

1424

Nicht für die Öffentlichkeit bestimmt!



2. Jahrgang

Heft 6

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Mai 1943

Státní zeměměřický a kartografický úřad
Knihovna
9175

INHALT:

- Reg.-Rat Wackershauser: Kriegskartographie und Reproduktionstechnik S. 3
- Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller: Französische Koordinatensysteme und Kartenprojektionen S. 11
- Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller: Umrechnung der französischen Lambert-Koordinaten in das deutsche Heeresgitter S. 58

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin

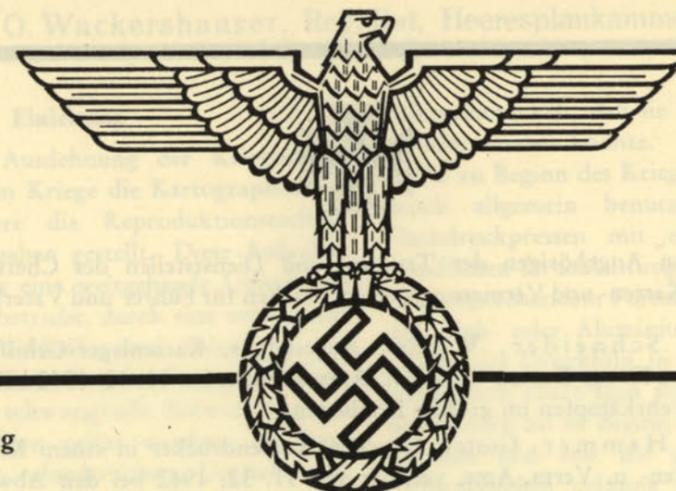
1424

GAZK

1718

Die Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens erscheinen in zwangloser Folge in jährlich etwa sechs Heften. Sie werden vom Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens übersandt, eine Veröffentlichung im Buchhandel erfolgt vorläufig nicht. Abdruck nur mit Genehmigung des Kr.Kart.Verm.Chefs.

Beiträge sind zu richten an OKH./GenStdH./Kr.Kart.Verm.Chef, Berlin W 35, Lützowstraße 60



2. Jahrgang

Heft 6

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Mai 1943

I N H A L T :

- Reg.-Rat Wackershauser: Kriegskartographie und Reproduktionstechnik S. 3
- Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller: Französische Koordinatensysteme und Kartenprojektionen S. 11
- Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller: Umrechnung der französischen Lambert-Koordinaten in das deutsche Heeresgitter S. 58

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin



Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland:

Obgefr. Schneider, Wilhelm, Angestellter, Kartenlager-Gehilfe in einem Kriegs-Karten- u. Verm.-Amt, gefallen am 11. 12. 1942 bei den Abwehrkämpfen im großen Donbogen.

Obgefr. Hammer, Gustav, Drucker, Kartendrucker in einem Kriegs-Karten- u. Verm.-Amt, vermißt seit 11. 12. 1942 bei den Abwehrkämpfen im großen Donbogen.

Gefr. Gehrke, Hans, Druckereiarbeiter, Hilfsdrucker in einem Kriegs-Karten- u. Verm.-Amt, gefallen am 11. 12. 1942 bei den Abwehrkämpfen im großen Donbogen.

Gefr. Brelle, Wilhelm, Arbeiter, Soldat in einem Kriegs-Karten- u. Verm.-Amt, vermißt seit 11. 12. 1942 bei den Abwehrkämpfen im großen Donbogen.

Obgefr. Förner, Fritz, Graphiker, Kartenzeichner bei einer Korps-Kartenstelle, vermißt seit 27. 1. 1943 bei Kastornoje (Rußland).

Soldat Drewanz, Gerhard, Kunstmaler, Kartenzeichner bei einer Korps-Kartenstelle, vermißt seit 27. 1. 1943 in Kastornoje (Rußland).

Obgefr. Bitter, Konrad, Buchdrucker, Kartendrucker und Kraftfahrer bei einer Div.-Kartenstelle, vermißt seit 28. 1. 1943 bei Kastornoje (Rußland).

Obgefr. Kienzle, Otto, Zimmermann, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), gestorben an den Folgen einer schweren Verwundung am 10. 2. 1943 in Netschajewo (Rußland).

Oblt. Jürgens, Heinrich, Verm.-Rat, Offizier im Stabe einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), verstorben an den Folgen einer schweren Verwundung am 23. 2. 1943 in Kertsch.

Lt. Voschnick, Alois, Verm.-Rat, Dipl.-Ing., Ia/Meß bei einer Pz.-Division, vermißt seit Januar 1943 in Rußland.

Uffz. Bartens, Ludwig, Dipl.-Ing., Angehöriger einer Div.-Kartenstelle, gefallen am 15. 3. 1943 bei einem Fliegerangriff in Rußland.

Uffz. Fischle, Otto, Mechaniker, Kradmelder bei einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), gefallen am 29. 3. 1943 in Ljubotin (Rußland).

Uffz. Leusche, Otto, Offsetdrucker, Drucker in einem Kriegs-Karten- u. Verm.-Amt, ermordet am 11. 5. 1943 bei Ausübung seines Dienstes im besetzten Gebiet.

Obgefr. Bahr, Ernst, Steindrucker, Drucker bei einer Korps-Kartenstelle (mot), gestorben an Fleckfieber am 9. 6. 1942 in Rußland.

Kriegskartographie und Reproduktionstechnik

Von O. Wackershauser, Reg.-Rat, Heeresplankammer, Berlin

Einleitung

Die ungeheure Ausdehnung der Kriegsschauplätze hat in diesem Kriege die Kartographie und hierbei insbesondere die Reproduktionstechnik vor gewaltige Aufgaben gestellt. Diese Aufgaben konnten nur durch eine weitgehende Umstellung der Reproduktionsbetriebe, durch eine umfassende Umschulung der Fachkräfte und Anlernung von Hilfskräften, vor allem aber durch eine gewissenhafte Planung und schwungvolle Entwicklung der technischen Verfahren gelöst werden. Da jetzt wohl überall die erforderlichen Umstellungen durchgeführt sind und die technische Entwicklung auch allen Anforderungen entspricht, soll im folgenden ein Überblick über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Reproduktionstechnik unter besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung bei der Kriegskartographie gegeben werden. Gleichzeitig sollen dabei auf Grund der Erfahrung des jetzigen Krieges die Anforderungen an die wissenschaftliche und praktische Ausbildung der leitenden Reproduktionstechniker und allgemeine Vorschläge für die weitere fachtechnische und verwaltungstechnische Entwicklung besprochen werden. Wenn hierbei manche bekannte technische Verfahren etwas weitläufig behandelt werden, so hat dies den Zweck, vor allem die militärischen Dienststellen und die Truppe, die Reproduktionsaufträge geben oder solche auszuführen haben, mit den fachtechnischen Begriffen vertraut zu machen und das erforderliche fachtechnische Wissen zu vertiefen.

I.

Die Aufgaben der Kriegskartographie

Die Grundlage für die rein drucktechnische Vervielfältigung der militärischen wie selbstverständlich auch aller übrigen Karten war der in seinen Anfängen von Senefelder (1771 bis 1834) begründete Stein- oder Flachdruck. Bei der Kartenherstellung änderte sich in dieser Technik bis zum Weltkrieg 1914—1918 und nach dem Weltkrieg nicht viel. Der wesentlichste Grund hierfür ist darin zu suchen, daß die Originale der Kartenwerke auf Stein- und Kupferplatten standen. Während des letzten Krieges hat man sich offenbar in den Ansprüchen bei Kartenanforderungen an die Technik angepaßt, nicht aber die Technik

dahin entwickelt, daß sie höheren Anforderungen gerecht werden konnte.

Die zu Beginn des Krieges 1914 für den Kartendruck allgemein benutzten Maschinen waren Flachdruckpressen mit einer durchschnittlichen stündlichen Druckleistung von etwa 600 Drucken bei entsprechendem Format. Als Druckstock wurden Zink- oder Aluminiumplatten verwandt, auf welche das Druckbild in der Hauptsache photo-mechanisch übertragen wurde. An dieser Technik wurde noch bis zu Beginn des jetzigen Krieges festgehalten und erst die gewaltigen militärischen Anforderungen geboten die Mitverwendung des Offsetdruckes.

Der gewöhnliche Flachdruck, bei welchem die Platte in die Maschine eingespannt ist, druckt unmittelbar von der Platte auf das Papier. Die Mechanik dieses Vorganges dürfte weitgehend bekannt sein, so daß eine Beschreibung sich erübrigt.

Der Offsetdruck ist ebenfalls ein Flachdruck, bei dem jedoch die Druckplatte zunächst auf ein Gummituch druckt und dieses dann den Druck auf das Papier weitergibt. Die Druckplatte ist hierbei auf einem Zylinder aufgespannt. Da es sich um Rotationsmaschinen handelt, ist die Druckgeschwindigkeit und damit die Leistung unvergleichlich größer als beim gewöhnlichen Flachdruck (stündliche Druckleistung 4000—5000 Stück). Im Grunde genommen geht der Offsetdruck auf eine deutsche Erfindung zurück, wurde aber erst im Jahre 1908 in Amerika aufgegriffen, woselbst die ersten Maschinen konstruiert und gebaut wurden. Von Amerika kamen diese Maschinen über England nach Deutschland. In der Entwicklung dieser Maschinen trat in Deutschland ab 1914 ein Stillstand ein. In der Nachkriegszeit blieb dieses Problem unberührt und erst etwa seit dem Jahre 1927 kam es in Deutschland zur Hochentwicklung der Offsetmaschine.

Beim Kartendruck selbst brauchte bei den geringen Anforderungen nach dem letzten Krieg nicht nach neuen technischen Möglichkeiten gesucht zu werden, weil der Flachdruck den Bedürfnissen vollkommen genügte. Diese Sachlage hat sich geändert, als der jetzige Krieg ausbrach. Mit einem Male wurden an die Kartographie Aufgaben herangetragen, wie dies in rückliegender Zeit, auch in vergangener Kriegszeit, noch nie der Fall gewesen ist. In der Hauptsache war die Aufgabe,

welche die Wehrmacht stellte, schwieriger als die gewöhnliche Art der Kartenherstellung, weil es sich vorwiegend um die Nachbildung ausländischer Kartenwerke handelte. Sofern Anforderungen von Karten im Reichsgebiet vorlagen, konnten diese Aufgaben verhältnismäßig leicht erfüllt werden, weil hierfür die Druckunterlagen vorhanden und schlimmstenfalls nur auf den neuesten Stand zu bringen waren. Schwierig aber wurden die Aufgaben erst dann, wenn von mehr oder weniger guten Exemplaren landesfremder Karten die Druckstöcke zu schaffen waren. Bei einfarbigen Karten sind auch bei dieser Aufgabestellung keine wesentlichen Schwierigkeiten zu überwinden, jedoch sind die Karten durchweg mehrfarbig und die gewöhnliche Reproduktionstechnik steht hier vor fast unüberwindlichen Aufgaben.

Zu dieser Aufgabenstellung kamen noch besondere Anforderungen in einem bisher unbekanntem Maß. Da viele Jahre lang nichts geschehen war, um den vorhandenen Bestand an ausländischen Karten auf dem laufenden zu halten bzw. Karten vom neuesten Stand herzustellen, mußte dies in schnellster Weise nachgeholt werden. Für diese ungeheure Aufgabe reichte das vorhandene Fachpersonal, vor allem das kartographische Fachpersonal, nicht aus. Durch Umschulung aus verwandten Berufen wurde diesem Umstand begegnet; es mußte aber auch in der Technik darauf Rücksicht genommen werden. Man ist daher noch heute bemüht, die Handarbeit nach Möglichkeit durch photomechanische Methoden auf ein Mindestmaß herabzusetzen. Die umfangreichen Aufgaben konnten hierbei nur unter weitgehender Einschaltung privater Druckereien bewältigt werden, wobei auch hier in vielen Fällen erst noch eine Umschulung vorgenommen werden mußte, weil die meisten Betriebe sehr geringe Erfahrungen in der Kartenherstellung hatten.

Das Hauptgebot blieb mit Rücksicht auf die Bedeutung der Kriegskarten als moderne Waffe die Schnelligkeit, mit welcher die Arbeiten durchzuführen sind. Wenn auch die Arbeiten mit allergrößter Beschleunigung auszuführen sind, so heißt das nicht, daß dies auf Kosten der Güte des Karteninhaltes und des Gesamtbildes geschehen kann. Im folgenden sollen weniger die Methoden betrachtet werden, mit denen die Güte des Karteninhalts gesteigert und gewährleistet wird, als vielmehr die Maßnahmen, die zur Steigerung der Güte des Kartenbildes getroffen werden.

Die Ausstattung des Feldheeres mit Karten hatte eine außerordentlich hohe Auflagenhöhe

zur Folge. Es genügte bald nicht mehr, einen großen Kreis von privaten Mitarbeitern zu haben, sondern es mußten andere schnell arbeitende Druckmethoden mit herangezogen werden. Die Anforderungen an die Leistung der Druckmaschinen wurden noch größer durch die Forderung der Vielfarbigkeit der Karten. Diese Forderung war eine der größten Belastungen für die gesamte Kartographie und Vervielfältigungstechnik, über die später zu berichten sein wird. Die sich hieraus gerade für den Reproduktionsphotographen ergebenden Schwierigkeiten sind riesengroß und können in ihrem Gesamtumfang wohl nur näherungsweise gelöst werden, mit Methoden also, die stetig verfeinert werden können, jedoch nie eine exakte Lösung dieser Probleme darstellen werden.

Im Verlauf dieses Krieges ergab sich auch eine stetige Vergrößerung der Kartenformate. Zunächst waren nur sehr langsam laufende Flachdruckpressen in besonders großen Formaten in nur sehr geringer Zahl vorhanden. Trotz des Krieges mit seinen ungeheueren Belastungen insbesondere für die Eisen- und Metallindustrie konnten neue Konstruktionen durchgeführt und damit den gestellten Anforderungen Genüge geleistet werden.

