \\ - R^{3,4}_2 [-R^{2,3}_1 P^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2} + R^{2,3}_3 \delta s_{2,3} + R^{2,3}_4 \delta\alpha_{2,3} - R^{2,3}_2 \omega^{1,2}_\alpha - \\ - R^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot \delta\alpha_{2,1} - R^{2,3}_2 R^{1,2}_3 \delta s_{1,2} - R^{2,3}_2 R^{1,2}_4 \delta\alpha_{1,2}] + R^{3,4}_3 \delta s_{3,4} + R^{3,4}_4 \delta\alpha_{3,4}. \quad (37)$$

Wir subtrahieren nun (36) von (37), wobei wir die Beziehungen (34) (unter Vertauschung der Indizes) benutzen.

Der allgemeine Koeffizient von  $\delta s_{1,2}$  wird:

$$-\sin l_{3,4} \cotg \varphi_4 (P^{2,3}_1 P^{1,2}_3 + P^{2,3}_2 R^{1,2}_3) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (R^{2,3}_1 P^{1,2}_3 + R^{2,3}_2 R^{1,2}_3) = \\ = + \frac{\sin l_{3,4} \cotg \varphi_4 \cos A_{2,1}}{M \sin l''} - \frac{\sin \varphi_4 - \sin \varphi_3 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_4 \sin \varphi_3 N \sin l'' \cos \varphi_2} \frac{\sin A_{2,1}}{\sin \varphi_3} = \\ = \frac{s_{3,4} \sin A_{3,4} \cos A_{2,1}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3,4} \cos A_{3,4} \sin A_{2,1}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} = \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin(A_{3,4} - A_{2,1})}{\sin \varphi_4}.$$

Der allgemeine Koeffizient von  $\delta s_{2,3}$  wird:

$$\sin l_{3,4} \cotg \varphi_4 \cdot \frac{\cos A_{3,2}}{M_3 \sin l''} - \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \frac{\sin A_{3,2}}{N_3 \sin l'' \cos \varphi_3} = \\ = \frac{s_{3,4} \sin A_{3,4} \cos A_{3,2}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} - \frac{s_{3,4} \cos A_{3,4} \sin A_{3,2}}{M_3 N_3 \sin l'' \sin \varphi_4} = \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin(A_{3,4} - A_{3,2})}{\sin \varphi_4}.$$

Der Koeffizient von  $\delta s_{3,4}$  wird Null.

Der allgemeine Koeffizient von  $\delta\alpha_{1,2}$  wird:

$$-\sin l_{3,4} \cotg \varphi_4 (P^{2,3}_1 P^{1,2}_4 + P^{2,3}_2 R^{1,2}_4) + \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (R^{2,3}_1 P^{1,2}_4 + R^{2,3}_2 R^{1,2}_4) = \\ = \left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) (\operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \operatorname{cosec} \varphi_2) = \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.$$

Der allgemeine Koeffizient bei  $\delta\alpha_{2,1}$  wird:

$$-\sin l_{3,4} \cotg \varphi_4 P^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 + (R^{3,4}_2 + Q^{3,4}_2) R^{2,3}_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 = \\ = -\left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \operatorname{cosec} \varphi_3 \sin \varphi_2 \operatorname{cosec} \varphi_2 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4).$$



Der allgemeine Koeffizient bei  $\delta\alpha_{2,3}$  wird:

$$\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4.$$

Der Koeffizient bei  $\delta\alpha_{3,2}$  wird:

$$-\left(1 - \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_4}\right) \operatorname{cosec} \varphi_3 = -(\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4).$$

Der Koeffizient bei  $\delta\alpha_{3,4}$  wird  $-\operatorname{cosec} \varphi_4$ ; damit wird die Laplacesche Gleichung für  $P_4$ :

$$\begin{aligned} & \omega_{\alpha}^{3,4} - \omega_{\lambda}^{3,4} - (R_1^{3,4} - Q_1^{3,4}) [(\varphi_3 - B^{\circ}_3) + \\ & + P_3^{2,3} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) - P_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) + P_4^{2,3} (a_{2,3} - A^{\circ}_{2,3})] + \\ & + (R_1^{3,4} - Q_1^{3,4}) [P_2^{2,3} \operatorname{cosec} \varphi_2 \cdot (a_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) + P_2^{2,3} R_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2})] - \\ & - (R_2^{3,4} + Q_2^{3,4}) [\omega_{\alpha}^{2,3} - R_1^{2,3} (\varphi_2 - B^{\circ}_2) - R_1^{2,3} P_3^{1,2} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - R_2^{2,3} \omega_{\alpha}^{1,2}] + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3,4} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{3,2} + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,3} - (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,1} + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_4) \delta\alpha_{2,1} + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{3,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,3} + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{2,1})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,1} - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) \operatorname{cosec} \varphi_4 - [(\lambda_1 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (a_{3,1} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [(a_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (a_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (a_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (a_{1,2} - A_{1,2})] + \\ & + (\lambda_1 + \delta\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2})}{\sin \varphi_4} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{2,1})}{\sin \varphi_4} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) - \delta\lambda_4 + \delta\lambda_3 + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta\alpha_{3,4} + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}] + \\ & + (\operatorname{cosec} \varphi_4 - \operatorname{cosec} \varphi_3) [\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}] + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,3} + \\ & + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A_{3,4} - A_{1,2})}{\sin \varphi_4} \delta s_{2,1} = 0. \end{aligned} \quad (37-a)$$

Unter Vernachlässigung der Glieder, die einen Fehler bis 0,01'' bewirken, kann die Laplacesche Gleichung endgültig in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{3,4} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}) + (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}) + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1] - \\ & - (\delta\lambda_4 - \delta\lambda_3) \sin \varphi_4 + (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) - (\alpha_{3,4} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) [(a_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (a_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (a_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (a_{1,2} - A_{1,2})] - \\ & - [(\lambda_4 - \lambda_3) - (L^{\circ}_4 - L^{\circ}_3)] \sin \varphi_4 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{3,2})}{\sin \varphi_4} (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_4}{\sin \varphi_3}\right) (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \frac{s_{3,4}}{M_3 N_3 \sin l''} \frac{\sin (A^{\circ}_{3,4} - A^{\circ}_{2,1})}{\sin \varphi_4} (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Damit wird für den Punkt  $P_n$ , wenn die Übertragung der Koordinaten längs der Linien  $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n$  erfolgt, die Laplacesche Gleichung:

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{n,n-1} - \delta\alpha_{n-1,n} + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) [(\delta\alpha_{n-1,n-2} - \delta\alpha_{n-2,n-1}) + \\ & + (\delta\alpha_{n-2,n-3} - \delta\alpha_{n-3,n-2}) + \dots + (\delta\alpha_{5,4} - \delta\alpha_{4,5}) + (\delta\alpha_{4,3} - \delta\alpha_{3,4}) + \\ & + (\delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3}) + (\delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2}) + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1] - (\delta\lambda_n - \delta\lambda_{n-1}) \sin \varphi_n + \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A^{\circ}_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n}) + \\ & + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) [(\alpha_{n-1,n-2} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) - (\alpha_{n-2,n-1} - A^{\circ}_{n-2,n-1}) + \\ & + (\alpha_{n-2,n-3} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) - (\alpha_{n-3,n-2} - A^{\circ}_{n-3,n-2}) + \dots + \\ & + (\alpha_{5,4} - A^{\circ}_{5,4}) - (\alpha_{4,5} - A^{\circ}_{4,5}) + (\alpha_{4,3} - A^{\circ}_{4,3}) - (\alpha_{3,4} - A^{\circ}_{3,4}) + \\ & + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (\alpha_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + (\alpha_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (\alpha_{1,2} - A_{1,2})] - \\ & - [(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - (L^{\circ}_n - L^{\circ}_{n-1})] \sin \varphi_n + \left(1 - \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_{n-1}}\right) \sin \varphi_1 (\lambda_1 - L_1) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) (s'_{n-2,n-1} - s^{\circ}_{n-2,n-1}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) (s'_{n-3,n-2} - s^{\circ}_{n-3,n-2}) + \\ & \dots \dots \dots + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{5,4}) (s'_{4,5} - s^{\circ}_{4,5}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{4,3}) (s'_{3,4} - s^{\circ}_{3,4}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{3,2}) (s'_{2,3} - s^{\circ}_{2,3}) + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{M_n N_n \sin l''} \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Anstelle dieser allgemeinen Formeln können die Laplaceschen Gleichungen auch auf folgende Weise aufgestellt werden. Wir multiplizieren Gleichung (30) mit  $\operatorname{cosec} \varphi_2$  und addieren sie zu (35a). Dann wird für  $P_3$ :

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{3,2} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{2,1} - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot \delta\alpha_{1,2} - \delta\lambda_3 + \\ & + \delta\lambda_1 + \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} + \frac{s_{2,3}}{M_2 N_2 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{2,3} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 + \\ & + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) \operatorname{cosec} \varphi_3 - \operatorname{cosec} \varphi_3 (a_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (a_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_3 \cdot (a_{1,2} - A_{1,2}) - (\lambda_3 - L^{\circ}_3) - (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_3} = 0, \end{aligned} \quad (39-a)$$

oder

$$\begin{aligned} & \delta\alpha_{3,2} - \delta\alpha_{2,3} + \delta\alpha_{2,1} - \delta\alpha_{1,2} - \delta\lambda_3 \sin \varphi_3 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + (\alpha_{3,2} - A^{\circ}_{3,2}) - (a_{2,3} - A^{\circ}_{2,3}) + \\ & + (a_{2,1} - A^{\circ}_{2,1}) - (a_{1,2} - A_{1,2}) - (\lambda_3 - L_3) \sin \varphi_3 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{2,3}}{M_2 N_2 \sin l''} \sin (A^{\circ}_{2,3} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_{1,2} - s^{\circ}_{1,2}) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$



Die Addition von (37-a) und (39-a) ergibt die Laplacesche Gleichung in  $P_4$  in folgender Form:

$$\begin{aligned} & \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{4,3} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{3,4} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{3,2} - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{2,3} + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{2,1} - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_4 + \delta \lambda_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} + \frac{\operatorname{cosec} \varphi_4}{MN \sin 1''} s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \frac{\operatorname{cosec} \varphi_4}{MN \sin 1''} [s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + s_{2,3} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ)] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\ & + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{4,3} - A_{4,3}^\circ) - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3,4} - A_{3,4}^\circ) + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{3,2} - A_{3,2}^\circ) - \\ & - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{2,3} - A_{2,3}^\circ) + \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{2,1} - A_{2,1}^\circ) - \operatorname{cosec} \varphi_4 \cdot (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - \\ & - (\lambda_4 - L_4) + (\lambda_1 - L_1) \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_4} = 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{4,3} + (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) + (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_4 \sin \varphi_4 + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \frac{1}{MN \sin 1''} [s_{3,4} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + s_{2,3} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ)] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\ & + (\alpha_{4,3} - A_{4,3}^\circ) + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^\circ - A_{3,4}^\circ)] + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^\circ - A_{2,3}^\circ)] - \\ & - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - (\lambda_4 - L_4) \sin \varphi_4 + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Damit wird die allgemeine Form für die Laplacesche Gleichung im Punkt  $P_n$  bei einer Übertragung über  $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_4, \dots, P_{n-1} P_n$ :

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_{n,n-1} + (\delta \alpha_{n-1,n-2} - \delta \alpha_{n-1,n}) + (\delta \alpha_{n-2,n-3} - \delta \alpha_{n-2,n-1}) + \dots + \\ & + (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) + (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) + (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \delta \alpha_{1,2} - \delta \lambda_n \sin \varphi_n + \delta \lambda_1 \sin \varphi_1 + \\ & + \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) \right] (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-2,n-3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) \right] (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) + \\ & \dots + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{3,2}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3,2}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{3,2}^\circ) \right] (s'_{2,3} - s_{2,3}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,n}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-1,n}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin (A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \right. \\ & + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{s_{3,4}}{MN \sin 1''} \sin (A_{3,4}^\circ - A_{2,1}^\circ) + \frac{s_{2,3}}{MN \sin 1''} \sin (A_{2,3}^\circ - A_{2,1}^\circ) \Big] (s'_{1,2} - s_{1,2}^\circ) + \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^\circ) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,n}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - (A_{n-3,n-4}^\circ - A_{n-3,n-2}^\circ)] + \\ & \dots + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,5}) - (A_{4,3}^\circ - A_{4,5}^\circ)] + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2}^\circ - A_{3,4}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1}^\circ - A_{2,3}^\circ)] - (\alpha_{1,2} - A_{1,2}^\circ) - \\ & - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Die Richtigkeit der Verallgemeinerung beim Übergang von den Einzelformeln zu den allgemeinen Formeln (39) und (42) ist hinreichend begründet. Zur Prüfung der richtigen Aufstellung dieser Ausdrücke wurde noch die Laplacesche Gleichung für Punkt  $P_8$  über das Polygon  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8$  aufgestellt.

Die Ausdrücke für  $v_{\lambda}^8$  und  $v_{\alpha}^8$  zeigen für die Koeffizienten von  $\delta s$  das Ergebnis dieser Aufstellung.

Koeffizient in  $v_{\alpha}^8$ :

$$\begin{aligned} & R_3^{7,8} \delta s_{7,8} + (-R_1^{7,8} P_3^{6,7} - R_2^{7,8} R_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{5,6} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{5,6} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{4,5} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{4,5} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{4,5} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{3,4} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{3,4} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{3,4} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{3,4} + \\ & + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{2,3} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{2,3} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{2,3} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{2,3} - \\ & - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{2,3} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (-R_1^{7,8} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{1,2} - \\ & - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{1,2} - R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{1,2} + \\ & + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{1,2} + R_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_3^{1,2}) \delta s_{1,2}. \end{aligned}$$

Koeffizient in  $v_{\lambda}^8$ :

$$\begin{aligned} & Q_3^{7,8} \delta s_{7,8} + (-Q_1^{7,8} P_3^{6,7} + Q_2^{7,8} R_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{5,6} + Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{5,6} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{4,5} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{4,5} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{4,5} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{3,4} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{3,4} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{3,4} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{3,4} - \\ & - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{2,3} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{2,3} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{2,3} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{2,3} + \\ & + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_3^{2,3} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (-Q_1^{7,8} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_1^{6,7} P_3^{1,2} + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_1^{5,6} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_1^{4,5} P_3^{1,2} + \\ & + Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_1^{3,4} P_3^{1,2} - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_3^{1,2} - \\ & - Q_2^{7,8} R_2^{6,7} R_2^{5,6} R_2^{4,5} R_2^{3,4} R_2^{2,3} R_3^{1,2}) \delta s_{1,2}. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken sind die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt worden. ( $P_1$  wurde — 1 gesetzt, die Glieder mit  $R_1 P_2$  abgeworfen usw.).



Die Glieder mit  $\delta s$  werden für die Laplacesche Gleichung für  $P_8$  nach (30) in folgender Form erhalten:

$$\frac{\operatorname{cosec} \varphi_n}{MN \sin 1''} s_{7.8} \left\{ \sin(A_{7.8}^\circ - A_{7.6}^\circ) \delta s_{6.7} + \sin(A_{7.8}^\circ - A_{6.5}^\circ) \delta s_{5.6} + \right. \\ \left. + \sin(A_{7.8}^\circ - A_{5.4}^\circ) \delta s_{4.5} + \sin(A_{7.8}^\circ - A_{4.3}^\circ) \delta s_{3.4} + \right. \\ \left. + \sin(A_{7.8}^\circ - A_{3.2}^\circ) \delta s_{2.3} + \sin(A_{7.8}^\circ - A_{2.1}^\circ) \delta s_{1.2} \right\}. \quad (43)$$

In (42) sind die Glieder der Art (43) zu summieren.

In den Formeln (39) und (42) wurden die Glieder mit  $\delta s$  vernachlässigt; unter der Voraussetzung, dass  $\delta s$  kaum grösser als 1,5 m sein wird, können die Glieder mit  $\delta s$  in den Laplaceschen Gleichungen keinen grösseren Einfluss als 0,001'' haben; die Glieder mit  $(s' - s^\circ)$  hingegen können hin und wieder 0,01'' erreichen; es müssen daher bei der Berechnung der freien Glieder der Laplaceschen Gleichung diese Glieder berücksichtigt werden.

Nach Abb. 4 stellt das Glied in (42) mit  $(s'_{n-2, n-1} - s^\circ_{n-2, n-1})$  die Projektion von  $s_{n-1, n}$  auf das Lot zur Richtung  $P_{n-2}, P_{n-1}$  dar (Abschnitt  $k_{n-1}$  mit neg. Zeichen).

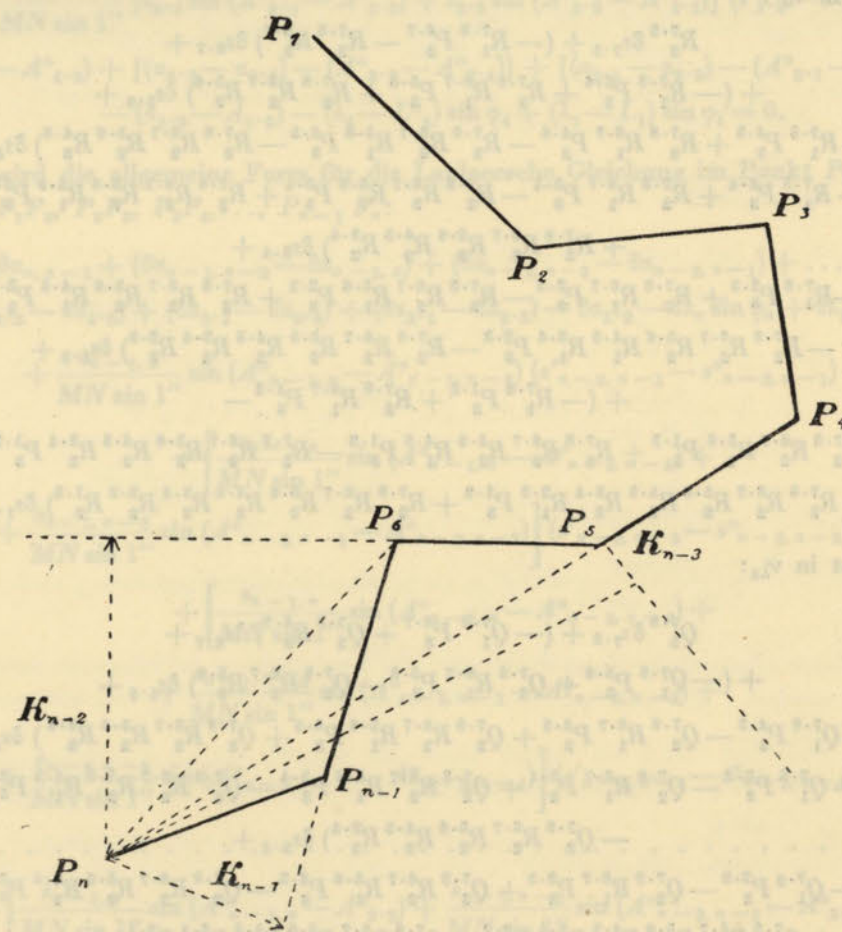


Abb. 4.

Das Glied derselben Formel mit  $(s'_{n-2, n-2} - s^\circ_{n-2, n-2})$  ist die Projektion der Diagonalen  $P_n P_{n-2}$  auf das Lot zu  $P_{n-2} P_{n-3}$ ; das Glied mit  $(s'_{n-4, n-3} - s^\circ_{n-4, n-3})$  ist die Projektion der Diagonalen  $P_n P_{n-3}$  auf das Lot zu  $P_{n-3} P_{n-4}$  (Absolut-Abschnitt  $k_{n-3}$ ) usw. Auf diese Weise kann man die Koeffizienten von  $(s' - s^\circ)$  in (42) graphisch aus dem Triangulationsschema im Massstab 1:1 000 000 oder 1:1 500 000 bestimmen. Daher wird zweckmässig die Formel (42) benutzt.

Beim Vergleich von (39) und (42) müssen folgende Ausgangsdaten für die Berechnung von  $B^\circ$  und  $L^\circ$  genommen werden

$$B_1 = \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1.2} = \alpha_{1.2} - \eta_1 \tan \varphi_1$$

und die Berechnung auf dem endgültig bestimmten Ellipsoid durchgeführt werden.

Da bei der Berechnung von  $B^\circ$  und  $L^\circ$  für 2/3 der geodätischen Linien die  $s'$  benutzt werden können, die aus der Ausgleichung der Teilstücke erhalten wurden, so werden für 2/3 der Glieder mit  $(s' - s^\circ)$  in (42) die Faktoren  $(s' - s^\circ)$  Null sein, wodurch die Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen erheblich erleichtert wird.

Damit wurde das Ziel erreicht, unabhängig von  $\xi$  und  $\eta$  der Helmertschen Methode eine allgemeine Formel für die Laplaceschen Gleichungen zu entwickeln.

## § 5. Aufstellung der Polygonbedingungen.

Im nachstehenden geschlossenen Polygon  $P_1 P_2 P_3 \dots P_8 P_1$  (Abb. 5) wurden nach der Ausgleichung der Teilstücke die geodätischen Koordinaten in folgender Weise berechnet:

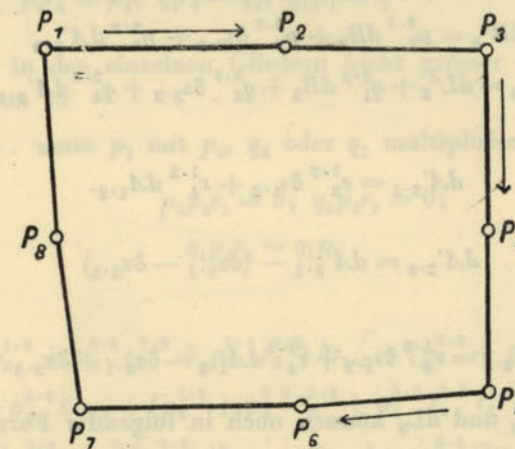


Abb. 5.

a) für  $P_1^*$  wurden die Koordinaten, die nach Festlegung der geodätischen Ausgangsdaten (§ 2) und der Ausmasse des Ellipsoids vom Ausgangspunkt der ganzen Triangulation her übertragen wurden, als Ausgangswerte angenommen;

b) mit diesen Koordinaten  $B_1^\circ$  und  $L_1^\circ$  berechneten wir mit dem geodätischen Azimut  $A_{1.2}$  und der Entfernung  $s'_{1.2}$ , die aus der Ausgleichung der Teilstücke erhalten wurde, die Koordinaten von  $P_2$ ; auf diesem Wege erhielten wir für  $P_2$  die Koordinaten  $B_2^\circ$  und  $L_2^\circ$  und das geodätische Azimut  $A'_{2.1}$ ;

c) mit dem Winkel  $P_1 P_2 P_3$  aus der Ausgleichung der Teilstücke, der gleich ist  $\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}$ , und mit dem Azimut  $A'_{2.1}$  bestimmen wir das geodätische Azimut:

$$A'_{2.3} = A'_{2.1} - (\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) \quad (44)$$

Mit dem Azimut  $A'_{2.3}$  und der Entfernung  $s'_{2.3}$  berechnen wir die geodätischen Koordinaten  $B_3^\circ$  und  $L_3^\circ$  und das geodätische Azimut  $A'_{3.2}$ ;

\*) Hier ist  $P_1$  der Anfangspunkt irgendeines Polygons, der keineswegs mit dem Ausgangspunkt  $P_1$  der ganzen Triangulierung zusammenfällt. (Abb. 1).



d) auf dieselbe Weise erhalten wir mit (44) die Koordinaten von  $P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_1$  und die geodätischen Azimute  $A'_{3,4}, A'_{4,3}, \dots, A'_{8,1}, A'_{1,8}$ . Wenn wir die auf diese Weise erhaltenen Koordinaten von  $P_1$  mit  $(B^{\circ}_1)'$  und  $(L^{\circ}_1)'$  bezeichnen, so ergibt

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 - (B^{\circ}_1)' & \text{ den Widerspruch des Polygons in der Breite} \\ L^{\circ}_1 - (L^{\circ}_1)' & \text{ " " " " in der Länge.} \end{aligned}$$

Die Widersprüche des Polygons werden von den Verbesserungen der geographischen Lage des Polygons und seiner Orientierung so wenig abhängen, dass wir in der folgenden Polygon-Ausgleichung

$$dB^{\circ}_1 = 0; dL^{\circ}_1 = 0 \text{ setzen dürfen.}$$

Aus demselben Grunde könnten wir

$$dA_{1,2} = 0 \text{ setzen.}$$

Aber die letzte Gleichung wollen wir im Hinblick auf die gemeinsame Auflösung der Polygon-Bedingungen und der Laplaceschen Bedingungen einstweilen nicht anwenden.

Mit den Bezeichnungen des § 2 schreiben wir

$$\begin{aligned} dB^{\circ}_2 &= p_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dL^{\circ}_2 &= q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + q_4^{1,2} dA_{1,2} \\ dB^{\circ}_3 &= p_1^{2,3} dB_2 + p_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{2,3} dA'_{2,3} \\ dL^{\circ}_3 &= dL^{\circ}_2 + q_1^{2,3} dB_2 + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + q_4^{2,3} dA'_{2,3}. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$dA'_{2,1} = r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2}.$$

Nach (44) wird

$$dA'_{2,3} = dA'_{2,1} - (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3})$$

und damit

$$dA'_{2,3} = r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + r_4^{1,2} dA_{1,2} - \delta \alpha_{2,1} + \delta \alpha_{2,3}.$$

Die Gleichungen für  $dB_3$  und  $dL_3$  können noch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} dB_3 &= (p_1^{2,3} p_3^{1,2} + p_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + p_3^{2,3} \delta s_{2,3} \\ &+ (p_1^{2,3} p_4^{1,2} + p_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - p_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} dL_3 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - q_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}). \end{aligned} \quad (46)$$

Ferner haben wir:

$$\begin{aligned} dB_4 &= p_1^{3,4} dB_3 + p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{3,4} dA'_{3,4} \\ dL_4 &= dL_3 + q_1^{3,4} dB_3 + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + q_4^{3,4} dA'_{3,4} \\ dA'_{3,2} &= r_1^{2,3} dB_2 + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + r_4^{2,3} dA'_{2,3} \\ dA'_{3,2} &= (r_1^{2,3} p_3^{1,2} + r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ (r_1^{2,3} p_4^{1,2} + r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) \\ dA'_{3,4} &= dA'_{3,2} - (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \\ dA'_{3,4} &= (r_1^{2,3} p_3^{1,2} + r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + (r_1^{2,3} p_4^{1,2} + r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} dB_4 &= (p_1^{3,4} p_3^{2,3} p_3^{1,2} + p_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_1^{2,3} p_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (p_1^{3,4} p_3^{2,3} + p_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (p_1^{3,4} p_4^{2,3} p_4^{1,2} + p_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_1^{2,3} p_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- (p_1^{3,4} p_4^{2,3} + p_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} dL_4 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2} + \\ &+ q_4^{3,4} r_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (q_3^{2,3} + q_1^{2,3} p_3^{2,3} + q_4^{2,3} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{2,3} r_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + \\ &+ q_4^{3,4} r_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- (q_4^{2,3} + q_1^{2,3} p_4^{2,3} + q_4^{2,3} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}). \end{aligned} \quad (49)$$

Nach der Ausgleichung der Teilstücke wird  $\frac{\delta s}{R \sin 1''}$  kaum grösser als 0,06'' sein, deshalb darf:

a) in den Ausdrücken (48) und (49) in den Koeffizienten für  $\delta s$

$$p_1 = 1; p_4 r_1 = 0; q_4 r_1 = 0; q_1 p_4 = 0;$$

$$p_4 r_4 = p_4; q_4 r_4 = q_4; q_1 p_1 = q$$

gesetzt werden.

Dadurch wird der Fehler in den einzelnen Gliedern nicht grösser als 0,00007'' werden.

b) in den Koeffizienten von  $\delta \alpha$

$p_1 = 1 \dots$  wenn  $p_1$  mit  $p_4, q_4$  oder  $q_1$  multipliziert wird, und

$$p_4 p_4 r_1 = 0; q_4 p_4 r_1 = 0;$$

$$q_1 p_4 r_4 = q_1 p_4$$

gesetzt werden.