Neue Fragen tauchten auf im Zusammenhang mit der Verbesserung des Kartenbildes durch Schummerungseindruck und zwar einer mechanisch gewonnenen Schummerung. Für die Reproduktionstechnik bedeutet dies die Vervielfältigung eines gerasterten Halbtonbildes, wozu auch der Druck von Fliegerbildern zu rechnen ist. Unbedingt notwendig ist auch die originalähnliche Vervielfältigung bunter Karten in nur wenigen Exemplaren. Zur Bearbeitung eines Kartenwerkes sind in jedem Fall mehrere Kräfte eingesetzt, die zudem meistens noch örtlich getrennt sind. Die zur Verfügung stehenden Originale sind jedoch selten in genügender Anzahl vorhanden, um den verschiedenen Bearbeitern gleichzeitig die notwendigen Unterlagen zur Verfügung stellen zu können. Es müssen daher immer Photokopien von den Originalen angefertigt werden. Die gewöhnlichen Photokopien bringen jedoch die Farben nur als unter sich mehr oder weniger stark abgestufte Grautöne. Um diese Bilder originalgetreu zu machen, mußten sie entsprechend mit Farbstift koloriert werden. Diese Handarbeit konnte vollständig durch eine photomechanische Methode ersetzt werden, die später beschrieben wird.

Eine der schwerwiegenden Forderungen, welche das Heer an die Technik gestellt hat, war die Geheimhaltung. Für einen technischen Betrieb und für einen Arbeitsprozeß, an dem selbst bei größter

Einschränkung immer viele Bearbeiter beteiligt sind, ist diese Forderung sehr hindernd und nur sehr schwer einzuhalten. Sofern es sich um Regiebetriebe handelt, lassen sich die primitivsten Bedingungen, wie z. B. Schaffung von Sicherheitsräumen, genügende Sicherung der Arbeitsräume gegen Einbruch und Feuergefahr, sonstige Verschlussmöglichkeiten wie Panzerschränke usw., gut durchführen. Es ist durchaus keine Schwierigkeit, die Druckplatten während und nach dem Druckvorgang genügend zu sichern, wenn auch der Druckablauf durch das tägliche Herausnehmen der Platte nach Arbeitsbeendigung etwas gestört wird. Bei den Privatfirmen entstehen in Bezug auf die Geheimhaltung insofern Schwierigkeiten, weil entsprechende Maßnahmen mit genügender Sicherheit bei den gegebenen und oft schwer oder gar nicht zu ändernden Verhältnissen kaum getroffen werden können und für solche Umstände selten vorgesehen sind. Darüber hinaus muß bei der Entwicklung der Arbeitsmethoden nach Möglichkeit auf die Notwendigkeit der Geheimhaltung dadurch Rücksicht genommen werden, daß ein Arbeitsprozeß wesentlich abgekürzt oder daß ein größerer Anfall von Zwischenmaterial bei der Bearbeitung vermieden werden kann.

Um den verschiedensten Anforderungen gerecht werden zu können und erfolgreiche Abhilfe zu schaffen, mußte an zwei Punkten eingegriffen werden: erstens in der Photographie und zweitens in der Druckerei.

II.

Die Bedeutung der Photographie bei der Reproduktion und die moderne Kartendrucktechnik

Die Photographie ist eines der wichtigsten Glieder bei der Kartenherstellung. Durch entsprechende Entwicklung der Methoden kann ein beachtlicher Teil der kartographischen Handarbeit erspart werden. Es wurde bereits betont, daß nicht die Wiedergabe einfarbiger Karten besondere Schwierigkeiten macht, sondern daß es die mehrfarbigen Karten sind, welche die Kartographie und auch die Photographie stark belasten. Selbstverständlich wird auch der Weg bei einfarbigen Reproduktionen in gewissen Fällen vereinfacht und verbessert werden können.

Die moderne Reproduktionstechnik wurde erst durch die Erfindung der Photographie (Daguerreotypie) im Jahre 1839 ermöglicht. Grundlage der photographischen Aufnahmetechnik in gewerblichen Betrieben zum Zweck der drucktechnischen Vervielfältigung bildet das im Jahre 1851 erfundene sogenannte nasse Kollodiumverfahren. Mit

dessen Erfindung wurde die Empfindlichkeit wesentlich gesteigert, obwohl auch sie, gemessen an modernen photomechanischen Emulsionen, sehr gering ist. Trotzdem hat sich dieses Verfahren wegen seiner großen Schärfe, die in der physikalischen Entwicklung begründet ist, und nicht zuletzt wegen seiner Wirtschaftlichkeit bis auf den heutigen Tag in der Technik behaupten können. Kollodiumemulsion, Bromsilbergelatine und Bromsilberpapiere sind verhältnismäßig frühe Erfindungen und wurden in rascher Folge entwickelt. Seit 1907 ist die Autochromplatte bekannt und seit 1916 die Agfafarbplatte. Einen Nachteil des nassen Kollodiumverfahrens bildet seine relative Unempfindlichkeit und die Unmöglichkeit, die Schicht durch entsprechende Sensibilisatoren farbempfindlich zu machen. So kam es, daß zur Behebung dieses Mangels die empfindlich zu machenden Schichten in starkem Maße Förderung fanden und sehr schnell Einlaß in technische Betriebe gefunden haben. Sehr bald wurden diese Schichten auch auf durchsichtigen Zellulosefilm vergossen und in dieser Art verwendet. In der Kartographie jedoch waren diese photomechanischen Schichten weniger bekannt, da selbst zur Reproduktion von Karten vorwiegend das nasse Kollodiumverfahren — wegen seiner Schärfe — weiter benutzt wurde. Die Platten mußten zwar kurz vor der Aufnahme immer erst gegossen und dann sofort im nassen Zustand verarbeitet werden. Diese Arbeit wurde jedoch gern in Kauf genommen, denn die Nachbehandlungsmöglichkeiten bei dem nassen Verfahren wie Verstärken und Abschwächen sind gerade für die Kartenherstellung besonders wertvoll.

Die ganze Art der Arbeit, wie sie bei der damaligen Kartographie gefordert war, verlangte auch nicht so sehr nach einer Änderung dieser Methode. Als dann nach dem Weltkrieg der Versailler Vertrag einschneidende Beschränkungen auch für die Kartenherstellung im Gesamten brachte, war umso weniger Anlaß gegeben, gerade die Technik der Kartenreproduktion besonders zu fördern. Im wesentlichen blieb in diesem Zweig der Vervielfältigungstechnik die photographische Methode auf dem alten Stand stehen. Erst die Anforderungen des zweiten Weltkrieges brachten auch hier grundlegende Änderungen.

Von besonderer Bedeutung ist die Einführung maßhaltigen Filmes. Zunächst wurden auch in der Kartographie reine Zellulosefilme, wie sie handelsüblich waren (z. B. Printonfilm), verwandt. Dieses Material ist jedoch solchen Maßschwankungen unterworfen, daß es für Maßarbeiten untauglich ist. Die Ausschaltung der schweren Glasplatten

allein genügt schon, um eine beträchtliche Arbeits-erleichterung zu erzielen, und so versuchte man, Astralon mit Unterguß und Emulsion zu versehen. Die Beschichtung in dieser Art gelang auch ohne weiteres, jedoch konnte man auf diesen Gelatine-schichten nicht zeichnen, und zudem blättern diese Schichten nach verhältnismäßig kurzer Zeit ab.

Bei Astralon handelt es sich um ein Vinylpoly-merisat, das ziemlich unveränderlich ist. Die stärkste Veränderlichkeit zeigt dieser Stoff un-mittelbar nach der Herstellung. Wahrscheinlich handelt es sich dabei um innere Spannungen, die sich nach kurzer Lagerungszeit ausgeglichen haben. Dann ist dieser Stoff jedoch in dem Rahmen maß-haltig, wie dies für die Kartographie notwendig ist. Hierüber wurden über große Zeiträume hinweg Beobachtungen und Messungen vorgenommen. Als Vorläufer hatte das Astralon ähnliche Stoffe wie Klarzell, dickes Ultraphan, Celtid usw., von denen das Celtid am maßhaltigsten, jedoch brenn-bar war. Astralon war eine zeitlang auch unter den beiden Namen Chromophan und Efhaphan bekannt. Astralon ist durchsichtig und wird in zwei Ausführungen hergestellt: auf beiden Seiten poliert oder auf einer Seite poliert und auf der anderen mattiert. Die mattierten Folien eignen sich besonders als Zeichenfolien, weil auf der mattierten Seite die Tusche gut haften bleibt. Aller-dings ist die Verwendung einer Spezialtusche zu empfehlen.

Eine gute Verwendung des Astralons liegt in der Beschichtungsmöglichkeit der Folien, die zwei Arten der Beschichtung zuläßt:

1. die Beschichtung mit Chromgummi oder Chromdextrin;
2. die Beschichtung mit Bromsilbergelatine.

Die Beschichtung mit Chromgummi muß in einer Schleuder vorgenommen werden, und die be-schichteten Folien finden Verwendung, wenn von einem Diapositiv ein Diapositiv anzufertigen ist unter Ausschaltung der Negativherstellung. Die Chromgummischicht ist eine reine Kopierschicht. Nach der Entwicklung der Folie ist an den Stellen der Zeichnung das Astralon freigelegt, so daß nun-mehr mit einer astralonlöslichen Farbe die Folie eingefärbt und die Restschicht entfernt werden kann. Das Resultat ist eine Folie, welche die Zeich-nung im Astralon eingätzt trägt, so daß ein Zer-stören durch mechanische Einflüsse und teilweise auch durch chemische Einwirkung nicht erfolgen kann. Auf diesen Folien lassen sich unbegrenzt Er-gänzungen und Fortführungsarbeiten vornehmen, was bei anderen Originalen von Kartenwerken nicht im selben Maße oder gar nicht der Fall ist.

Ist von einem Kartenwerk, dessen Originale als solche Folien vorhanden sind, eine Auflage zu drucken, so wird dadurch eine erhebliche Zeiter-sparnis erzielt, daß die Folien unmittelbar als Ko-piervorlage für die Druckplatten verwendet wer-den. Steht das Kartenwerk auf Stein oder Kupfer, so ist von diesen Originalen entweder ein Umdruck oder ein Kreidedruck anzufertigen. Vom Kreide-druck muß hierauf ein photographisches Negativ in der Kamera gemacht werden. Hierbei sind be-züglich der Maßgenauigkeit reichliche Fehlerquel-len gegeben. Auf dem Wege des Umdruckens kann von vornherein das Maß nicht gehalten werden, da das feuchte Umdruckpapier sich beim Abziehen vom Originalstein oder von der Kupferplatte durch den ausgeübten Zug deformiert. Von den Astralonfolien können auf dem Wege einfacher Kontaktkopie beliebig viele weitere Folien herge-stellt werden, ohne daß die Güte der Zweitfolien geringer ist als jene des Originals.

Die Beschichtung des Astralons mit Bromsilber-gelatine ist schwieriger und kann nur in Film-fabriken vorgenommen werden. Nach der Be-lichtung und Entwicklung werden die nicht vom Licht getroffenen Stellen ausgewaschen. Die Ein-färbung der Restschicht ergibt ein Negativ. Will man ein Positiv erhalten, so muß der Film nach der Entwicklung vollkommen getrocknet werden, bis die auf der Folie vorhandene Restschicht hart geworden ist. Es erfolgt dann Einfärben mit astralonlöslicher Farbe und Entfernen der Restschicht. Damit ist wieder eine Folie wie oben beschrieben erreicht.

Stellt man Karten auf Astralon, so ergeben sich dabei große Vorteile, nämlich Erhaltung der Güte eines Kartenbildes bei der Reproduktion. Originalkarten auf maßhaltigem, unbegrenzt fort-führbarem Stoff sowie die beträchtliche Zeiter-sparnis sind für die Kriegskartenherstellung von besonderer Bedeutung. Nebenbei ergibt sich eine wesentlich erleichterte Lagerung dieser Folien, als dies bei Steinen oder Metallplatten möglich wäre. Letztens ist die dabei erzielte Rohstoffersparnis von Bedeutung, da kein Metall wie z. B. Kupfer, Aluminium, vorwiegend aber Zink, anderer Ver-wendung entzogen wird.

Große Schwierigkeiten machte die Vervielfälti-gung mehrfarbiger Karten. Der primitivste Weg wäre der, daß von einer zu reproduzierenden mehr-farbigem Karte so viele Aufnahmen gemacht wer-den, wie die Karte Farben enthält. In jedem dieser Negative werden sämtliche Farben bis auf die zu druckende abgedeckt. Unter Umständen würde es bei manchen Farben, z. B. Höhenlinien, einfacher

sein, diese neu zu zeichnen. Auf jeden Fall wäre diese Methode ungeheuer zeitraubend und würde sehr viel Arbeitskräfte binden. Die Verwendung von pan- und orthochromatischen Photoplatten bringt zunächst eine Vereinfachung, indem unter Verwendung geeigneter Filter bereits schon bei der Aufnahme Farben eliminiert werden können. Die Überdeckung von beispielsweise panchromatischem Negativ mit orthochromatischem Diapositiv hat diese Arbeiten noch mehr vereinfacht. Es wurde nun verschiedentlich nach einer Weiterentwick-lung gesucht. Bei diesen Arbeiten hat sich ergeben, daß sowohl die Physik als auch die Chemie in engster Weise zusammenarbeiten müssen. Die Ent-wicklung von Filtern und Beleuchtungsquellen als rein physikalische Aufgaben und die Entwicklung besonders empfindlicher Emulsionen als typisch chemische Aufgabe haben das Problem, aus mehr-farbigem Karten die Einzelfarben auf photomechanischem Wege auszuziehen, wenn auch nicht voll-ständig gelöst, so doch einer guten Lösung erheb-lich nähergebracht. Über die technischen Mög-lichkeiten und Aussichten für eine vollkommene Lösung zu berichten, würde den Rahmen dieser Ausführungen überschreiten und soll daher unter-bleiben. Wesentlich aber ist die Erkenntnis, daß bei der Lösung dieses Problems Physik und Che-mie in allerengster Verbindung stehen müssen. Die erreichten Methoden geben die Möglichkeit, bei einer mittelschweren Karte ungefähr $\frac{2}{3}$ der sonst üblichen Zeit einzusparen und dadurch Arbeits-kräfte freizumachen.

Zur Herstellung mehrfarbiger Abzüge von Kar-ten in nur wenigen Exemplaren wurden verschie-dene Verfahren eingehend untersucht. Als das für mehrfarbige Kartenreproduktion brauchbarste hat sich das Coloprint-Verfahren gezeigt. Bei seiner Anwendung dauern die Aufnahmen vom Original ungefähr 2 Stunden; bei der Weiterarbeit wird das Original nicht mehr benötigt. Mit dem Verfahren kann schnell und genau gearbeitet wer-den. Die ersten originalgetreuen, mehrfarbigen Abzüge können durchschnittlich in etwa 7 Stun-den hergestellt werden. Neuerdings wurden Ver-suche mit dem Farbenegativfilm der Agfa un-ternommen, die sehr vielversprechend sind und diese Arbeiten in noch kürzeren Zeiten ermöglichen.

In der Druckerei mußte zur Leistungssteigerung vom reinen Flachdruck zum Offsetdruck überge-gangen werden. Ein Vergleichsbeispiel möge nähe-ren Einblick in die Verhältnisse geben. Je nach Format ist mit einer Flachdruckpresse eine durch-schnittliche Stundenleistung von 600—800 Druk-ken zu erzielen. Bei einer sechsfarbigem Karte

sind sechs Durchgänge durch die Maschine not-wendig. Bei einer Auflage von 20 000 Stück die-ser Karte sind also insgesamt 120 000 Durchgänge erforderlich. Bei 10stündiger Arbeitszeit und einer Druckgeschwindigkeit von 700 Drucken stündlich werden 7000 Drucke täglich gedruckt. Demnach sind zur Gesamtauflage ungefähr 17 Tage not-wendig. Mit einer zweifarbigem Offsetpresse neuer-ster Konstruktion kann eine durchschnittliche Stundenleistung von etwa 4500 Drucken erzielt werden. Nimmt man für das erwähnte Beispiel eine Stundenleistung von 4000 Drucken an, so werden täglich bei 10stündiger Arbeitszeit 40 000 Drucke in je 2 Farben ausgeführt. Eine Zwei-farbenmaschine schafft also den Druck in $1\frac{1}{2}$ Tagen. Bei einer Einfarbenmaschine wäre der Druck in 3 Tagen durchzuführen. Bei dieser Ver-gleichsrechnung sind keine Arbeitspausen ange-nommen, auch sind die zusätzlichen Arbeiten wie Farbwechsel, Walzenwaschen, Einrichten usw. nicht mit angeführt. Diese liegen beim Offsetdruck etwas höher als beim Flachdruck, fallen aber für eine Vergleichsrechnung nicht zu sehr ins Gewicht. Rechnet man hierfür einen Tag, so sind $2\frac{1}{2}$ bis 3 Tage immer noch wesentlich günstiger als der langwierige Flachdruck. Aus diesem Beispiel kann man sich ein Bild machen, in welchem Maß die Leistungen in der Kartenherstellung durch den Offsetdruck gesteigert wurden. Wäre diese Druck-art für die Kriegskartenherstellung nicht eingesetzt worden, dann hätten die hohen mengenmäßigen Anforderungen wohl nie erfüllt werden können. Gewiß standen Buchdruck und Tiefdruck zur Ver-fügung, jedoch eignen sich beide nur in ihrer Art für den Kartendruck, und vor allem nimmt bei letzteren Druckarten die Druckformherstellung erheblich mehr Zeit in Anspruch und ist wesent-lich komplizierter als beim Offsetdruck.

Buchdruck und Tiefdruck wurden herangezogen für die Lösung von Spezialaufgaben. Zum Druck von Fliegerbildern wurden die unterschiedlichsten Arten des Druckens untersucht und verglichen, und es hat sich ergeben, daß der Buchdruck bei sorgfältiger Klischeeherstellung und unter Ver-wendung des geeigneten Papiers — kein Kunst-druckpapier — die klarsten Bilder ergeben hat. Selbstverständlich leistet hier auch der Tiefdruck fast Gleichwertiges. In gleicher Weise sind die Schummerungen, die auf photomechanischem Wege durch Aufnahmen eines Geländereiefs ent-standen sind, in die Karten einzudrucken.

Im Verlauf des jetzigen Krieges wurden die Off-setpressen bezüglich Formatvergrößerung weiter entwickelt, und es konnten zweifarbigem Maschinen

für das bisher größte Format 120×170 cm fertiggestellt werden. Dabei ist zu beachten, daß es nicht genügt, solch große Maschinen nur aufzustellen, sondern daß hiermit eine Folge von Umstellungen in den Betrieben und Neubau von Geräten, die dem Format angepaßt sind, notwendig werden. Eine weitere Folgeerscheinung dieser Umstellung auf Offset und Großformat ist die Anfertigung passenden Papiers und seine Beschaffenheit.

Durch das Anwachsen der Druckleistungen wurde der Papierverbrauch ins Riesenhafte gesteigert. Die Verknappung des Rohstoffes führte dazu, daß eine wesentliche Verminderung der Güte des Papiers eintreten mußte. Immerhin kann dieses Papier für den Offsetdruck noch gut verwendet werden. Der Übergang zu schnelllaufenden Maschinen erfordert ein gutes Papier, weil dieses beim Druck viel mehr beansprucht wird als bei langsam laufenden Maschinen. Dazu kam später die Entwicklung zum Großformat, zu dessen Druck ein sehr stabiles Papier gehört, damit beim Mehrfarbendruck die vorgeschriebene Paßgenauigkeit eingehalten werden kann und der Druckablauf durch Zerreißen des Papiers u. ä. nicht gestört wird.

Hierzu kam noch die Forderung nach Gewichtersparnis. In dieser Richtung wurden viele Versuche gemacht, ohne bisher zu einem befriedigenden Ergebnis zu kommen. Neue Füll- und Zusatzstoffe werden noch geprüft, und es haben sich auch gute Resultate gezeigt, doch fehlt es noch meistens an genügend großer Herstellungskapazität. Auch hier liegen Probleme vor, die nicht nur von der chemischen Seite ihre Lösung finden können, sondern ebenfalls der Hilfe der Physik bedürfen.

III.

Die Aufgaben des leitenden Reproduktionstechnikers

Die Photographie ist ein Anwendungsgebiet der Physik und Chemie, wobei gerade die Farbaufnahmen und Farbauszüge recht große Anforderungen an die Physik und an die Chemie stellen. Ebenso sind auch die mathematisch recht schwierige Technik der Objektive, die gerade für Farbarbeiten gewissen technisch sehr schwer zu erfüllenden Bedingungen genügen müssen, der Bau von geeigneten Belichtungsquellen und Filtern reine Aufgaben der Physik. Die Entwicklung besonderer Emulsionen für verschiedene Empfindlichkeitsbereiche gehört in das Gebiet der Chemie. Ferner bieten die Kopie und die Druckerei beiden Wissensgebieten ein reichliches Maß an Aufgaben.

Während die Photographie seit längerem schon von Fachchemikern methodisch und nicht nur rein empirisch behandelt wird, ist dies bei der Druckerei — obwohl diese wesentlich älter ist als die Photographie — bisher nicht der Fall gewesen. Erst im Verlauf der letzten 10 Jahre haben sich auch allmählich um dieses Gebiet entsprechende Fachkräfte bemüht. Große Privatbetriebe haben damit angefangen und in dieser Richtung schüchterne Versuche gemacht. An Hochschulen wurden entsprechende Institute gegründet.

Die Verwendung hochwertiger Präzisionsmaschinen und der verschiedenen optischen Geräte usw. erfordert noch weitgehendes Verständnis für den Maschinenbau und technische Fragen. Die Ausbildung eines leitenden Reproduktions- und Druckfachmannes muß wissenschaftlich fundiert sein und kann nicht durch mittlere Fachschulen erfolgen. Jedoch weder die Photographie noch die Druckerei sind selbständige Wissenschaften; zunächst sind beides Handwerke. Die Technik und das Wesen beider Handwerke sind aber Anwendungsgebiete exakter Naturwissenschaften. Der leitende Reproduktions- und Druckfachmann muß daher eine entsprechende Ausbildung haben, die ihm nur durch ein intensives Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften vermittelt werden kann. Die Spezialisierung für seinen späteren Beruf erfolgt zweckmäßig nicht während des Studiums, sondern erst nach Abschluß desselben. Hierbei soll begonnen werden mit praktischen Übungen als Kartograph in einem Kartenbetrieb. Die theoretischen Kenntnisse, insbesondere das erforderliche geodätische Wissen werden durch ein gediegenes Fachstudium vermittelt, bei dem die topographische Aufnahme und eine allgemeine geographische Orientierung beachtet werden müssen. Damit ist erst ein vollständiges Eindringen in das Wesen der Karte möglich.

Zum Aufgabengebiet eines leitenden Fachmannes gehört es nun, den Betrieb so aufzubauen, daß er neben den praktischen auch wissenschaftlichen Anforderungen genügt. Hierzu müssen vor allem die Photographen angehalten werden, ihre Arbeiten durch Messungen zu überprüfen und auf alle Forderungen abzustimmen, wobei vor allem Temperatur, Transparenz und ähnliche Größen beachtet werden müssen. Für diese Arbeiten muß das Personal erst geschult werden. Diese Schulung hätte schon die Fachschule zu übernehmen. Bisher wurden fast alle photographischen Arbeiten nach dem Gefühl ausgeführt, und die einzige Größe, welche tatsächlich gemessen wurde, war die

Zeit. Ähnliches gilt für die Druckerei. Ein weiteres Aufgabengebiet ist der sinnvolle Einsatz der zur Verfügung stehenden Arbeitsmethoden in Bezug auf Wirtschaftlichkeit (Zeitverbrauch) und Güte. Die Ausnützung der sich im Betrieb ergebenden Erfahrungen für die Schaffung verbesserter Arbeitsweisen und Verfahren ist eine Hauptaufgabe für den Leiter einer Reproduktionsabteilung. In diese Betriebe muß vielfach noch ingenieurmäßiges Denken hineingetragen werden. Damit hat der Leiter ungefähr dieselbe Aufgabe wie ein wissenschaftlich gebildeter Betriebsingenieur. In diesem Sinn muß der Nachwuchs für diesen Spezialberuf erzogen und ausgebildet werden. Solange solche Fachkräfte nicht zur Verfügung stehen, kann die Arbeit des Leiters einer reproduktionstechnischen Abteilung nur in reiner Verwaltungstätigkeit bestehen, wobei dieser in sämtlichen praktischen Fragen von den Ansichten des Photographen und Druckers, deren Ausbildung rein handwerksmäßig ist, abhängig ist.

IV.

Ausstattung der beweglichen Druckereieinheiten und der stationären Kartendruckbetriebe

Eines der schwierigsten Probleme ist die Ausstattung der beweglichen Druckereien. Die Ausrüstung soll so gestaltet sein, daß bei einem Minimum von Geräten ein Maximum an Leistung erzielt wird. An dieser Stelle kann hierzu nur Grundsätzliches gesagt werden, denn für eine eingehende Behandlung fehlen noch die wertvollen Erfahrungen, welche die Leiter von Druckereieinheiten im Verlauf dieses Krieges gesammelt haben. Bei sämtlichen Betrachtungen dieser Art ist zu beachten, daß diese Einheiten in jedem Fall mit Schwierigkeiten zu kämpfen haben, wie sie in stationären Druckereien kaum auftreten werden. Das Personal muß grundsätzlich nur bestes Fachpersonal sein, das sich in allen Fällen behelfen kann. Zur Vervielfältigungstechnik können eigentlich nur beste, gelernte und berufserfahrene Reproduktionsphotographen herangezogen werden, nicht aber Pressephotographen, Porträtphotographen, Photohändler usw. Letztere können bestenfalls angelernt und als Hilfskräfte verwandt werden. Eine längere Ausbildungszeit für die besonderen Verhältnisse wird nötig sein. Nicht so schwierig dürfte es sein, fachmännisch gebildetes Druckereipersonal zu bekommen. Geeignet hierfür sind in erster Linie Stein- und Offsetdrucker. Dabei ist es sehr zweckmäßig, wenn dieses Personal auch für die Druckplattenkopie ausgebildet ist. Unbedingt erforderlich sind ein bis zwei

Druckerlithographen, deren Aufgabe es ist, die Druckplatten zu korrigieren und für den Druck fertig zu machen. Die Verwendung von Buchdruckern und dgl. ist nicht zu empfehlen. Auch beim Druckereipersonal ist die Einarbeitung in die besonderen Verhältnisse notwendig. Die Lichtpausmaschine kann von angelernten Kräften bedient werden.

Die Frage der Ausstattung solcher Druckereizüge ist schwierig zu beantworten. Es scheint jedoch nicht ratsam, für diesen Zweck besondere Spezialmaschinen zu entwickeln, weil hierfür auch ein Spezialpersonal notwendig ist. Zunächst darf diesen Druckereien auch nicht zuviel zugemutet werden, jedoch lassen sich bei entsprechender Einrichtung sehr gute Leistungen erzielen; Beweise dieser Art sind im Verlauf des Krieges schon erbracht worden. Es besteht jedoch kein Zweifel, daß der Rotationsflachdruck in den meisten Fällen auf Schwierigkeiten stößt, vor allem weil der Drucker von glatten Platten zu drucken hat. Die Entwicklung einer dem speziellen Zweck entsprechenden Offsetmaschine würde die Leistungen der Flachdruckereien nicht nur mengenmäßig, sondern auch qualitätsmäßig stark heben. Daß dies konstruktiv möglich ist, wurde bereits durch einen Versuch bestätigt. Das Format kann selbstverständlich nicht größer werden, als es bisher schon gewesen ist. Für diese Formate brauchen dann auch die Druckplatten nicht geschleudert zu werden, wodurch sich die Mitnahme einer Schleuder erübrigt.

Als Kern der Ausstattung kommen folgende Geräte in Betracht:

1. eine Aufnahmekamera im Format ungefähr 70×70 cm. Hierzu die nötige Ausrüstung zum Bearbeiten der Photomaterialien. Der Originalhalter kann so ausgerüstet werden, daß er auch als Kopierrahmen zu verwenden ist;
2. Lichtpausmaschine;
3. eine Offsetpresse (einfarbig), Format ungefähr 70×90 cm;
4. Rotaprintmaschine mit einem größeren Format als bisher.