Damit wird

$$\begin{aligned} dB_4 &= (p_3^{1,2} + p_4^{2,3} r_3^{1,2} + p_4^{3,4} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (p_3^{2,3} + p_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ &+ p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + (p_4^{1,2} + p_4^{2,3} r_4^{1,2} + p_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- (p_4^{2,3} + p_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} dL_4 &= (q_3^{1,2} + q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (q_3^{2,3} + q_1^{2,3} p_3^{2,3} + q_4^{2,3} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (q_4^{1,2} + q_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{2,3} r_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + \\ &+ q_4^{3,4} r_1^{2,3} p_4^{1,2} + q_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- (q_4^{2,3} + q_1^{2,3} p_4^{2,3} + q_4^{2,3} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}). \end{aligned} \quad (51)$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} dB_5 &= p_1^{4,5} dB_4 + p_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{4,5} dA'_{4,5} \\ dL_5 &= dL_4 + q_1^{4,5} dB_4 + q_3^{4,5} \delta s_{4,5} + q_4^{4,5} dA'_{4,5} \\ dA'_{4,5} &= dA'_{4,3} + (d\alpha_{4,5} - d\alpha_{4,3}) = dA'_{4,3} - (d\alpha_{4,3} - d\alpha_{4,5}) \\ dA'_{4,3} &= r_1^{3,4} dB_3 + r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + r_4^{3,4} dA'_{3,4} \\ dA'_{4,5} &= (r_1^{3,4} p_3^{1,2} + r_1^{3,4} p_3^{2,3} p_3^{1,2} + r_4^{3,4} r_3^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + \\ &+ (r_1^{3,4} p_3^{2,3} + r_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ (r_1^{3,4} p_4^{1,2} + r_1^{3,4} p_4^{2,3} p_4^{1,2} + r_1^{3,4} p_4^{2,3} r_4^{1,2} + r_4^{3,4} r_4^{2,3} r_4^{1,2}) dA_{1,2} - \\ &- (r_1^{3,4} p_4^{2,3} + r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - (d\alpha_{4,3} - d\alpha_{4,5}) \end{aligned} \quad (52)$$



$$dB_5 = (p_3^{1.2} + p_4^{2.3} r_3^{1.2} + p_4^{3.4} r_3^{1.2} + p_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + \\ + (p_3^{2.3} + p_4^{3.4} r_3^{2.3} + p_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + (p_3^{3.4} + p_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + p_3^{4.5} \delta s_{4.5} + \\ + (p_4^{1.2} + p_4^{2.3} r_4^{1.2} + p_4^{3.4} r_4^{1.2} + p_4^{4.5} r_4^{1.2}) \delta A_{1.2} - \\ - (p_4^{2.3} + p_4^{3.4} r_4^{2.3} + p_4^{4.5} r_4^{2.3}) (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ - (p_4^{3.4} + p_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - p_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) \quad (53)$$

$$dL_5 = (q_3^{1.2} + q_1^{2.3} p_3^{1.2} + q_4^{2.3} r_3^{1.2} + q_1^{3.4} p_3^{1.2} + q_4^{3.4} r_3^{1.2} + q_1^{4.5} p_3^{1.2} + q_4^{4.5} r_3^{1.2}) \delta s_{1.2} + \\ + (q_3^{2.3} + q_1^{3.4} p_3^{2.3} + q_4^{3.4} r_3^{2.3} + q_1^{4.5} p_3^{2.3} + q_4^{4.5} r_3^{2.3}) \delta s_{2.3} + \\ + (q_3^{3.4} + q_1^{4.5} p_3^{3.4} + q_4^{4.5} r_3^{3.4}) \delta s_{3.4} + q_3^{4.5} \delta s_{4.5} + \\ + (q_4^{1.2} + q_1^{2.3} p_4^{1.2} + q_4^{2.3} r_4^{1.2} + q_1^{3.4} p_4^{1.2} + q_1^{4.5} p_4^{1.2} + q_4^{4.5} r_4^{1.2}) \delta A_{1.2} - \\ - (q_4^{2.3} + q_1^{3.4} p_4^{2.3} + q_4^{3.4} r_4^{2.3} + q_1^{4.5} p_4^{2.3} + q_1^{4.5} p_4^{2.3} + q_4^{4.5} r_4^{2.3}) (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ - (q_4^{3.4} + q_1^{4.5} p_4^{3.4} + q_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - q_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}). \quad (54)$$

Unter der Annahme, dass das Polygon aus vier Linien (Abb. 6) besteht, sind in (53) und (54) die Koeffizienten von  $\delta A_{1.2}$  kleine Grössen zweiter Ordnung und der Koeffizient von  $\delta A_1$  in (53) wird:

$$G = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{MN} (\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4),$$

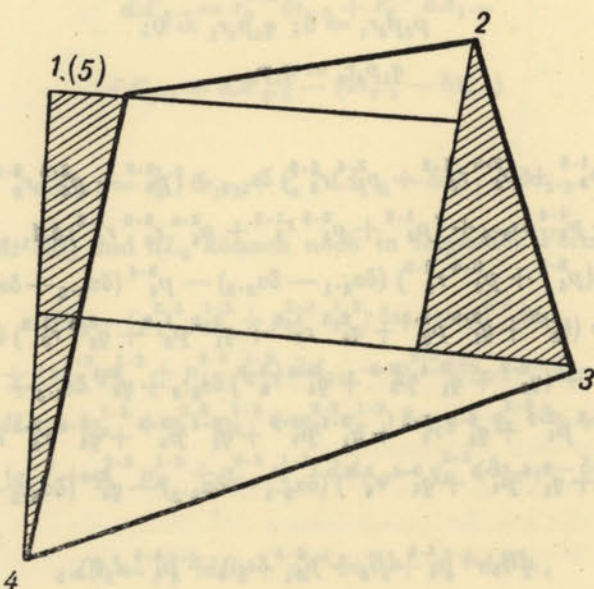


Abb. 6.

wo  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und  $\Delta_4$  den Flächen der Dreiecke in Abb. 6 gleich sind. Der Koeffizient  $G$  ergibt in dem Ausdruck für  $dB_5$  für  $\delta A_{1.2} = 2,5''$  und für Polygonseiten von ungefähr 300 km etwa 0,002''.

Da wir nur Formeln für die Polygon-Widersprüche in Breite und Länge ableiten wollen, können wir in (53) und (54) die Glieder mit  $\delta A_{1.2}$  überhaupt vernachlässigen.

Für Triangulationspolygone aus vier geodätischen Linien können daher mit den Formeln (53) und (54), die Polygongleichungen für den Breiten- und Längenschluss unmittelbar aufgestellt werden.

Für diesen besonderen Fall erhalten wir:

$$B_1^0 - (B_1^0)' = [p_3^{1.2} + (p_4^{2.3} + p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} + \\ + [p_3^{2.3} + (p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} + [p_3^{3.4} + p_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} + \\ + p_3^{4.1} \delta s_{4.1} - [p_4^{2.3} + (p_4^{3.4} + p_4^{4.1}) r_4^{2.3}] (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ - [p_4^{3.4} + p_4^{4.1} r_4^{3.4}] (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - p_4^{4.1} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.1}) \quad (55)$$

$$L_1^0 - (L_1^0)' = \\ = [q_3^{1.2} + (q_1^{2.3} + q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{1.2} + (q_4^{2.3} + q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{1.2}] \delta s_{1.2} + \\ + [q_3^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_3^{2.3} + (q_4^{3.4} + q_4^{4.1}) r_3^{2.3}] \delta s_{2.3} + \\ + [q_3^{3.4} + q_1^{4.1} p_3^{3.4} + q_4^{4.1} r_3^{3.4}] \delta s_{3.4} + q_3^{4.1} \delta s_{4.1} - \\ - [q_4^{2.3} + (q_1^{3.4} + q_1^{4.1}) p_4^{2.3} + q_4^{3.4} r_4^{2.3} + q_1^{4.1} p_4^{2.3} + q_4^{4.1} r_4^{2.3}] (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - \\ - [q_4^{3.4} + q_1^{4.1} (p_4^{3.4} + r_4^{3.4})] (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - q_4^{4.1} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}). \quad (56)$$

Die Formeln (55) und (56) können oft unmittelbar zur Aufstellung der Polygonbedingungen in Breite und Länge bei viereckigen Polygonen verwendet werden; in der Folge müssen sie aber noch etwas umgeformt werden.

Zur Ableitung der Formeln für Polygone mit einer grösseren Zahl von geodätischen Linien berechnen wir nicht mehr die Differentiale  $dB_n$  und  $dL_n$  sondern die Unterschiede

$$dB_n - dB_{n-1} = \delta \varphi_{n-1, n} \text{ und } dL_n - dL_{n-1} = \delta l_{n-1, n}.$$

Wir haben aus Vorhergehendem

$$\delta \varphi_{1.2} = p_3^{1.2} \delta s_{1.2} \\ \delta \varphi_{2.3} = p_4^{2.3} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_3^{2.3} \delta s_{2.3} - p_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) \\ \delta \varphi_{3.4} = p_4^{3.4} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_4^{3.4} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + p_3^{3.4} \delta s_{3.4} - \\ - p_4^{3.4} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - p_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) \\ \delta \varphi_{4.5} = p_4^{4.5} r_3^{1.2} \delta s_{1.2} + p_4^{4.5} r_3^{2.3} \delta s_{2.3} + p_4^{4.5} r_3^{3.4} \delta s_{3.4} + p_3^{4.5} \delta s_{4.5} - \\ - p_4^{4.5} r_4^{2.3} (\delta a_{2.1} - \delta a_{2.3}) - p_4^{4.5} r_4^{3.4} (\delta a_{3.2} - \delta a_{3.4}) - p_4^{4.5} (\delta a_{4.3} - \delta a_{4.5}) \quad (57)$$

Aus der allgemeinen Formel:

$$dB_n = p_1^{n-1, n} dB_{n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} + p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n}$$

erhalten wir noch

$$dB_n = p_1^{n-1, n} dB_{n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} + \\ + p_4^{n-1, n} [dA'_{n-1, n-2} - (\delta a_{n-1, n-2} - \delta a_{n-1, n})] \\ dB_{n-1} = p_1^{n-2, n-1} dB_{n-2} + p_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + \\ + p_4^{n-2, n-1} [dA'_{n-2, n-3} - (\delta a_{n-2, n-3} - \delta a_{n-2, n-1})].$$

In den Koeffizienten von  $\delta s$  ist  $p_1 \approx 1$  und  $p_1 p_4 \approx p_4$ . Mit Rücksicht hierauf und weil alle Glieder, die von der Veränderung der Azimute abhängen, in  $dB_n$  mit dem Faktor  $p_4$  eingehen, können wir schreiben:

$$\delta \varphi_{n-1, n} = dB_n - dB_{n-1} = \delta \varphi_{n-2, n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \\ - p_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - p_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} - \\ - p_4^{n-1, n} (\delta a_{n-1, n-2} - \delta a_{n-1, n}) + p_4^{n-2, n-1} (\delta a_{n-2, n-3} - \delta a_{n-2, n-1}). \quad (58)$$



Ferner:

$$\begin{aligned} dA'_{n-1, n-2} &= r_1^{n-2, n-1} dB_{n-2} + r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + r_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1} \\ dA'_{n-2, n-3} &= r_1^{n-3, n-2} dB_{n-3} + r_3^{n-3, n-2} \delta s_{n-2, n-3} + r_4^{n-3, n-2} dA'_{n-3, n-2} \end{aligned}$$

In der Differenz  $p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - p_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3}$  erhalten die Glieder mit  $dB_{n-2}$  und  $dB_{n-3}$  in den Summanden mit  $\delta s$  die Faktoren  $p_4 r_1$  und in den Summanden mit  $\delta \alpha$  die Faktoren  $p_4 r_1 p_4$ . Daher ist

$$\begin{aligned} p_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - p_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} &= p_4^{n-1, n} r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} - \\ &- p_4^{n-2, n-1} r_3^{n-3, n-2} \delta s_{n-2, n-3} + p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1} - \\ &- p_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} dA'_{n-3, n-2} \end{aligned} \quad (59)$$

Durch Addition der Formel (59) und (58) erhält man ausgehend von  $\delta \varphi_{4,5}$  alle folgenden  $\delta \varphi$ . Wir haben:

$$\begin{aligned} p_4^{5,6} dA'_{5,4} - p_4^{4,5} dA'_{4,3} &= p_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ &+ p_4^{5,6} r_4^{4,5} \delta s_{4,5} - p_4^{4,5} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - p_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - \\ &- p_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,2}) + p_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \\ \delta \varphi_{5,6} &= p_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{5,6} r_4^{4,5} \delta s_{4,5} + p_3^{5,6} \delta s_{5,6} - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}). \end{aligned} \quad (60)$$

Ferner

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{6,7} &= \delta \varphi_{5,6} + p_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{5,6} dA'_{5,4} - \\ &- p_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + p_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) \\ p_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{5,6} dA'_{5,4} &= p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,6} - p_4^{5,6} r_4^{4,5} dA'_{4,5} \\ dA'_{5,6} &= dA'_{5,4} + \delta \alpha_{5,6} - \delta \alpha_{5,4} \\ dA'_{4,5} &= dA'_{4,3} + \delta \alpha_{4,5} - \delta \alpha_{4,3} \\ p_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{5,6} dA'_{5,4} &= p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,4} - \\ &- p_4^{5,6} r_4^{4,5} dA'_{4,3} - p_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + p_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} p_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{5,6} dA'_{5,4} &= p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} \delta s_{4,5} - \\ &- p_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{6,7} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - \\ &- p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + p_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + p_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{6,7} &= p_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{6,7} r_4^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{6,7} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ &+ p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ &- p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ &- p_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - p_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{7,8} &= \delta \varphi_{6,7} + p_3^{7,8} \delta s_{7,8} - p_3^{6,7} \delta s_{6,7} + p_4^{7,8} dA'_{7,6} - p_4^{6,7} dA'_{6,5} - \\ &- p_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + p_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) \\ p_4^{7,8} dA'_{7,6} - p_4^{6,7} dA'_{6,5} &= p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,7} - p_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,6} = \\ &= p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{6,7} r_4^{5,6} dA'_{5,4} - p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + \\ &+ p_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) \\ p_4^{7,8} dA'_{7,6} - p_4^{6,7} dA'_{6,5} &= p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_4^{6,7} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{6,7} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ &+ p_4^{7,8} r_4^{6,7} \delta s_{4,5} - p_4^{6,7} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{6,7} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - p_4^{6,7} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \\ &+ p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + p_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + \\ &+ p_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) \\ \delta \varphi_{7,8} &= p_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ &+ p_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_3^{7,8} \delta s_{7,8} + p_4^{7,8} \delta s_{7,8} - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ &- p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - p_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{8,9} &= \delta \varphi_{7,8} + p_3^{8,9} \delta s_{8,9} - p_3^{7,8} \delta s_{7,8} + p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} - \\ &- p_4^{8,9} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}) + p_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) \\ p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} &= p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + p_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,8} - p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,7} = \\ &= p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + p_4^{8,9} r_4^{7,8} dA'_{7,6} - p_4^{7,8} r_4^{6,7} dA'_{6,5} - p_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + \\ &+ p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) \\ p_4^{8,9} dA'_{8,7} - p_4^{7,8} dA'_{7,6} &= p_4^{8,9} r_3^{7,8} \delta s_{7,8} - p_4^{7,8} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} + p_4^{8,9} r_3^{6,7} \delta s_{6,7} - p_4^{7,8} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + \\ &+ p_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} - p_4^{7,8} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + p_4^{8,9} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} - p_4^{7,8} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + \\ &+ p_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ &- p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ &- p_4^{7,8} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - p_4^{7,8} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + \\ &+ p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + \\ &+ p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) + \\ &+ p_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) + p_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) \\ \delta \varphi_{8,9} &= p_4^{8,9} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{8,9} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{8,9} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + p_4^{8,9} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ &+ p_4^{8,9} r_3^{5,6} \delta s_{5,6} + p_3^{8,9} \delta s_{8,9} + p_4^{8,9} \delta s_{8,9} - \\ &- p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ &- p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ &- p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ &- p_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - p_4^{8,9} r_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) - p_4^{8,9} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}). \end{aligned} \quad (65)$$



Damit erhält man die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \delta \varphi_{n-1, n} = & p_4^{n-1, n} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + p_4^{n-1, n} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + p_4^{n-1, n} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \dots + \\ & + p_4^{n-1, n} r_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + p_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} \dots r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \dots - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} r_4^{n-4, n-3} (\delta \alpha_{n-4, n-5} - \delta \alpha_{n-4, n-3}) - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} r_4^{n-3, n-2} (\delta \alpha_{n-3, n-4} - \delta \alpha_{n-3, n-2}) - \\ & - p_4^{n-1, n} r_4^{n-2, n-1} (\delta \alpha_{n-2, n-3} - \delta \alpha_{n-2, n-1}) - \\ & - p_4^{n-1, n} (\delta \alpha_{n-1, n-2} - \delta \alpha_{n-1, n}). \end{aligned} \quad (66)$$

Nun gehen wir zu den Formeln für  $\delta l$  über.

Aus dem Vorhergehenden haben wir:

$$\begin{aligned} \delta l_{1,2} = & q_3^{1,2} \delta s_{1,2} + q_4^{1,2} \delta \alpha_{1,2} \\ \delta l_{2,3} = & (q_1^{2,3} p_3^{1,2} + q_4^{2,3} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + q_3^{2,3} \delta s_{2,3} - q_4^{2,3} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) \\ \delta l_{3,4} = & (q_1^{3,4} p_3^{1,2} + q_4^{3,4} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{3,4} p_3^{2,3} + q_4^{3,4} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + q_3^{3,4} \delta s_{3,4} - \\ & - (q_1^{3,4} p_4^{2,3} + q_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - q_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) \\ \delta l_{4,5} = & (q_1^{4,5} p_3^{1,2} + q_4^{4,5} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{4,5} p_3^{2,3} + q_4^{4,5} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{4,5} p_3^{3,4} + q_4^{4,5} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + q_3^{4,5} \delta s_{4,5} - \\ & - (q_1^{4,5} p_4^{2,3} + q_4^{4,5} p_4^{3,4} + q_4^{4,5} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{4,5} p_4^{3,4} + q_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - q_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}). \end{aligned} \quad (67)$$

Ferner

$$\begin{aligned} dL_n = & dL_{n-1} + q_1^{n-1, n} dB_{n-1} + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n} \\ \frac{\delta l_{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} = & dB_{n-1} + \frac{q_3^{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} \delta s_{n-1, n} + \frac{q_4^{n-1, n}}{q_1^{n-1, n}} dA'_{n-1, n} \\ \frac{\delta l_{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} = & dB_{n-2} + \frac{q_3^{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta s_{n-2, n-1} + \frac{q_4^{n-2, n-1}}{q_1^{n-2, n-1}} dA'_{n-2, n-1} \\ \delta l_{n-1, n} = & \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta l_{n-2, n-1} + q_1^{n-1, n} \delta \varphi_{n-2, n-1} + \\ & + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + \\ & + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n} + \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-1} \\ \delta l_{n-1, n} = & \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} \delta l_{n-2, n-1} + q_1^{n-1, n} \delta \varphi_{n-2, n-1} + q_3^{n-1, n} \delta s_{n-1, n} - \\ & - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_3^{n-2, n-1} \delta s_{n-2, n-1} + q_4^{n-1, n} dA'_{n-1, n-2} - \\ & - \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} dA'_{n-2, n-3} - q_4^{n-1, n} (\delta \alpha_{n-1, n-2} - \delta \alpha_{n-1, n}) + \\ & + \frac{q_1^{n-1, n}}{q_1^{n-2, n-1}} q_4^{n-2, n-1} (\delta \alpha_{n-2, n-3} - \delta \alpha_{n-2, n-1}). \end{aligned} \quad (68)$$

Mit der Formel (68) für  $\delta l$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta l_{5,6} = & \left( q_1^{5,6} p_3^{1,2} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{1,2} \right) \delta s_{1,2} + \left( q_1^{5,6} p_3^{2,3} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{2,3} \right) \delta s_{2,3} + \\ & + \left( q_1^{5,6} p_3^{3,4} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{3,4} \right) \delta s_{3,4} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_3^{4,5} \delta s_{4,5} - \\ & - \left( q_1^{5,6} p_4^{2,3} + q_1^{5,6} p_4^{3,4} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{2,3} r_4^{3,4} \right) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - \left( q_1^{5,6} p_4^{3,4} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{3,4} \right) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) + q_1^{5,6} p_3^{4,5} \delta s_{4,5} - q_1^{5,6} p_4^{4,5} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - q_1^{5,6} p_4^{4,5} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - q_1^{5,6} p_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) + q_3^{5,6} \delta s_{5,6} - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_3^{4,5} \delta s_{4,5} + \\ & + q_4^{5,6} dA'_{5,4} - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} dA'_{4,3} - q_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}). \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} \delta l_{5,6} = & (q_1^{5,6} p_3^{1,2} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{5,6} p_3^{2,3} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + q_1^{5,6} p_3^{3,4} \delta s_{3,4} + q_3^{5,6} \delta s_{5,6} + (q_1^{5,6} p_3^{4,5} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} - \\ & - (q_1^{5,6} p_4^{2,3} + q_1^{5,6} p_4^{3,4} + q_1^{5,6} p_4^{4,5} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{2,3} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{5,6} p_4^{3,4} + q_1^{5,6} p_4^{4,5} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - q_1^{5,6} p_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - q_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) + q_4^{5,6} dA'_{5,4} - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} dA'_{4,3} \\ & q_4^{5,6} dA'_{5,4} - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} dA'_{4,3} = q_4^{5,6} r_3^{4,5} \delta s_{4,5} - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} + \\ & + q_4^{5,6} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} + q_4^{5,6} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + q_4^{5,6} r_3^{3,4} \delta s_{3,4} - q_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{2,3} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - q_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - q_4^{5,6} r_4^{4,5} (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{1,2} \delta s_{1,2} - \\ & - \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_3^{2,3} \delta s_{2,3} + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{2,3} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) + \frac{q_1^{5,6}}{q_1^{4,5}} q_4^{4,5} r_4^{3,4} (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}). \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \delta l_{5,6} = & (q_1^{5,6} p_3^{1,2} + q_4^{5,6} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{5,6} p_3^{2,3} + q_4^{5,6} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{5,6} p_3^{3,4} + q_4^{5,6} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + (q_1^{5,6} p_3^{4,5} + q_4^{5,6} r_3^{4,5}) \delta s_{3,4} + q_3^{5,6} \delta s_{5,6} - \\ & - (q_1^{5,6} p_4^{2,3} + q_1^{5,6} p_4^{3,4} + q_1^{5,6} p_4^{4,5} + q_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{2,3} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{5,6} p_4^{3,4} + q_1^{5,6} p_4^{4,5} + q_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - (q_1^{5,6} p_4^{4,5} + q_4^{5,6} r_4^{4,5}) (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - q_4^{5,6} (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}). \end{aligned} \quad (69)$$



Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial l_{6.7} &= \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} \partial l_{5.6} + q_1^{6.7} \partial \varphi_{5.6} + q_3^{6.7} \partial s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \partial s_{5.6} + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \\ &\quad - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} - q_4^{6.7} (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) \\ \partial l_{6.7} &= (q_1^{6.7} p_3^{1.2} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2}) \partial s_{1.2} + (q_1^{6.7} p_3^{2.3} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{2.3}) \partial s_{2.3} + \\ &\quad + (q_1^{6.7} p_3^{3.4} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4}) \partial s_{3.4} + (q_1^{6.7} p_3^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5}) \partial s_{4.5} + \\ &\quad + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \partial s_{5.6} + q_3^{6.7} \partial s_{6.7} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_3^{5.6} \partial s_{5.6} - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{2.3} + q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{4.5} + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) + \\ &\quad + q_1^{6.7} p_3^{5.6} \partial s_{5.6} - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - q_1^{6.7} p_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) - q_4^{6.7} (\partial \alpha_{5.5} - \partial \alpha_{6.7}) + \\ &\quad + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) + q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} \end{aligned}$$

Aus Vorangegangenen haben wir

$$\begin{aligned} q_4^{6.7} dA'_{6.5} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} dA'_{5.4} &= q_4^{6.7} r_3^{5.6} \partial s_{5.6} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.5} \partial s_{4.5} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_3^{4.5} \partial s_{4.5} - \\ &\quad - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{3.4} \partial s_{3.4} + q_4^{6.7} r_3^{1.2} \partial s_{1.2} + q_4^{6.7} r_3^{2.3} \partial s_{2.3} + q_4^{6.7} r_3^{3.4} \partial s_{3.4} - \\ &\quad - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{1.2} \partial s_{1.2} - \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_3^{4.3} \partial s_{2.3} + \\ &\quad + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) + \frac{q_1^{6.7}}{q_1^{5.6}} q_4^{5.6} r_4^{4.5} (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}). \end{aligned}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \partial l_{6.7} &= (q_1^{6.7} p_3^{1.2} + q_4^{6.7} r_3^{1.3}) \partial s_{1.2} + (q_1^{6.7} p_3^{2.3} + q_4^{6.7} r_3^{2.3}) \partial s_{2.3} + \\ &\quad + (q_1^{6.7} p_3^{3.4} + q_4^{6.7} r_3^{3.4}) \partial s_{3.4} + (q_1^{6.7} p_3^{4.5} + q_4^{6.7} r_3^{4.5}) \partial s_{4.5} + \\ &\quad + (q_1^{6.7} p_3^{5.6} + q_4^{6.7} r_3^{5.6}) \partial s_{5.6} + q_3^{6.7} \partial s_{6.7} - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{2.3} + q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + q_1^{6.7} p_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3}) (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{3.4} + q_1^{6.7} p_4^{4.5} + q_1^{6.7} p_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4}) (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{4.5} + q_1^{6.7} p_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5}) (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - \\ &\quad - (q_1^{6.7} p_4^{5.6} + q_4^{6.7} r_4^{5.6}) (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) - q_4^{6.7} (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}). \end{aligned}$$

(70)

Beim Übergang zu  $\partial l_{7.8}$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial l_{7.8} &= \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \partial l_{6.7} + q_1^{7.8} \partial \varphi_{6.7} + q_3^{7.8} \partial s_{7.8} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_3^{6.7} \partial s_{6.7} + \\ &\quad + q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} - q_4^{7.8} (\partial \alpha_{7.6} - \partial \alpha_{7.8}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}) \\ \partial l_{7.8} &= \left( q_1^{7.8} p_3^{1.2} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{1.2} \right) \partial s_{1.2} + \left( q_1^{7.8} p_3^{2.3} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{2.3} \right) \partial s_{2.3} + \\ &\quad + \left( q_1^{7.8} p_3^{3.4} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{3.4} \right) \partial s_{3.4} + \left( q_1^{7.8} p_3^{4.5} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{4.5} \right) \partial s_{4.5} + \\ &\quad + \left( q_1^{7.8} p_3^{5.6} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{5.6} \right) \partial s_{5.6} + q_3^{7.8} \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \partial s_{6.7} + q_1^{7.8} p_3^{6.7} \partial s_{6.7} + \\ &\quad + q_3^{7.8} \partial s_{7.8} - q_3^{7.8} \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} \partial s_{6.7} - \left( q_1^{7.8} p_4^{2.3} + q_1^{7.8} p_4^{3.4} + q_1^{7.8} p_4^{4.5} + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + \right. \\ &\quad \left. + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} \right) (\partial \alpha_{1.2} - \partial \alpha_{2.3}) - \\ &\quad - \left( q_1^{7.8} p_4^{3.4} + q_1^{7.8} p_4^{4.5} + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} \right) (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - \\ &\quad - \left( q_1^{7.8} p_4^{4.5} + q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} \right) (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - \\ &\quad - \left( q_1^{7.8} p_4^{5.6} + q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} r_4^{5.6} \right) (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) - \\ &\quad - \left( q_1^{7.8} p_4^{6.7} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} \right) (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}) - q_4^{7.8} (\partial \alpha_{7.6} - \partial \alpha_{7.8}) + \\ &\quad + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}) + q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5}; \\ q_4^{7.8} dA'_{7.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} dA'_{6.5} &= q_4^{7.8} r_3^{6.7} \partial s_{6.7} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{5.6} \partial s_{5.6} + \\ &\quad + q_4^{7.8} r_3^{5.6} \partial s_{5.6} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{4.5} \partial s_{4.5} + q_4^{7.8} r_3^{4.5} \partial s_{4.5} - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{3.4} \partial s_{3.4} + \\ &\quad + q_4^{7.8} r_3^{1.2} \partial s_{1.2} + q_4^{7.8} r_3^{2.3} \partial s_{2.3} + q_4^{7.8} r_3^{3.4} \partial s_{3.4} - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) - \\ &\quad - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}) - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{1.2} \partial s_{1.2} - \\ &\quad - \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_3^{2.3} \partial s_{2.3} + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} r_4^{2.3} (\partial \alpha_{2.1} - \partial \alpha_{2.3}) + \\ &\quad + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} r_4^{3.4} (\partial \alpha_{3.2} - \partial \alpha_{3.4}) - q_4^{7.8} r_4^{6.7} (\partial \alpha_{6.5} - \partial \alpha_{6.7}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) - \\ &\quad - q_4^{7.8} r_4^{6.7} r_4^{5.6} (\partial \alpha_{5.4} - \partial \alpha_{5.6}) + \frac{q_1^{7.8}}{q_1^{6.7}} q_4^{6.7} r_4^{5.6} r_4^{4.5} (\partial \alpha_{4.3} - \partial \alpha_{4.5}). \end{aligned}$$



Mithin wird:

$$\begin{aligned} \delta l_{7,8} = & (q_1^{7,8} p_3^{1,2} + q_4^{7,8} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{7,8} p_3^{2,3} + q_4^{7,8} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{7,8} p_3^{3,4} + q_4^{7,8} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + (q_1^{7,8} p_3^{4,5} + q_4^{7,8} r_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + (q_1^{7,8} p_3^{5,6} + q_4^{7,8} r_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + \\ & + (q_1^{7,8} p_3^{6,7} + q_4^{7,8} r_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + q_3^{7,8} \delta s_{7,8} - (q_1^{7,8} p_4^{2,3} + q_1^{7,8} p_4^{3,4} + \\ & + q_1^{7,8} p_4^{4,5} + q_1^{7,8} p_4^{5,6} + q_1^{7,8} p_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{7,8} p_4^{3,4} + q_1^{7,8} p_4^{4,5} + q_1^{7,8} p_4^{5,6} + q_1^{7,8} p_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - (q_1^{7,8} p_4^{4,5} + q_1^{7,8} p_4^{5,6} + q_1^{7,8} p_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5}) (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ & - (q_1^{7,8} p_4^{5,6} + q_1^{7,8} p_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6}) (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ & - (q_1^{7,8} p_4^{6,7} + q_4^{7,8} r_4^{6,7}) (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - q_4^{7,8} (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}). \end{aligned} \quad (71)$$

Nun können wir noch den Ausdruck  $\delta l_{8,9}$  anschreiben:

$$\begin{aligned} \delta l_{8,9} = & (q_1^{8,9} p_3^{1,2} + q_4^{8,9} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{8,9} p_3^{2,3} + q_4^{8,9} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \\ & + (q_1^{8,9} p_3^{3,4} + q_4^{8,9} r_3^{3,4}) \delta s_{3,4} + (q_1^{8,9} p_3^{4,5} + q_4^{8,9} r_3^{4,5}) \delta s_{4,5} + \\ & + (q_1^{8,9} p_3^{5,6} + q_4^{8,9} r_3^{5,6}) \delta s_{5,6} + (q_1^{8,9} p_3^{6,7} + q_4^{8,9} r_3^{6,7}) \delta s_{6,7} + \\ & + (q_1^{8,9} p_3^{7,8} + q_4^{8,9} r_3^{7,8}) \delta s_{7,8} + q_3^{8,9} \delta s_{8,9} - \\ & - (q_1^{8,9} p_4^{2,3} + q_1^{8,9} p_4^{3,4} + q_1^{8,9} p_4^{4,5} + q_1^{8,9} p_4^{5,6} + q_1^{8,9} p_4^{6,7} + q_1^{8,9} p_4^{7,8} + \\ & + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4} r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{1,2} - \delta \alpha_{2,3}) - (q_1^{8,9} p_4^{3,4} + q_1^{8,9} p_4^{4,5} + \\ & + q_1^{8,9} p_4^{5,6} + q_1^{8,9} p_4^{6,7} + q_1^{8,9} p_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5} r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & - (q_1^{8,9} p_4^{4,5} + q_1^{8,9} p_4^{5,6} + q_1^{8,9} p_4^{6,7} + q_1^{8,9} p_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6} r_4^{4,5}) (\delta \alpha_{4,3} - \delta \alpha_{4,5}) - \\ & - (q_1^{8,9} p_4^{5,6} + q_1^{8,9} p_4^{6,7} + q_1^{8,9} p_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7} r_4^{5,6}) (\delta \alpha_{5,4} - \delta \alpha_{5,6}) - \\ & - (q_1^{8,9} p_4^{6,7} + q_1^{8,9} p_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8} r_4^{6,7}) (\delta \alpha_{6,5} - \delta \alpha_{6,7}) - (q_1^{8,9} p_4^{7,8} + q_4^{8,9} r_4^{7,8}) (\delta \alpha_{7,6} - \delta \alpha_{7,8}) - \\ & - q_4^{8,9} (\delta \alpha_{8,7} - \delta \alpha_{8,9}). \end{aligned} \quad (72)$$

Mithin erhält man die allgemeine Formel in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \delta l_{n-1,n} = & (q_1^{n-1,n} p_3^{1,2} + q_4^{n-1,n} r_3^{1,2}) \delta s_{1,2} + (q_1^{n-1,n} p_3^{2,3} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_3^{2,3}) \delta s_{2,3} + \dots + (q_1^{n-1,n} p_3^{i,k} + q_4^{n-1,n} r_3^{i,k}) \delta s_{i,k} + \dots + *) \\ & + (q_1^{n-1,n} p_3^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_3^{n-2,n-1}) \delta s_{n-2,n-1} + \\ & + q_3^{n-1,n} \delta s_{n-1,n} - (q_1^{n-1,n} p_4^{2,3} + q_1^{n-1,n} p_4^{3,4} + \dots + \\ & + q_1^{n-1,n} p_4^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{2,3}) (\delta \alpha_{2,1} - \delta \alpha_{2,3}) - \\ & - (q_1^{n-1,n} p_4^{3,4} + q_1^{n-1,n} p_4^{4,5} + \dots + q_1^{n-1,n} p_4^{n-2,n-1} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{3,4}) (\delta \alpha_{3,2} - \delta \alpha_{3,4}) - \\ & \dots \dots \dots \\ & - (q_1^{n-1,n} p_4^{i,k} + q_1^{n-1,n} p_4^{k,i+1} + \dots + q_1^{n-1,n} p_4^{n-2,n-1} + \\ & + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1} r_4^{n-3,n-2} \dots r_4^{i,k}) (\delta \alpha_{i,i-1} - \delta \alpha_{i,k}) - \dots - \\ & - (q_1^{n-1,n} p_4^{n-2,n-1} + q_4^{n-1,n} r_4^{n-2,n-1}) (\delta \alpha_{n-2,n-3} - \delta \alpha_{n-2,n-1}) - \\ & - q_4^{n-1,n} (\delta \alpha_{n-1,n-2} - \delta \alpha_{n-1,n}). \end{aligned} \quad (73)$$

\*)  $k = i + 1$ .

Damit haben wir die allgemeinen Formeln für den Anschluss in Breite und Länge im geschlossenen Polygon erhalten.

Es wird nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass wegen der Vernachlässigung der Glieder mit  $\delta A_{1,2}$  diese Formeln nur für geschlossene Polygone und nur für den Anschluss in Breite und Länge brauchbar sind; es ist nicht angängig (wenn  $\delta A_{1,2}$  nicht Null ist) die Formeln (66) und (73) oder die vorhergehenden Formeln für  $\delta B$  und  $\delta L$  für die Berechnung der Veränderungen in den Koordinaten einer beliebigen Polygonecke anzuwenden. Die Formeln (66) und (73) dürfen nur angewandt werden, wenn die Berechnung der Azimute  $A'$  des Polygons in der zu Beginn dieses § angeführten Reihenfolge durchgeführt wird d. h. wenn in jedem Polygon die Berechnung der Azimute  $A$  im selben Umgehungsinn unter Benutzung der Strecken  $s'$  und der Winkel zwischen den geodätischen Linien erfolgt, die nach der Ausgleichung der Teilstücke berechnet wurden. Die Berechnung wird mit der letzten Linie des Polygons (vom  $(n-1)$ -ten bis zum  $n$ -ten Polygonpunkt) abgeschlossen. Sie wird über alle Linien des Polygons unabhängig davon ausgeführt, dass in angrenzenden Polygonen dieselben Berechnungen schon gemacht worden sind. Hierbei können natürlich die Berechnungen für eine oder zwei Linien, die an vorhergehende Polygone angrenzen, verwendet werden. In Abb. 7 stellen 1, 2; 2, 3; ...;  $(n-1)$ ,  $n$ ;  $n$ ,  $n+1$  die geodätischen Linien

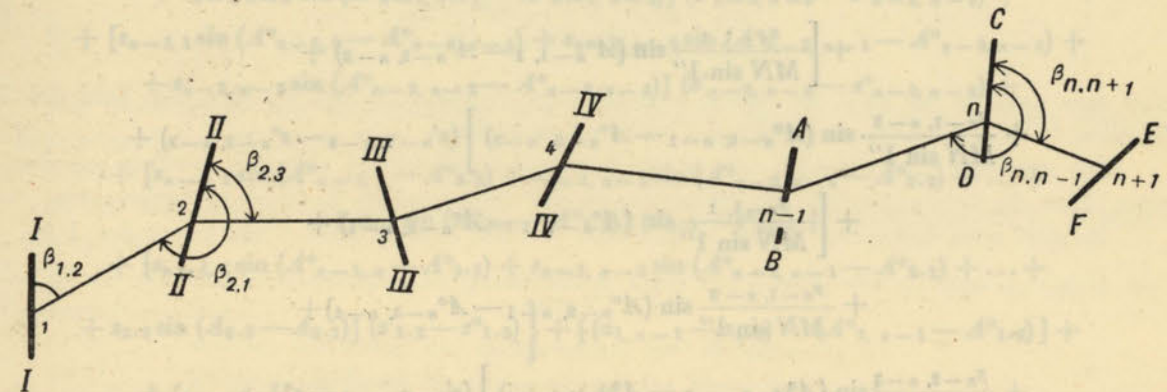


Abb. 7.

dar, die die Laplaceschen Punkte verbinden. Die (Ausgangs-) Seiten der Triangulation, für welche astronomische Azimute bestimmt wurden, bezeichnen wir durch II I, II II, III III, ..., AB, CD, EF; die Fehler in der Bestimmung dieser Azimute werden entsprechend mit  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , ...,  $\delta_{n-1}$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_{n+1}$  bezeichnet. Die Fehler der Winkel:  $\beta_{1,2}$  — bei  $P_1$  zwischen II I und 1,2;  $\beta_{2,1}$  — bei  $P_2$  zwischen II II und 2,1;  $\beta_{2,3}$  — bei  $P_2$  zwischen II II und 2,3;  $\beta_{n,n-1}$  und  $\beta_{n,n+1}$  bei  $P_n$  zwischen CD und  $n$ ,  $n-1$  bezeichnen wir entsprechend durch  $v_{1,2}$ ,  $v_{2,1}$ ,  $v_{2,3}$ , ...,  $v_{n,n-1}$ ,  $v_{n,n+1}$  unter der Voraussetzung, dass die Winkel  $\beta$  im Uhrzeigersinn gezählt werden (vgl. Abb. 7).

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta \alpha_{1,2} = & \delta_1 + v_{1,2}; \quad \delta \alpha_{2,1} = \delta_2 + v_{2,1}; \quad \delta \alpha_{2,3} = \delta_2 + v_{2,3} \\ \delta \alpha_{n,n-1} = & \delta_n + v_{n,n-1}; \quad \delta \alpha_{n,n+1} = \delta_n + v_{n,n+1}. \end{aligned} \quad (74)$$

Beachtet man die Gleichung (74) so verschwinden in den Gleichungen (66) und (73) die Beobachtungsverbesserungen  $\delta$  der Azimute vollkommen und es verbleiben nur noch die Unterschiede  $v$  in folgender Form

$$v_{2,1} - v_{2,3}; \quad v_{3,2} - v_{3,4}; \quad v_{4,3} - v_{4,5}; \dots; v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n},$$

d. h. in die Bedingungen für den Polygonschluss in Breite und Länge gehen ausser den Verbesserungen der Längen der Seiten des Polygons noch die Verbesserungen aller seiner Winkel ein — mit Ausnahme des Winkels im Ausgangspunkt. In die Laplaceschen Gleichungen gehen die Verbesserungen der Winkel zwischen den Seiten des Polygons ein, mit Ausnahme des ersten Punkts  $P_1$



und des letzten Punkts  $P_n$  des Linienzuges  $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ , für welchen die Laplacesche Bedingung aufzustellen ist: auf  $P_1$  geht ein  $\delta_1 + v_{1.2}$  und auf  $P_n$  geht ein  $\delta_n + v_{n,n-1}$ . Die Umbildung der erhaltenen Gleichungen mit Hilfe von (74) wird weiter unten durchgeführt.

Aus (73) ist ersichtlich, dass die Berechnung der Koeffizienten dieser Gleichung erheblich vereinfacht wird, wenn die Koeffizienten von  $(\delta \alpha_{i,i-1} - \delta \alpha_{i,k})$  durch schrittweises Hinzufügen nur eines einzigen neuen Summanden und durch Multiplikation des  $q_4$  enthaltenden Gliedes mit einem neuen Faktor beim Übergang von  $(\delta \alpha_{i,i-1} - \delta \alpha_{i,k})$  zu  $(\delta \alpha_{i-1,i-2} - \delta \alpha_{i-1,i})$  berechnet werden.

Wenden wir uns jetzt der sogenannten Winkelbedingung im Polygon zu. Wir benutzen dabei die Gleichung (42) § 4 und stellen uns vor, dass wir es mit einem geschlossenen Linienzug zu tun haben und nehmen die  $n$ -te Ecke als Ausgangspunkt des Polygons an. Dann wird die Laplacesche Gleichung für die Linie  $n-1, 1$  folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned} & (\delta \alpha_{1,n-1} - \delta \alpha_{1.2}) + (\delta \alpha_{n-1,n-2} - \delta \alpha_{n-1,1}) + (\delta \alpha_{n-2,n-3} - \delta \alpha_{n-2,n-1}) + \\ & + \dots + (\delta \alpha_{4.3} - \delta \alpha_{4.5}) + (\delta \alpha_{3.2} - \delta \alpha_{3.4}) + (\delta \alpha_{2.1} - \delta \alpha_{2.3}) + \\ & + \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) \right] (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-2,n-3}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) \right] (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \dots + \right. \\ & + \left. \frac{s_{3.4}}{MN \sin 1''} \sin(A_{3.4}^\circ - A_{3.2}^\circ) \right] (s'_{2.3} - s_{2.3}^\circ) + \\ & + \left[ \frac{s_{n-1,1}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \right. \\ & + \left. \frac{s_{n-1,n-2}}{MN \sin 1''} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \dots + \right. \\ & + \left. \frac{s_{2.3}}{MN \sin 1''} \sin(A_{2.3}^\circ - A_{2.1}^\circ) \right] (s'_{1.2} - s_{1.2}^\circ) + \\ & + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1.2}) - (A_{1,n-1}^\circ - A_{1.2}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,1}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \dots + \\ & + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^\circ - A_{4.5}^\circ)] + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^\circ - A_{3.4}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^\circ - A_{2.3}^\circ)] = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Es ist verständlich, dass dies auch die Winkelbedingung des Polygons ist, und dass dieselbe in die Zahl der Laplaceschen Gleichungen eingeht, wenn alle benutzten astronomischen Punkte Laplacesche Punkte sind.

Die Zahl  $q$  der Laplaceschen Gleichung ist gleich der Zahl der geodätischen Linienzüge, die jeweils in einem Laplaceschen Punkt beginnen und enden; nach den bisherigen Entwicklungen fällt ein derartiger geodätischer Linienzug mit der geodätischen Linie für ein einzelnes Teilstück zusammen; falls im Netz  $p$  geschlossene Polygone auftreten, wird die Zahl der Laplaceschen Gleichungen  $q - p$  sein, weil  $p$  davon in die Winkelbedingungen übergehen.

Mit den Verbesserungen  $v$  der Winkel  $\beta$  schreiben wir die Winkelbedingung in folgender Form:

$$\begin{aligned} & (v_{1,n-1} - v_{1.2}) + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \dots + \\ & + (v_{4.3} - v_{4.5}) + (v_{3.2} - v_{3.4}) + (v_{2.1} - v_{2.3}) + \\ & + \frac{1}{MN \sin 1''} \left\{ s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-1,n-2}^\circ) (s'_{n-2,n-1} - s_{n-2,n-1}^\circ) + \right. \\ & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ) + \\ & + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-2,n-3}^\circ)] (s'_{n-2,n-3} - s_{n-2,n-3}^\circ) + \\ & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ) + \\ & + s_{n-2,n-3} \sin(A_{n-3,n-2}^\circ - A_{n-3,n-4}^\circ)] (s'_{n-3,n-4} - s_{n-3,n-4}^\circ) + \\ & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{3.2}^\circ) + \dots + \\ & + s_{3.4} \sin(A_{3.4}^\circ - A_{3.2}^\circ)] (s'_{2.3} - s_{2.3}^\circ) + \\ & + [s_{n-1,1} \sin(A_{n-1,1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + s_{n-1,n-2} \sin(A_{n-2,n-1}^\circ - A_{2.1}^\circ) + \dots + \\ & + s_{2.3} \sin(A_{2.3}^\circ - A_{2.1}^\circ)] (s'_{1.2} - s_{1.2}^\circ) \left. \right\} + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1.2}) - (A_{1,n-1}^\circ - A_{1.2}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^\circ - A_{n-1,1}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^\circ - A_{n-2,n-1}^\circ)] + \dots + \\ & + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^\circ - A_{4.5}^\circ)] + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^\circ - A_{3.4}^\circ)] + \\ & + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^\circ - A_{2.3}^\circ)] = 0. \end{aligned} \quad (76)$$

In den Laplaceschen Gleichungen (40), (41), (42) müssen die Verbesserungen  $\delta \alpha_{i,k}$  durch die Gleichung

$$\delta \alpha_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}$$

ersetzt werden.

## § 6. Mittlere Fehler der Grössen, die in die Laplaceschen Gleichungen und Polygon-Bedingungen eingehen; Bestimmung der Gewichte.

Der mittlere Fehler  $\mu$ , einer beobachteten Richtung muss aus der Ausgleichung der Teilstücke der Triangulation (§ 1) nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

Den mittleren Fehler  $\mu$  einer ausgeglichenen Richtung in einem Teilstück erhält man aus:

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{D-C}{D}}, \quad (77)$$

wobei  $D$ —die Zahl aller beobachteten Richtungen und  $C$ —die Zahl der Bedingungen in dem Teilstück ist; in vorliegendem Fall wird  $\frac{D-C}{D}$  etwa 0.7.



Nach § 5 ist der Fehler  $\delta_{i,k}$  des astronomischen Azimuts  $\alpha_{i,k}$  der geodätischen Linie gleich dem Beobachtungsfehler  $\delta_i$  des astronomischen Azimuts  $\alpha_i$  der Ausgangsseite im Punkte  $P$  plus dem Fehler  $v_{i,k}$  des Winkels  $\beta_{i,k}$  (Abb. 7)

$$\delta_{i,k} = \delta_i + v_{i,k}.$$

Die Fehler der Richtungen, die den Winkel  $\beta_{i,k}$  bilden, werden mit  $v'_{i,k}$  und  $v'_i$  bezeichnet, wobei  $v'_{i,k}$  sich auf die geodätischen Linien bezieht; es ist also

$$\delta_{i,k} = \delta_i - v'_i + v'_{i,k}. \quad (78)$$

Daraus erhält man:

$$\mu_{\alpha_{i,k}}^2 = \mu_{\alpha_i}^2 + \mu_{\beta_0}^2 + \mu_{v'_{i,k}}^2. \quad (79)$$

$\mu_{\alpha_i}^2$  muss man den astronomischen Berechnungen in den Basis-Netzen und der geodätischen Berechnung des unmittelbar beobachteten Azimuts auf der Ausgangsseite  $P_i$  entnehmen.

Zur Bestimmung von  $\mu_{v'_{i,k}}^2$  kann die Näherungsformel dienen:

$$\mu_{\beta_0}^2 + \mu_{v'_{i,k}}^2 = \frac{\mu^2}{3n} [2n^2 + 1], \quad (80)$$

wobei man unter  $n$  die Zahl der Seiten zwischen den Punkten  $P_i$  und  $P_k$  (d. i. die Zahl der Dreiecksseiten in dem Linienzug  $AabcdD$  der Abb. A) versteht.

Die mittleren Längenfehler, die in die Laplacesche Gleichung eingehen, werden aus den Berichten über die astronomischen Berechnungen in der Triangulation I. Ordnung entnommen.

Es darf noch besonders darauf hingewiesen werden, dass in allen Gleichungen des § 5

$$v_{k,i} - v_{k(k+1)}$$

$$\text{durch } v'_{k,i} - v'_{k(k+1)}$$

ersetzt werden darf, weil beide Winkel  $\beta$  im Punkte  $P_i$  durch den Fehler in  $\alpha_i$  gleichmässig verzerrt sind.

Der Fehler der Länge  $s'_{i,k}$  der geodätischen Linie  $P_i P_k$  wird nach der Formel (81) bestimmt:\*)

$$\mu_{s'}^2 = s^2 2\mu_0^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{4n^2 + 3n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{b^2} s^2, \quad (81)$$

wenn  $s'_{i,k}$  aus nur einer Basis abgeleitet wurde. Da aber jede geodätische Linie aus 2 Basen bestimmt wird, so ist

$$\mu_{s'}^2 = s^2 2\mu^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{n^2 + \frac{3}{2}n + 5}{9n} + \frac{m_b^2}{2b^2} s^2. \quad (82)$$

Wenn wir die mittleren Fehler der Grössen  $s$ ,  $\alpha$ ,  $v_{i,k}$ ,  $\lambda$ , haben so können wir zu den Gewichten übergehen. Hier setzen wir fest, dass dem Fehler mit dem Gewicht = 1 ein mittlerer Winkelfehler von  $\pm 1''$  und ein mittlerer Längenfehler von  $\pm 1 m$  entspricht.

## § 7. Allgemeine Zusammenfassung der Formeln. Hinweis auf die Reihenfolge der Berechnungen. Allgemeine Folgerung.

Die Bezeichnungen werden nun noch so geändert, dass die Niederschrift der Formeln vereinfacht wird; dann vereinfacht man noch alle Koeffizienten durch Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung bei  $\delta s$  und dritter Ordnung bei  $\delta \alpha$ .

\*) Hierin ist  $\frac{m_b}{b}$  der relative Fehler der Ausgangsseite.

Hierzu werden folgende Bezeichnungen eingeführt. Die Länge der Linie zwischen den Punkten  $P_n$  und  $P_{n+1}$  wird mit  $s_n$  bezeichnet, die Koeffizienten  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , die sich auf diese Linien beziehen, erhalten die entsprechenden Zeiger  $n$ .

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} 3) \quad p_4^n &= a_n = \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A_{n+1,n}^\circ \\ 6) \quad r_3^n &= b_n = -(2)_{n+1} \sin A_{n+1,n}^\circ \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = q_3^n \sin \varphi_{n+1} = h_n \sin \varphi_{n+1} \\ 5) \quad r_4^n &= c_n = 1 - \frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1,n}^\circ \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = 1 + f_n \sin \varphi_{n+1} \quad (\text{wird nach } f \text{ berechnet}). \\ 7) \quad q_1^n &= d_n = \sin l_{n,n+1} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} \\ 1) \quad p_3^n &= l_n = -(1)_{n+1} \cos A_{n+1,n}^\circ \\ 4) \quad q_4^n &= f_n = -\frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1,n}^\circ \sec \varphi_{n+1} \\ 2) \quad q_3^n &= h_n = -(2)_{n+1} \sin A_{n+1,n}^\circ \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Die Reihenfolge der Berechnungen der Koeffizienten für die betreffende Linie entspricht der linksseitigen Bezifferung.

Ferner:

a) die Verbesserung des astronomisch bestimmten Azimuts der Ausgangsseite in  $P$  bezeichnen wir mit  $\delta_i$ ;

b) die Azimutverbesserungen der geodätischen Linie  $P_{i,k}$  nennen wir  $v_{i,k}$  und  $v_{k,i}$  (ohne die in § 6 gebrauchten Zeiger)

c)  $\delta \varphi_{n,n+1}$  ersetzen wir durch  $\delta \varphi_n$  entsprechend der Bezeichnung  $s_n$ ;

d)  $\delta l_{n,n+1}$  ersetzen wir durch  $\delta l_n$  entsprechend der Bezeichnung  $s_n$ ;

e)  $\delta \alpha_i = \delta_i - v_i$ , wo  $v_i$  die Azimutverbesserung der Ausgangsseite ist.

Damit erhält man mit den oben abgeleiteten Formeln:

I. für ein geschlossenes Polygon mit  $n-1$  Linien und den Ecken  $1, 2, 3, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} B_1^\circ - (B_1^\circ)' &= \\ &= [e_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) b_1] \delta s_1 + \\ &+ [e_2 + (a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) b_2] \delta s_2 + \\ &+ [e_3 + (a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1}) b_3] \delta s_3 + \dots + \\ &+ [e_i + (a_k + a_{k+1} + \dots + a_{n-1}) b_i] \delta s_i + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ [e_{n-2} + a_{n-1} b_{n-2}] \delta s_{n-2} + \\ &+ e_{n-1} \delta s_{n-1} - \\ &- [a_2 + (a_3 + a_4 c_3 + a_5 c_4 c_3 + a_6 c_5 c_4 c_3 + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} c_{n-4} \dots c_3) c_2] (v_{2,1} - v_{2,3}) - \\ &- [a_3 + (a_4 + a_5 c_4 + a_6 c_5 c_4 + a_7 c_6 c_5 c_4 + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_4) c_3] (v_{3,2} - v_{3,4}) - \\ &- [a_i + (a_k + a_{k+1} c_k + a_{k+2} c_{k+1} c_k + \dots + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_k) c_i] (v_{i,i-1} - v_{i,k}) - \\ &\dots \dots \dots \\ &- [a_{n-4} + (a_{n-3} + a_{n-2} c_{n-3} + a_{n-1} c_{n-2} c_{n-3}) c_{n-4}] (v_{n-4,n-5} - v_{n-4,n-3}) - \\ &- [a_{n-3} + (a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}) c_{n-3}] (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) - \\ &- [a_{n-2} + a_{n-1} c_{n-2}] (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) - \\ &- a_{n-1} (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}). \end{aligned} \quad (84)$$



In (84) ist  $B_1^0$  die Ausgangsbreite des ersten Polygonpunktes im ersten Polygon;  $(B_1^0)'$  die entsprechende Breite, die über das ganze Polygon übertragen wurde.

Die Gleichung (84) ist die Bedingungsgleichung für den Polygonschluss in der Breite.

II.

$$\begin{aligned}
 L_1^0 - (L_1^0)' = & [h_1 + (d_2 + d_3 + d_4 + \dots + d_{n-1})e_1 + (f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1})b_1] \delta s_1 + \\
 & + [h_2 + (d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{n-1})e_2 + (f_3 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-1})b_2] \delta s_2 + \\
 & + [h_3 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})e_3 + (f_4 + f_5 + f_6 + \dots + f_{n-1})b_3] \delta s_3 + \\
 & + [h_i + (d_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})e_i + (f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_{n-1})b_i] \delta s_i + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + [h_{n-3} + (d_{n-2} + d_{n-1})e_{n-3} + (f_{n-2} + f_{n-1})b_{n-3}] \delta s_{n-3} + \\
 & + [h_{n-2} + d_{n-1}e_{n-2} + f_{n-1}b_{n-2}] \delta s_{n-2} + h_{n-1} \delta s_{n-1} - \\
 & - [f_2 + (d_3 + d_4 + d_5 + \dots + d_{n-1})a_2 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})a_3 + \\
 & + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & + (f_3 + f_4c_3 + f_5c_4c_3 + f_6c_5c_4c_3 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_3)c_2] (v_{2.1} - v_{2.3}) - \\
 & - [f_3 + (d_4 + d_5 + d_6 + \dots + d_{n-1})a_3 + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + \\
 & + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + \dots + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \\
 & + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & + (f_4 + f_5c_4 + f_6c_5c_4 + f_7c_6c_5c_4 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4} \dots c_4)c_3] (v_{3.2} - v_{3.4}) - \\
 & - [f_4 + (d_5 + d_6 + d_7 + \dots + d_{n-1})a_4 + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + \dots + \\
 & + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & + (f_5 + f_6c_5 + f_7c_6c_5 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4} \dots c_5)c_4] (v_{4.3} - v_{4.5}) - \\
 & - [f_5 + (d_6 + d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_5 + (d_7 + d_8 + \dots + d_{n-1})a_6 + \dots + \\
 & + (d_k + d_{k+1} + \dots + d_{n-1})a_{k-1} + \dots + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + \\
 & + (f_6 + f_7c_6 + f_8c_7c_6 + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_6)c_5] (v_{5.4} - v_{5.6}) - \\
 & \dots \dots \dots \\
 & - [f_i + (d_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})a_i + (d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1})a_k + \dots + \\
 & + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + (f_k + f_{k+1}c_k + f_{k+2}c_{k+1}c_k + \\
 & + f_{k+3}c_{k+2}c_{k+1}c_k + \dots + f_{n-1}c_{n-2}c_{n-3} \dots c_k)c_i] (v_{i,i-1} - v_{i,k}) - \\
 & \dots \dots \dots \\
 & - [f_{n-3} + (d_{n-2} + d_{n-1})a_{n-3} + d_{n-1}a_{n-2} + (f_{n-2} + f_{n-1}c_{n-2})c_{n-3}] (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) - \\
 & - [f_{n-2} + d_{n-1}a_{n-2} + f_{n-1}c_{n-2}] (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) - f_{n-1} (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n}). \quad (85)
 \end{aligned}$$

In (85) ist  $L_1^0$  die Ausgangslänge des ersten Polygonpunktes;  $(L_1^0)'$  die entsprechende Länge die über das ganze Polygon übertragen wurde.

Die Gleichung (85) ist die Bedingungsgleichung für den Polygonschluss in der Länge (hierbei ist  $k = i + 1$ ).