Schwierig ist der Chemikaliennachschub zu regeln. Größere Vorräte können fahrbare Druckereien wegen Platzmangels und leichter Verderblichkeit nicht mitnehmen. Der Nachschub ist insofern noch erschwert, als eine große Anzahl der Chemikalien in gelöster Form in Glasflaschen zum Versand kommen muß. Nach Möglichkeit nimmt man statt Glas Gefäße aus anderem, nicht

so leicht zerbrechlichem Material. Im Winter tritt hierzu noch die Frostgefahr. Um diesen Übelständen abzuwehren, ist die Verwendung von Trockenchemikalien anzustreben. Auch hierbei bestehen Schwierigkeiten, weil beim Ansetzen nicht immer geeignetes Wasser vorhanden sein wird, wenn hier auch durch Filtern usw. an Ort und Stelle verhältnismäßig leicht Abhilfe geschaffen werden kann.

Dasselbe gilt bezüglich des Chemikaliennachschubes auch für vorgeschobene stationäre militärische Kartendruckbetriebe. Abgesehen von Rohstoffschwierigkeiten muß schon aus rein verwaltungstechnischen Gründen in der Verwendung von Verfahren wenigstens in gewissen Grenzen eine Einheitlichkeit angestrebt werden. Bei den meisten Verfahren, z. B. Kopierverfahren, handelt es sich chemisch immer um denselben Aufbau, wobei nur kleine Abänderungen die Unterschiede bewirken. Mit Rücksicht hierauf wird nunmehr eine einheitliche Kopierschicht entwickelt, die den Vorteil hat, nicht nur in der Verwendung sehr einfach zu sein, sondern auch wertvolle Rohstoffe — Gummi arabicum und Chromsalze — einzusparen. Diese Schicht kann zur Druckplatten- und Folienherstellung — also auch Kopien auf Astralon — verwandt werden. Die grundlegenden Arbeiten hierüber sind abgeschlossen und Kopierversuche haben brauchbare Resultate ergeben. Um die Verwendung dieser Schicht für jeden vorkommenden Fall zu ermöglichen, sind noch kleine Verbesserungen erforderlich. Für die Ausstattung stationärer Reproduktionsbetriebe im Heimatgebiet zur Herstellung von Kriegskarten können nur allgemeine Richtlinien gegeben werden. Hierbei genügt es nicht, einfach eine gute Druckerei einzurichten. Vielmehr muß zunächst ein guter Stamm an Kartographen und eine sehr gut eingerichtete Photographie vorhanden sein. Der größte Mangel ist zunächst das Fehlen der kartographischen Zeichenkräfte und im besonderen das Fehlen von wirklichen Kartographen, welche in der Lage sind, auch in sachlicher Beziehung Aufsicht zu führen. Die Photographie muß den Anforderungen der Kartographie Rechnung tragen. Alte Holzapparate sind hierfür ungeeignet. Für allgemeine kartographische Zwecke wird folgende Einrichtung vorgeschlagen:

A) Photographie

1. Drei Reproduktionsgeräte in Brückenkonstruktion, davon eines in Großformat und zwei in gängbaren mittleren Formaten. Jedes dieser Geräte ist in einem Raum für sich

untergebracht und hat jeweils einen Präparationsraum und eine Dunkelkammer.

2. Für die Präparation von Druckplatten, die für die unmittelbare Photographie auf die Druckplatte Verwendung finden, ist ein Raum vorzusehen, der mit Schleuder, Schaukelwanne, Emulsionswärmeschrank, Spültrog und Heißwassergerät eingerichtet ist.
3. Ein weiterer Raum ist für die Filmkopie eingerichtet. In ihm befinden sich 2 bis 3 Reflexkopiergeräte, ein großformatiges und zwei mittlere Formate, 3 Spülbecken, Tische mit entsprechenden Schalen, Schränke oder sonstige Möglichkeiten zur Aufnahme von Filmmaterial.
4. Kopierzimmer für Astralon-Folien und Silberfilm für Tageslicht. In Anbetracht der immer größer werdenden Bedeutung ist die Folienkopie besonders gut auszustatten. Notwendig sind zwei Schleudern mittleren und großen Formates. Hierfür werden am besten nur Horizontalschleudern verwandt. Des weiteren sind 3 Kopierrahmen, wieder ein Großformat und zwei mittlere Formate, aufzustellen; 3 Spültröge, 3 Entwicklungstische und Warmwassergeräte vervollständigen die Einrichtung.
5. Ein Raum für die Wiedergabe farbiger Karten in nur kleinen Auflagen. Benötigt wird z. B. für das Coloprintverfahren eine Lochstanze, eine Abziehplatte, Spültröge und Schalen.
6. Ein Raum für Photokopien und Lichtpausen.
7. Ein Raum zum Entschichten von Glasplatten, Trocknen von Filmen und sonstigen Arbeiten.
8. Ein Chemikalienlager.

B) Angegliedert ist die Druckplattenkopie

1. Ein Raum für die Beschichtung der Druckplatten, ausgestattet mit Schleudern (ca. 3—4), deren Formate sich nach den vorhandenen Pressen zu richten haben. Es sind Horizontal- und Vertikalschleudern zu empfehlen.
2. Kopierzimmer, ausgestattet mit 4—5 Kopierrahmen verschiedener Formate mit den entsprechend großen Punktlichtlampen.
3. Entwicklungs- und Fertigmacherraum, ausgestattet mit Arbeitstischen, Spültrögen und Zubehör.
4. Andruckerei, ausgestattet mit Andruckpressen für Flach- und Offsetdruck. Formate richten sich nach den Maschinengrößen.

C) Druckerei

In einem kleinen Raum sind 2—3 Flachdruckpressen aufzustellen, welche in gewissen Fällen immer wieder gebraucht werden. Der Hauptmaschinenraum jedoch ist mit Offsetpressen auszustatten. Hierbei sind bei einer Privatdruckerei vor allen Dingen wirtschaftliche Gesichtspunkte in Betracht zu ziehen. Über die Wahl der Maschinentypen muß jeder Druckereibesitzer sich selbst klar sein, jedoch soll eine einmal eingeführte Type beibehalten werden. Ein- und vor allem zweifarbige Maschinen verschiedener, aber nicht zu unterschiedlicher Formate geben der Druckerei für den Kartendruck eine gewisse Beweglichkeit und Vielseitigkeit.

Sehr wichtig im Maschinenraum ist die Temperieranlage für das Papier. Wie eine Untersuchung, welche das Bibliographische Institut in Leipzig vornahm, zeigt, ergeben die besten Resultate die im Druckereisaal angebrachten Aushängevorrichtungen, welche zudem den Vorteil haben, daß sie so gut wie keinen Platz beanspruchen, da sie meistens an der Decke angebracht sind. Einen großen Abfall der Wirkung zeigen die Resultate, die mit den gewöhnlichen trommelartigen Temperiermaschinen erzielt werden.

Im übrigen müßte sowohl jeder photographische Betrieb und jede Druckerei mit Luftzirkulations-einrichtung versehen sein, welche die Luft staubfrei macht und immer neu zuführt. Dies ist nicht nur aus gesundheitlichen Gründen zu empfehlen, sondern auch deshalb, weil dadurch die Arbeiten

in den beiden Abteilungen nicht so sehr unter dem Staub leiden. Eine Temperieranlage, welche die Temperatur in den Arbeitsräumen in allen Jahreszeiten konstant hält, vervollständigt die Gesamteinrichtung.

Selbstverständlich ist dem Betrieb eine Plattenschleiferei anzugliedern. Sofern die Möglichkeit besteht, müßte auch in jedem größeren Betrieb eine Reparaturwerkstätte vorhanden sein.

V. Schlußbetrachtungen

Diese Ausführungen sollen einen Überblick über die bei der Kriegskartenherstellung auftretenden Fragen vermitteln. Der Zweck soll die Erkenntnis sein, daß entsprechend wissenschaftlich gebildete Fachkräfte diesem Gebiet des Graphischen Gewerbes noch fehlen. Es sollte auch gezeigt werden, welche Ausbildung eine solche Fachkraft haben muß, und ferner, daß wichtige systematische Forschungsarbeiten noch zu leisten sind. Damit soll nicht das Fachwissen des Praktikers angezweifelt werden. Im Gegenteil: das Wissen und Können des Handwerkers ist für die Forschung von unschätzbarem Wert. Neue Erkenntnisse aber dürfen am Konservatismus der alten Praktiker nicht scheitern. Nur weil ein Verfahren sich seit 30 Jahren bewährt hat und weil man jeder Neuerung mit mehr als der erforderlichen Skepsis gegenübersteht, wird eine solche abgelehnt. Hausverfahren und Geheimrezepte dürfen nicht dazu führen, daß ein ganzer Betrieb sich einer fruchtbringenden Neuerung verschließt in der Annahme, daß nur der eigene Betrieb über die allerbesten Verfahren verfügt.

Französische Koordinatensysteme und Kartenprojektionen

Von Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller

Gliederung

- I. Geodätische Grundlagen und Koordinatensysteme
- II. Die Bonnesche Projektion
 1. Abbildungsgleichungen
 2. Verzerrungen
 3. Projektionstafeln von Plessis
 4. Kartierung der Festpunkte
- III. Die Lambertsche Abbildung
 1. Abbildungsfunktionen
 2. Entwicklung von ΔR als Funktion von β und von ΔB

3. Verzerrungen der Lambertschen Abbildung
 - a) Vergrößerungsverhältnis
 - b) Längenreduktion
 - c) Richtungsreduktion
 - d) Bildkrümmung einer geodätischen Linie
 4. Lambert Nord de Guerre
 - a) Abbildungsgleichungen
 - b) Verzerrungen
 - α) Vergrößerungsverhältnis
 - β) Richtungs- und Längenreduktion
 - c) Projektionstafeln
 5. Die neuen französischen Lambert-Projektionen
 - a) Allgemeines und Hilfsmittel
 - b) Richtungsreduktion
 - c) Längenreduktion
 6. Die Winkelverzerrungen der französischen Abbildung
 7. Die Vernachlässigungen der französischen Lambertschen Abbildungen
 8. Die Untersuchung des Schnittkegels
- IV. Die gegenseitigen Beziehungen der französischen Koordinatensysteme
1. Umrechnung der Lambert-Koordinaten von neuem zu neuem System
 2. Übergang von alten zu neuen geodätischen Grundlagen
 3. Umrechnung von Koordinaten des Systems Lambert I Zone Nord in Lambert Nord de Guerre (Table Générale)
 4. Französische Koordinatenverzeichnisse und Karten
- V. Literaturverzeichnis

I. Geodätische Grundlagen und Koordinatensysteme

Im Jahre 1803 wurde von einer französischen Kommission der Beschluß gefaßt, der im Maßstab 1:80 000 herzustellenden Generalstabkarte von Frankreich die Bonnesche Projektion zugrunde zu legen. Als ausschlaggebend für diese Projektionswahl sind die vom damaligen Standpunkt günstigen Verzerrungseigenschaften der Bonneschen Projektion, die Flächentreue und die längentreue Abbildung der Parallelkreise und des Mittelmeridians, anzusehen. Die Karte wurde im Jahre 1817 in Auftrag gegeben.

Um die Zeichnung des Gradnetzes der Karte zu erleichtern, berechnete der Ingenieur-Geograph Plessis nur im Manuskript vorhandene Tafeln, welche die Bonneschen Koordinaten, sowie ihre ersten und zweiten Differenzen für alle Schnittpunkte der runden 10 Neuminuten entsprechenden Meridiane und Parallelkreise im Bereich von 30°—70° geographischer Breite und 40° Längenunterschied enthalten. Plessis benutzte für seine Berechnungen ein Ellipsoid, dessen Meridianquadrant genau 10 000 000 m lang ist, und dessen Abplattung in Anlehnung an die Arbeiten der „Commission des poids et mesures“ den Wert 1:334,29 besitzt.

Delambre hatte im Jahre 1817 auf Grund der damals vorliegenden Breitengradmessungen folgendes nach ihm benanntes Ellipsoid errechnet:

$$\begin{aligned} \text{Große Halbachse } a &= 6\,376\,985 \text{ m,} \\ \text{Kleine Halbachse } b &= 6\,356\,323 \text{ m,} \\ \text{Abplattung } \frac{a-b}{a} &= 1:308,64 = 0,00324, \\ \text{Meridianquadrant } Q &= 10\,000\,724 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Triangulation der Ingenieur-Geographen, die im Jahre 1817 planmäßig in Angriff genommen wurde, erfolgte auf dem Delambreschen Ellipsoid. Alle in Form von geographischen Koordinaten vorliegenden Ergebnisse der alten französischen Triangulation beziehen sich also auf das Ellipsoid von Delambre.

Um die von Plessis berechneten in vier umfangreichen Bänden vorhandenen Bonneschen Projektionstafeln, die auf einem vom Delambreschen abweichenden Ellipsoid beruhen, verwenden zu können, wurde folgender Weg beschritten:

Die auf dem Delambreschen Ellipsoid berechneten geographischen Koordinaten wurden unverändert als auf einem dem Delambreschen ähnlichen Ellipsoid bestimmt betrachtet. Dieses neue Ellipsoid hat also dieselbe Abplattung wie das Delambresche, und es besitzt die Meridianquadrantenlänge von genau 10 000 000 m. Zur Überführung der Werte der Tafeln von Plessis auf das neue Ellipsoid stellte der Ingenieur-Geograph Puissant eine kleine Zusatztafel auf. Der Abplattungsunterschied beider Ellipsoide wurde auf Grund von Differentialformeln berücksichtigt. Das neue Ellipsoid, das nur eingeführt wurde, um die Tafeln von Plessis verwenden zu können, wird Ellipsoid von Plessis genannt. Es hat folgende Ausmaße:

$$\begin{aligned} \text{Große Halbachse } a &= 6\,376\,524 \text{ m,} \\ \text{Kleine Halbachse } b &= 6\,355\,863 \text{ m,} \\ \text{Abplattung } \frac{a-b}{a} &= 1:308,64 = 0,00324, \\ \text{Meridianquadrant } Q &= 10\,000\,000 \text{ m.} \end{aligned}$$

Die Generalstabkarte von Frankreich 1:80 000 und alle von ihr abgeleiteten Kartenwerke beruhen demnach auf dem (durch Modifikation des älteren von Plessis benutzten Ellipsoides entstandenen) Ellipsoid von Plessis.

Bonnesche Koordinaten von trigonometrischen Punkten und der Schnittpunkte von Zehntelgrad-Meridianen und Parallelkreisen wurden in der Folgezeit fast ausschließlich mit Hilfe der Tafeln von Plessis berechnet. Dadurch beruhen die in der Praxis benutzten ebenen Koordinaten und die Karten auf demselben Ellipsoid.