Die allgemeine Formel für die Laplacesche Gleichung für den Linienzug  $P_1P_2P_3P_4 \dots P_n$  lautet:

$$\begin{aligned}
 & \delta_n^0 + v_{n,n-1} + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,n}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \\
 & + (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) + \dots + (v_{4.3} - v_{4.5}) + (v_{3.2} - v_{3.4}) + \\
 & + (v_{2.1} - v_{2.3}) - \delta_1^0 - v_{1.2} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1 + \\
 & + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}^0) + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,n}) - (A_{n-1,n-2}^0 - A_{n-1,n}^0)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^0 - A_{n-2,n-1}^0)] + \\
 & + [(\alpha_{n-3,n-4} - \alpha_{n-3,n-2}) - (A_{n-3,n-4}^0 - A_{n-3,n-2}^0)] + \\
 & + \dots + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^0 - A_{4.5}^0)] + \\
 & + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^0 - A_{3.4}^0)] + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^0 - A_{2.3}^0)] - \\
 & - [\alpha_{1.2} - A_{1.2}^0] - (\lambda_n - L_n^0) \sin \varphi_n + (\lambda_1 - L_1^0) \sin \varphi_1 + \\
 & + \frac{1}{MN \sin 1''} \left\{ s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^0 - A_{n-1,n-2}^0) (s'_{n-2} - s_{n-2}^0) + \right. \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^0 - A_{n-2,n-3}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{n-2,n-3}^0)] (s'_{n-3} - s_{n-3}^0) + \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^0 - A_{n-3,n-4}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{n-3,n-4}^0) + \\
 & + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^0 - A_{n-3,n-4}^0)] (s'_{n-4} - s_{n-4}^0) + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^0 - A_{3.2}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{3.2}^0) + \\
 & + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^0 - A_{3.2}^0) + \dots + s_4 \sin (A_{4.5}^0 - A_{3.2}^0) + \\
 & + s_3 \sin (A_{3.4}^0 - A_{3.2}^0)] (s'_2 - s_2^0) + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,n}^0 - A_{2.1}^0) + \\
 & + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{2.1}^0) + \dots + s_3 \sin (A_{3.4}^0 - A_{2.1}^0) + \\
 & + s_2 \sin (A_{2.3}^0 - A_{2.1}^0)] (s'_1 - s_1^0) \left. \right\} = 0. \quad (86)
 \end{aligned}$$

Bei geschlossenen Linienzügen geht in jedem Polygon eine der Laplaceschen Bedingungen in die Polygonwinkel-Bedingung über und erhält für den Linienzug  $P_1P_2P_3P_4 \dots P_{n-1}P_1$  folgende Form:

$$\begin{aligned}
 & (v_{1,n-1} - v_{1.2}) + (v_{n-1,n-2} - v_{n-1,1}) + (v_{n-2,n-3} - v_{n-2,n-1}) + \\
 & + (v_{n-3,n-4} - v_{n-3,n-2}) + \dots + (v_{4.3} - v_{4.5}) + (v_{3.2} - v_{3.4}) + \\
 & + (v_{2.1} - v_{2.3}) + [(\alpha_{1,n-1} - \alpha_{1.2}) - (A_{1,n-1}^0 - A_{1.2}^0)] + \\
 & + [(\alpha_{n-1,n-2} - \alpha_{n-1,1}) - (A_{n-1,n-2}^0 - A_{n-1,n}^0)] + \\
 & + [(\alpha_{n-2,n-3} - \alpha_{n-2,n-1}) - (A_{n-2,n-3}^0 - A_{n-2,n-1}^0)] + \dots + \\
 & + [(\alpha_{4.3} - \alpha_{4.5}) - (A_{4.3}^0 - A_{4.5}^0)] + [(\alpha_{3.2} - \alpha_{3.4}) - (A_{3.2}^0 - A_{3.4}^0)] + \\
 & + [(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}) - (A_{2.1}^0 - A_{2.3}^0)] + \\
 & + \left\{ s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^0 - A_{n-1,n-2}^0) (s'_{n-2} - s_{n-2}^0) + \right. \\
 & + [s_{n-1,1} \sin (A_{n-1,1}^0 - A_{n-2,n-3}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{n-2,n-3}^0)] (s'_{n-3} - s_{n-3}^0) + \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^0 - A_{n-3,n-4}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{n-3,n-4}^0) + \\
 & + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^0 - A_{n-3,n-4}^0)] (s'_{n-4} - s_{n-4}^0) + \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^0 - A_{3.2}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{3.2}^0) + \\
 & + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^0 - A_{3.2}^0) + \dots + s_4 \sin (A_{4.5}^0 - A_{3.2}^0) + \\
 & + s_3 \sin (A_{3.4}^0 - A_{3.2}^0)] (s'_2 - s_2^0) + \\
 & + [s_{n-1} \sin (A_{n-1,1}^0 - A_{2.1}^0) + s_{n-2} \sin (A_{n-2,n-1}^0 - A_{2.1}^0) + \\
 & + s_{n-3} \sin (A_{n-3,n-2}^0 - A_{2.1}^0) + \dots + s_4 \sin (A_{4.5}^0 - A_{2.1}^0) + s_3 \sin (A_{3.4}^0 - A_{2.1}^0) + \\
 & + s_2 \sin (A_{2.3}^0 - A_{2.1}^0)] (s'_1 - s_1^0) \left. \right\} \frac{1}{MN \sin 1''} = 0. \quad (87)
 \end{aligned}$$



Reihenfolge der Berechnungen:

Unter der Annahme, dass die Ausmasse des Ellipsoids und die geodätischen Ausgangsdaten feststehen, erfolgt:

a) die Ausgleichung der Teilstücke (§ 1).

Dadurch werden die Längen  $s'$  der geodätischen Linien  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, \dots, P_{16}P_{17}, P_{17}P_{24}, \dots$  (Abb. 1) und die astronomischen Azimute  $\alpha_{1.2}, \alpha_{2.1}, \alpha_{2.3}, \alpha_{3.2}, \dots, \alpha_{16.17}, \alpha_{17.16}, \alpha_{17.24}, \alpha_{24.17}, \dots$  dieser geodätischen Linien erhalten. Die Winkel zwischen den geodätischen Linien werden dann bei  $P_2 \dots \alpha_{2.1} - \alpha_{2.3}$  bei  $P_{17} \dots \alpha_{17.16} - \alpha_{17.24}$ ; usw.

b) Die Berechnung der angenäherten geodätischen Koordinaten und die genaue Berechnung der Längen  $s_0$  und der Azimute  $A^\circ$  der ihnen entsprechenden geodätischen Linien. Im Hinblick auf die Verwendung der Ergebnisse dieser Berechnungen bei der folgenden Aufstellung der Polygonbedingungen, führen wir jedoch für eine Reihe von Linien diese Berechnung der genäherten Koordinaten mit voller Genauigkeit durch. Erläutern wir das am Beispiel der Abb. 1: Ausgehend von den angenommenen geodätischen Koordinaten von  $P_1$  und dem geodätischen Azimut  $A_{1.2}$  berechnen wir in aller Schärfe mit  $s'_{1.2}$  die geographischen Koordinaten und das geodätische Gegenazimut in  $P_2$ ; von diesem geodätischen Azimut wird  $(\alpha_{2.1} - \alpha_{2.3})$  subtrahiert und mit dem auf diese Weise erhaltenen geodätischen Azimut der Linie  $P_2P_3$  und der Länge dieser Linie  $s'_{2.3}$  werden die geodätischen Koordinaten von  $P_2$  auf  $P_3$  übertragen usw.; mit derselben Rechenschärfe gehen wir zu den Linien  $P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_8$  über. Aus den Koordinaten von  $P_8$  und von  $P_1$  bestimmen wir dann  $s^\circ_{1.8}$  und  $A^\circ_{8.1}, A^\circ_{1.8}$ . Im Netzriss bezeichnen wir durch besondere Zeichen und Farben die Linien bei deren Berechnung  $s^\circ = s'$  gesetzt wurde und die Art und Weise der Übertragung der Koordinaten und Azimute längs des Linienzugs, um eine klare Darstellung für die Aufstellung der Polygonbedingungen zu bekommen.

Ferner erhalten wir mit dem in dieser Weise berechneten geodätischen Azimut der Linie  $P_3P_4$  nach Abzug von  $(\alpha_{3.4} - \alpha_{3.9})$  das geodätische Azimut  $A'_{3.9}$ ; mit  $A'_{3.9}$  und mit  $s'_{3.9}$  und mit den Koordinaten  $P_3$ , die aus der Übertragung  $P_1P_2P_3$  erhalten wurden, übertragen wir mit aller Schärfe die Koordinaten und Azimute auf  $P_9$  und gehen auf diese Weise über zu  $P_{10}$ , zu  $P_{11}$ , zu  $P_{12}$ , zu  $P_{13}$ . Aus den Koordinaten von  $P_{13}$  und  $P_5$  (die aus dem ersten Polygon erhalten wurden) berechnen wir umgekehrt  $A^\circ_{13.5}, A^\circ_{5.13}$  und  $s^\circ_{13.5}$ .

Im Polygon  $P_7P_8P_5P_{14}P_{15}P_{16}P_{17}P_{18}$  beginnen wir die Berechnung mit  $P_5$  und einem Azimut, das gleich ist dem geodätischen Azimut  $P_5P_6$  minus  $(\alpha_{5.6} - \alpha_{5.14})$  und führen in der angegebenen Weise die Berechnung bis  $P_{18}$ ;  $P_7P_{18}$  bestimmen wir wieder umgekehrt aus den Koordinaten von  $P_{18}$  und  $P_7$ ; usw.

c) Durch die Bestimmung der geodätischen Näherungs-Koordinaten  $B^\circ, L^\circ$  und der angenäherten geodätischen Azimute und Entfernungen  $A^\circ$  und  $s^\circ$  sind alle Vorbereitungen für die Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen beendet. Die Resultate müssten noch in ein besonderes Netz-Schema unter Angabe der Linien eingetragen werden, für die  $s_0 = s'$  ist. Hierauf können die Polygon-Widersprüche in Breite und Länge berechnet werden. Hierzu müssen in jedem geschlossenen und — von anderen — unabhängigen Polygon fortlaufend in Richtung des Uhrzeigers die geodätischen Koordinaten und Azimute  $A'^*$  mit den Seiten  $s'$  und den Polygonwinkeln (mit Ausnahme des Winkels im Ausgangspunkt), die den Unterschieden der astronomischen Azimute gleich sind, genau berechnet werden. Ein Teil dieser Berechnungen wurde schon unter b) durchgeführt. So ist im Polygon  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_1$  nur über das Azimut der geodätischen Linie  $P_8P_7$  ( $A^\circ_{8.7}$ ) durch Subtraktion des Winkels  $(\alpha_{8.7} - \alpha_{8.1})$  das Azimut  $A'_{8.1}$  zu berechnen, um ausgehend von den früher erhaltenen  $B^\circ_0$  und  $L^\circ_0$  mit diesem Azimut  $A'_{8.1}$  und  $s'_{8.1}$  die geodätischen Koordinaten von  $P_1$  zu berechnen. Im Polygon  $P_3P_9P_{10}P_{11}P_{12}P_{13}P_5P_4P_3$  muss man die oben erwähnte Berechnung von  $P_{13}$  aus längs den Linien  $P_{13}P_5, P_5P_4, P_4P_3$  usw. durchführen.

Hierbei muss unbedingt in jedem Polygon die genaue geodätische Übertragung der Koordinaten und Azimute fortlaufend im Uhrzeigersinn und mit den Seiten  $s'$  und den Winkeln durchgeführt werden, die dem Unterschied der astronomischen Azimute entsprechen. Die hierbei aus

\*) Diese Azimute  $A'$  fallen mit  $A^\circ$  nicht zusammen!

verschiedenen Polygonen erhaltenen Werte der Azimute  $A'$  für die zwei Polygonen gemeinsamen Linien werden selbstverständlich voneinander abweichen; ebenso werden auch die geodätischen Koordinaten der zwei oder mehreren Polygonen gemeinsam angehörnden Punkte, die durch die obige Berechnung erhalten wurden, voneinander und von den Näherungskoordinaten  $B^\circ$  und  $L^\circ$ , die nach b) berechnet wurden, abweichen.

d) Die Koeffizienten  $a, b, c, d, e, f, h$  sind nach Formel (83) zu berechnen; hierzu wird für jedes der Polygone, das schon bei c) benutzt wurde (also bei der Berechnung der Widersprüche in Breite und Länge) eine besondere Skizze angefertigt, auf welcher die Ecken des Polygons mit einer bestimmten Farbe numeriert werden. Diese Numerierung wird über das ganze Schema des Netzes ausgedehnt. Mit einer anderen Farbe wird dann noch eine eigene polygonweise Numerierung durchgeführt, 1, 2, 3, ...,  $n - 1$ , wobei die Nummer 1 stets auf die Ecke entfällt, die als Ausgangspunkt für die Berechnung der Polygonwidersprüche gewählt wurde. An jede Seite des Polygons schreiben wir die entsprechenden Werte  $s, A^\circ, l$  und die Werte  $a, b, c, d, e, f, h$ ; den Ecken des Polygons werden die entsprechenden Werte  $B^\circ$  beige geschrieben.

Ferner stellen wir für jedes Polygon in besonderen Übersichten noch die Koeffizienten der Formeln (84) und (85) und gleichzeitig auch noch die Bedingungsgleichungen der Breiten und Längen zusammen.

Endlich ist noch für jedes Polygon die Winkelbedingung (oder eine Laplacesche Gleichung) nach (87) aufzustellen, wozu noch vorher das Absolutglied dieser Gleichung berechnet werden muss; hierzu werden die Ergebnisse der Berechnungen für  $s_0$  und  $A^\circ$  nach den Anmerkungen auf dem Netzschema nach c) benutzt; es ist klar, dass viele Glieder mit  $(s' - s^\circ)$  in (87) Null werden.

e) Nun müssen noch die Laplaceschen Gleichungen nach (86) aufgestellt werden. Unter der Annahme, dass jede geodätische Linie in einem Laplaceschen Punkt beginnt und endet, wird die Anzahl der Laplaceschen Gleichungen der Anzahl aller geodätischen Linien im Netz minus der Zahl der Polygone, für welche die Winkelbedingungen als Laplacesche Gleichungen niedergelegt sind, gleich sein. Die Bildung der Linienzüge, die bei der Zusammenstellung der Laplaceschen Bedingungen benutzt wurden, erläutern wir nach dem Beispiel der Abb. 1:

Die erste Gleichung schreiben wir für die Linie  $P_1P_2$

2.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3$
3.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4$
4.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5$
5.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$
6.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_8$
7.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7$
8.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9$
9.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9P_{10}$
10.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_9P_{10}P_{11}$
11.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{13}$
12.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{13}P_{12}$
13.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{14}$
14.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_2P_3P_4P_5P_{14}P_{15}$
15.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}$
16.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}P_{17}$
17.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_8P_7P_{18}P_{17}P_{16}$
18.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}$
19.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}$
20.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}$
21.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}$
22.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}P_{23}$
23.	"	"	"	"	"	"	$P_1P_{19}P_{20}P_{21}P_{22}P_{23}P_{21}$

(N)



Die Laplacesche Gleichung, die sich in die Winkelbedingung des Polygons verwandelt, entsteht dadurch, dass man in einer Richtung fortschreitend nacheinander die Laplaceschen Gleichungen für sämtliche Linien des Polygons aufstellt und summiert. Wenn wir bei der Aufstellung der Winkelbedingungen die Form der Gleichung (87) anwenden, tritt die Frage auf, ob es notwendig ist, diese Winkelbedingungen durch Schliessung des Polygons oder durch die Aufstellung der Laplaceschen Gleichung für einen und denselben Punkt auf zwei verschiedenen Wegen zu bestimmen. Zum Beispiel könnte man die Gleichungen für die Linienzüge  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , und  $P_1P_8P_7P_6$  einander gleichsetzen, um die Winkelbedingung im ersten Polygon zu erhalten, anstatt die Gleichung (87) anzuwenden. Offenbar sind aber, wenn die eine oder auch die andere Methode zur Aufstellung der Winkelbedingung angewendet wird, die Glieder mit  $\delta v$  und mit  $[(\alpha_{k,i} - \alpha_{k,k+1}) - (A^{\circ}_{k,i} - A^{\circ}_{k,k+1})]$  vollkommen identisch. Daraus ersieht man, dass auch die Summe der Glieder mit  $(s' - s^{\circ})$  eine und dieselbe Bedeutung haben wird, obwohl ihre Einzelglieder bei Anwendung der beiden Methoden verschieden sind.

Anstatt die Laplacesche Gleichung immer von  $P_1$  zu  $P_n$  über alle dazwischenliegenden Laplaceschen Punkte aufzustellen, können und sollen die Laplaceschen Gleichungen unmittelbar für die geodätischen Linien zwischen zwei aufeinanderfolgenden Laplaceschen Punkten aufgestellt werden. Dadurch werden die Berechnungsarbeiten vereinfacht. Zur Aufstellung der Laplaceschen Gleichung für die geodätische Linie zwischen den Punkten  $P_{n-1}$  und  $P_n$  schreiben wir die Gleichung (86) für  $n$  gleich  $n-1$  und erhalten durch Subtraktion des Ergebnisses von (86):

$$\begin{aligned} & \delta^{\circ}_n - \delta^{\circ}_{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,n} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \delta\lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + \\ & + (\alpha_{n,n-1} - A^{\circ}_{n,n-1}) - (\alpha_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-1,n}) - \\ & - (\lambda_n - L^{\circ}_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L^{\circ}_{n-1}) \sin \varphi_{n-1} + \\ & + \frac{s_{n-1}}{MN \sin 1''} \left\{ \sin (A^{\circ}_{n,n-1} - A^{\circ}_{n-1,n-2}) (s'_{n-2} - s^{\circ}_{n-2}) + \right. \\ & + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-2,n-3}) (s'_{n-3} - s^{\circ}_{n-3}) + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{n-3,n-4}) (s'_{n-4} - s^{\circ}_{n-4}) + \\ & \left. + \dots + \sin (A^{\circ}_{n-1,n} - A^{\circ}_{2,1}) (s'_1 - s^{\circ}_1) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Nach (88) können für das in Abb. 1 dargestellte Netz die Laplaceschen Gleichungen für die folgenden Linien aufgestellt werden:

$$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_1P_8, P_8P_7, P_7P_6, P_9P_{10}, P_{10}P_{11}, P_5P_{13}, P_5P_{14}, \\ P_{14}P_{15}, P_7P_{18}, P_{18}P_{17}, P_{17}P_{16}, P_{16}P_{19}, P_{19}P_{20}, P_{20}P_{21}, P_{21}P_{22}, P_{22}P_{23}, P_{23}P_{24},$$

wobei wir annehmen wollen, dass die Übertragung von  $P_1$  auf dem in dem Verzeichnis (N) angegebenen Wege durchgeführt wird.

Schliesslich darf noch daran erinnert werden, dass bei Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen nach (86) oder (88) vorausgesetzt wurde, dass bei der Berechnung der Näherungskoodinaten

$$\begin{aligned} B^{\circ}_1 &= \varphi_1 - \xi_1 \\ L_1 &= L^{\circ}_1 = \lambda_1 - \eta_1 \sec \varphi_1 \\ A_{1,2} &= A^{\circ}_{1,2} = \alpha_{1,2} - \eta_1 \tan \varphi_1 \\ d\varphi_1 &= 0; dB^{\circ}_1 = 0 \\ dL^{\circ}_1 &= d\lambda_1 \end{aligned}$$

angenommen wurde.

f) Nach Aufstellung aller Polygonbedingungen und der Laplaceschen Gleichungen müssen alle diese Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden, wozu vorläufig nach § 6 noch in den verschiedenen Teilstücken die mittleren Fehler  $\mu_0$  der beobachteten Richtungen, die mittleren Fehler  $\mu$  der ausgeglichenen Richtungen, die mittleren Fehler  $\mu_{\alpha}$  der Azimute der Ausgangsseiten, die mittleren Fehler  $\mu_v$  der Azimute der geodätischen Linien zwischen

benachbarten Laplaceschen Punkten, die mittleren Fehler  $\mu_s$  der Längen dieser geodätischen Linien und endlich noch die mittleren Fehler der astronomischen Längen  $\lambda$  berechnet werden müssen. Nach der Berechnung der mittleren Fehler können die Gewichte der entsprechenden Elemente bestimmt werden. Bei 16 geschlossenen Polygonen — dies entspricht dem astronomisch-geodätischen Netz im Europ. Teile Russlands — und bei Polygonseiten von ungefähr 300 km werden 48 Polygonbedingungen und 64 Laplacesche Gleichungen erhalten, wenn die Laplaceschen Punkte je 200 km verteilt sind. Mithin müssen bei einem Netz von solcher Ausdehnung 112 Bedingungsgleichungen zusammen aufgelöst werden. Hierbei beansprucht die Auflösung der 64 Laplaceschen Gleichungen und der 12 Winkelbedingungen verhältnismässig wenig Arbeit. Die Hauptarbeit verursachen die übrigen 32 Polygon-Bedingungen. Hieraus sieht man, dass der Umfang der Berechnungsarbeit hauptsächlich von der Zahl der Gleichungen für Anschluss in Breite und Länge abhängt; demnach braucht man vor den 112 Bedingungsgleichungen nicht zu erschrecken, ihre Auflösung in einer Gruppe ist durchaus möglich.

Bis jetzt haben wir die Laplaceschen Punkte, die in der Mitte der Teilstücke zwischen zwei Ausgangsseiten liegen, überhaupt noch nicht berücksichtigt. Es ist nicht erforderlich, diese Punkte in die allgemeine Ausgleichung des Netzes einzubeziehen: sie müssen aber bei der Ausgleichung der Teilstücke berücksichtigt werden, indem in § 1 nicht nur eine sondern zwei oder drei Azimutbedingungen (je nach der Zahl der Laplaceschen Zwischenpunkte) angesetzt werden. Im übrigen bleibt das Schema und die Reihenfolge der Ableitung der Azimute  $\alpha_{k,i}$  und  $\alpha_{i,k}$  und der Länge  $s'_{i,k}$  der geodätischen Linie, die die Endpunkte  $P_i$  und  $P_k$  des Teilstückes zwischen den Ausgangsseiten verbindet, unverändert. Dadurch erhöht sich zweifellos die Genauigkeit der Ableitung von  $\alpha$  und  $s'$  wesentlich, was sich auf die folgenden Berechnungen vorteilhaft auswirkt.

g) Nach der Auflösung der Bedingungsgleichungen müssen die Verbesserungen der Seitenlängen  $s'$  und der Azimute  $\alpha$  angebracht werden, worauf dann mit den geodätischen Ausgangsdaten in  $P_1$  die endgültige Berechnung der geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte, die die Endpunkte der Teilstücke der Triangulation bilden, durchgeführt werden kann.

h) Schliesslich müssen noch die Dreiecke der einzelnen Teilstücke endgültig zwischen die jetzt festliegenden Laplaceschen Punkte  $P_i$  und  $P_k$ , die die Endpunkte dieser Teilstücke bilden (—zwischen die endgültigen Ausgangsseiten — deren Längen aus den Basisnetzen übernommen werden — und zwischen die geodätischen Azimute dieser Ausgangsseiten — die aus dem endgültigen geodätischen Azimut der Linie  $P_i P_k$  und mit dem aus der Ausgleichung hervorgegangenen Wert für  $\beta_{i,k}$  abgeleitet wurden —), eingerechnet werden (Abb. C).

Die endgültige Ausgleichung der Teilstücke wird am besten nach der in USA angewandten Methode gelöst, die mit sehr vorteilhaften Abänderungen in der UdSSR in einer besonderen Broschüre durch den wissenschaftlichen Mitarbeiter des staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie, den Adjunkten N. A. Urmajew dargestellt wurde.

Eine Darlegung der Methode von Urmajew zur Ausgleichung der Kettenabschnitte zwischen zwei festen Ausgangsseiten folgt in dem nächsten Paragraphen.

Die Einführung der Azimutgleichungen in die vorläufige Ausgleichung der Teilstücke führt offenbar dazu, dass die Absolutglieder in den Laplaceschen Gleichungen und in den Winkelbedingungen der Polygone nahezu Null werden. Nichtsdestoweniger behalten die Laplaceschen Gleichungen zur gemeinsamen Bestimmung der Verbesserungen der astronomisch und der rein geodätisch bestimmten Elemente ihre volle Bedeutung. Ich nehme an, dass die vorläufige Ausnutzung aller Laplaceschen Punkte bei der Ausgleichung der Teilstücke auch zu einer Verminderung der Absolutglieder in den Polygonbedingungen führen wird. Da infolge der zuverlässigen Bestimmung von  $\alpha$  und  $s'$  in der Ausgleichung der Teilstücke diese geringeren Veränderungen unterworfen sein werden, vergrössert sich bei der Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze die Wahrscheinlichkeit einer gerechten Verteilung der Fehler. Endlich spielt hier noch die Vermehrung der Laplaceschen Punkte in jedem einzelnen Teilstück eine wesentliche Rolle. Daher rechne ich auch auf eine günstige Verteilung der Verbesserungen bei der gleichzeitigen Ausgleichung aller Elemente



des Netzes unter Berücksichtigung der vorläufig abgeleiteten Längen und astronomischen Azimute der geodätischen Linien aus den einzelnen Teilstücken, die im weiteren als gleichsam unmittelbar beobachtete Größen angesehen werden. Aber der vollkommenere Weg ist wohl der folgende: Ausgleichung der Teilstücke nur aufgrund der Dreiecksbedingungen und der Basen; Ableitung der Länge und Azimute der geodätischen Linien, die die Endpunkte des Teilstücks verbinden; Aufstellung der Laplaceschen Gleichungen für diese geodätischen Linien und ihre Auflösung in bekannter Weise, aber getrennt von den Polygon-Bedingungen; zweitens nochmalige Ausgleichung der Teilstücke aufgrund der Dreiecksbedingungen, der Basen und der Azimut-Bedingungen unter Berücksichtigung der Verbesserungen der astronomischen Azimute und Längen, die aus der Ausgleichung der Laplaceschen Gleichungen erhalten wurden; alsdann Aufstellung der Polygon-Bedingungen und ihre Auflösung unter Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen, die jetzt neue Absolutglieder haben, und schliesslich die Einrechnung der Teilstücke zwischen ihre endgültig festgelegten Endpunkte.

### Ergänzungs-§ 8. Ausgleichung der Dreiecksketten zwischen zwei festen Ausgangsseiten (nach N. A. Urmajew). \*)

Nun betrachten wir eine einfache Dreieckskette (Abb. 8) zwischen den Ausgangsseiten  $P_1A$  und  $P_2B$ . Die geodätischen Koordinaten ihrer Endpunkte  $P_1, A, P_2$  und  $B$  sind endgültig berechnet. Damit liegen auch die geodätischen Azimute und Längen der Seiten  $P_1A$  und  $P_2B$  endgültig fest und unterliegen keinen Veränderungen mehr.

Aus dieser Dreieckskette wählen wir den mit Doppellinien dargestellten Linienzug aus, der die Punkte  $A$  und  $P_2$  verbindet.

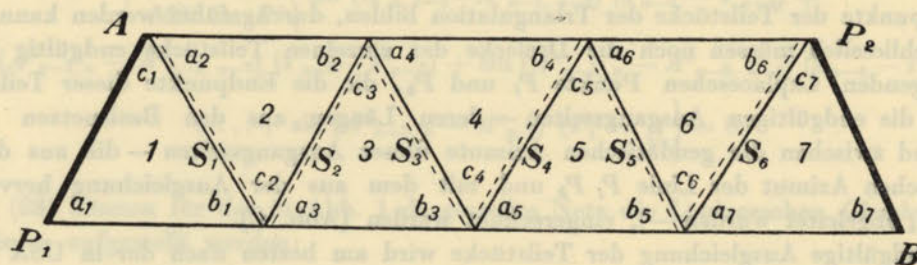


Abb. 8.

Wenn wir die Breitenänderungen der Punkte dieses Linienzuges, die der Änderung der Logarithmen seiner Seiten  $s$  und der Änderung der Azimute  $A$  dieser Seiten entsprechen, mit  $dB_1, dB_2, dB_3, \dots, dB_6$  bezeichnen, erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} dB_1 &= p_1 d \lg s_1 + p'_1 dA_1 \\ dB_2 &= p_2 d \lg s_2 + p'_2 dA_2 + dB_1 \\ dB_3 &= p_3 d \lg s_3 + p'_3 dA_3 + dB_2 \\ dB_4 &= p_4 d \lg s_4 + p'_4 dA_4 + dB_3 \\ dB_5 &= p_5 d \lg s_5 + p'_5 dA_5 + dB_4 \\ dB_6 &= p_6 d \lg s_6 + p'_6 dA_6 + dB_5 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Durch rückläufige Auflösung dieser Gleichungen ergibt sich

$$dB_6 = p_1 d \lg s_1 + p_2 d \lg s_2 + p_3 d \lg s_3 + p_4 d \lg s_4 + p_5 d \lg s_5 + p_6 d \lg s_6 + p'_1 dA_1 + p'_2 dA_2 + p'_3 dA_3 + p'_4 dA_4 + p'_5 dA_5 + p'_6 dA_6. \quad (90)$$

\*) Wegen der praktischen Bedeutung dieser Arbeit von Urmajew folgt noch eine Übersetzung der Originalarbeit.

Jetzt können noch die Änderungen der Logarithmen der Seiten und der Azimute durch die Winkelverbesserungen ausgedrückt werden. Vorher werden jedoch noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\Delta a_i (a_i) - \Delta b_i (b_i) = \Delta_i. \quad (91)$$

Hierbei sind  $\Delta a_i$  und  $\Delta b_i$  die Änderungen der Logarithmen der Sinuse der Winkel  $a_i$  und  $b_i$  für je  $1''$ ,  $(a_i)$  und  $(b_i)$  die Verbesserungen dieser Winkel selbst und endlich

$$\left. \begin{aligned} d \lg s_1 &= \Delta_1 \\ d \lg s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ d \lg s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \\ &\dots \dots \dots \\ d \lg s_6 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Für die Verbesserung der Azimute haben wir dann:

$$\left. \begin{aligned} dA_1 &= -(c_1) \\ dA_2 &= -(c_1) + (c_2) \\ dA_3 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) \\ dA_4 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) \\ dA_5 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) \\ dA_6 &= -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) \end{aligned} \right\}, \quad (93)$$

wobei wir in (93) den Einfluss der Fehler der Dreieckswinkel auf die Bestimmung der Meridiankonvergenzen  $\delta$  aus den Elementen des Linienzuges vernachlässigten.

Da die Veränderungen dieser Größen

$$\delta = (2) s \sin A \operatorname{tg} \varphi,$$

soweit sie durch die Fehler der Dreieckswinkel verursacht sind, bei  $s = 30 \text{ km}$  und bei einer Länge der Kette von  $200 \text{ km} \pm 0,07''$  nicht überschreiten, so können diese Fehler in (93) unbeachtet bleiben, wenn (93) lediglich in (90) eingeführt wird.

Dann ist

$$p'_i = \frac{s_i}{R} \sin A_{k.i.}$$

Der Einfluss der angegebenen Fehler wird in den einzelnen Gliedern der Gleichung (90) in  $dA$  kleiner als  $0,0003''$ .

Setzt man (93) und (92) in (90) ein, so wird

$$\begin{aligned} dB_6 &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_2 + \\ &+ (p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \Delta_3 + (p_4 + p_5 + p_6) \Delta_4 + (p_5 + p_6) \Delta_5 + p_6 \Delta_6 - \\ &- (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_1) + (p'_2 + p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_2) - \\ &- (p'_3 + p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_3) + (p'_4 + p'_5 + p'_6) (c_4) - (p'_5 + p'_6) (c_5) + p'_6 (c_6). \end{aligned} \quad (94)$$

Das Gesetz für die Aufstellung der Koeffizienten in (94) ist einfach: der Koeffizient bei  $\Delta_i$  ist gleich der Summe der Koeffizienten  $p$  der Seiten des Linienzuges, die eingeschlossen sind zwischen dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer  $i$  und dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des letzten Dreiecks in der Kette; ebenso ist der Koeffizient bei  $(c_i)$  gleich der absoluten Summe der Koeffizienten  $p'$  für die Seiten des Linienzuges, die eingeschlossen sind zwischen dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer  $i$  und dem Scheitelpunkt des Zwischenwinkels des letzten Dreiecks in der Kette.



Die Bezeichnung der Koeffizienten bei (c) kann der Abb. leicht entnommen werden.

In Abb. 9 ist eine Kette dargestellt, in der die richtige Reihenfolge der Winkel  $a$ ,  $b$  und  $c$  nicht eingehalten ist; für sie wird das obige Gesetz für die Aufstellung der Koeffizienten voll beibehalten und wir erhalten für diese Kette:

$$dB_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_2 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_3 + \\ + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_4 + (p_3 + p_4) \Delta_5 + p_4 \Delta_6 + (p_1' + p_2' + p_3' + p_4') (c_1) - \\ - (p_2' + p_3' + p_4') (c_2) - (p_2' + p_3' + p_4') (c_3) - (p_2' + p_3' + p_4') (c_4) + (p_3' + p_4') (c_5) - p_4' (c_6).$$

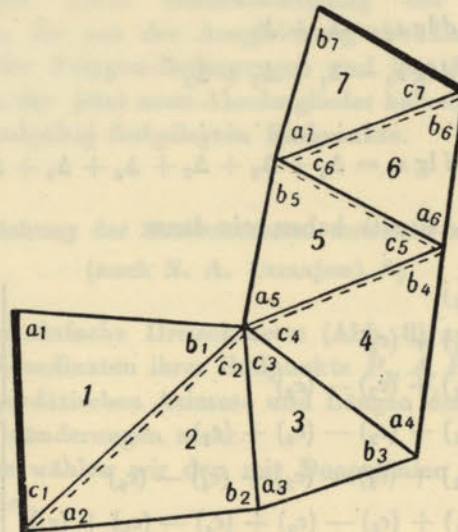


Abb. 9.

Ferner bezeichnen wir

$$\left. \begin{aligned} p_i + p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_r &= P_i' \\ p_i' + p_{i+1}' + p_{i+2}' + \dots + p_r' &= P_i'' \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Dann erhält mit (91) die Gleichung für die Breite folgende und endgültige Form:

$$\Sigma [P \Delta_a (a) - \Delta_b P (b)] + \Sigma (\pm P' (c)) + W_1 = 0. \quad (96)$$

Hier ist  $W_1$  gleich dem Unterschied der Breite des Punktes  $P_2$ , die auf dem Linienzuge berechnet wurde, und der gegebenen Breite des Punktes  $P_2$ .

Für die Unterschiede der aus dem Linienzug berechneten Längen erhalten wir die Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dL_1 &= q_1 d \lg s_1 + q_1' dA_1 \\ dL_2 &= q_2 d \lg s_2 + q_2' dA_2 + dL_1 \\ dL_3 &= q_3 d \lg s_3 + q_3' dA_3 + dL_2 \\ &\dots \dots \dots \\ dL_6 &= q_6 d \lg s_6 + q_6' dA_6 + dL_5 \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Analog wie bei der Ableitung der Bedingungsgleichung (96) für die Breite werden die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\left. \begin{aligned} q_i + q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_r &= Q_i' \\ q_i' + q_{i+1}' + q_{i+2}' + \dots + q_r' &= Q_i'' \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$\Sigma [Q \Delta_a (a) - Q \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm Q' (c)] + W_2 = 0. \quad (99)$$

In der Bedingungsgleichung (99) für die Länge ist  $W_2$  gleich der auf dem Linienzug berechneten Länge des Punktes  $P_2$  minus der gegebenen Länge desselben Punktes. Die Koeffizienten  $Q$  und  $Q'$  werden in derselben Weise wie die Koeffizienten  $P$  und  $P'$  gebildet.

Die Koeffizienten  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  und  $q'$  entsprechen vollständig den Koeffizienten  $p$  und  $q$  in den Formeln (2) § 2; demnach ist

$$\left. \begin{aligned} p_n &= - (1) \frac{1}{M 10^6} s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= - (2) \frac{1}{M 10^6} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

In den Formeln (100) ist  $M$  der Modul der Napierschen Logarithmen;  $\Delta \lg s$  ist in Einheiten der 6. Dezimalstelle der Logarithmen ausgedrückt.

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} p_n' &= \frac{s_n}{M_{n+1}} \sin A_{n+1, n} \\ q_n' &= - \frac{s_n}{N_{n+1}} \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Die Ausdrücke (100) und (101) für die Koeffizienten  $p$ ,  $q$ ,  $p'$  und  $q'$  werden zweckmässig umgebildet. Die Gleichungen müssen so multipliziert werden, dass die sehr kleinen Koeffizienten der Unbekannten in (96) und (99) ungefähr gleich 1 werden. Coast and Geodetic Survey führt hierzu den Faktor

$$\frac{M 10^4}{6} = 723.824 \text{ ein.}$$

Da:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= - \frac{(1)}{600} s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= - \frac{(2)}{600} s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \\ p_n' &= - \frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} q_n \cos \varphi_{n+1} & \rho'' &= \frac{1}{\sin 1''} \\ q_n' &= \frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p_n \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\}$$

ist, werden noch die Bezeichnungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{(1)}{600} &= b_1; & - \frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} &= c_1 \\ - \frac{(2)}{600} &= b_2; & + \frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Damit erhält man endgültig

$$\left. \begin{aligned} p_n &= b_1 s_n \cos A_{n+1, n} \\ q_n &= b_2 s_n \sin A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} \\ p_n' &= c_1 q_n \cos \varphi_{n+1} \\ q_n' &= c_2 p_n \sec \varphi_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$



Nachstehend bringen wir noch eine kleine Tabelle der Werte  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  und  $c_2$  für verschiedene Breiten.

Breite	$\lg b_1$	$\lg b_2$	$\lg c_1$	$\lg c_2$
35°	5.7331 n	5.7312 n	0.3253 n	0.3214 n
40°	5.7327 n	5.7310 n	0.3251 n	0.3216 n
45°	5.7324 n	5.7309 n	0.3248 n	0.3219 n
50°	5.7320 n	5.7308 n	0.3246 n	0.3222 n
55°	5.7316 n	5.7307 n	0.3243 n	0.3224 n
60°	5.7313 n	5.7305 n	0.3241 n	0.3226 n
65°	5.7310 n	5.7304 n	0.3239 n	0.3228 n

Mit den nach (103) berechneten Koeffizienten  $p$  und  $q$  erhalten wir dann die Gleichungen (96) und (99) in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [P \Delta_a(a) - P \Delta_b(b)] + \Sigma [\mp P'(c)] + 723.824 W_1 &= 0 \\ \Sigma [Q \Delta_a(a) - Q \Delta_b(b)] + \Sigma [\pm Q'(c)] + 723.824 W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Die Bedingungsgleichung für die Ausgangsseiten (Basisgleichung) lautet

$$\Sigma [\Delta_a(a) - \Delta_b(b)] + W_3 = 0; \quad (105)$$

hierbei ist  $W_3$  gleich dem Logarithmus der Seite  $P_2B$ , der aus der Dreiecksberechnung der Kette erhalten wurde, minus dem gegebenen Logarithmus der Seite  $P_2B$  (Abb. 8).

Die Azimutbedingung wurde schon im § 1 abgeleitet.

Bezeichnet man den Unterschied des Azimuts und des Gegenazimuts einer Seite gegenüber 180° mit  $\delta$  und mit  $A_0$  und  $A_7$  die gegebenen geodätischen Azimute der Seiten  $AP_1$  und  $P_2B$ , so wird

$$A_0 - c_1 - (c_1) + \delta_1 + d\delta_1 + c_2 + (c_2) + \delta_2 + d\delta_2 - c_3 - (c_3) + \delta_3 + d\delta_3 + c_4 + (c_4) + \delta_4 + d\delta_4 - c_5 - (c_5) + \delta_5 + d\delta_5 + c_6 + (c_6) + \delta_6 + d\delta_6 - c_7 - (c_7) = A_7$$

oder

$$-(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + \Sigma d\delta + A_7 - A_0 = 0. \quad (106)$$

In (106) ist  $A_7$  das berechnete Azimut der Richtung  $P_2B$ . Ferner wird, wenn unter  $dl$  das Differential des Längenunterschieds  $l$  verstanden wird,

$$d\delta = (2) ds \sin A \operatorname{tg} \varphi + (2) s \cos A \operatorname{tg} \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$dl = (2) ds \sin A \sec \varphi + (2) s \cos A \sec \varphi \cdot dA + (2) s \sin A \frac{d\varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$d\delta - dl \sin \varphi = (2) s \sin A \cdot d\varphi.$$

Hieraus schliessen wir, dass man (wie im § 1)

$$\Sigma d\delta = \Sigma dl \sin \varphi = (L_2 - L'_2) \sin \varphi_m$$

setzen kann.

Hier bedeuten  $L_2$  und  $L'_2$  die gegebene und die berechnete Länge des Punktes  $P_2$ . Deshalb wird die Azimutbedingung endgültig:

$$\begin{aligned} -(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4) - (c_5) + (c_6) - (c_7) + W_4 &= 0 \\ W_4 &= A'_7 - A_7 - (L'_2 - L_2) \sin \varphi_m \end{aligned} \quad (107)$$

also gleich dem Unterschied des berechneten und gegebenen Azimuts minus der Verbesserung  $(L'_2 - L_2) \sin \varphi_m$ .

Da die Kette schon einmal ausgeglichen wurde, werden für dieselbe in den Winkelsummenbedingungen und in den Basis-Gleichungen die absoluten Glieder Null sein. Zu den Gleichungen (104), (105) und (107) können die Winkelsummengleichungen angefügt und dann alle Gleichungen gemeinsam aufgelöst werden. Hierbei können noch die Winkelverbesserungen durch die entsprechenden Richtungsverbesserungen ersetzt und die Ausgleichung kann nach Richtungen durchgeführt werden, oder man behält in den Bedingungsgleichungen die Winkelverbesserungen bei und gleicht die Kette nach Winkeln aus.

Wenn wir nach Winkeln ausgleichen und beachten, dass die absoluten Glieder in den Winkelsummenbedingungen Null sind, so können diese unbeschadet der Forderung abgespalten werden, dass die Auflösung unter der Bedingung erfolgt, dass die Summe der Quadrate aller Winkelverbesserungen — und zwar sowohl der Verbindungswinkel als auch der Zwischenwinkel — zu einem Minimum wird.

Demnach wird folgender Grundsatz angewendet: *wann in irgendeinem Dreieck die Winkelverbesserungen in eine (beliebige) Bedingungsgleichung mit den Koeffizienten:  $r_{i-1}$ ,  $r_i$ ,  $r_{i+1}$  eingehen, so führt die Abspaltung der Winkelsummengleichung dieses Dreiecks in der betreffenden Bedingungsgleichung zur nachstehenden Umformung der Koeffizienten:*

$$\left. \begin{aligned} r_{i-1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \\ r_i - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \\ r_{i+1} - \frac{1}{3} (r_{i-1} + r_i + r_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Diese Umformung vereinfacht naturgemäss die Rechenarbeit und führt zu einer bemerkenswerten Veränderung der Methode der Netzausgleichung, die als „britannische“ Methode bezeichnet wird.

Nun betrachten wir nochmals die Ausdrücke (103). Wir können mit ausreichender Genauigkeit für die Bestimmung der Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen schreiben

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} &= (B_{n+1} - B_n)' \\ -\frac{(2)}{60} s_n \cos A_{n+1, n} \sec \varphi_{n+1} &= (L_{n+1} - L_n)' \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

In (109) sind rechts die Breiten- und Längendifferenzen in Bogenminuten ausgedrückt.

Nach (103) und (109) ist dann:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10}; q_n = \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} \\ p'_n &= \frac{(L_{n+1} - L_n)'}{10} a_1; q'_n = \frac{(B_{n+1} - B_n)'}{10} a_2 \\ a_1 &= -\frac{M 10^6 (1)}{\rho'' (2)} \cos B_{n+1} \\ a_2 &= \frac{M 10^6 (2)}{\rho'' (1)} \sec B_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Da die Koeffizienten  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$  und  $Q'$  in (104) die Summen der aufeinanderfolgenden Koeffizienten  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  und  $q'$  darstellen, werden sie folgendermassen gebildet: der Koeffizient  $P$  oder  $Q$ ,



der sich auf das Dreieck mit der Nummer  $i$  bezieht, ist gleich dem Unterschied der Breiten oder dem entsprechenden Unterschied der Längen des Endpunktes des Linienzuges und des Scheitelpunktes des Zwischenwinkels des Dreiecks mit der Nummer  $i$ . Infolgedessen wird:

$$\left. \begin{aligned} P_i &= (B_r - B_i)' \\ Q_i &= (L_r - L_i)' \\ P' &= a_1 (L_r - L_i)' \\ Q' &= a_2 (B_r - B_i)' \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

In (111) werden mit  $B_r$  und  $L_r$  die gegebenen Koordinaten des letzten Punktes ( $P_r$ ) des Linienzuges bezeichnet. In (111) ist zu beachten, dass die linken Teile gegenüber (103) zehnmal vergrößert sind.

Deshalb wird endgültig:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma[(B_r - B_i) \Delta_a(a) - (B_r - B_i) \Delta_b(b)] + \Sigma[\pm a_1 (L_r - L_i) (c)] + 7\,238.24 W_1 &= 0 \\ \Sigma[(L_r - L_i) \Delta_a(a) - (L_r - L_i) \Delta_b(b)] + \Sigma[\pm a_2 (B_r - B_i) (c)] + 7\,238.24 W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Die Grössen  $B_r - B_i$  und  $L_r - L_i$  erhält man sehr einfach, weil die Berechnungen der Breiten und Längen auf dem Linienzug schon zur Berechnung von  $W_1$  und  $W_2$  durchgeführt worden sind. Die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für die Breite und Länge in der Form (112) ist daher sehr einfach.

Prof. F. Krassowsky

## Methoden zur Ausgleichung der Triangulationen I. O. in der UdSSR

von Prof. Krassowsky \*)

### VORWORT.

Bis jetzt wurde die Triangulation I. O. im Europäischen Teile der UdSSR aus 12 geschlossenen Polygonen mit 30 Grundlinien und 40 Laplaceschen Punkten gebildet (ungerechnet 26 Punkten, die auf Doppelpunkten der Basisnetze bestimmt wurden). Die Ausgleichung und Berechnung einer derartigen gewaltigen Triangulation stellt nicht nur eine schwierige, sondern auch sehr umfangreiche Aufgabe dar. In Indien war die sogenannte Britannische Methode zur Polygonausgleichung eingeführt worden, die den Vorzug hat, dass in die Ausgleichung die Elemente der Dreiecke eingeführt werden, die die Polygone bilden; beachtet man hierbei aber, dass diese Methode eine Ausgleichung der Triangulation in Teilen darstellt und nur die gleichzeitige Bearbeitung von nicht mehr als drei bis vier Polygonen zulässt, wobei für die Ausgleichung von 12 bis 15 Polygonen eine Arbeitszeit von 5—6 Jahren erforderlich ist, so muss man diese Methode als vollkommen wertlos ablehnen. Selbst wenn man von dem unverantwortlichen Arbeits- und Zeitaufwand absieht, muss man bedenken, dass die Ausgleichung von Polygonnetzen nach Teilen zu fühlbaren Verzerrungen in den einzelnen Teilen führen kann.

\*) Arbeiten des Staatl. Institutes für Geodäsie u. Kartographie Fünfter Teil. Goskartogeodesia Moskau-Leningrad 1932.

Helmert schuf die nach ihm benannte Methode zur Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze, die auch in Deutschland angewandt wird. Hierbei werden die Polygone durch geodätische Linien gebildet, die die Dreiecksketten zwischen den angrenzenden Laplaceschen Punkten ersetzen. Gleichzeitig mit den Verbesserungen der Elemente, die auf geodätischem Wege gefunden wurden, werden hierbei auch noch die Verbesserungen der astronomischen Längen und Azimute bestimmt, wodurch eine richtige Orientierung der Polygonseiten erreicht wird. Die Helmerische Methode wurde praktisch jedoch nur bei einem Netz angewandt, das nur annähernd den achten Teil unserer Triangulation darstellt. Andererseits werden durch die Helmerische Methode keineswegs die systematischen Fehler in den Dreieckswinkeln berücksichtigt und die Laplaceschen Punkte vollkommen ausgenutzt, die sich nicht nur in den Enden sondern auch in der Mitte der einzelnen Kette befinden, die durch geodätische Linien ersetzt werden.

Wenn wir die Helmerische Methode unverändert übernehmen, würden wir kaum richtig handeln und verschiedene Elemente der Polygone entstehen. Andererseits ist die Arbeit bei dieser Methode schon bei 12 Polygonen so gewaltig und auch ermüdend, dass man kaum damit rechnen kann, die Arbeit zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen. Im Jahre 1930 wurde daher von mir der Vorschlag gemacht, die Helmerische Methode durch eine andere Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes zu ersetzen. (Siehe hierzu „Arbeiten des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie“ Ausg. 2, 1931.) Als wesentliche Veränderungen erscheinen hierbei:

1) Eine vorläufige Ausgleichung der einzelnen Teilstücke der Triangulation unter Berücksichtigung der Winkelsummen- und Seitengleichungen, der Basisbedingungen und der Azimutbedingungen (dadurch wird der Einfluss der systematischen Fehler in den Polygonwinkeln bei Bestimmung der Polygon-Elemente ausgeschaltet).

2) Das ermüdende zahlenmässige Abspalten der Lotabweichungen bei der Aufstellung der Polyongleichungen wird durch allgemeine Formeln ersetzt, die es gestatten, sofort die Bedingungsgleichung für ein beliebiges Polygon niederzuschreiben, wobei die Zahlenwerte der Koeffizienten sofort eingesetzt werden, die ohne besondere Schwierigkeiten sogar für ein Polygon mit 8 Laplaceschen Punkten berechnet werden können. Durch die von mir vorgeschlagene Methode kann die Berechnung der geodätischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte schätzungsweise im Verlaufe von anderthalb Jahren bei ununterbrochener Arbeit von drei Rechenpaaren durchgeführt werden.

Auf diese Weise erhält man erstens eine in Bezug auf die Methode und technische Ausführung vollkommen klare Arbeit und zweitens würden sich die Termine grosser Arbeiten wesentlich verkürzen lassen. Trotzdem zwang die Dringlichkeit der Anforderung geodätischer Koordinaten für die Dreieckspunkte I. O. im Winter 1930/31 zu noch weiteren Vereinfachungen bei der Bearbeitung der Triangulation I. O., wodurch die Arbeitszeit um weitere  $1\frac{1}{2}$  bis 2 Monate verkürzt wurde.

Im nachstehenden Artikel sind kurz der Weg und die Methoden zur Bearbeitung der Triangulationen I. O. dargelegt, die zurzeit vom Berechnungsbüro der Geodätischen Hauptverwaltung unter Leitung des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie angewandt werden; bei der endgültigen Bearbeitung dieser Methoden waren mir die Mitarbeiter am Staatl. Institut für Geodäsie und Kartographie Prof. W. W. Danilow und N. A. Urmajew behilflich.

F. H. Krassowsky



## Methode zur Ausgleichung der Triangulation I. O. in der UdSSR.

### I.

Bei der Ausgleichung der Polygone der Triangulation I. O. wird zunächst die Ausgleichung einzelner Teilstücke der Triangulation durchgeführt, wobei man unter Teilstück einen Kettenabschnitt zwischen zwei benachbarten Basisnetzen versteht. Die Ausgleichung jedes Teilstücks endet mit der Bestimmung der Richtungsverbesserungen unter Berücksichtigung der Dreiecks- und Seitenbedingungen der Basis- und Laplaceschen Bedingungen. Hierbei erhalten die astronomischen Messungen (Azimute und Längen), die in den Endpunkten des Teilstücks bestimmt wurden, keine Verbesserungen. Die Ausgleichung jedes Teilstücks wird mit der Ableitung der Längen der geodätischen Linien, welche die Endpunkte des Teilstücks verbinden, und der Ableitung der astronomischen Azimute dieser Linien beendet.

### II.

Durch das Staatl. Institut für Geodäsie und Kartographie war im Jahre 1930 eine Arbeit zur Bestimmung des Ausmasses der grossen Halbachse des Ellipsoids ausgeführt worden, das sich am besten dem mit neuen Triangulationen I. O. bedeckten Territorium anschliesst. Hierbei wurden zugleich die Komponenten der Lotabweichungen  $\xi_j$  und  $\eta_j$  für Pulkowo bestimmt nach der Gleichung:

$$\xi_i = \varphi_i - B_i - p_1 \xi_j - p_4 \operatorname{tg} \varphi_j \cdot \eta_j + p_5 \frac{da}{a}$$

$$\eta_i = (\lambda_i - L_i) \cos \varphi_i - q_1 \xi_j - (q_4 \operatorname{tg} \varphi_j - \sec \varphi_j \cos \varphi_i) \eta_j + q_5 \frac{da}{a}$$

Die Abplattung des Ellipsoids wurde der Besselschen Abplattung gleichgesetzt, weil die mittleren Breiten eine zuverlässige Bestimmung der Verbesserung der Abplattung nicht gestatten. Bezeichnen wir mit  $a$  die wahrscheinlichste grosse Halbachse des Ellipsoids und mit  $a_0$  die grosse Halbachse nach Bessel, so wird

$$a = a_0 + 684 m \pm 170 m$$

Da  $\xi_0$  für Pulkowo nur ungefähr eine halbe Sekunde ist, wurden die astronomischen Koordinaten von Pulkowo\*) als geodätische Ausgangs-Koordinaten angenommen (Mittelpunkt des runden Saales). Ebenso wurde mit Rücksicht auf die Umformung der umfangreichen Triangulation II. O. der militärtopographischen Verwaltung und der geodätischen Hauptverwaltung beschlossen, die Triangulation auf dem Besselschen Ellipsoid zu berechnen.

Hierbei ist zu beachten, dass in Pulkowo selbst überhaupt kein Azimut unmittelbar bestimmt worden ist. Der Pulkowo nächstgelegene astronomische Punkt der Triangulation I. O. ist Sablino. Daher musste Sablino anstatt Pulkowo als Ausgangspunkt der Triangulation genommen werden. Nach der Feststellung des geodätischen Ausgangs-Azimuts in Sablino können mit dem Unterschied der geodätischen Koordinaten von Sablino und Pulkowo über die astronomischen Koordinaten von Pulkowo die geodätischen Ausgangskoordinaten von Sablino berechnet werden.

Das geodätische Ausgangs-Azimut in Sablino kann man aus dem astronomischen Azimut für Sablino nach Verbesserung um  $-\eta \operatorname{tg} \varphi$  ableiten, weil bei der Bestimmung von  $\xi_j$  und  $\eta_j$  auch die Grössen  $\xi$  und  $\eta$  für Sablino erhalten werden.

\*) Obwohl  $\eta_0 \approx 2,5''$  ist, wurde dennoch die geodätische Breite der astronomischen Breite von Pulkowo gleichgesetzt, um die Ergebnisse der bereits ausgeführten staatlichen Aufnahmen nicht merklich zu verändern.

Ausserdem wurde von mir noch folgende Methode zur Ableitung des geodätischen Ausgangs-Azimuts in Sablino vorgeschlagen:

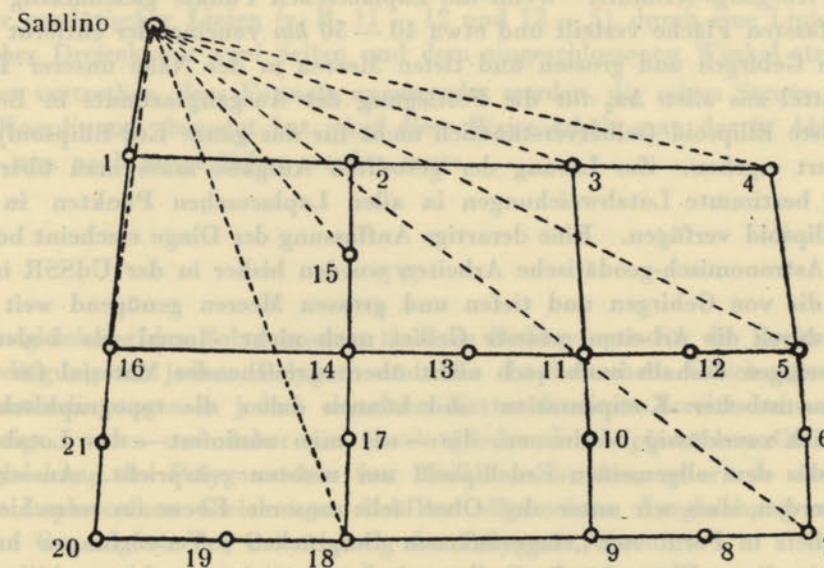


Abb. 1.

Ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut in Sablino, die durch die Arbeiten der Militärtopographischen Verwaltung bestimmt wurden, berechnen wir die geodätischen Azimute in den Punkten 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9, 18, 20, 21, usw. d. h. für die Knotenpunkte der Polygone und für die Laplaceschen Punkte, die sich in den zwischen den Knotenpunkten gelegenen Basisnetzen befinden. Diese Azimute die auf dem Besselschen Ellipsoid berechnet wurden, bezeichnen wir mit  $G$ .

Obwohl die Triangulation noch nicht ausgeglichen ist, so werden durch die Berücksichtigung der Laplaceschen Bedingungen bei der Ausgleichung der Teilstücke und bei der Ableitung der Winkel in den Drehpunkten 1, 2, 3, ..., 7, 20, 16 aus den astronomischen Azimuten der geodätischen Linien 1—2, 2—3, 4—5, usw. nur kleine Widersprüche zwischen den verschiedenen Werten der Azimute  $G$  erhalten, die aus dem Polygonnetz auf verschiedenen Wegen unter Benutzung der Polygonabschlusseiten abgeleitet wurden.

Das astronomische Azimut im Punkt  $K$  wird mit  $A_k$  bezeichnet. Das geodätische Azimut  $G_k$  in demselben Punkte erhält beim Übergang von der grossen Besselschen Halbachse  $a_0$  zur Halbachse  $a$  die Verbesserung  $\delta G_k$ . Damit wird

$$G'_k = G_k + \delta G_k.$$

Nachdem der Unterschied

$$A_k - G'_k$$

für alle in Abb. 1 bezeichneten Punkte bestimmt ist, berechnen wir die Verbesserungen des Anfangs-Azimuts in Sablino unter der Voraussetzung, dass das Azimut im Punkte  $K$  die Korrektur

$$+ (A_k - G'_k)$$

erhielt, wobei wir diese Berechnung für alle Linien durchführen, die Sablino mit den in Abb. 1 angegebenen Punkten verbinden (diese Linien sind punktiert).