Das geschilderte Vorgehen führte zu einer kleinen Unrichtigkeit im Kartenmaßstab, der im Verhältnis der Meridianquadrantenlängen des Plessisschen und des Delambreschen Ellipsoides zu klein gewählt wurde. Alle der Karte entnommenen oder aus Bonneschen Koordinaten berechneten Maße sind, sofern letztere mit Hilfe der Projektionstafeln bestimmt wurden, im Verhältnis von 10 000 000:10 000 724 oder um 1 m auf 13,8 km zu klein. Da das Kartenblatt 1:80 000 die Ausmaße 40/64 km besitzt, ist es in seinen Blatträndern um 1/17 mm und 1/28 mm zu klein, was kartographisch völlig belanglos ist. In der größten Gesamtausdehnung Frankreichs beträgt der Fehler in natürlichem Maße 70 m. Der Fehler wird nur fühlbar, wenn etwa Bonnesche Koordinaten berechnet, und wenn diese Ergebnisse mit den aus den Tafeln von Plessis entnommenen Werten verglichen werden, oder wenn weit vom Projektionsmittelpunkt entfernt gelegene Punkte mit den unmittelbar berechneten Koordinaten in die Karten eingetragen werden. Diese Fälle kamen in der französischen Vermessungspraxis deshalb vor, weil nur eine Projektionstafel zur Verfügung stand.

Die Ingenieur-Geographen bezogen, wie später der Service Géographique de l'Armée, die geographischen Längen auf den Meridian von Paris, dessen geographische Länge ostwärts Greenwich

$$2^{\circ}59'69'' = 2^{\circ}20'13,980''$$

beträgt. Die Längenangaben westlich des Nullmeridians sind positiv und ostwärts negativ.

Auf Grund einer großen Anzahl astronomisch-geodätischer Beobachtungen wurden folgende Ausgangswerte der Triangulation der Ingenieur-Geographen ermittelt:

$$\begin{aligned} \text{Kreuz des Panthéon in Paris: Breite } B_0 &= 54^{\circ}27'42,55 \\ \text{Länge } l_0 &= 0^{\circ}01'06,81 \text{ ostw. Paris} \\ \text{Azimut Panthéon — Belle Assise: } &= 305^{\circ}33'150 \end{aligned}$$

Daraus wurde abgeleitet

$$\text{Azimut Panthéon — Rosny} = 281^{\circ}6721664$$

Der Service Géographique de l'Armée (S. G. A.), der die Ingenieur-Géographes du Dépôt de Guerre (I. G.) ablöste, begann im Jahre 1870 mit den grundlegenden Arbeiten für eine Neutriangulation Frankreichs, die einer großmaßstäblichen topographischen Neuaufnahme als Grundlage dienen sollte. Für die Berechnung des neuen Meridians von Frankreich und für alle weiteren Arbeiten wurden ein sich der Erdgestalt besser anpassendes Ellipsoid und neue geodätische Grundlagen gewählt.

Der S. G. A. legte ab 1899 seinen Arbeiten das Ellipsoid von Clarke 1880, das der britische Oberst Clarke im Jahre 1880 aus 6 Meridian- und aus 2 Parallelkreisbogenlängen berechnete, zugrunde.

Das Ellipsoid Clarke 1880 hat folgende Ausmaße:

$$\begin{aligned} \text{Große Halbachse} & a = 6\,378\,249,2 \text{ m,} \\ \text{Kleine Halbachse} & b = 6\,356\,515,0 \text{ m,} \\ \text{Abplattung} & \frac{a-b}{a} = 1:293,466 = 0,00340754952. \end{aligned}$$

Die geographischen Längen wurden vom S. G. A. ebenfalls auf den Meridian von Paris bezogen, der unverändert mit $2^{\circ}59'69''$ ostwärts Greenwich angenommen wurde. Aus einer großen Anzahl von Messungen wurden folgende neuen Ausgangswerte bestimmt und allen weiteren Arbeiten zugrunde gelegt

$$\text{Kreuz des Panthéon in Paris: Breite } B_0 = 54^{\circ}27'36,18,$$

$$\text{Länge } l_0 = 0^{\circ}01'06,93,$$

$$\text{Azimut Panthéon — Rosny} = 281^{\circ}67'27,28.$$

Die neue Karte von Frankreich ist im Gegensatz zur alten Karte von Frankreich eine Gradabteilungskarte. Die anfänglich und die während des Weltkrieges 1914—1918 aufgenommenen Blätter der Karten 1:20 000 und 1:50 000 beruhen auf alten geodätischen Grundlagen und teilweise auf Polyederprojektionen. Diese Karten unterscheiden sich von den mit neuen geodätischen Grundlagen hergestellten Karten durch einen etwas anderen Blattschnitt.

Bis zum Jahre 1914 wurden in Frankreich alle trigonometrischen Berechnungen auf dem Ellipsoid ausgeführt und für die Festpunkte aller Ordnungen wurden geographische Koordinaten bestimmt. Ebene Koordinaten wurden, abgesehen von Katasterzwecken, nur für die Kartenherstellung an Hand der alten Tafeln von Plessis ermittelt. Eine Ausnahme bildet eine Maßnahme der Artillerie, die im Jahre 1903 eine leicht aus geographischen Koordinaten zu berechnende Projektion einführt. Diese ebene Abbildung war mit großen Verzerrungen behaftet und nur in einem Gebiet von 30 km Ausdehnung anwendbar.

Zu Beginn des ersten Weltkrieges wurden im französischen Heer Vermessungsgruppen „Groupes de Canevas de Tir“ gebildet, denen die Aufgabe gestellt wurde die vorhandenen trigonometrischen Netze der I. G. zu verdichten, um ein den Bedürfnissen der Artillerie genügendes Festpunktnetz zu schaffen. Man beabsichtigte von Anfang an die Anfertigung einer mit einheitlichem Gitter versehenen genauen Schießkarte. Für die neu bestimmten Festpunkte wurden zunächst ausschließlich geographische Koordinaten berechnet. Erst Ende 1914, als es galt, die Festpunkte der Artillerie nutzbar zu machen, befaßte man sich mit der Frage nach einer geeigneten Abbildung des Ellipsoides in die Ebene. Der naheliegende Gedanke die Bonnesche Projektion, für die Projektionstafeln zur Verfügung standen, anzuwenden, wurde nach einigen Versuchen verworfen, da die mit ihr verbundenen Längen- und Winkelverzerrungen im Frontgebiet für artilleristische Zwecke unzulässige Beträge erreichten. Bei St. Dié beträgt die Winkelverzerrung der Bonneschen Projektion im Maximalfalle 21 Neuminuten und die Längenverzerrung erreicht 17 cm/100 m. Da man die Projektionstafeln als auf einen beliebigen Ausgangsmeridian bezogen betrachten kann, entschloß man sich vorübergehend zur Anwendung mehrerer Bonnescher Koordinatensysteme, die auf 2° breite Meridianstreifen beschränkt wurden. Wenn auch die Verzerrungen dieser Systeme gerade noch als tragbar erschienen, so wurden sie hauptsächlich deshalb abgelehnt, weil sie die Front in eine Anzahl von Koordinatensystemen zerschnitten.

Nach mehreren weiteren Vorschlägen und Versuchen wurde im Juni 1915 auf Vorschlag von Roussilhe und Laborde und auf Empfehlung von Driencourt eine Lambertsche Abbildung eingeführt.

Der Mittelparallelkreis hat die Breite 55° und der Mittelmeridian die Länge 6° ostwärts Paris. Diese Lambertsche Abbildung beruht auf alten geodätischen Grundlagen und damit auf dem Ellipsoid von Plessis. Die Projektion wurde später Lambert Nord de Guerre genannt. Da sie unter dem Druck der Verhältnisse eingeführt wurde, ist die Aufgabe der strengen Konformität zugunsten einfacherer Rechenformeln erklärlich. Noch im Jahre 1915 erschien eine Projektionstafel, die von 10 zu 10 Breiten- und Längenminuten die Lambertschen Koordinaten und die zur Interpolation beliebiger geographischer Koordinaten benötigten Differenzen enthält. Die Tafel wurde 1918 von den Amerikanern nachgedruckt und ist als Deetzsche Tafel bei der deutschen Heeresvermessung in Gebrauch.

Als nach dem Weltkriege eine Projektion für die ebene Koordinierung der neuen Triangulation und für die neuen großmaßstäblichen Kartenwerke gewählt werden mußte, war es naheliegend, die Kriegserfahrungen und die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen namhafter Geodäten auszunutzen und die Lambertsche Abbildung beizubehalten. Für Frankreich wurden im Jahre 1920 drei sich auf das Clarkesche Ellipsoid beziehende Lambert-Projektionen eingeführt. Ebenso wurden für die französischen Kolonien Lambertsche Abbildungen gewählt. Die Projektionen wurden durch Berechnung von Projektionstafeln und von Hilfstafeln aller Art weitgehendst ausgebaut und der praktischen Anwendung angepaßt. Allerdings verzichtete man auch bei den neuen Projektionen auf strenge Konformität der Abbildung.

Um die auf alten geodätischen Grundlagen beruhenden Triangulationsergebnisse und Karten im Zusammenhang mit der neuen Triangulation und mit den auf den neuen Grundlagen aufgebauten Karten verwenden zu können, berechnete der S. G. A. eine Tafel, die für geographische Längen und Breiten von $0,2$ zu $0,2$ Neugrad die an den alten geographischen Koordinaten anzubringenden Verbesserungen enthält. Für kartographische Zwecke wurde eine zweite Tafel aufgestellt, in der die entsprechenden Werte ausgedrückt in Lambertschen Koordinaten angegeben sind.

Da das Koordinatensystem Nord de Guerre auf alten geodätischen Grundlagen beruht, mußte umgekehrt auch eine Angleichung der neuen an die alte Triangulation erfolgen, wenn die zahlreichen auf dem System Nord de Guerre begründeten Vermessungsunterlagen solange beibehalten werden sollten, bis sie vollständig durch die Ergebnisse der neuen Triangulation abgelöst werden konnten. Dieser Fall trat in Frankreich ein, als man in der Mitte der dreißiger Jahre mit den Vorbereitungen zu einem neuen Kriege begann. Alle Vermessungsergebnisse des Weltkrieges wurden behelfsmäßig beibehalten und es fand eine Umrechnung der neuen Triangulationsergebnisse in das System Nord de Guerre statt. Ferner erhielten in Nord- und Ostfrankreich auch die Karten neuer geodätischer Grundlagen Gitternetze der Zone Nord de Guerre. Für die Umrechnung der Koordinaten des Systems Lambert I Zone Nord in das System Nord de Guerre wurde eine Tafel berechnet, welche nach einigen Versuchen im Jahre 1937 in endgültiger Form eingeführt wurde. Diese „Table Générale de Transformation des coordonnées Lambert I Zone Nord en coordonnées Nord de Guerre 1937“ wurde unter Verwendung der Koordinaten von Punkten I. Ordnung, die in der alten und neuen Triangulation gegeben sind, aufgestellt. Sie gibt von 10 zu 10 km der Rechts- und Hochwerte des Systems Lambert I die entsprechenden Nord-de-Guerre-Koordinaten, sowie die zur Interpolation benötigten Differenzen.

Die der deutschen Heeresvermessung während und nach Abschluß des Westfeldzuges für ihre Zwecke zur Verfügung stehenden Unterlagen waren vor allem in Nord- und Ostfrankreich in Form und Wertigkeit sehr verschieden. In den übrigen Teilen Frankreichs, in denen die neue Triangulation und die Herstellung neuer Karten noch nicht begonnen oder beendet waren, lag dagegen nur sehr dürftiges Material vor. Die deutsche Heeresvermessung mußte deshalb in doppeltem Sinne arbeiten. Einmal mußten vordringliche Arbeiten auf den uneinheitlichen und größtenteils ungenauen vorhandenen Unterlagen aufgebaut werden. Andererseits mußten alle nur möglichen Mittel zur Verbesserung der Grundlagen und zum Aufbau einheitlicher Festpunktnetze, sowie zur Schaffung eines geeigneten Kartenwerkes aufgewandt werden.

II. Die Bonnesche Projektion

1. Die Abbildungsgleichungen

Als Projektion der Generalstabkarte von Frankreich wurde, wie bereits erwähnt, die flächentreue, normale, unechte Kegelprojektion mit längentreuen konzentrischen Parallelkreisbildern und

längentreuem geradlinigen Mittelmeridian von Bonne eingeführt. Der Projektion wurde das modifizierte Ellipsoid von Plessis, das kurz Ellipsoid von Plessis genannt wird, zugrunde gelegt.

Mittelmeridian der Abbildung ist der Meridian von Paris und der Mittelparallelkreis hat die Breite $B_0 = 50^\circ$.

Die Abbildungsgleichungen lassen sich an Hand der Abbildung 1 ableiten.

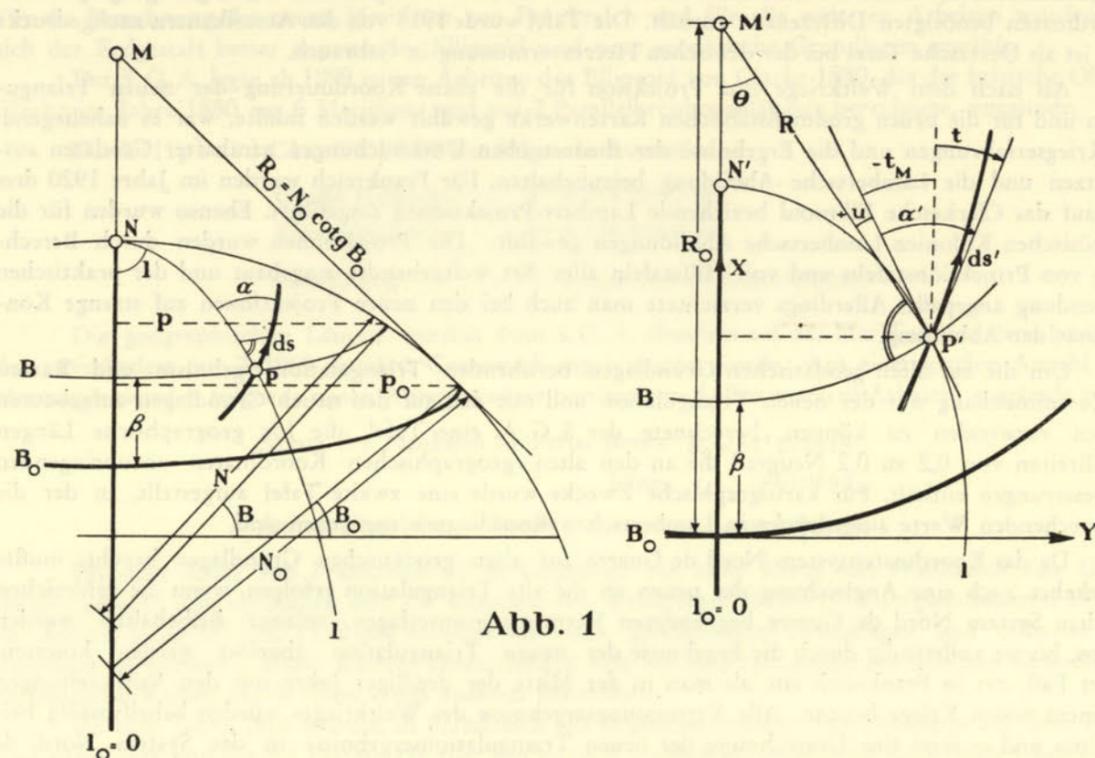


Abb. 1

Rechts- oder Y-Achse ist die nach Osten positiv gezählte Tangente an das Bild des Mittelparallels in seinem Schnittpunkt mit dem geradlinigen Bild des Mittelmeridians. Hoch- oder X-Achse des ebenen Koordinatensystems ist das nach Norden positiv gezählte Bild des Mittelmeridians.

Bei der Bonneschen Projektion ist der Radius R_0 des Bildes des Mittelparallels gleich der Länge der Erzeugenden des das Ellipsoid längs des Mittelparallels berührenden Kegels.

Aus Abb. 1 liest man ab:

$$R_0 = N_0 \cotg B_0 \dots \dots \dots (1)$$

Abgesehen vom Mittelmeridian werden die Meridiane als gekrümmte Linien abgebildet. Die Bilder der Meridiane und Parallelkreise schneiden sich, wie noch bewiesen wird, nur im Mittelparallel und im Mittelmeridian rechtwinklig, im übrigen schiefwinklig.

Der gemeinsame Mittelpunkt M' der Parallelkreisbilder wird für die Ableitung der Abbildungsgleichungen als Ausgangspunkt von Polarkoordinaten Θ und R gewählt. Ein beliebiger Punkt P der Erde mit den geographischen Koordinaten B und l , wobei l auf den Nullmeridian bezogen und nach Osten positiv gezählt wird, wird bei der Bonneschen Projektion als Punkt P' abgebildet. Seine rechtwinkligen Koordinaten Y, X sind nach Abb. 1:

$$\left. \begin{aligned} Y &= R \sin \Theta \\ X &= R_0 - R \cos \Theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Da der Mittelmeridian längentreu abgebildet wird, ergibt sich für R der Ausdruck:

$$R = R_0 - \beta, \dots \dots \dots (3)$$

wobei β die Meridianbogenlänge zwischen den Breiten B_0 und B bedeutet.

Mit der Gl. (3) ergibt sich für Gl. (2):

$$\left. \begin{aligned} Y &= R \sin \Theta \\ X &= \beta + Y \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2')$$

Für die Meridianbogenlänge β als Funktion des Breitenunterschiedes $\Delta B = B - B_0$ besteht nach Jordan-Eggert, III. Band, 1. Halbband 1939, Seite 269, die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= M \Delta B + \frac{3}{2} \frac{M}{V^2} \eta^2 t \Delta B^2 + \frac{M}{2 V^4} \eta^2 (1 - t^2 + \eta^2 + 4 \eta^2 t^2) \Delta B^3 + \\ &+ \frac{M}{8 V^6} \eta^2 t (-4 + 7 \eta^2 - 15 \eta^2 t^2 + 11 \eta^4 + 20 \eta^4 t^2) \Delta B^4 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

In Gl. (4) beziehen sich sämtliche Koeffizienten auf die konstante Breite B_0 . Es bedeutet M den Meridiankrümmungshalbmesser, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$, $V^2 = 1 + \eta^2$ und $t = \operatorname{tg} B$.

Wegen der längentreuen Abbildung der Parallelkreise besteht für Θ folgende Beziehung:

$$l N \cos B = \Theta R,$$

oder mit der Beziehung $N \cos B = p$ für den Parallelkreishalbmesser des Ellipsoides

$$\Theta = \frac{p}{R} \cdot l \dots \dots \dots (5)$$

Aus Gl. (5) sieht man, daß Θ dasselbe Vorzeichen wie l hat.

Mit Hilfe der Gl. (1) bis (5) ist die Umrechnung der geographischen in Bonnesche Koordinaten möglich. Dabei ist es zweckmäßig, β und Θ zu tabellieren. Bevor auf die Aufstellung der Projektions tafeln eingegangen wird, sind noch weitere Beziehungen, die für die Kenntnis der Projektion wichtig sind und die für die folgenden Ableitungen benötigt werden, zu entwickeln.

2. Die Verzerrungen

Die Abbildung ist, allgemein gesehen, durch folgende Funktionen definiert:

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y(B, l) \\ X &= X(B, l) \end{aligned} \right\}$$

$Y(B, l)$ und $X(B, l)$ sind eindeutige und stetige Funktionen mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante.

Das Quadrat des Linienelementes der Abbildung ist:

$$ds'^2 = dY^2 + dX^2 = E dB^2 + 2F dB dl + G dl^2 \dots \dots \dots (6)$$

Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung E, F und G ergeben sich aus Gl. (6). Es ist:

$$\left. \begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial B} dB + \frac{\partial Y}{\partial l} dl \\ dX &= \frac{\partial X}{\partial B} dB + \frac{\partial X}{\partial l} dl \end{aligned} \right\}$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial Y}{\partial B} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial B} \right)^2 \\ F &= \frac{\partial Y}{\partial B} \frac{\partial Y}{\partial l} + \frac{\partial X}{\partial B} \frac{\partial X}{\partial l} \\ G &= \left(\frac{\partial Y}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial l} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

Da $\frac{\partial R}{\partial l} = 0$ ist, ergibt sich aus den Gleichungen (2):

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial R}{\partial B}\right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial B}\right)^2 \\ F &= R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial B} \frac{\partial \Theta}{\partial l} \\ G &= R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l}\right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Das Quadrat des Linienelementes einer geodätischen Linie des Ellipsoides ist ferner:

$$ds^2 = M^2 dB^2 + p^2 dl^2 \dots \dots \dots (8)$$

Somit ergibt sich das Quadrat des bei der Bonneschen Abbildung entstehenden Vergrößerungsverhältnisses zu:

$$m^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\left[\left(\frac{\partial R}{\partial B}\right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial B}\right)^2\right] dB^2 + 2R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial B} \frac{\partial \Theta}{\partial l} dB dl + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l}\right)^2 dl^2}{M^2 dB^2 + p^2 dl^2} \dots \dots \dots (9)$$

Aus den Gl. (5) und (3) folgen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial B} &= -M \\ \frac{\partial \Theta}{\partial B} &= \frac{l \cdot M}{R} \left(\frac{p}{R} - \sin B\right) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial l} &= \frac{p}{R} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Damit wird zunächst:

$$m^2 = \frac{M^2 \left[1 + l^2 \left(\frac{p}{R} - \sin B\right)^2\right] dB^2 + 2Mpl \left(\frac{p}{R} - \sin B\right) dB dl + p^2 dl^2}{M^2 dB^2 + p^2 dl^2} \dots \dots \dots (9')$$

Für das Azimut α der geodätischen Linie besteht die Beziehung (siehe Abb. 2):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p dl}{M dB} \dots \dots \dots (11)$$

Führt man mit Hilfe der Gl. (11) in den Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis das Azimut α der geodätischen Linie ein, so ergibt sich:

$$m^2 = \frac{1 + (\Theta - l \sin B + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \dots \dots \dots (12)$$

Bei der Bonneschen Projektion ist das Vergrößerungsverhältnis von der Richtung α abhängig. Das in der Richtung der Meridianbilder auftretende Vergrößerungsverhältnis, das mit h bezeichnet wird, erhält man, wenn man in (12) $\alpha = 0$ oder gleich π setzt. Man findet:

$$h = \sqrt{1 + (\Theta - l \sin B)^2} \dots \dots \dots (13)$$

Das in der Richtung der Parallelkreisbilder auftretende Vergrößerungsverhältnis k muß nach der Definition der Projektion gleich 1 sein. Wenn man in Gl. (12) Zähler und Nenner durch $\operatorname{tg}^2 \alpha$ dividiert und $\operatorname{cotg} \alpha$ gegen Null konvergieren läßt, findet man tatsächlich

$$k = 1 \dots \dots \dots (14)$$

Übrigens ergibt sich dieses Resultat auch aus den Beziehungen

$$h = \frac{\sqrt{E}}{M}, \quad k = \frac{\sqrt{G}}{p},$$

da nach Gl. (9')

$$E = M^2 [1 + (\Theta - l \sin B)^2]$$

und

$$G = p^2 \quad \text{ist.}$$

Nach einem Satz von Tissot besteht bei jeder eindeutigen Abbildung einer Fläche auf einer zweiten Affinität in einander entsprechenden unendlich kleinen Teilen. Dadurch geht ein unendlich kleiner Kreis der einen Fläche in eine unendlich kleine Ellipse der anderen Fläche, die Tissotsche Indikatrix, über. Nur bei konformen Abbildungen wird die Affinität im unendlich Kleinen eine Ähnlichkeit im unendlich Kleinen. Für jede nicht schon konforme Abbildung einer Fläche auf einer anderen Fläche gibt es ferner auf der Ausgangsfläche genau ein Netz von Orthogonaltrajektorien, das sich wieder als rechtwinkliges Netz abbildet. Man nennt dieses Netz das Hauptnetz der Abbildung und die Richtungen des Hauptnetzes werden Hauptrichtungen genannt. In den Hauptrichtungen der Abbildung erreicht das Vergrößerungsverhältnis seinen größten und kleinsten Wert. Die Achsen der Tissotschen Indikatrix fallen mit den Hauptrichtungen zusammen und die Längen ihrer Halbachsen a und b sind gleich dem Maximum und Minimum des Vergrößerungsverhältnisses.

Die Hauptrichtungen α_1 und α_2 der Bonneschen Projektion werden durch Differenzieren von m^2 nach $\operatorname{tg} \alpha$ und durch nachfolgendes Nullsetzen erhalten. Es ergibt sich

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha (\Theta - l \sin B) - 1 &= 0 \\ \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 &= -1 \\ \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 &= -(\Theta - l \sin B) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Wenn man die aus Gl. (15) berechneten Werte für $\operatorname{tg} \alpha_1$ und $\operatorname{tg} \alpha_2$ in die Gl. (12) einsetzt, erhält man die Ausdrücke für a und b in geschlossener Form.

Es wird nun gezeigt, daß die Bonnesche Projektion flächentreu ist. Die Flächenverzerrung einer Abbildung ist gleich dem Verhältnis der Flächeninhalte von zwei beliebigen sich auf beiden Flächen entsprechenden unendlich kleinen Flächenstücken dS' und dS .

Nimmt man auf dem Ellipsoid ein aus Meridianen und Parallelkreisen gebildetes unendlich kleines Rechteck, so ist sein Flächeninhalt

$$dS = p M dB dl$$

Bei der Bonneschen Projektion gehen die Linienelemente der Meridiane in $\sqrt{E} dB$ und der Parallelkreise wieder in $p \cdot dl$ über (siehe Abb. 2). Nach Abb. 1 bilden diese Elemente in der Projektion den Winkel $\frac{\pi}{2} \pm u$. Dadurch wird:

$$dS' = M \sqrt{1 + (\Theta - l \sin B)^2} p dB dl \cos u$$

Für die Flächenverzerrung folgt:

$$\sigma = \frac{dS'}{dS} = \sqrt{1 + (\Theta - l \sin B)^2} \cos u \dots \dots \dots (16)$$

Wenn die Abbildung flächentreu sein soll, muß in Gl. (16) $\sigma = 1$ werden. Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} u = \pm (\Theta - l \sin B) \dots \dots \dots (17)$$

Erst wenn das Ergebnis (17) durch unmittelbare Ableitung aus den Abbildungsgleichungen bestätigt ist, ist der Beweis erbracht, daß die Bonnesche Abbildung flächentreu ist.

Der Winkel u ist gleich der Abweichung des Schnittwinkels der Meridian- und Parallelkreisbilder von einem Rechten. Für die Bonnesche Projektion gilt:

$$\operatorname{tg} u = R \cdot \frac{d\Theta}{dR} = R \cdot \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial B}}{\frac{\partial R}{\partial B}} \dots \dots \dots (18)$$

Aus Gl. (18) folgt mit den Gl. (5) und (9'):

$$\operatorname{tg} u = -(\Theta - l \sin B)$$

Mit Gl. (17) läßt sich nun feststellen, wann sich Meridiane und Parallelkreise unter rechten Winkeln schneiden. Setzt man $\operatorname{tg} u = 0$, so folgt:

$$\Theta = l \sin B \dots \dots \dots (17')$$

Gl. (17') ist erfüllt, wenn Θ und damit l gleich Null oder wenn $B = B_0$ wird, d. h. im Mittelmeridian $l = 0$ und im Mittelparallel $B = B_0$.