Hierzu müssen wir zuerst näherungsweise die 2. geodätische Hauptaufgabe zur Bestimmung der geodätischen Linien, die Sablino mit den Punkten 2, 3, 4, ..., 20, 21, 16 verbinden, auflösen und dann die Formel

$$\Delta \alpha_2 = \left( \cos \frac{s}{R} - \frac{R \sin \frac{s}{R}}{N_2} \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \right) (A_k - G'_k)$$

anwenden, wobei  $\Delta \alpha_2$  auch die Verbesserung des Azimuts in Sablino ist.



Aus den Werten der  $\Delta\alpha_2$  für alle Übertragungen auf Sablino bilden wir einen gewissen Mittelwert. Die Ableitung des Mittelwerts aus den verschiedenen  $\Delta\alpha_2$  ist ebenso schwierig wie die Feststellung des Ausgangs-Azimuths. Wenn die Laplaceschen Punkte gleichmässig auf der von der Triangulation erfassten Fläche verteilt und etwa 40 — 50 km voneinander entfernt wären, so würde beim Fehlen von Gebirgen und grossen und tiefen Meeren in der Nähe unserer Triangulation das arithmetische Mittel aus allen  $\Delta\alpha_2$  für die Festlegung des Ausgangsazimuths in Beziehung auf das bestanschliessendste Ellipsoid (selbstverständlich nicht für das ganze Erd-Ellipsoid) einen genügend zuverlässigen Wert ergeben. Zur Lösung der gestellten Aufgabe muss man über mehr oder weniger zuverlässig bestimmte Lotabweichungen in allen Laplaceschen Punkten in Bezug auf das allgemeine Erdellipsoid verfügen. Eine derartige Auffassung der Dinge erscheint bei uns noch reichlich nebelhaft. Astronomisch-geodätische Arbeiten wurden bisher in der UdSSR in ebenen Gegenden ausgeführt, die von Gebirgen und tiefen und grossen Meeren genügend weit entfernt waren; dabei kann das durch die Arbeiten erfasste Gebiet noch nicht einmal als bedeutend angesehen werden. Wir verfügen deshalb auch noch nicht über ausreichendes Material für eine zuverlässige Untersuchung isostatischer Kompensation und können daher die topographisch-isostatische Reduktion auch nicht zuverlässig bestimmen, die — wie man annimmt — das Lotabweichungssystem ergeben würde, das dem allgemeinen Erdellipsoid am meisten entspricht. Ausserdem muss noch berücksichtigt werden, dass wir unter der Oberfläche unserer Ebene in verschiedenen Gegenden unterirdische Reliefs in Form von „eingesunkenen Bergrücken“, Verwerfungen haben. Das zeigt sich darin, dass in dieser Ebene häufig Stellen mit Lotabweichungen bis zu 10'' vorkommen. Bei der Berücksichtigung der topographisch-isostatischen Reduktion muss daher offenbar die Methode geändert werden, weil man so oder anders mit dem Einfluss auch dieser „eingesunkenen Bergrücken“ rechnen muss.

Nachdem wir jetzt über eine Reihe von Werten für  $\Delta\alpha_2$  verfügen, müssen wir dieselben sichten, um diejenigen auszuschneiden, die bei der Übertragung von Punkten mit grösseren und rein zufälligen Lotabweichungen in der Länge erhalten wurden.

Wenn bei einer Reihe benachbarter Laplacescher Punkte  $\eta$  für alle Punkte innerhalb  $\pm 3''$  schwankt, in einem einzigen dieser Punkte aber einen stark abweichenden Wert hat, so folgt daraus, dass das diesem Punkt entsprechende  $\Delta\alpha_2$  verworfen werden muss.

Wenn  $\eta$  einmal aus Parallelkreisketten und dann aus Meridionalketten berechnet wird, so können leicht die Punkte festgestellt werden, in denen sich  $\eta$  sprunghaft ändert; solche Punkte dürfen für die Ableitung von  $\Delta\alpha_2$  nicht benutzt werden. Natürlich ist diese Bestimmung von  $\Delta\alpha_2$  eine vereinfachte. Auf diese Weise wurden bei der Bestimmung des Ausgangsazimuths für die neue Triangulation I. O. im Europäischen Teil der UdSSR von 39 Laplaceschen Punkten 7 verworfen; diese verworfenen Punkte beeinflussten das Ausgangs-Azimuth um 1''. Durch den Vergleich des auf diesem Wege erhaltenen Ausgangsazimuths mit dem aus dem astronomischen Azimuth durch Verbesserung um  $-\eta \tan \varphi$  berechneten Wert kann die Zuverlässigkeit der verschiedenen Ableitungen beurteilt werden.

Da die Längen, die durch die staatlichen topographischen Aufnahmen für umfangreiche Gebiete schon festgelegt wurden, beibehalten werden müssen, muss auch die geodätische Länge von Pulkowo, die dort durch die astronomische Länge festgesetzt worden ist, beibehalten werden. Damit muss aber auch das fiktive astronomische Azimuth von Pulkowo nach Sablino gleich dem geodätischen Azimuth derselben Richtung sein, es muss also dem von Sablino nach der oben angegebenen Methode erhaltenen Ausgangs-Azimuth gleich sein. Wenn unter diesen Bedingungen die Laplacesche Gleichung in Sablino aufgestellt wird, so wird der Widerspruch rd. 3,5''; dieser Widerspruch muss gleichmässig verteilt werden auf die Verbesserung der astronomischen Länge in Sablino, auf die Verbesserung des astronomischen Azimuths in Sablino und auf die Verbesserung des geodätischen Ausgangs-Azimuths Pulkowo — Sablino. Infolgedessen ist das geodätische Azimuth bei der Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Netzes in der Folge nochmals um etwa 1 — 1,5'' zu verbessern.

Würde man diese Verbesserung der Orientierung des Netzes nicht einführen, so würden die Laplaceschen Bedingungen nach der Netzausgleichung in sämtlichen Laplaceschen Punkten Widersprüche aufweisen, die der Grösse dieser Verbesserung entsprechen.

### III.

Hierauf werden Polygone mit nur je vier Ecken gebildet. Dabei handelt es sich (Abb. 2) um den Ersatz zweier geodätischer Linien (z. B. 11 — 12 und 12 — 5) durch eine Linie 11 — 5, indem man ein sphärisches Dreieck mit zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel streng auflöst.

Dabei ist es vertretbar, dass Formeln angewendet werden, die schon Struwe bei der Berechnung von Polar-Koordinaten benutzt hat. Auf diese Weise erhält man das in Abb. 3 dargestellte Polygonnetz, das nun noch ausgeglichen werden muss.

### IV.

Bei der Ausgleichung des Polygonnetzes sind die Bedingungen für die Breite und Länge, die Winkelsummenbedingung in jedem Polygon und die Laplaceschen Gleichungen zu beachten. Obwohl die Azimutbedingungen in jedem einzelnen Kettenabschnitt bereits bei seiner Teilausgleichung berücksichtigt wurden und daher die Absolutglieder der Laplaceschen Gleichungen bei der allgemeinen Ausgleichung des Polygonnetzes fast Null sein werden, so würde dennoch eine Vernachlässigung der Laplaceschen Gleichungen bei der allgemeinen Ausgleichung unvermeidlich zu einer verminderten Genauigkeit der Orientierung der Polygone führen.

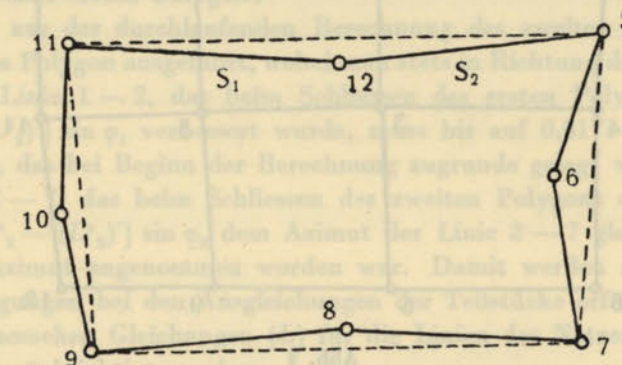


Abb. 2

Das geodätische Azimuth  $A_k$  im Punkte K (Abb. 3) wird durch die Fehler in den Polygonwinkeln beeinflusst, die bei der Übertragung des Azimuths von Sablino bis zum Punkte K benutzt wurden. Hierbei kann der Fehler eines Winkels auf ungefähr  $\pm 0,9''$  geschätzt werden.

Bei der Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichung bei der allgemeinen Ausgleichung wird das Azimuth  $A_k$  bestimmt durch die Formel

$$A_k = \alpha_k - (\alpha_1 - A_1) - (\lambda_k - L_k) \sin \varphi_k + (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1,$$

wobei  $\alpha_k$  das astronomische Azimuth in K und  $\lambda_k$  und  $L_k$  die astronomische und geodätische Länge von K und  $\alpha_1$ ,  $A_1$ ,  $\lambda_1$  und  $L_1$  das astronomische und geodätische Azimuth, die astronomische und geodätische Länge in Sablino sind.

Demnach wird die Anhäufung von Fehlern in  $A_k$  nur durch die Anhäufung von Fehlern bei der Übertragung der geodätischen Längen bedingt werden und für einen Punkt K, der von Sablino 2 000 km entfernt ist, wird dieser Fehler im Mittel  $\pm 0,2''$  nicht übersteigen. Die Laplacesche Gleichung für die Linie zwischen dem Punkt  $P_n$  und  $P_{n-1}$  lautet:

$$\begin{aligned} \delta^\circ_n - \delta^\circ_{n-1} + v_{n,n-1} - v_{n-1,n} - \delta\lambda_n \sin \varphi_n + \delta\lambda_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + (\alpha_{n,n-1} - A_{n,n-1}) - \\ - (\alpha_{n-1,n} - A_{n-1,n}) - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n + (\lambda_{n-1} - L_{n-1}) \sin \varphi_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (L)$$



In der Formel (L) bedeuten

$\alpha_{n,n-1}$  und  $\alpha_{n-1,n}$  die astronomischen Azimute in  $P_n$  und  $P_{n-1}$  für die Linie  $P_n P_{n-1}$ , abgeleitet aus der Ausgleichung des Teilstücks;

$\lambda_n$  und  $\lambda_{n-1}$  die astronomischen Längen von  $P_n$  und  $P_{n-1}$ ;

$A_{n,n-1}$  und  $A_{n-1,n}$  die geodätischen Azimute der Richtungen von  $P_n$  nach  $P_{n-1}$  und von  $P_{n-1}$  nach  $P_n$ ;

$I_n$  und  $I_{n-1}$  die geodätischen Längen von  $P_n$  und  $P_{n-1}$ ;

$\delta^\circ_n$  und  $\delta^\circ_{n-1}$  \*) die Verbesserungen der astronomischen Azimute der Ausgangsseiten der Teilstücke in  $P_n$  und  $P_{n-1}$ ;

$v_{n,n-1}$  die Verbesserung der Richtung der geodätischen Linie  $P_n P_{n-1}$  in  $P_n$ ;

$v_{n-1,n}$  die Verbesserung der Richtung der geodätischen Linie  $P_{n-1} P_n$  in  $P_{n-1}$ ;

$\delta^\circ_n + v_{n,n-1}$  die Verbesserung des Azimuts  $\alpha_{n,n-1}$ ;

$\delta^\circ_{n-1} + v_{n-1,n}$  " " "  $\alpha_{n-1,n}$ ;

$\delta\lambda_n$  und  $\delta\lambda_{n-1}$  " " der astronomischen Längen  $\lambda_n$  und  $\lambda_{n-1}$ .

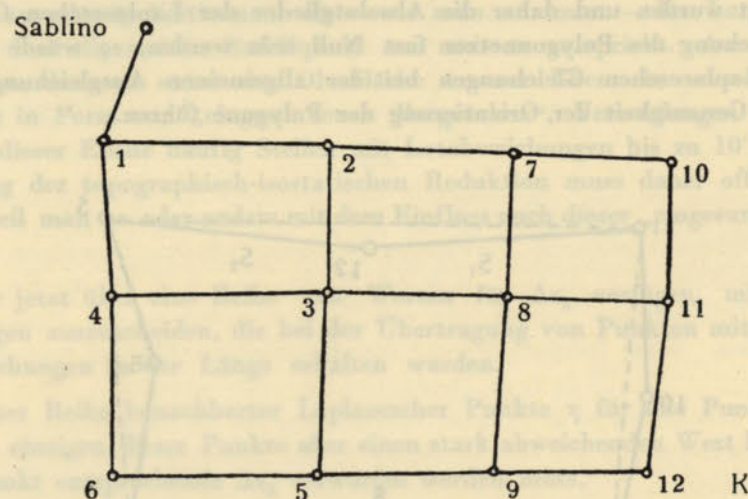


Abb. 3

Wenn wir die Laplacesche Gleichung für alle Linien aufstellen: Sablino — 1, 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 1, 2 — 7, 7 — 8, 8 — 3, 7 — 10, 10 — 11, 11 — 8, 11 — 12, 12 — 9, 9 — 8, 9 — 5, 5 — 3, 5 — 6 und 6 — 4, so fallen die Winkelsummen in den Polygonen aus, weil sie als Summen der Laplaceschen Gleichungen ausgedrückt werden, die für alle Seiten des geschlossenen Polygons angeschrieben werden.

Wir könnten auch die Winkelsummenbedingung für jedes Polygon aufstellen, aber dann dürfen wir nicht sämtliche oben aufgezählten Laplaceschen Gleichungen benutzen. Wir müssen dann z. B. die Gleichungen für die Linien

$$1-4, 4-6, 7-8, 8-9, 8-11, 9-12$$

fortlassen.

Die geodätischen Grössen  $A$  und  $L$ , die in die Laplace-Gleichungen eingehen, werden folgendermassen bestimmt:

Die geodätischen Ausgangskordinaten und das Azimut in Sablino werden streng auf Punkt 1 übertragen; dann werden die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4 streng berechnet; mit den für den Punkt 4 erhaltenen Koordinaten und den Koordinaten des Punktes 1 werden die Azimute der Richtungen 4 — 1 und 1 — 4 streng berechnet; ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut des Punktes 2, die durch Übertragung auf der Linie 1 — 2 erhalten wurden, werden dann die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 2 — 7, 7 — 8 streng berechnet; mit den Koordinaten der Punkte 8 und 3 werden die Azi-

\*) Hier ist auch die Verbesserung der Richtung der Ausgangsseite einbegriffen.

mute der Richtungen 8 — 3 und 3 — 8 streng berechnet. Ausgehend von den Koordinaten des Punktes 7 und dem Azimut 7 — 2, die durch einfache Übertragung über die Linien 1 — 2 und 2 — 7 erhalten wurden, werden streng die Koordinaten und Azimute für die Linien 7 — 20, 20 — 11, 11 — 12, 12 — 9 berechnet; aus den Koordinaten der Punkte 11 und 8, 8 und 9 dann die Azimute der Richtungen 8 — 11, 11 — 8, 12 — 9 und 9 — 12 usw. bestimmt. Mit anderen Worten, die Grössen  $A$  in den Laplaceschen Gleichungen sollen sich auf die Linien beziehen, die die identischen Punkte in den verschiedenen Polygonen verbinden. Die Berechnungen zur Bestimmung von  $A$  und  $L$  werden, soweit sie für die Aufstellung der Laplace-Gleichungen notwendig sind, bei der Aufstellung der Breiten- und Längenbedingungsgleichungen ausgeführt.

Wir gehen nun zur Aufstellung der Bedingungen für den Breiten- und Längenanschluss über. Ausgehend von den geodätischen Koordinaten und dem Azimut im Punkt 1, die streng über die Linie Sablino — 1 übertragen wurden, berechnen wir streng die geodätischen Koordinaten und Azimute für die Linien 1 — 2, 2 — 3, 3 — 4, 4 — 1, 1 — 2 (Abb. 3) und erhalten den Widerspruch in Breite, Länge und Azimut.

Ferner bezeichnen wir mit  $B^\circ_1$  und  $L^\circ_1$  die Ausgangslänge und Breite des Punktes 1, mit  $(B^\circ_1)'$  und  $(L^\circ_1)'$  die Breite und Länge des Punktes 1, die durch die geschlossene durchlaufende Berechnung erhalten wurden. Als geodätische Ausgangskordinaten des Punktes 2 nehmen wir dann die Werte, die bei der durchlaufenden Berechnung des ersten Polygons erhalten wurden, und das geodätische Azimut der Linie 2 — 1 und berechnen streng die geodätischen Koordinaten und Azimute der Linien 2 — 7, 7 — 8, 8 — 3, 3 — 2, 2 — 7 und erhalten damit für den Punkt 2:

$B^\circ_2$  und  $L^\circ_2$  aus dem ersten Polygon;

$(B^\circ_2)'$  und  $(L^\circ_2)'$  aus der durchlaufenden Berechnung des zweiten Polygons. Diese Berechnungen werden für jedes Polygon ausgeführt, wobei man stets in Richtung des Uhrzeigers fortschreitet.

Das Azimut der Linie 1 — 2, das beim Schliessen des ersten Polygons erhalten und durch die Grösse  $+ [L^\circ_1 - (L^\circ_1)'] \sin \varphi_1$  verbessert wurde, muss bis auf  $0,01'' - 0,02''$  dem Azimut derselben Linie gleich sein, das bei Beginn der Berechnung zugrunde gelegt wurde. Ebenso muss sich das Azimut der Linie 2 — 7, das beim Schliessen des zweiten Polygons erhalten wurde, nach der Verbesserung um  $+ [L^\circ_2 - (L^\circ_2)'] \sin \varphi_2$  dem Azimut der Linie 2 — 7 gleich sein, das bei der Berechnung als Ausgangsazimut angenommen worden war. Damit werden alle Berechnungen, soweit die Laplaceschen Bedingungen bei den Ausgleichungen der Teilstücke erfüllt wurden, verprobt.

Ausser den Laplaceschen Gleichungen (L) für die Linien des Netzes muss noch die Laplace-Bedingung in Sablino berücksichtigt werden:

$$\alpha_{1,0} + \delta\alpha_{1,0} - A_{1,0} - \delta A_{1,0} = (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1 + \delta\lambda_1 \sin \varphi_1.$$

Der Zeiger „0“ bezieht sich auf Pulkowo, der Zeiger „1“ dagegen auf Sablino. Die angegebene Laplacesche Bedingung in Sablino unterliegt noch einigen Umbildungen, wobei der Umstand in Betracht gezogen werden muss, dass in Sablino das astronomische Azimut bestimmt worden ist.

V.

Der Aufstellung der Bedingungsgleichungen in jedem Polygon geht die Berechnung der Koeffizienten nach den Formeln (1) voraus:

$$\left. \begin{aligned} q_1^{n-1,n} &= \sin l_{n-1,n} \operatorname{tg} \varphi_n \cdot \frac{M_{n-1}}{N_n} \\ p_3^{n-1,n} &= \frac{\cos A_{n,n-1}}{M_n \sin 1''} = -(1)_n \cos A_{n,n-1} \\ q_3^{n-1,n} &= -(2)_n \sin A_{n,n-1} \sec \varphi_n \\ r_3^{n-1,n} &= q_3^{n-1,n} \cdot \sin \varphi_n \\ p_4^{n-1,n} &= (1)_n S_{n,n-1} \sin A_{n,n-1} \sin 1'' \\ q_4^{n-1,n} &= -(2)_n S_{n,n-1} \cos A_{n,n-1} \sec \varphi_n \sin 1'' \\ r_4^{n-1,n} &= 1 + q_4^{n-1,n} \sin \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



In (1) bedeuten:

$n-1$  und  $n$  die Nummern des Anfangs- und Endpunktes der Polygonseite ( $n-1, n$ ),

$S_{n-1, n}$  die Länge dieser Seite,

$l_{n-1, n}$  den Längenunterschied der Punkte  $n-1$  und  $n$ ,

$A_{n, n-1}$  das Azimut im  $n$ -ten Punkt nach dem  $(n-1)$ -ten Punkt.

Numerieren wir das Polygon nach Abb. 4 und bezeichnen wir die Verbesserungen der Längen seiner Seiten mit  $\delta s_{1,2}, \delta s_{2,3}, \delta s_{3,4}$  und  $\delta s_{4,1}$ , die Richtungsverbesserungen seiner Seiten mit  $v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,4}, v_{4,1}, \dots$ , so erhalten wir die Bedingungsgleichung des Polygons in folgender Form:

$$B_1^0 - (B_1^0)' = [p_3^{1,2} + (p_4^{2,3} + p_4^{3,4} + p_4^{4,1}) r_3^{1,2}] \delta s_{1,2} + [p_3^{2,3} + (p_4^{3,4} + p_4^{4,1}) r_3^{2,3}] \delta s_{2,3} + [p_3^{3,4} + p_4^{4,1} r_3^{3,4}] \delta s_{3,4} + p_3^{4,1} \delta s_{4,1} - [p_4^{2,3} + (p_4^{3,4} + p_4^{4,1} r_4^{2,3}) r_4^{2,3}] (v_{2,1} - v_{2,3}) - [p_4^{3,4} + p_4^{4,1} r_4^{3,4}] (v_{3,2} - v_{3,4}) - p_4^{4,1} (v_{4,3} - v_{4,1}) \quad (2)$$

$$L_1^0 - (L_1^0)' = [q_3^{1,2} + (q_1^{2,3} + q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_3^{1,2} + (q_4^{2,3} + q_4^{3,4} + q_4^{4,1}) r_3^{1,2}] \delta s_{1,2} + [q_3^{2,3} + (q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_3^{2,3} + (q_4^{3,4} + q_4^{4,1}) r_3^{2,3}] \delta s_{2,3} + [q_3^{3,4} + q_1^{4,1} p_3^{3,4} + q_4^{4,1} r_3^{3,4}] \delta s_{3,4} + q_3^{4,1} \delta s_{4,1} - [q_4^{2,3} + (q_1^{3,4} + q_1^{4,1}) p_4^{2,3} + q_1^{4,1} p_4^{3,4} + (q_4^{3,4} + q_4^{4,1} r_4^{3,4}) r_4^{2,3}] (v_{2,1} - v_{2,3}) - [q_4^{3,4} + q_1^{4,1} p_4^{3,4} + q_4^{4,1} r_4^{3,4}] (v_{3,2} - v_{3,4}) - q_4^{4,1} (v_{4,3} - v_{4,1}). \quad (21)$$

Diese Formeln wurden von F. N. Krassowsky in seinem Aufsatz „Methoden zur Ausgleichung der staatlichen Triangulation I. O.“\*) abgeleitet und angegeben.

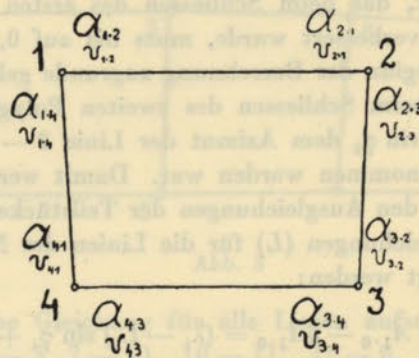


Abb. 4.

In der Folge bezeichnen wir: a) die astronomischen Azimute der geodätischen Linien, die unser Polygon bilden durch  $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{4,1}$ ; b) die geodätischen Azimute, mit denen wir die Koordinaten der Polygonpunkte zur Bestimmung von  $B_1^0 - (B_1^0)'$  und  $L_1^0 - (L_1^0)'$  berechneten, entsprechend mit  $A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,3}, A_{3,2}, A_{3,4}, A_{4,3}$ ; c) mit  $A'_{4,1}$  und  $A'_{1,4}$  die Azimute der Linie 4—1, die streng aus den Koordinaten des Punktes 4 und den Ausgangskordinaten  $B_1^0$  und  $L_1^0$  des Punktes 1 berechnet wurden, wobei die Koordinaten des Punktes 4 dieselben sind, die beim Schliessen unseres Polygons erhalten wurden. Damit erhält man die Winkelbedingung dieses Polygons in folgender Form:

$$(v_{1,4} - v_{1,2}) + (v_{2,1} - v_{2,3}) + (v_{3,2} - v_{3,4}) + (v_{4,3} - v_{4,1}) + [(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1} - A_{2,3})] + [(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2} - A_{3,4})] + [(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,1}) - (A_{4,3} - A'_{4,1})] + [(\alpha_{1,4} - \alpha_{1,2}) - (A'_{1,4} - A_{1,2})] = 0. \quad (3)$$

In dieser Gleichung werden die Komponenten  $[(\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3}) - (A_{2,1} - A_{2,3})]$  und  $[(\alpha_{3,2} - \alpha_{3,4}) - (A_{3,2} - A_{3,4})]$  Null sein und die Komponenten  $[(\alpha_{4,3} - \alpha_{4,1}) - (A_{4,3} - A'_{4,1})]$  und

\*) Arbeiten des Staatl. Instituts für Geodäsie und Kartographie, 2 Teil, 1931.

$[(\alpha_{1,4} - \alpha_{1,2}) - (A'_{1,4} - A_{1,2})]$  zusammen nur einige Hundertstel Sekunden ergeben. Das Abolutglied der Winkelbedingung wird immer sehr klein sein.

Dies ist bedingt durch die vorangegangene Ausgleichung der Teilstücke der Triangulation unter Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen und durch die anschließende Ableitung der Polygonwinkel als Differenzen der entsprechenden astronomischen Azimute der geodätischen Linien, die die Dreiecksketten ersetzen.

Die Gleichungen (2) und (21) müssen mit  $\frac{100}{3}$  multipliziert werden, damit sich die Koeffizienten in ganzen Einheiten und Zehnteln derselben ergeben.

## VI.

Bei der Auflösung der Bedingungsgleichungen (2) und (21), die für jedes Polygon gebildet werden, und bei der Auflösung der Laplaceschen Gleichung müssen die Gewichte der gesuchten Verbesserungen  $\delta s$  und  $v_{i, k}$ ,  $\delta^0$  und  $\delta \lambda$  berücksichtigt werden. Für die Querverschiebung des Endpunktes der geodätischen Linie haben wir:

$$q^2 = 2 \left[ \frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{S}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1)} \right]^2 + m_z^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{S^2}{4}, \quad (4)$$

wobei  $n$  der halben Zahl der Dreiecke des Teilstücks der Triangulation gleich ist, das durch die gegebene geodätische Linie  $S$  ersetzt wird;  $m$  ist der mittlere Fehler der Winkelmessung.

Die Querverschiebung  $q$  ist beinahe mit der Längverschiebung  $ds$  im Endpunkt der geodätischen Linie gleich;  $m_z$  ist der mittlere Fehler der Orientierung der Ausgangsseite im Endpunkt der geodätischen Linie  $S$ , der von der Verwendung der Laplaceschen Azimute bei der Orientierung der Ausgangsseite herrührt.

Ersetzt man zwei geodätische Linien durch eine (Abb. 2), so muss man in (4)  $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$  setzen und auf der rechten Seite die Glieder

$$2 \left[ \frac{m \sin 1''}{\sqrt{3n}} \cdot \frac{(S_1 + S_2)}{4} \sqrt{\left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1)} \right]^2 + m_z^2 \sin^2 1'' \cdot \frac{(S_1 + S_2)^2}{4}; \quad n = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

hinzufügen, wo  $n_1$  der halben Anzahl der Dreiecke für die Kette  $S_1$  und  $n_2$  der halben Anzahl der Dreiecke für die Kette  $S_2$  entspricht (Abb. 2).

Die Längverschiebung  $dS$  des Endpunktes der geodätischen Linie ergibt sich aus

$$dS^2 = 2 \left( \frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5} \frac{S}{2} \right)^2 + \frac{S^2}{2(300\,000)^2}. \quad (5)$$

In der Formel (5)\*) ist der Bruch  $\frac{1}{300\,000}$  der mittlere Fehler der Ausgangsseite der Triangulation, der durch die Fehler der Winkel bedingt wird. Der Fehler  $m$  kann angenommen werden zu  $\pm 0,6''$ , der Fehler  $m_z$  zu  $\pm 0,8''$ , wenn die astronomischen Azimute der Ausgangsseiten unmittelbar bestimmt wurden und zu  $\pm \sqrt{1,4''}$ , wenn das Azimut mittelbar im Basisnetz bestimmt

\*) Werden zwei geodätische Linien durch eine ersetzt, so muss in (5)  $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$  (Abb. 2) gesetzt und im rechten Teil der Formel

$$2 \left( \frac{m \sin 1''}{3 \sqrt{\frac{n}{2}}} \sqrt{n^2 + \frac{3}{2}n + 5} \frac{S_1 + S_2}{4} \right)^2 + \frac{(S_1 + S_2)^2}{4(300\,000)^2}$$

addiert werden;  $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$ , wobei  $n_1$  der halben Anzahl der Dreiecke für  $s_1$  und  $n_2$  der für  $s_2$  entspricht.



wird. Berechnet man  $q$ ,  $v_{i,k}$  und  $dS$  für  $S = 400 \text{ km}$  bei einer Länge der Dreiecksseiten von  $30 \text{ km}$  und für ein entsprechendes  $n = 13$  oder  $14$ , so erhält man

$$\begin{aligned} dS^2 &= 3,28 \\ V^2 &= 3,38 \text{ bei } m_z = 1,2'' \\ v^2 &= 0,72 \\ v^2 &= \frac{q^2}{S^2 \sin^2 1''} - \frac{m^2}{2} \end{aligned}$$

Da sich bei den meisten Polygonen der Geodätischen Hauptverwaltung in der Mitte der geodätischen Linien von  $400 \text{ km}$  eine Basis und ein Laplacescher Punkt befinden, muss man für diese Polygone die Berechnung anders durchführen. Zuerst sind  $dS^2$  und  $q^2$  für die Seiten des Polygons von  $200 \text{ km}$  zu berechnen; hierbei ergibt sich

$$\begin{aligned} dS^2 &= 0,60 \\ q^2 &= 0,67 \\ v^2 &= 0,52. \end{aligned}$$

Für die Polygone der Geodätischen Hauptverwaltung mit  $S = 400 \text{ km}$  mit den Zwischenbasisnetzen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} dS^2 &= 1,20 \\ q^2 &= 2,25 \\ v^2 &= 0,42. \end{aligned}$$

Es ist vorteilhaft, den Gewichtseinheitsfehler mit  $\pm \sqrt{1,2}$  anzunehmen. Dann werden wir für die Polygone der Geodätischen Hauptverwaltung mit  $S = 400 \text{ km}$  mit den Zwischenbasisnetzen folgende abgeänderte Gewichtszahlen erhalten

für $S$ . . . . .	1,0
„ $v$ . . . . .	2,8
für Polygone mit $S = 200 \text{ km}$ :	
für $S$ . . . . .	2
„ $v$ . . . . .	2,4
für Polygone mit $S = 400 \text{ km}$ , ohne Zwischenbasisnetze	
für $S$ . . . . .	0,4
„ $v$ . . . . .	1,5.

Es ist klar, dass das Gewicht der Grössen  $S$  und  $v$  merklich vom Abstand der Laplaceschen Punkte und von den tatsächlichen Werten der Fehler  $m$  und  $m_z$  in den verschiedenen Teilstücken abhängt. Man muss also  $m_z$  und  $m$  für die verschiedenen Teilstücke einzeln bestimmen, weil die Übertragung der astronomisch beobachteten Azimute auf die Ausgangsseiten keineswegs einheitlich ist\*) und weil die aus der Ausgleichung der Teilstücke abgeleiteten Werte ebenfalls für die einzelnen Teilstücke recht verschieden sind. (4) und (5) sind natürlich Näherungsformeln, sie reichen aber völlig aus für richtig aufgebaute Teilstücke und bei normaler Grösse der Absolutglieder in den Basis- und Azimutbedingungen.

\*) Das Gewicht  $\delta \lambda \sin \varphi$  ist ungefähr 10; das Gewicht  $\delta^0$  ist dem Fehler der unmittelbaren Beobachtung des Azimutes ( $m_\alpha$ ) und den Fehlern der Winkelbeobachtungen anzupassen. Wenn das Azimut der Ausgangsseite bestimmt ist, so ist das Gewicht  $\delta^0$  ungefähr das vierfache von  $\left[ m_\alpha^2 = m_\alpha^2 + \frac{(0,6)^2}{2} \right]$ ; wenn das Azimut des Basisnetzes unmittelbar bestimmt wurde, so wird das Gewicht  $\delta$  ungefähr 2,3. In diesem Falle ist  $m_\alpha^2 = m_\alpha^2 + \frac{(0,6)^2}{2} + (0,6)^2$ .

## VII.

Nach Aufstellung der Korrelatennormalgleichungen, die dem System der Bedingungsbedingungen der Polygone entsprechen, und nach Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Verbesserungen  $dS$  und  $v$  und zugleich die endgültigen Werte der Elemente der Polygone. Hierauf folgt

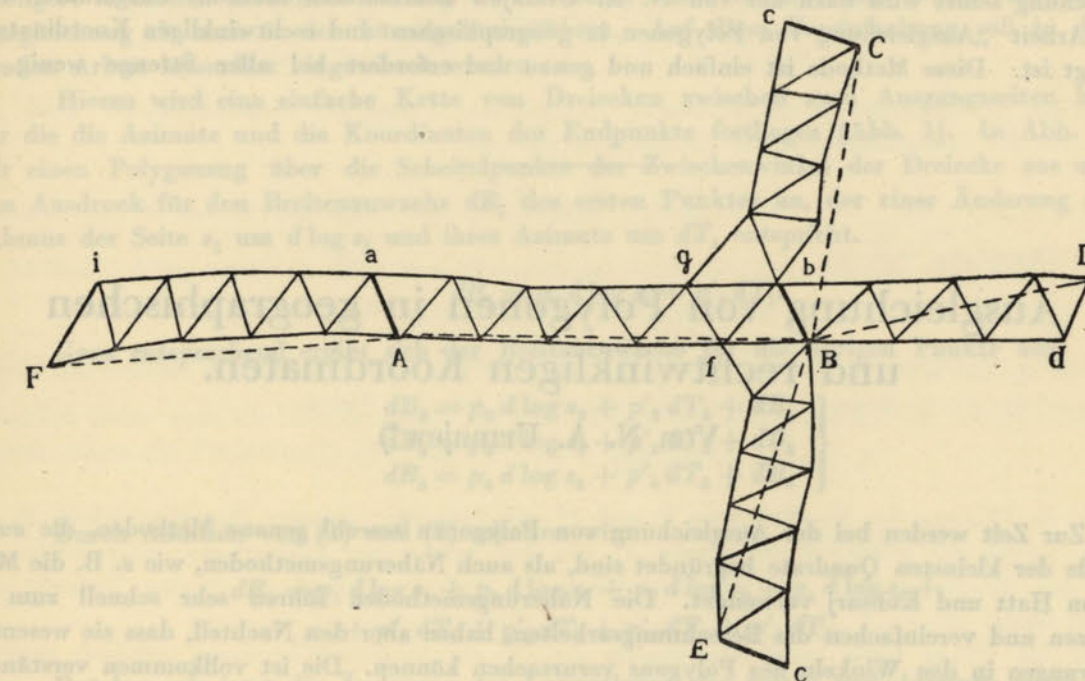


Abb. 5.

die endgültige genaue Berechnung der geodätischen Koordinaten und Azimute für die Polygonpunkte und die Festlegung der Laplaceschen Punkte, die den Zwischenbasisnetzen angehören (z. B. der Punkte 12, 6, 8, 10 in Abb. 2).

## VIII.

Nun bezeichnen wir mit  $A, D, B, C, E, F$  (Abb. 5) die Knotenpunkte der Polygone, deren geodätische Koordinaten endgültig bestimmt sind. Damit sind auch die geodätischen Azimute der geodätischen Linien  $AB, BD, BE, BC, AF$  endgültig bestimmt.

Wenn in Abb. 5  $Aa, Bb, dD, Ee, cC, Fi$  die Ausgangsseiten für die entsprechenden Teilstücke der Triangulation sind, so werden aus der Ausgleichung der Teilstücke die Winkel:  $iFA, FAa, BAa, ABb, Ebb, DBb, CBb, BDd$  usw. bekannt sein. Durch die geodätischen Azimute der Linien  $AF$  und  $AB$  und durch die Winkel  $FAa$  und  $BAa$  leiten wir zweimal das Azimut der Seite  $Aa$  ab und nehmen aus den zwei Ableitungen das Mittel; aus den Azimuten der Linien  $BE, BA, BC$  und  $BD$  und den Winkeln  $Ebb, ABb, bBC$  und  $DBb$  erhalten wir das Azimut der Seite  $Bb$  viermal und bilden wiederum das Mittel.

Für die folgende Ausgleichung der Teilstücke zwischen den Koordinaten der Punkte  $F$  und  $A, A$  und  $B, B$  und  $C, B$  und  $D, B$  und  $E$ , zwischen den Azimuten der Ausgangsseiten  $Fi, Aa, Bb, cC, dD, Ee$  muss man vorher die den Teilstücken gemeinsamen Figuren ausscheiden, z. B. müssen in Abb. 5 die Dreiecke  $fbB$  und  $fgb$  abgespalten und für die Ausgleichung der Teilstücke

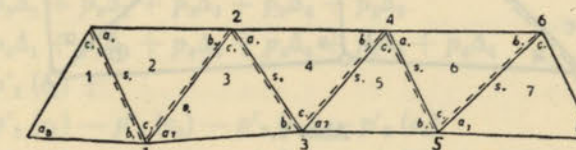


Abb. 6.



aus ihnen die geodätischen Azimute der Seiten  $Bf$ ,  $fb$ ,  $gf$  und  $gb$  bestimmt und die geodätischen Koordinaten der Punkte  $f$  und  $g$  berechnet werden.

Bei der folgenden Ausgleichung der Teilstücke werden die Verbesserungen der Winkel (aber nicht der Richtungen) bestimmt und der in Abb. 6. punktierte Linienzug bestimmt. Die Ausgleichung selbst wird nach der von N. A. Urmajew bearbeiteten Methode ausgeführt, die in seiner Arbeit „Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten“\*) dargelegt ist. Diese Methode ist einfach und genau und erfordert bei aller Strenge wenig Zeit.

## Ausgleichung von Polygonen in geographischen und rechtwinkligen Koordinaten.

Von N. A. Urmajew\*)

Zur Zeit werden bei der Ausgleichung von Polygonen sowohl genaue Methoden, die auf der Methode der kleinsten Quadrate begründet sind, als auch Näherungsmethoden, wie z. B. die Methoden von Hatt und Kobsarj verwendet. Die Näherungsmethoden führen sehr schnell zum Ziel, verkürzen und vereinfachen die Berechnungsarbeiten, haben aber den Nachteil, dass sie wesentliche Verzerrungen in den Winkeln des Polygons verursachen können. Die ist vollkommen verständlich, weil in den Näherungsmethoden die Minimumsbedingung der Quadratsumme der Verbesserungen

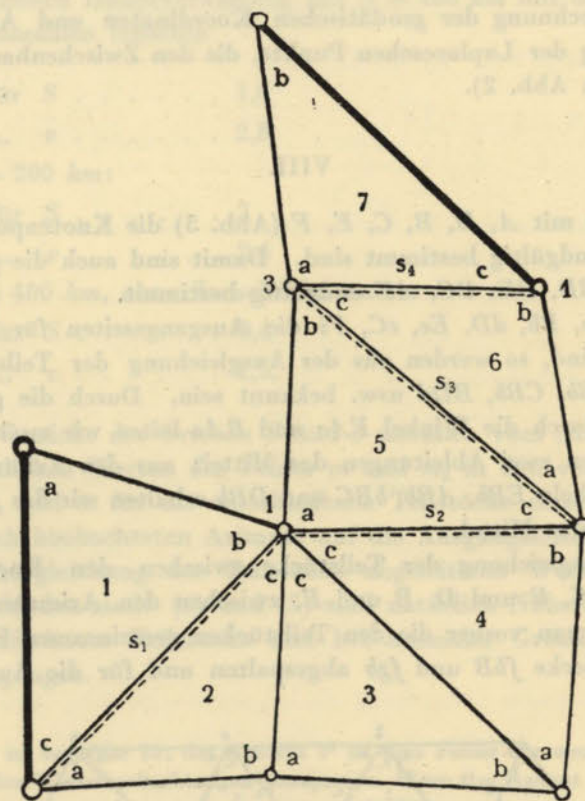


Abb. 1.

\*) „Arbeiten des staatlichen Instituts für Geodäsie und Kartographie“ I. Teil, 1931.

der Winkel oder der Richtungen nicht eingehalten wird. Wenn auf Polygonen, die nach diesen Näherungsmethoden ausgeglichen sind, Folgetriangulationen aufgebaut werden, können sich solche Verzerrungen sehr unangenehm auswirken. Daher müssen bei der Ausgleichung von Polygonen, die in das allgemeine Schema der staatlichen Triangulationen eingefügt werden sollen, unbedingt strengere Methoden verwendet werden, die trotzdem eine Vereinfachung sowohl im Ansatz der Ausgleichung als auch in der Lösung herbeiführen. Auf diese Vereinfachung soll in der vorliegenden Arbeit besonders hingewiesen werden.

Hierzu wird eine einfache Kette von Dreiecken zwischen zwei Ausgangsseiten betrachtet, für die die Azimute und die Koordinaten der Endpunkte festliegen (Abb. 1). In Abb. 1 wählen wir einen Polygonzug über die Scheitelpunkte der Zwischenwinkel der Dreiecke aus und setzen den Ausdruck für den Breitenzuwachs  $dB_1$  des ersten Punktes an, der einer Änderung des Logarithmus der Seite  $s_1$  um  $d \log s_1$  und ihres Azimuts um  $dT_1$  entspricht.

$$dB_1 = p_1 d \log s_1 + p'_1 dT_1. \quad (1)$$

Ganz entsprechend ergibt sich der Breitenzuwachs für die übrigen Punkte aus:

$$\left. \begin{aligned} dB_2 &= p_2 d \log s_2 + p'_2 dT_2 + dB_1 \\ dB_3 &= p_3 d \log s_3 + p'_3 dT_3 + dB_2 \\ dB_4 &= p_4 d \log s_4 + p'_4 dT_4 + dB_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Durch Addition von (1) und (2) erhalten wir:

$$dB_4 = p_1 d \log s_1 + p_2 d \log s_2 + p_3 d \log s_3 + p_4 d \log s_4 + p'_1 dT_1 + p'_2 dT_2 + p'_3 dT_3 + p'_4 dT_4. \quad (3)$$

Drücken wir jetzt die Änderung der Logarithmen der Seiten und Azimute durch die Winkelverbesserungen aus und führen wir noch die Bezeichnung (4) ein

$$\Delta a_i (a_i) - \Delta b_i (b_i) = \Delta_i, \quad (4)$$

wobei  $\Delta a_i$  und  $\Delta b_i$  die Änderung der Logarithmen der Sinusse der Winkel  $a_i$  und  $b_i$  bei Änderung der Winkel um  $1''$  und  $(a_i)$  und  $(b_i)$  die Verbesserungen der Winkel  $a_i$  und  $b_i$  bedeuten, dann wird:

$$\begin{aligned} d \log s_1 &= \Delta_1 \\ d \log s_2 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \\ d \log s_3 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 \\ d \log s_4 &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6. \end{aligned}$$

Für die Änderung der Azimute erhalten wir:

$$\begin{aligned} dT_1 &= + (c_1) \\ dT_2 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) \\ dT_3 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) + (c_5) \\ dT_4 &= + (c_1) - (c_2) - (c_3) - (c_4) + (c_5) - (c_6), \end{aligned}$$

wobei  $(c)$  die Verbesserung des Zwischenwinkels  $c$  ist.

Nach Einsetzen der beiden letzten Ausdrücke in (3) erhalten wir:

$$\begin{aligned} dB_4 &= p_1 \Delta_1 + \\ &+ p_2 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + p_2 \Delta_3 + p_2 \Delta_4 \\ &+ p_3 \Delta_1 + p_3 \Delta_2 + p_3 \Delta_3 + p_3 \Delta_4 + p_3 \Delta_5 \\ &+ p_4 \Delta_1 + p_4 \Delta_2 + p_4 \Delta_3 + p_4 \Delta_4 + p_4 \Delta_5 + p_4 \Delta_6 \\ &+ p'_1 (c_1) + \\ &+ p'_2 (c_1) - p'_2 (c_2) - p'_2 (c_3) - p'_2 (c_4) \\ &+ p'_3 (c_1) - p'_3 (c_2) - p'_3 (c_3) - p'_3 (c_4) + p'_3 (c_5) \\ &+ p'_4 (c_1) - p'_4 (c_2) - p'_4 (c_3) - p'_4 (c_4) + p'_4 (c_5) - p'_4 (c_6). \end{aligned}$$



Durch entsprechende Zusammenfassung erhält man daraus:

$$dB_4 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \Delta_1 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_2 + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_3 + \\ + (p_2 + p_3 + p_4) \Delta_4 + (p_3 + p_4) \Delta_5 + p_4 \Delta_6 + \\ + (p'_1 + p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_1) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_2) - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_3) - \\ - (p'_2 + p'_3 + p'_4) (c_4) + (p'_3 + p'_4) (c_5) - p'_4 (c_6).$$

Werden die Summen, die in Klammern stehen, mit  $P$  und  $P'$  bezeichnet, so geht der Ausdruck für den Breitenzuwachs des Endpunktes über in:

$$dB_4 = \Sigma P \Delta + \Sigma [\pm P' (c)]$$

oder unter Beachtung von (4)

$$dB_4 = \Sigma [P \Delta_a (a) - P \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm P' (c)].$$

Wenn  $w_1$  das Absolutglied der Breitengleichung ist im Sinne: berechnete Breite minus gegebene, so erhält die Bedingungsgleichung für die Breite folgende Form:

$$\Sigma [P \Delta_a (a) - P \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm P' (c)] + w_1 = 0. \quad (5)$$

Für die Bildung der Koeffizienten  $P$  und  $P'$  gilt folgendes Gesetz: Der Koeffizient  $P_i$  ist gleich der Summe der letzten Koeffizienten  $P$ , die den Seiten des Linienzuges entsprechen, die zwischen den Scheitelpunkten der Zwischenwinkel des Dreiecks  $i$  und des letzten Dreiecks eingeschlossen sind.

Für die Länge kann nach dem Muster von (1) ein ähnlicher Ausdruck gebildet werden, nämlich

$$\Sigma [Q \Delta_a (a) - Q \Delta_b (b)] + \Sigma [\pm Q' (c)] + w_2 = 0, \quad (6)$$

wobei  $Q$  und  $Q'$  die Summen der Koeffizienten  $q$  und  $q'$  sind, die ebenfalls nach dem oben genannten Gesetz gebildet werden. Die Koeffizienten  $p, p', q, q'$  können auf verschiedene Weise dargestellt werden. Nach der Formel von Walker ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$p = \frac{1}{\Delta \log \theta}; \quad p' = \frac{\Delta \log \cos T}{\Delta \log \theta} \\ q = \frac{1}{\Delta \log l}; \quad q' = \frac{\Delta \log \sin T}{\Delta \log l}$$

In diesen Formeln sind  $\theta$  und  $l$  die Unterschiede der Breiten und Längen der Endpunkte des Linienzuges,  $\Delta \log \theta$  und  $\Delta \log l$  die Änderungen ihrer Logarithmen für eine Änderung um  $1''$ ,  $\Delta \log \cos T$  und  $\Delta \log \sin T$  die Änderungen der Logarithmen der Kosinusse und Sinusse des Azimuts bei Änderung des letzteren um  $1''$ .

Die Formeln von Prondsinsky (s. „Astronomische Nachrichten“, Bd. 71, 1868) haben folgende Form:

$$p = \frac{\theta}{M \cdot 10^7}; \quad p' = -\theta \sin 1'' \operatorname{tg} T \\ q = \frac{l}{M \cdot 10^7}; \quad q' = l \sin 1'' \operatorname{ctg} T.$$

Etwas anderer Art sind die Formeln, die von dem ehem. Korps der Militär-Topographen zur Ausgleichung des ersten und zweiten Polygons der Triangulation I. O. angewandt wurden (s. „Materialien zur Triangulation I. O.“ Ausg. VI.—Aufzeichnungen der militärtopographischen Verwaltung, Bd. 73).

Alle diese Formeln wurden durch Differenzieren der Hauptglieder der Formeln zur Lösung der 1. geodätischen Hauptaufgabe erhalten, daher werden bei grossen Absolutgliedern die Bedin-

gungsgleichungen für den Breiten- und Längenschluss bei der Ausgleichung nicht ganz erfüllt. Mit Rücksicht hierauf ist es vorteilhafter, genauere Formeln anzuwenden, die man aus den Helmertschen Differentialformeln für die geodätische Linie ableiten kann. Diese Helmertschen Differentialformeln lauten:

$$\left. \begin{aligned} p &= -k \frac{s}{R} \cos T_{21}; & p' &= -\frac{s}{R} \sin T_{21} \\ q &= -k \frac{s}{N} \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= -\frac{s}{N} \cos T_{21} \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hierbei sind  $R$  und  $N$  Meridian- und Querkrümmungsradien und  $k = \frac{\rho''}{M \cdot 10^6} = 0,47494$ ; ( $\log k = 9.67664$ );  $\Delta \log s$  wird in Einheiten der sechsten Stelle des Logarithmus ausgedrückt.

Da die Koeffizienten  $p$  und  $q, p'$  und  $q'$  ihrem absoluten Wert nach klein sind, wird die rechte Seite der Gleichung (7) mit der Konstanten  $\frac{M \cdot 10^4}{6} = 723,824$  multipliziert; hierbei müssen natürlich dann auch die Absolutglieder der Gleichungen mit demselben Faktor multipliziert werden. Damit gehen die Formeln (7) über in

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\rho''}{600 R} s \cos T_{21}; & p' &= +\frac{M \cdot 10^4}{6 R} s \sin T_{21} \\ q &= -\frac{\rho''}{600 N} s \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= -\frac{M \cdot 10^4}{6 N} s \cos T_{21} \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Mit der Substitution  $s \sin T_{21} = -\frac{600 N}{\rho''} q \cos B_2$  erhalten wir für  $p'$  den Ausdruck:

$$p' = -\frac{M \cdot 10^6 N}{\rho'' R} q \cos B_2$$

und für  $q'$  in ähnlicher Weise

$$q' = +\frac{M \cdot 10^6 R}{\rho'' N} p \sec B_2$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\rho''}{R} = (1); \quad \frac{\rho''}{N} = (2); \quad \frac{N}{R} = \frac{(1)}{(2)}; \quad \frac{R}{N} = \frac{(2)}{(1)},$$

so wird endgültig

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{(1)}{600} s \cos T_{21}; & p' &= -\frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} q \cos B_2 \\ q &= -\frac{(2)}{600} s \sin T_{21} \sec B_2; & q' &= +\frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Bezeichnen wir noch

$$\left. \begin{aligned} -\frac{(1)}{600} &= b_1 & -\frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} &= c_1 \\ -\frac{(2)}{600} &= b_2 & +\frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} &= c_2 \end{aligned} \right\}, \quad (9')$$



dann geht (9) über in

$$\left. \begin{aligned} p &= b_1 s \cos T_{21} \\ q &= b_2 s \sin T_{21} \sec B_2 \\ p' &= c_1 q \cos B_2 \\ q' &= c_2 p \sec B_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Logarithmen der Koeffizienten  $b_1, b_2, c_1, c_2$  können für verschiedene Breiten der Tabelle 1 entnommen werden.

Tabelle 1

Breite:	$\log b_1$	$\log b_2$	$\log c_1$	$\log c_2$
35°	5.7331 n	5.7312 n	0.3253 n	0.3214
40	5.7327 n	5.7310 n	0.3251 n	0.3216
45	5.7324 n	5.7309 n	0.3248 n	0.3219
50	5.7320 n	5.7308 n	0.3246 n	0.3222
55	5.7316 n	5.7307 n	0.3243 n	0.3224
60	5.7313 n	5.7305 n	0.3241 n	0.3226
65	5.7310 n	5.7304 n	0.3239 n	0.3228

Mit den Koeffizienten (10) nehmen die Bedingungsbedingungen für die Breite und Länge folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [P\Delta_a(a) - P\Delta_b(b)] + \Sigma [\pm P'(c)] + 723,824 w_1 &= 0 \\ \Sigma [Q\Delta_a(a) - Q\Delta_b(b)] + \Sigma [\pm Q'(c)] + 723,824 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Formeln (10) und (11) stellen in Verbindung mit Tabelle 1 eine neue Methode zur Ausgleichung von Polygonen in geographischen Koordinaten dar, die sich von den übrigen Methoden durch die Einfachheit der Aufstellung der Bedingungsbedingungen unterscheidet.

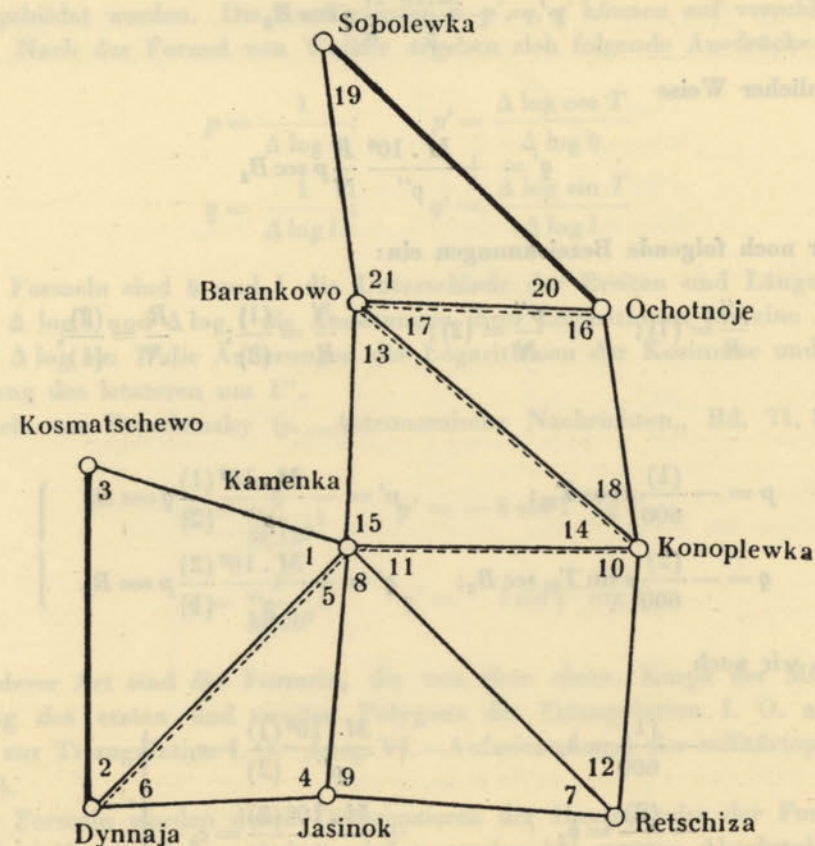


Abb. 2.

Als Beispiel wird die Ausgleichung einer Dreieckskette II. O. mit 7 Dreiecken zwischen den Seiten Kosmatschewo — Dynnaja und Sobolewka — Ochotnoje (Abb. 2) dargestellt. Zunächst folgt eine Zusammenstellung der Dreiecke dieser Kette, wobei die Winkel bereits vorläufig durch eine gleichmässige Verteilung der Dreieckswidersprüche ausgeglichen sind.

Zusammenstellung der Dreiecke.

Nr. der Winkel	Dreieckspunkt	Vorl. ausgegl. sphär. Winkel	Nr. der Winkel	Dreieckspunkt	Vorl. ausgegl. sphär. Winkel
1	Kamenka . . . . .	60° 49' 50'' .0	13	Barankowo . . . . .	46° 52' 54'' .4
2	Dynnaja . . . . .	45 52 6 .8	14	Konoplewka . . . . .	35 20 54 .9
3	Kosmatschewo . . . . .	73 18 3 .9	15	Kamenka . . . . .	97 46 11 .2
		180° 0' 0'' .7			180° 0' 0'' .5
4	Jasinok . . . . .	100° 56' 56'' .7	16	Ochotnoje . . . . .	95° 4' 29'' .4
5	Kamenka . . . . .	39 59 36 .4	17	Barankowo . . . . .	42 9 41 .4
6	Dynnaja . . . . .	39 3 27 .4	18	Konoplewka . . . . .	42 45 49 .7
		180° 0' 0'' .5			180° 0' 0'' .5
7	Retschiza . . . . .	43° 26' 27'' .0	19	Sobolewka . . . . .	41° 25' 40'' .4
8	Kamenka . . . . .	49 21 21 .5	20	Ochotnoje . . . . .	49 31 6 .6
9	Jasinok . . . . .	87 12 12 .0	21	Barankowo . . . . .	89 3 13 .6
		180° 0' 0'' .5			180° 0' 0'' .6
10	Konoplewka . . . . .	84° 36' 9'' .8			
11	Kamenka . . . . .	43 17 55 .3			
12	Retschiza . . . . .	52 5 55 .4			
		180° 0' 0'' .5			

Ausgangsdaten:  $\log$  der Seite Dynnaja — Kosmatschewo = 4.279604,

$\log$  der Seite Ochotnoje — Sobolewka = 4.333987,

Koordinaten des Punktes „Dynnaja“:  $B = 53^\circ 50' 37'' .479$

$L = 4^\circ 20' 25'' .307$

Azimut nach Kosmatschewo  $T = 1^\circ 28' 54'' .31$

Koordinaten des Punktes „Ochotnoje“  $B = 54^\circ 5' 4'' .293$

$L = 4^\circ 46' 59'' .409$

Azimut nach Sobolewka  $T = 317^\circ 45' 56'' .04$ .

Bei der Berechnung der Koordinaten für den Punkt „Ochotnoje“ ergaben sich folgende Widersprüche: Für die Breite — 0'',036, für die Länge — 0'',156, für das Azimut + 0'',91 und für das Absolutglied der Basisbedingung 62 Einheiten der 6. Stelle des Logarithmus.

Nun sind nach (8) die Koeffizienten  $p, p', q, q'$  zu berechnen. Nach Tab. 1 ist:

$$\log b_1 = 5.7317 n; \log b_2 = 5.7307 n; \log c_1 = 0.3244 n; \log c_2 = 0.3224.$$

Die Berechnung der Koeffizienten  $p, p', q$  und  $q'$  wird in Tab. 2 durchgeführt.