Mit Gl. (17) ergibt sich für das Vergrößerungsverhältnis nach (12) noch folgende einfache Form:

$$m^2 = 1 + \frac{\operatorname{tg} u (\operatorname{tg} u - 2 \operatorname{tg} \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \dots \dots \dots (18)$$

Für jeden Punkt des Ellipsoides erleidet ein bestimmter Winkel eine maximale Verzerrung, die mit 2ω bezeichnet wird, und die sich mit Hilfe folgender Beziehungen berechnen läßt:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \omega &= -\frac{a-b}{2\sqrt{ab}} \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) &= \sqrt{\frac{b}{a}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

Für a und b bestehen noch folgende Ausdrücke:

$$a \cdot b = 1 \dots \dots \dots (20)$$

$$a^2 + b^2 + h^2 + k^2 = 2 + \operatorname{tg}^2 u \dots \dots \dots (21)$$

Aus den Gl. (19) und (20) folgt zunächst:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{a-b}{2}$$

Aus den Gl. (20) und (21) ergibt sich ferner:

$$a-b = \pm \operatorname{tg} u \dots \dots \dots (22)$$

Damit erhält man für ω die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \omega = \mp \frac{1}{2} \operatorname{tg} u \dots \dots \dots (23)$$

und

$$a+b = \pm \frac{2}{\cos \omega} \dots \dots \dots (24)$$

Aus Gl. (13) ergibt sich noch mit (17):

$$h = \frac{1}{\cos u} \dots \dots \dots (13')$$

Bei der Berechnung der Projektionsverzerrungen ist in den Gl. (22), (23) und (24) das obere Vorzeichen anzuhalten, dagegen gilt in Gl. (17) das untere Vorzeichen. u ändert sein Vorzeichen beim Übergang des betrachteten Punktes über den Mittelparallel und über den Mittelmeridian.

Als Beispiel werden die größten Verzerrungen der französischen Bonneschen Projektion im Punkt $B = 54^{\circ}50'$ und $l = + 6^{\circ}$ berechnet.

Zunächst ermittelt man nach Gl. (5)

$$\Theta = + 4^{\circ}23'15.42''$$

und nach Gl. (17)

$$u = + 0^{\circ}3'00.120''$$

Mit Hilfe der Gl. (23) findet man

$$2\omega = - 0^{\circ}3'00.2''$$

und mit den Gl. (22) und (24)

$$\begin{aligned} a &= 1 + 0,002360 \\ b &= 1 - 0,002355. \end{aligned}$$

Die größte Winkelverzerrung beträgt also in diesem extrem gewählten Falle 30° und die größte Längenverzerrung 2,36 m auf 1 km.

Für Θ , $\operatorname{tg} u$, a und b werden nun noch Reihenentwicklungen, welche diese Größen unmittelbar als Funktionen der geographischen Koordinaten angeben, abgeleitet.

Es ist

$$\Theta = l \cdot \frac{p}{R} \dots \dots \dots (5)$$

Durch Reihenentwicklung an der Stelle $B=B_0$ ergibt sich bis zu Gliedern 3. Ordnung für

$\frac{p}{R}$:

$$\frac{p}{R} = \sin B_0 \left\{ 1 - \frac{\Delta B^2}{2V_0^2} - \frac{t_0}{3V_0^6} (1 + 2\gamma_0^2 + \dots) \Delta B^3 \right\} \dots \dots \dots (25)$$

Damit wird

$$\Theta = l \sin B_0 - \frac{\sin B_0}{2V_0^2} \Delta B^2 l - \frac{\sin B_0 t_0}{3V_0^6} (1 + 2\gamma_0^2) \Delta B^3 l \dots \dots \dots (26)$$

Ferner ist:

$$l \sin B = Bl \left(\sin B_0 + \cos B_0 \Delta B - \sin B_0 \frac{\Delta B^2}{2} - \cos B_0 \frac{\Delta B^3}{6} \right)$$

Aus der letzten Gleichung mit (17) und unter Berücksichtigung von Gl. (26) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} u = + \cos B_0 \Delta B l - \sin B_0 (\gamma_0^2 - \gamma_0^4) \frac{\Delta B^2 l}{2} - \cos B_0 (1 - 2t_0^2 + 2\gamma_0^2 t_0^2) \frac{\Delta B^3 l}{6} \dots \dots \dots (27)$$

Zur Berechnung von a und b wird von den Gl. (22) und (24) Gebrauch gemacht. Es ist

$$\begin{aligned} a-b &= \operatorname{tg} u \\ a+b &= 2 \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 u}{4}} \end{aligned}$$

Da $\operatorname{tg} u$ kleine Werte annimmt, folgt:

$$a+b = 2 + \frac{\operatorname{tg}^2 u}{4} - \frac{\operatorname{tg}^4 u}{16} = 2 + \frac{\cos^2 B_0}{4} \Delta B^2 l^2 \dots \dots \dots (28)$$

Wegen der Identität von Gl. (27) mit $a-b$ folgt durch Addition und Subtraktion von Gl. (27) und (28):

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \frac{\cos B_0}{2} \Delta B l - \frac{\sin B_0}{4} (\gamma_0^2 - \gamma_0^4) \Delta B^2 l - \frac{\cos B_0}{12} (1 - 2t_0^2 + 2\gamma_0^2 t_0^2) \Delta B^3 l + \frac{\cos^2 B_0}{8} \Delta B^2 l^2 \\ b &= 1 - \frac{\cos B_0}{2} \Delta B l + \frac{\sin B_0}{4} (\gamma_0^2 - \gamma_0^4) \Delta B^2 l + \frac{\cos B_0}{12} (1 - 2t_0^2 + 2\gamma_0^2 t_0^2) \Delta B^3 l + \frac{\cos^2 B_0}{8} \Delta B^2 l^2 \end{aligned} \right\} (29)$$

Bei der Anwendung der Bonneschen Projektion wird die Verzerrung des Azimutes α , das in den Winkel α' übergeht, benötigt. Nach Abb. 1 ist die Meridiankonvergenz t_M

$$-t_M = \Theta - u \dots \dots \dots (30)$$

Abb. 2 zeigt ein auf dem Ellipsoid und in der Ebene sich entsprechendes, von Elementen des Meridians, des Parallelkreises und einer geodätischen Linie begrenztes, also in Wirklichkeit unendlich kleines Dreieck.

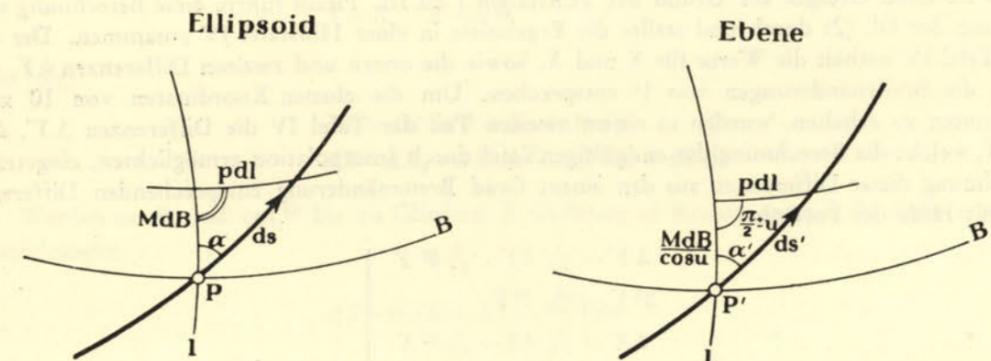


Abb. 2

Nach den Gl. (5), (11) und (17) ist:

$$ds' = M dB \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} u)^2} \dots \dots \dots (31)$$

Da der Winkel zwischen Meridian- und Parallelkreisbild gleich $\frac{\pi}{2} \pm u$ ist und die Elemente $M dB$ und $p dl$ des Ellipsoides sich als $\frac{M dB}{\cos u}$ und $p dl$ abbilden, folgt nach Abb. 2:

$$\sin \alpha' = \cos u \frac{p dl}{ds'} = \frac{\cos u \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} u)^2}} \dots \dots \dots (32)$$

Durch eine Reihenentwicklung der Gl. (32) ergibt sich:

$$\alpha' = \alpha - u \sin^2 \alpha - \frac{u^2}{2} \sin 2\alpha \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (33)$$

Der ebene Richtungswinkel t der Seite s' ist nach Abb. 1:

$$t = \alpha' + t_M = \alpha' - \theta + u$$

Mit Gl. (33) ergibt sich der von den Ingenieur-Geographen zur Berechnung ebener Richtungswinkel aus den Azimuten angewandte Ausdruck:

$$t = \alpha - \theta + u \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (34)$$

Als Entfernungsreduktion leitete Puissant die Beziehung ab:

$$s' - s = s \left(-\frac{u}{2} \sin 2\alpha + \frac{u^2}{4} \sin^2 2\alpha + \frac{u^2}{2} \cos^4 \alpha \right) \dots \dots \dots (34')$$

3. Die Projektionstafeln von Plessis

Im 1. und 2. Abschnitt wurden die Formeln entwickelt, die für die Anwendung der Bonneschen Projektion im französischen Vermessungswesen in Betracht kamen. Die Umrechnung geographischer Koordinaten in Bonnesche und umgekehrt erfolgte mit Hilfe der Projektionstafeln von Plessis und der von Puissant berechneten Korrektortafel.

Zwecks Berechnung der Projektionstafeln wurden zunächst in einer Hilfstafel I die Meridianbögen β , bezogen auf den Mittelparallel $B_0 = 50^\circ$ und die Radien R , die nach Gl. (3) berechnet wurden, von Neugrad zu Neugrad zusammengestellt. Für die Berechnung der Meridianbogenlängen β benützte Plessis folgende Beziehung:

$$\beta = 100000 \Delta B \pm 28547^m,95 \sin^2 \Delta B - 13^m,334 \sin 4\Delta B \mp 0^m,031 \sin^2 3\Delta B \dots \dots \dots (35)$$

Die Hilfstafel I enthält ferner die ersten und zweiten Differenzen von β und R .

Eine Hilfstafel II enthält die Logarithmen der Querkrümmungshalbmesser N von Grad zu Grad.

Die Hilfstafel III enthält die nach Gl. (5) berechneten Winkel für geographische Längen und Breiten von Grad zu Grad.

Die Berechnung der ebenen Koordinaten der Schnittpunkte der Meridiane und Parallelkreise von Grad zu Grad erfolgte auf Grund der Hilfstafeln I bis III. Plessis führte diese Berechnung unter Verwendung der Gl. (2) durch und stellte die Ergebnisse in einer Hilfstafel IV zusammen. Der erste Teil der Tafel IV enthält die Werte für Y und X , sowie die ersten und zweiten Differenzen δY , $\delta^2 Y$, δX , $\delta^2 X$, die Breitenänderungen von 1° entsprechen. Um die ebenen Koordinaten von 10 zu 10 Breitenminuten zu erhalten, wurden in einem zweiten Teil der Tafel IV die Differenzen $\Delta Y'$, $\Delta^2 Y$, $\Delta X'$, $\Delta^2 X$, welche die Berechnung der endgültigen Tafel durch Interpolation ermöglichten, eingetragen. Die Berechnung dieser Differenzen aus den einem Grad Breitenänderung entsprechenden Differenzen erfolgte mit Hilfe der Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y' &= \frac{1}{10} \delta Y - \frac{9}{20} \delta^2 Y \\ \Delta^2 Y &= \frac{1}{100} \delta^2 Y \\ \Delta X' &= \frac{1}{10} \delta X - \frac{9}{20} \delta^2 X \\ \Delta^2 X &= \frac{1}{100} \delta^2 X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte der Meridiane und Parallelkreise von 10 zu 10 Minuten Y_i , X_i wurden nach den Formeln berechnet:

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= Y + i \Delta Y' + (i-1) \frac{i}{2} \Delta^2 Y \\ X_i &= X + i \Delta X' + (i-1) \frac{i}{2} \Delta^2 X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

Entsprechend den Differenzen $\Delta Y'$, $\Delta X'$ wurden Differenzen ΔY , ΔX , die einer Längenänderung von 10 Minuten für konstante Breite entsprechen, ermittelt.

Die endgültigen Projektionstafeln von Plessis enthalten von 10 zu 10 Breiten- und Längenminuten die Bonneschen Koordinaten Y , X und die Differenzen ΔY , ΔX , $\Delta Y'$, $\Delta X'$, $\Delta^2 Y$ und $\Delta^2 X$. Die Tafeln dienen auch der Umrechnung beliebiger geographischer Koordinaten B und l . Sind B_a und l_a die in der Tafel enthaltenen nächst niederen runden 10 Neuminuten der geographischen Koordinaten, denen in der Tafel die Werte Y_a und X_a entsprechen, so werden die Koordinaten Y und X mit folgenden Interpolationsformeln gefunden:

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y_a + n \Delta Y' + n' \Delta Y + n n' \Delta^2 Y \\ X &= X_a + n \Delta X' + n' \Delta X + n n' \Delta^2 X \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

n und n' haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} B &= B_a + n \\ l &= l_a + n' \end{aligned}$$

$\Delta Y'$, $\Delta X'$ sind die ersten Differenzen von Y und X für Breitenänderungen von 10 Minuten, ΔY , ΔX die ersten Differenzen von Y und X für Längenänderungen von 10 Minuten und $\Delta^2 Y$, $\Delta^2 X$ die Änderungen von ΔY und ΔX für Breitenänderungen von 10 Minuten bzw. von $\Delta Y'$ und $\Delta X'$ für Längenänderungen von 10 Minuten. Alle angegebenen Differenzen sind in den Tafeln von Plessis enthalten.

Das umgekehrte Problem, aus ebenen Koordinaten geographische zu ermitteln, wurde ebenfalls mit Hilfe der Projektionstafeln gelöst. In den Gl. (38) sind in diesem Falle n und n' die Unbekannten, während alle übrigen Größen durch Aufsuchen von Y_a , X_a aus den Tafeln ermittelt werden. Unter Vernachlässigung der Glieder mit $n n'$ wurde die Aufgabe somit auf die Auflösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückgeführt.