Tabelle 2

	1	2	3	4
1 . . . . .	Dynnaja	Kamenka	Konoplewka	Barankowo
2 . . . . .	Kamenka	Konoplewka	Barankowo	Ochotnoje
$B_2$ . . . . .	53° 58' 2	53° 57' 5	54° 4' 8	54° 5' 1
$T_{21}$ . . . . .	227 32.4	275 4.8	130 13.9	268 14.8
$\log p$ . . . . .	9.8809	8.8673 <i>n</i>	9.8630	8.3721
$\log s \cos_1 T_{21}$ . . . . .	4.1492 <i>n</i>	3.1356	4.1313 <i>n</i>	2.6404 <i>n</i>
$\log \cos T_{21}$ . . . . .	9.8294 <i>n</i>	8.9472	9.8102 <i>n</i>	8.4857 <i>n</i>
$\log s$ . . . . .	4.3198	4.1884	4.3211	4.1547
$\log \sin T_{21}$ . . . . .	9.8679 <i>n</i>	9.9983 <i>n</i>	9.8828	9.9998 <i>n</i>
$\log s \sin T_{21}$ . . . . .	4.1877 <i>n</i>	4.1867 <i>n</i>	4.2039	4.1545 <i>n</i>
$\log q \cos B_2$ . . . . .	9.9184	9.9174	9.9346 <i>n</i>	9.8852
$\log \sec B_2$ . . . . .	0.2304	0.2304	0.2317	0.2317
$\log q$ . . . . .	0.1488	0.1478	0.1663 <i>n</i>	0.1169
$\log p'$ . . . . .	0.2428 <i>n</i>	0.2418 <i>n</i>	0.2590	0.2096 <i>n</i>
$\log p \sec B_2$ . . . . .	0.1113	9.0977 <i>n</i>	0.0947	8.6038
$\log q'$ . . . . .	0.4337	9.4201 <i>n</i>	0.4171	8.9262
$p$ . . . . .	+0.7601	-0.0737	+0.7294	+0.0236
$q$ . . . . .	+1.409	+1.405	-1.467	+1.309
$p'$ . . . . .	-1.749	-1.745	+1.816	-1.620
$q'$ . . . . .	+2.714	-0.263	+2.613	+0.084

Hierauf können die Polygongleichungen aufgestellt werden. Ihre Ableitung nach (11) zeigt Tab. 3. Als Beispiel wird auf die Bestimmung einiger Koeffizienten hingewiesen. Der Koeffizient  $Q$  im 4. Dreieck setzt sich zusammen aus

$$Q_4 = +1.405 - 1.467 + 1.309 = +1.247,$$

der Koeffizient  $P'_5$  wird erhalten aus

$$P'_5 = +1.816 - 1.620 = +0.196.$$

Aus derselben Tabelle können auch die Basis- und Azimutbedingungen abgelesen werden, und zwar stehen die Basisbedingungen in der IV. Spalte (die Verbesserungen in der VIII.) und in der V. (Verbesserungen in der XI.). Die Azimute findet man in der XIV. Spalte.

Tabelle 3

Nr. Nr. Dreiecke	Scheitelpunkte der Zwischenwinkel	$P$	$\Delta a$	$-\Delta b$	$Q$	$B$ $P\Delta a$	(a)	$L$ $Q\Delta a$	$B$ $(P-\Delta b)$	(b)	$L$ $Q(-\Delta b)$	$B$ $P'$	(c)	$L$ $Q'$
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	Dynnaja ...	+1.439	+0.63	-1.18	+2.656	+0.91	(3)	+1.67	-1.70	(1)	-3.13	-3.298	+(2)	+5.148
2	Kamenka ...	+0.679	+2.60	+0.40	+1.247	+1.77	(6)	+3.26	+0.27	(4)	+0.50	-1.549	-(5)	+2.434
3	Kamenka ...	+0.679	+0.10	-2.22	+1.247	+0.07	(9)	+0.13	-1.52	(7)	-2.78	-1.549	-(8)	+2.434
4	Kamenka ...	+0.679	-1.64	-0.20	+1.247	+1.12	(12)	+2.05	-0.14	(10)	-0.25	-1.549	-(11)	+2.434
5	Konoplewka...	+0.753	+0.29	-1.97	-0.158	-0.22	(15)	+0.04	-1.49	(13)	+0.30	+0.196	+(14)	+2.697
6	Barankowo...	+0.024	+2.28	+0.19	+1.309	+0.06	(18)	+2.98	0	(16)	+0.25	-1.620	-(17)	+0.084
7	Ochotnoje...	0	+0.03	-2.38	0	0	(21)	0	0	(19)	0	0	+(20)	0

Für die Multiplikationen der Spalten VII, IX, X und XII genügt der Rechenschieber. Die Spalten VII, X und XIII enthalten die Koeffizienten für den Breitenanschluss (B), die Spalten IX, XII und XV die Koeffizienten für den Längenanschluss (L).

In Tab. 4 sind die Bedingungsgleichungen zusammengestellt.

Tabelle 4

Nr. Nr. der Dreiecke	Nr. Nr. der Winkel	a	b	c	d	A	B	C	D	S	v
1	1		-1.18	-1.70	-3.14	-1	-1.00	-0.34	-4.37	6.71	-8'' 1
	2	+1		-3.30	+5.15	+2	+0.19	-1.93	+3.93	+4.19	+5. 2
	3		+0.63	+0.91	+1.67	-1	+0.81	+2.27	+0.44	+2.52	+2. 9
2	4		+0.40	+0.27	+0.50	+1	-0.60	-0.93	+0.06	-0.47	-3. 1
	5	-1		+1.55	-2.44	-2	-1.00	+0.35	-2.88	-5.53	-2. 9
	6		+2.60	+1.78	+3.26	+1	+1.60	+0.58	+2.82	+6.00	+6. 0
3	7		-2.22	-1.52	-2.78	+1	-1.51	-1.55	-1.08	-3.14	-6. 8
	8	-1		+1.55	-2.44	-2	+0.70	+1.51	-0.74	-0.53	+4. 1
	9		+0.10	+0.07	+0.12	+1	+0.81	+0.04	+1.82	+3.67	+2. 7
4	10		-0.20	-0.14	-0.25	+1	-0.68	-0.98	-0.04	-0.70	-3. 4
	11	-1		+1.55	-2.44	-2	-0.48	+0.70	-2.22	-4.00	-0. 8
	12		+1.64	+1.12	+2.05	+1	+1.16	+0.28	+2.26	+4.70	+4. 2
5	13		-1.97	-1.49	+0.30	-1	-1.22	-0.98	-0.71	-3.91	-0. 2
	14	+1		+0.19	+2.69	+2	+0.76	+0.69	+1.68	+5.13	-1. 5
	15		-0.29	-0.22	+0.04	-1	+0.46	+0.29	-0.97	-1.22	+1. 7
6	16		+0.19		+0.25	+1	-0.63	-0.56	-0.80	-0.99	-5. 4
	17	-1		+1.62	-0.09	-2	-0.83	+1.06	-1.13	-2.90	+0. 2
	18		+2.28	+0.06	+2.98	+1	+1.46	-0.50	+1.93	+3.89	+5. 2
7	19		-2.38			-1	-1.60			-2.60	-0. 9
	20	+1				+2	+0.79			+2.79	-4. 0
	21		+0.03			-1	+0.81			-0.19	-4. 9
W		+0'' 91	-62.0	-26.06	-112.91	+2.73	-62.00	-26.06	-112.91	--	--

In Tab. 4 bedeuten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  die Koeffizienten der Azimut-, Basis-, Breiten- und Längengleichungen. Zur Auflösung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, wobei die Summe der Quadrate der Verbesserungen aller Winkel—der Verbindungs- und Zwischenwinkel—ein Minimum werden muss, formen wir sie noch um nach der Methode von Krüger\*). Diese Umformung besteht in folgendem: Wenn  $l_{i-1}$ ,  $l_i$  und  $l_{i+1}$  die Koeffizienten der Gleichung sind, die sich auf das Dreieck  $\frac{i+1}{3}$  bezieht, so wird zunächst die Summe  $l_{i-1} + l_i + l_{i+1}$  gebildet. Werden dann die Koeffizienten  $l_{i-1}$ ,  $l_i$ ,  $l_{i+1}$  um  $\frac{1}{3}$  dieser Summe gekürzt, so ergeben sich die Koeffizienten der umgeformten Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} L_{i-1} &= l_{i-1} - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \\ L_i &= l_i - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \\ L_{i+1} &= l_{i+1} - \frac{1}{3}(l_{i-1} + l_i + l_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

\*) Über die Umformung nach Krüger siehe ausführliches in der Arbeit „Über zweckmässige Ausgleichung trigonometrischer Netze“ „Geodest“ 1930 Nr. 5 Seite 37.



Zur Prüfung dient der Ausdruck

$$L_{i-1} + L_i + L_{i+1} = 0, \quad (13)$$

Als Beispiel werden nachstehend die Koeffizienten der Breiten-Gleichung, die sich auf das sechste Dreieck beziehen, umgeformt:

$$C_{16} = 0; C_{17} = +1.62; C_{18} = +0.06$$

$$\frac{1}{3}(C_{16} + C_{17} + C_{18}) = +0.56$$

$$C_{16} = 0 - 0.56 = -0.56$$

$$C_{17} = +1.62 - 0.56 = +1.06$$

$$C_{18} = +0.06 - 0.56 = -0.50$$

$$C_{16} + C_{17} + C_{18} = -0.56 + 1.06 - 0.50 = 0 \quad (\text{Probe}).$$

Die auf diese Weise umgeformten Gleichungen sind in den Spalten A, B, C, D der Tab. 4 zusammengestellt. Hierbei ist noch zu bemerken, dass alle Koeffizienten und Absolutglieder der umgeformten Azimutgleichung mit 3 multipliziert sind, um runde Koeffizienten zu erhalten. Aus den umgeformten Gleichungen werden in bekannter Weise die Normalgleichungen gebildet.

$$+42 k_1 + 10.05 k_2 - 14.58 k_3 + 37.74 k_4 + 2.73 = 0$$

$$+10.05 k_1 + 20.41 k_2 + 7.63 k_3 + 25.09 k_4 - 62.00 = 0$$

$$-14.58 k_1 + 7.63 k_2 + 19.74 k_3 - 4.92 k_4 - 26.06 = 0$$

$$+37.74 k_1 + 25.09 k_2 - 4.92 k_3 + 75.96 k_4 - 112.91 = 0$$

Aus der Auflösung der Normalgleichungen ergeben sich die Korrelaten

$$k_1 = -2.95; k_2 = +2.43; k_3 = -1.28; k_4 = +2.07.$$

Mit den Korrelaten werden die Verbesserungen (letzte Spalte Tab. 4) berechnet. Mit Rücksicht auf die Formel (13), die für alle umgewandelten Gleichungen gilt, ist:

$$v_{i-1} + v_i + v_{i+1} = 0, \quad (14)$$

d. h. die Summe der Winkelverbesserungen ist in jedem Dreieck Null.

Die Formel (14) dient als Probe für die Berechnung der Verbesserungen.

Nun kehren wir nochmals zu den Formeln (9), (9') und (10) zurück. Näherungsweise ist:

$$-\frac{(1)}{60} s \cos T_{21} = (B_2 - B_1)'$$

$$-\frac{(2)}{60} s \sin T_{21} \sec B_2 = (L_2 - L_1)'$$

Damit ergibt sich aus (10):

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{(B_2 - B_1)'}{10}; & q &= \frac{(L_2 - L_1)'}{10} \\ p' &= \frac{(L_2 - L_1)'}{10} a_1; & q' &= \frac{(B_2 - B_1)'}{10} a_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

für

$$a_1 = -\frac{M \cdot 10^6 (1)}{\rho'' (2)} \cos B_2$$

$$a_2 = +\frac{M \cdot 10^6 (2)}{\rho'' (1)} p \sec B_2,$$

wobei  $(B_2 - B_1)'$  und  $(L_2 - L_1)'$  in Bogenminuten ausgedrückt sind.

Bei nicht zu grossen Absolutgliedern ist es zulässig, die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  für die gegebene Dreieckskette als konstant zu betrachten und sie für eine mittlere Breite zu berechnen.

Da die Koeffizienten  $P, P', Q$  und  $Q'$  die Summe der aufeinanderfolgenden Koeffizienten  $p, p', q$  und  $q'$  darstellen, so werden sie folgendermassen gebildet: Der Koeffizient  $p$ , der sich auf das Dreieck  $i$  bezieht, ist gleich der Differenz der Breiten der Scheitelpunkte der Zwischenwinkel des letzten Dreiecks  $n$  und des Dreiecks  $i$ , d. h.  $P_i = (B_n - B_i)'$ ; ebenso ist  $Q_i = (L_n - L_i)'$ ,  $P'_i = (L_n - L_i)' a_1$  und  $Q'_i = (B_n - B_i)' a_2$ . Nach Weglassung der Zeiger ist also:

$$\left. \begin{aligned} P &= (B_n - B)' \\ Q &= (L_n - L)' \\ P' &= a_1 (L_n - L)' \\ Q' &= a_2 (B_n - B)' \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Da auf der rechten Seite der Formel (16) der Faktor  $\frac{1}{10}$  weggelassen wurde, müssen die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen für die Breite und Länge mit 10 multipliziert werden.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [(B_n - B)' \Delta a (a) - (B_n - B)' \Delta b (b)] + \\ + \Sigma [\mp a_1 (L_n - L)' (c)] + 7238.24 w_1 &= 0 \\ \Sigma [(L_n - L)' \Delta a (a) - (L_n - L)' \Delta b (b)] + \\ \Sigma [\pm a_2 (B_n - B)' (c)] + 7238.24 w_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Tabelle 5

Nr. Nr der Dreiecke	Scheitel- punkte der Zwischen- winkel	$B$	$L$	$B_n - B$	$L_n - L$	$\Delta a$	$-\Delta b$	$B \frac{(B_n - B) \Delta a}{(a)}$	$L \frac{(L_n - L) \Delta a}{(b)}$	$B \frac{(B_n - B) (-\Delta b)}{(b)}$	$L \frac{(L_n - L) (-b)}{(c)}$	$a_1 \frac{\Delta B}{(L_n - L)}$	$(c)$	$L \frac{(B_n - B)}{a_2 (B_n - B)}$		
1	Dynnaja ...	53°50'.62	4°20'.42	+14'.45	+26'.57	+0.63	-1.18	+ 9.1	(3)	+16.7	-17.0	(1)	-31.3	-33.0	(2)	+51.5
2	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+2.60	+0.40	+17.8	(6)	+32.6	+ 2.7	(4)	+ 5.0	-15.5	(5)	+24.4
3	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+0.10	-2.22	+ 0.7	(9)	+ 1.2	-15.2	(7)	-27.8	-15.5	(8)	+24.4
4	Kamenka ..	53 58.244	34.47	+ 6.83	+12.52	+1.64	-0.20	+11.2	(12)	+20.5	- 1.4	(10)	+ 2.5	-15.5	(11)	+24.4
5	Konoplewka	53 57.524	48.52	+ 7.55	- 1.53	-0.29	-1.97	- 2.2	(15)	+ 0.4	-14.9	(13)	+ 3.0	+ 1.9	(14)	+26.9
6	Barankowo.	54 4.824	33.90	+ 0.25	+13.09	+2.28	+0.19	+ 0.6	(18)	+29.8	0.0	(16)	+ 2.5	-16.2	(17)	+ 0.9
7	Ochotnoje..	54 5.074	46.99	0	0	+0.03	-2.38	0	(21)	0	0	(19)	0	0	+(20)	0

In dieser Form werden die Gleichungen beim Coast and Geodetic Survey bei Ausgleichung von Polygonen verwendet. Wird nach Richtungen ausgeglichen, so müssen an Stelle der Winkelverbesserungen  $(a), (b), (c)$  die Differenzen der Richtungsverbesserungen eingeführt und die Polygon-Bedingungsgleichungen gleichzeitig mit den Netzbedingungen ausgeglichen werden. Als Beispiel für die Polygonausgleichung nach der amerikanischen Methode wählen wir wiederum die oben verwendete Dreieckskette. Die Berechnungen ordnen wir hierbei nach der Tabelle 5 s. o. an. Aus einer besonderen Tabelle (Tabelle für  $a_1$  und  $a_2$  S. 84) entnehmen wir für eine mittlere Breite die Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$ . Für die vorgegebene Kette ist  $a_1 = -1.24$ ;  $a_2 = +3.57$ .

Dividiert man die so bestimmten Gleichungen für die Breite und Länge durch 10, so sieht man, dass ihre Koeffizienten mit den entsprechenden Koeffizienten, die bei den vorhergehenden Methoden erhalten wurden, übereinstimmen. Das amerikanische Verfahren vereinfacht die Aufstellung der Polygongleichungen noch etwas, die Berechnungen werden, insbesondere bei Verwendung



des Rechenschiebers, kürzer. Für die Aufstellung der Polygongleichungen für eine aus 7 Dreiecken bestehende Dreieckskette braucht man etwa 15—20 Minuten.

Tabelle der Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$ , ( $a_1$  negativ,  $a_2$  positiv)

B	$a_1$ —	$a_2$ +	B	$a_1$ —	$a_2$ +	B	$a_1$ —	$a_2$ +	B	$a_1$ —	$a_2$ +
35°	1.73	2.56	43°	1.55	2.87	50°	1.36	3.27	58°	1.12	3.97
36	1.71	2.59	44	1.52	2.92	51	1.33	3.34	59	1.09	4.08
37	1.69	2.62	45	1.49	2.97	52	1.30	3.41	60	1.05	4.20
38	1.67	2.66	46	1.47	3.02	53	1.27	3.49	61	1.02	4.34
39	1.64	2.70	47	1.44	3.08	54	1.24	3.57	62	0.99	4.48
40	1.62	2.74	48	1.41	3.14	55	1.21	3.66	63	0.96	4.63
41	1.60	2.78	49	1.39	3.20	56	1.18	3.76	64	0.92	4.80
42	1.57	2.82	50	1.36	3.27	57	1.15	3.86	65	0.89	4.98

Nun werden noch Formeln zur Aufstellung von Polygongleichungen für die Ausgleichung in ebenen rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Trangulation nach der Gauss-Krügerschen Methode in die Ebene übertragen wurde (Abb. 3). Der Polygonzug wird wieder über die Scheitelpunkte der Zwischenwinkel der Dreiecke geführt. Die Koordinaten des Punktes C ergeben sich aus:

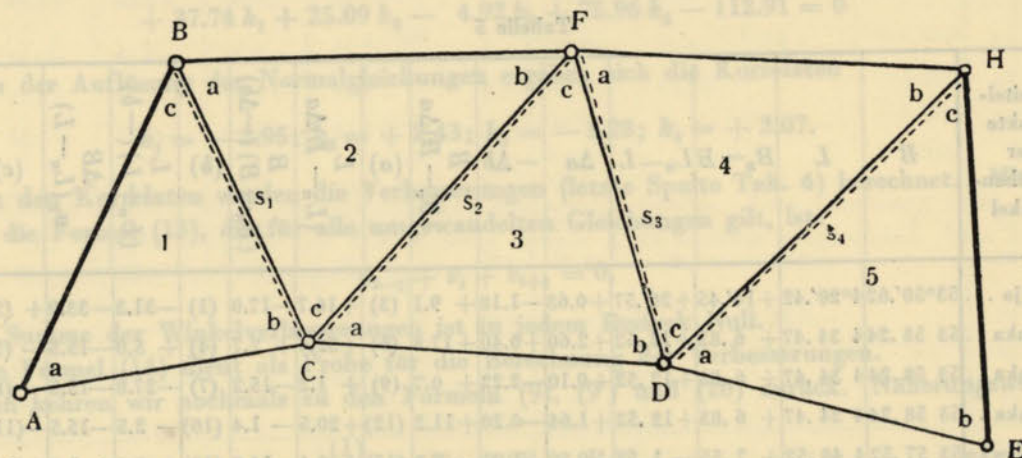


Abb. 3.

$$\left. \begin{aligned} x_C - x_B &= s_1 \cos \alpha_1 \\ y_C - y_B &= s_1 \sin \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wobei  $\alpha_1$  der Richtungswinkel in Punkt B nach Punkt C ist.

Durch Differenzieren des ersten Ausdrucks in (18) erhalten wir:

$$d(x_C - x_B) = \cos \alpha_1 \cdot ds_1 - \frac{1}{\rho''} s_1 \sin \alpha_1 \cdot d\alpha_1 \quad (19)$$

Ferner ist  $\cos \alpha_1 = \frac{x_C - x_B}{s_1}$  und  $\frac{ds_1}{s_1} = \frac{\Delta \log s_1}{M \cdot 10^6}$ , wenn  $\Delta \log s_1$  in Einheiten der 6. Stelle des Logarithmus ausgedrückt wird. Unter Beachtung von (18) wird

$$d(x_C - x_B) = (x_C - x_B) \frac{\Delta \log s_1}{M \cdot 10^6} - \frac{1}{\rho''} (y_C - y_B) d\alpha_1 \quad (20)$$

Multiplizieren wir (20) mit  $M \cdot 10^6$ , so ist:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) \Delta \log s_1 - \frac{M \cdot 10^6}{\rho''} (y_C - y_B) d\alpha_1$$

Für  $\frac{M \cdot 10^6}{\rho''} = k$  wird:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) \Delta \log s_1 - k (y_C - y_B) d\alpha_1$$

Hierin kann man noch für  $d \log s_1$  und für  $d\alpha_1$  folgende Ausdrücke einführen [vgl. (4)]:

$$d \log s_1 = \Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)$$

und

$$d\alpha_1 = -(c_1)$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich die Änderung der Abszissendifferenzen für die Punkte C und B aus:

$$d(x_C - x_B) M \cdot 10^6 = (x_C - x_B) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)] - k (y_C - y_B) [-(c_1)] \quad (21)$$

Ganz entsprechend können wir noch die gleichen Ausdrücke für die übrigen Punkte des Linienzuges anschieben:

$$\left. \begin{aligned} d(x_F - x_C) M \cdot 10^6 &= (x_F - x_C) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2)] - \\ &\quad - k (y_F - y_C) [-(c_1) + (c_2)] \\ d(x_D - x_F) M \cdot 10^6 &= (x_D - x_F) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2) + \\ &\quad + \Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3)] - k (y_D - y_F) [-(c_1) + (c_2) - (c_3)] \\ d(x_H - x_D) M \cdot 10^6 &= (x_H - x_D) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1) + \Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2) + \\ &\quad + \Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3) + \Delta a_4(a_4) - \Delta b_4(b_4)] - \\ &\quad - k (y_H - y_D) [-(c_1) + (c_2) - (c_3) + (c_4)] \end{aligned} \right\} \quad (21)''$$

Die Addition der 4 Gleichungen in (21) ergibt:

$$\begin{aligned} d(x_B - x_H) M \cdot 10^6 &= (x_H - x_B) [\Delta a_1(a_1) - \Delta b_1(b_1)] + \\ &\quad + (x_H - x_C) [\Delta a_2(a_2) - \Delta b_2(b_2)] + \\ &\quad + (x_H - x_F) [\Delta a_3(a_3) - \Delta b_3(b_3)] + \\ &\quad + (x_H - x_D) [\Delta a_4(a_4) - \Delta b_4(b_4)] - \\ &\quad - k (y_H - y_B) [-(c_1)] - \\ &\quad - k (y_H - y_C) [(c_2)] - \\ &\quad - k (y_H - y_F) [-(c_3)] - \\ &\quad - k (y_H - y_D) [(c_4)] \end{aligned}$$

Wird das Absolutglied der Bedingungsgleichung für die Abszisse noch mit  $w_1$  bezeichnet, so nimmt die Bedingungsgleichung selbst folgende Form an:

$$\Sigma [(x_n - x) \Delta a(a) - (x_n - x) \Delta b(b)] + \Sigma [-k (y_n - y) (c)] + M \cdot 10^6 w_1 = 0 \quad (22)$$

Für die Bedingungsgleichung der Ordinaten erhält man ganz ähnlich:

$$\Sigma [(y_n - y) \Delta a(a) - (y_n - y) \Delta b(b)] + \Sigma [k (x_n - x) (c)] + M \cdot 10^6 w_2 = 0 \quad (23)$$



Um grosse Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen zu vermeiden, werden (22) und (23) mit  $10^3$  multipliziert und die Abszissen- und Ordinatendifferenzen in Kilometern ausgedrückt. Damit wird endlich:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma [(x_n - x)^{km} \Delta a(a) - (x_n - x)^{km} \Delta b(b)] + \Sigma [-k(y_n - y)^{km}(c)] + \\ + 434,29 w_1 = 0 \\ \Sigma [(y_n - y)^{km} \Delta a(a) - (y_n - y)^{km} \Delta b(b)] + \Sigma [+k(x_n - x)^{km}(c)] + \\ + 434,29 w_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Formeln (24) werden zur Aufstellung der Polyongleichungen für eine einfache Dreieckskette (Abb. 3) verwendet.

Zusammenstellung der Dreiecke.

Nr. der Winkel	Bezeichnung der Dreieckspunkte	Vorläufig ausgeglichene Winkel	Nr. der Winkel	Bezeichnung der Dreieckspunkte	Vorläufig ausgeglichene Winkel
1	C . . . . .	57°50' 20".0	10	H . . . . .	64°50' 0".0
2	B . . . . .	67 0 40.0	11	D . . . . .	72 50 10.0
3	A . . . . .	55 9 0.0	12	F . . . . .	42 19 50.0
		180° 0' 0".0			180° 0' 0".0
4	F . . . . .	50° 1' 20".0	13	E . . . . .	46°50' 10".0
5	C . . . . .	87 38 30.0	14	H . . . . .	56 10 10.0
6	B . . . . .	42 20 10.0	15	D . . . . .	76 59 40.0
		180° 0' 0".0			180° 0' 0".0
7	D . . . . .	47° 8' 30".0			
8	F . . . . .	56 11 30.0			
9	C . . . . .	76 40 0.0			
		180° 0' 0".0			

Tabelle 6

Nr. der Dreiecke	Scheitelpunkte der Zwischenwinkel	x	y	x <sub>n</sub> - x	Δa	-Δb	y <sub>n</sub> - y	x(x <sub>n</sub> - x) Δa	(a)	y(y <sub>n</sub> - y) Δa	x(x <sub>n</sub> - x) (-Δb)	(b)	y(y <sub>n</sub> - y) (-Δb)	x(y <sub>n</sub> - y) n	(c)	y(x <sub>n</sub> - x) n
		km	km													
1	B . . . . .	5 970.19	+26.21	-10.34	+1.47	-1.32	+36.59	-15.2	(3)	+53.8	+13.6	(1)	-48.3	-77.1	(2)	-21.8
2	C . . . . .	959.59	+37.64	+ 0.26	+2.31	-1.76	+25.16	+ 0.6	(6)	+58.1	- 0.5	(4)	-44.3	-53.0	(5)	+ 0.5
3	F . . . . .	970.01	+46.52	-10.16	+0.50	-1.96	+16.28	- 5.1	(9)	+ 8.1	+19.9	(7)	-31.9	-34.3	(8)	-21.4
4	D . . . . .	952.51	+51.44	+ 7.34	+2.31	-0.99	+11.36	+17.0	(12)	+26.2	- 7.3	(10)	-11.2	-23.9	(11)	+15.5
5	H . . . . .	959.85	+62.80	0	+0.49	-1.97	0	0	(15)	0	0	(13)	0	-	(14)	-

Ausgangsdaten: Koordinaten von A:  $x = 5\,955\,070,85\text{ m}$ ;  $y = 20\,755,80\text{ m}$ ; Richtungswinkel nach B =  $19^\circ 50' 50,0''$ ;  $\log AB\ 4.206\,0085$ .

Nach einer vorläufigen Auflösung der Dreiecke und der Berechnung rechtwinkliger Koordinaten für die Punkte des Polygonzuges stellen wir nach (24) die Polyongleichung auf. Diese Aufstellung zeigt Tabelle 6, die vollkommen mit den vorhergehenden Tabellen übereinstimmt und keiner besonderen Erläuterung bedarf. Die Polyongleichungen selbst und ebenso die Basis- und Azimutbedingungen sind in Tab. 7 dargestellt.

Tabelle 7

Bedingungsgleichungen für				
	das Azimut a	die Basis b	die Abszisse c	die Ordinate d
1	-1	-1.32	+1.36	-4.83
2			+7.71	+2.18
3		+1.47	-1.52	+5.38
4	+1	-1.76	-0.05	-4.43
5			-5.30	+0.05
6		+2.31	+0.06	+5.81
7	-1	-1.96	+1.99	-3.19
8			+3.43	+2.14
9		+0.50	-0.51	+0.81
10	+1	-0.99	-0.73	-1.12
11			-2.39	+1.55
12		+2.31	+1.70	+2.62
13	-1	-1.97	0	0
14			0	0
15		+0.49	0	0
W	W'	W''	43.43W <sub>1</sub>	43.43W <sub>2</sub>

Auf die Einführung der umgeformten Bedingungsgleichungen und auf die Darstellung der weiteren Auflösung kann unter Hinweis auf das oben aufgeführte Beispiel verzichtet werden.

N. Urmajew.