Die Tafeln von Plessis wurden für eine Ellipsoidabplattung von 1:335 aufgestellt. Um die Koordinatenverbesserungen dY und dX , die sich infolge des Überganges auf das Ellipsoid mit der Abplattung 1:308,64 ergeben, zu finden, entwickelte der Ingenieur-Geograph Puissant Differentialformeln, deren Ableitung folgendermaßen skizziert werden kann:

Nach Gl. (2) ist:

$$\begin{aligned} Y &= R \cdot \sin \theta \\ X &= R_0 - R \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} dY &= dR \sin \theta + R \cdot \cos \theta d\theta \\ dX &= dR_0 - dR \cos \theta + R \cdot \sin \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

Werden $\sin \theta$ und $\cos \theta$ bis zu Gliedern 2. Ordnung in Reihen entwickelt, dann ergeben sich die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} dY &= \theta dR + R \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) d\theta \\ dX &= dR_0 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) dR + R \theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Nun müssen dR_0 , dR und $d\theta$ als Funktionen der Abplattungsänderung $d\alpha$ entwickelt werden. Puissant ging dabei von den Beziehungen aus:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{2Q}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \\ \beta &= \frac{2Q}{\pi} (\Delta B + \frac{3}{2}\alpha \sin^2 \Delta B) \\ R &= R_0 - \beta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

worin Q die Länge des Meridianquadranten bedeutet. Es folgen:

$$\left. \begin{aligned} dR_0 &= \frac{2Q}{\pi} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \approx \frac{2Q}{\pi} d\alpha \\ d\beta &= \frac{3Q}{\pi} \sin^2 \Delta B d\alpha \\ dR &= \frac{2Q}{\pi} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \Delta B\right) d\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

Um einen Ausdruck für $d\theta$ zu finden, wird von der Gl. (5) ausgegangen:

Mit

$$\theta = \frac{l \cdot p}{R}$$

folgt:

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{l}{R^2} \left(R \frac{dp}{d\alpha} - p \frac{dR}{d\alpha} \right)$$

Für $\frac{dp}{d\alpha}$ fand Puissant den Ausdruck:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{\theta}{400} (3 \cos B - \cos 3B)$$

und für $R d\theta$ ergibt sich nun

$$R d\theta = \frac{Q}{400} d\alpha (3 \cos B - \cos 3B) l - \frac{Q}{100} \theta d\alpha + \frac{3Q}{200} \theta \sin^2 \Delta B d\alpha \dots \dots \dots (43)$$

Setzt man die gefundenen Beziehungen in die Gl. (40) ein, so ergeben sich die gesuchten Differentialformeln. Für $d\alpha = + 0,000 261$ folgen:

$$\left. \begin{aligned} dY &= 26m \theta + (18ml - 26m \theta) \cos \theta \\ dX &= \pm 0,6m \Delta B^2 \pm 0,28m \theta l \mp 0,2m \theta^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

In Gl. (44) sind θ , l und ΔB in Einheiten von Neugraden einzusetzen.

Zur Erleichterung der Berechnungen im Bonneschen System wurden noch folgende Tafeln berechnet:

Eine Tafel, die $\log N$, und eine, die $\log e^2 \cos^2 B$ von 10 zu 10 Minuten angibt. Ferner eine Tafel, die θ und u von 10 zu 10 Breitenminuten für einen Grad geographischer Länge enthält.

Da nach den Gl. (5) und (17) der Winkel θ und $\operatorname{tg} u$ proportional den geographischen Längen sind, müssen die der zuletzt genannten Tafel entnommenen Werte mit der geographischen Länge multipliziert werden, um mit ausreichender Genauigkeit θ und u zu erhalten.

4. Kartierung der Festpunkte

Zwecks Kartierung in den Aufnahmeblättern 1:10 000 zur Karte 1:80 000 wurden nur die Punkte I. Ordnung mit Hilfe der Tafeln von Plessis vom Ellipsoid in die Projektionsebene umgerechnet. Die ebenen Koordinaten der Punkte II. und niederer Ordnung wurden ausgehend von den Koordinaten der trigonometrischen Punkte I. Ordnung mit Richtungswinkeln und Entfernungen durch Anhängen

berechnet. Für die Berechnung der Richtungswinkel wurde die Gleichung (34) benutzt. Die Azimute und die Längen der von jedem Punkt I. Ordnung ausgehenden Dreiecksseiten aller Ordnungen waren aus der ellipsoidischen Berechnung der Dreiecksnetze bekannt. Die Winkel θ und u wurden den Tafeln entnommen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wurden sämtliche trigonometrischen Punkte II. und niederer Ordnung durch ebenes Anhängen koordiniert.

Das Verfahren setzt voraus, daß innerhalb einer Dreiecksseite I. Ordnung die Meridianbilder als parallel bzw. als konstant betrachtet werden können. Bei großen Entfernungen und in großem Abstand vom Projektionsmittelpunkt wurden beim Anhängen Längenreduktionen berücksichtigt.

Es ist anzunehmen, daß diese Methode eingeführt wurde, weil nur ein Exemplar der Projektionstafeln von Plessis vorhanden war.

III. Die Lambertsche Abbildung

1. Die Abbildungsfunktionen

Die Lambertsche Projektion ist die konforme, normale, echte Kegelprojektion, bei der die Meridiane als eine Schar in einem Punkt zusammenlaufender Geraden und die Parallelkreise als konzentrische Kreisbogen, die den Vereinigungspunkt der Meridianbilder als Mittelpunkt haben, abgebildet werden. Die Verzerrungseigenschaften der normalen, echten Kegelprojektionen werden durch das Halbmessergesetz für die Parallelkreisbilder und durch das Gesetz der Abbildung der geographischen Längen bestimmt. Das Halbmessergesetz und die Art der Längenabbildung bei der Lambertschen Abbildung werden zusammen mit den Abbildungsfunktionen auf funktionentheoretischem Wege abgeleitet.

Als X — oder Hochachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems wird das nach Norden positiv gezählte Bild des Mittelmeridians, als Y — oder Rechtsachse die nach Osten positiv gezählte Tangente an das Bild des Mittelparallels im Projektionsmittelpunkt gewählt.

Das Quadrat des Linienelementes einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid ist nach Gl. (8)

$$ds^2 = M^2 dB^2 + p^2 dl^2 \dots \dots \dots (8)$$

Damit das der geographischen Breite und Länge entsprechende Parameternetz zu einem Isothermennetz wird, muß an Stelle der geographischen Breite B die isometrische Breite q eingeführt werden.

Aus (8) folgt:

$$ds^2 = p^2 \left(\frac{M^2}{p^2} dB^2 + dl^2 \right)$$

Setzt man

$$\frac{M}{p} dB = dq \dots \dots \dots (45)$$

und integriert, so ergibt sich die bekannte Beziehung zwischen geographischer und isometrischer Breite

$$\left. \begin{aligned} q &= \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \right\} \\ \text{oder} \\ e^q &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^{\frac{e}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

Die Integrationskonstante von (46) ist gleich Null, weil für $B = 0$ auch $q = 0$ werden muß. Das durch isometrische Parameter ausgedrückte Linienelement nimmt damit die Form an

$$ds^2 = p^2 (dq^2 + dl^2) \dots \dots \dots (47)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} q + il &= \zeta \\ X + iY &= Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

so vermittelt jede analytische Funktion

$$Z=f(\zeta) \dots \dots \dots (49)$$

eine konforme Abbildung des Ellipsoides in der Ebene. Die einfachste dieser Abbildungen ist die Merkatorprojektion, deren Abbildungsfunktion lautet:

$$\bar{z}=q+il=\bar{x}+i\bar{y} \dots \dots \dots (50)$$

\bar{x} ist nach Norden und \bar{y} nach Osten positiv zu zählen. Bei der Merkatorprojektion gehen die Meridiane $l = \text{konst.}$ und die Parallelkreise $q = \text{konst.}$ in die zu den Koordinatenachsen parallelen Geradenscharen

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x}=q \\ \bar{y}=l \end{array} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

über.

Die Funktion, bei der die Geradenschar $\bar{x} = \text{konst.}$ in konzentrische Kreise und die Geradenschar $\bar{y} = \text{konst.}$ in die Radien dieser Kreise übergehen, ergibt sich nun nach der Theorie der konformen Abbildungen. Grundsätzlich ergibt die Exponentialfunktion die gewünschte Abbildung. Legt man vorübergehend den Koordinatennullpunkt in den Mittelpunkt der Parallelkreisbilder, so vermittelt die Funktion

$$\bar{z}=-k e^{-\bar{z}} \dots \dots \dots (52)$$

die Abbildung, bei der sich die Parallelkreise aber noch als Vollkreise abbilden. Durch Einführung von Polarkoordinaten r und φ folgt aus (52):

$$\bar{z}=-k e^{-\bar{z}}=r e^{+i\varphi}$$

Damit ergeben sich:

$$\left. \begin{array}{l} r=-k e^{-q} \\ \varphi=-l \end{array} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

Die Geraden $\bar{x} = q = \text{konst.}$, also die Parallelkreise des Ellipsoides, bilden sich als konzentrische Kreise ab und die Geraden $\bar{y} = l = \text{konst.}$ oder die Meridiane des Ellipsoides gehen bei der Abbildung in die Halbgeraden $\varphi = \text{konst.}$ über.

Die Abbildung (52) ist die normale stereographische Projektion bei der, wegen der Periodeneigenschaft der Exponentialfunktionen, der von den Geraden $\bar{y} = 0$ und $\bar{y} = 2\pi$ begrenzte Streifen der \bar{z} -Ebene auf die volle \bar{z} -Ebene abgebildet wird. Aus den Begrenzungsgeraden $\bar{y} = 0$ und $\bar{y} = 2\pi$ des Streifens wird bei der Abbildung die doppelt zählende reelle positive Achse. Da bei der Merkatorprojektion das ganze Ellipsoid auf den von den Geraden $\bar{y} = 0$ und $\bar{y} = 2\pi$ begrenzten Streifen der \bar{z} -Ebene abgebildet wird, bildet sich bei der stereographischen Projektion das ganze Ellipsoid auf der vollen \bar{z} -Ebene ab.

Durch die rationale Funktion

$$Z'=\bar{z}^n=R e^{i\Phi} \dots \dots \dots (54)$$

ergibt sich eine konforme Abbildung der \bar{z} -Ebene auf den Sektor $2\pi n$ der Z' -Ebene, wobei die konzentrischen Vollkreise $r = \text{konst.}$ in konzentrische Kreisbogen $R = \text{konstant}$ und die Halbgeraden $\varphi = \text{konstant}$ in Halbgeraden $\Phi = \text{konstant}$ übergehen. Aus Gl. (52) und (54) folgt:

$$Z'=-k e^{-n(q+il)}=R e^{i\Phi} \dots \dots \dots (55)$$

Die durch (55) vermittelte konforme Abbildung besitzt die Eigenschaften der Lambertschen Projektion, wobei der Koordinatennullpunkt mit dem Mittelpunkt der Parallelkreisbilder zusammenfällt.

Aus Gl. (55) ergeben sich:

$$\left. \begin{array}{l} R=-k e^{-nq} \\ \Phi=-nl=-\gamma \end{array} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

Die gegenseitige Lage der Koordinatensysteme $Z' = X' + iY'$ und $Z = X + iY$ geht aus Abbildung 3 hervor.

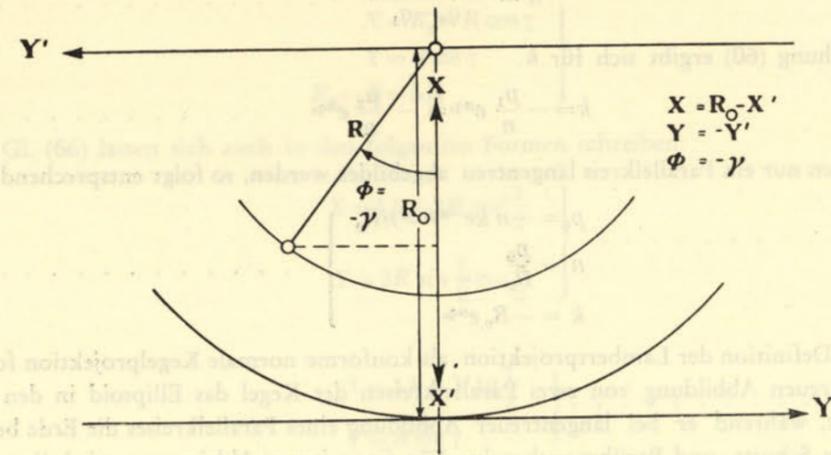


Abb. 3

Die Lambertschen Koordinaten X, Y ergeben sich nach Abbildung (3) aus den Koordinaten X', Y' mit Hilfe der Beziehungen:

$$\left. \begin{array}{l} X=R_0-X' \\ Y=-Y' \\ \gamma=-\Phi=nl \end{array} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

Die Konstanten k und n der durch Gl. (55) und (57) definierten Lambertschen Abbildung können nach verschiedenen Gesichtspunkten gewählt werden. Zunächst geht aus der letzten Gleichung (57) hervor, daß n ein reeller Proportionalitätsfaktor ist, der das Gesetz der Abbildung der geographischen Längen bestimmt. Bei der Lambertschen Abbildung werden demnach die geographischen Längen proportional abgebildet.

Aus der Gl. (55) folgt zunächst

$$Z=X'+iY'=-k e^{-nq} (\cos nl-i \sin nl) \dots \dots \dots (58)$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} X'=-k e^{-nq} \cos nl \\ Y'=+k e^{-nq} \sin nl \end{array} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Mit (59) sind die allgemeinen geschlossenen Abbildungsgleichungen der Lambertschen Abbildung gefunden, in denen mit Hilfe der Gl. (46) die isometrische Breite durch die geographische Breite ersetzt werden kann.

Über k und n wird zunächst so verfügt, daß zwei beliebige Parallelkreise in den Breiten B_1, B_2 längentreu abgebildet werden. Es ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi \cdot R_1 \\ p_2 \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi \cdot R_2 \end{array} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = n R_1 = -n k e^{-nq_1} \\ p_2 = n R_2 = -n k e^{-nq_2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

Daraus folgt durch Division

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{e^{-nq_1}}{e^{-nq_2}}$$

und durch Logarithmieren

$$n = \frac{\ln p_1 - \ln p_2}{q_2 - q_1} \dots \dots \dots (61)$$

Aus Gleichung (60) ergibt sich für k

$$k = -\frac{p_1}{n} e^{nq_1} = -\frac{p_2}{n} e^{nq_2} \dots \dots \dots (62)$$

Soll dagegen nur ein Parallelkreis längentreu abgebildet werden, so folgt entsprechend Gl. (60)

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= -n k e^{-nq_0} = n R_0 \\ n &= \frac{p_0}{R_0} \\ k &= -R_0 e^{nq_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

Nach der Definition der Lambertprojektion als konforme normale Kegelprojektion folgt, daß im Falle der längentreuen Abbildung von zwei Parallelkreisen der Kegel das Ellipsoid in den Breiten B_1 und B_2 schneidet, während er bei längentreuer Abbildung eines Parallelkreises die Erde berührt. Man spricht daher von Schnitt- und Berührungskegeln. Für die weiteren Ableitungen wird die geometrische Definition der Abbildung festgehalten. Die Abbildung 4 zeigt einen Querschnitt durch die Erde im Falle eines Berührungskegels und die ebene Abbildung. Die Bedeutung der Bezeichnungen geht aus der Abbildung 4 hervor.

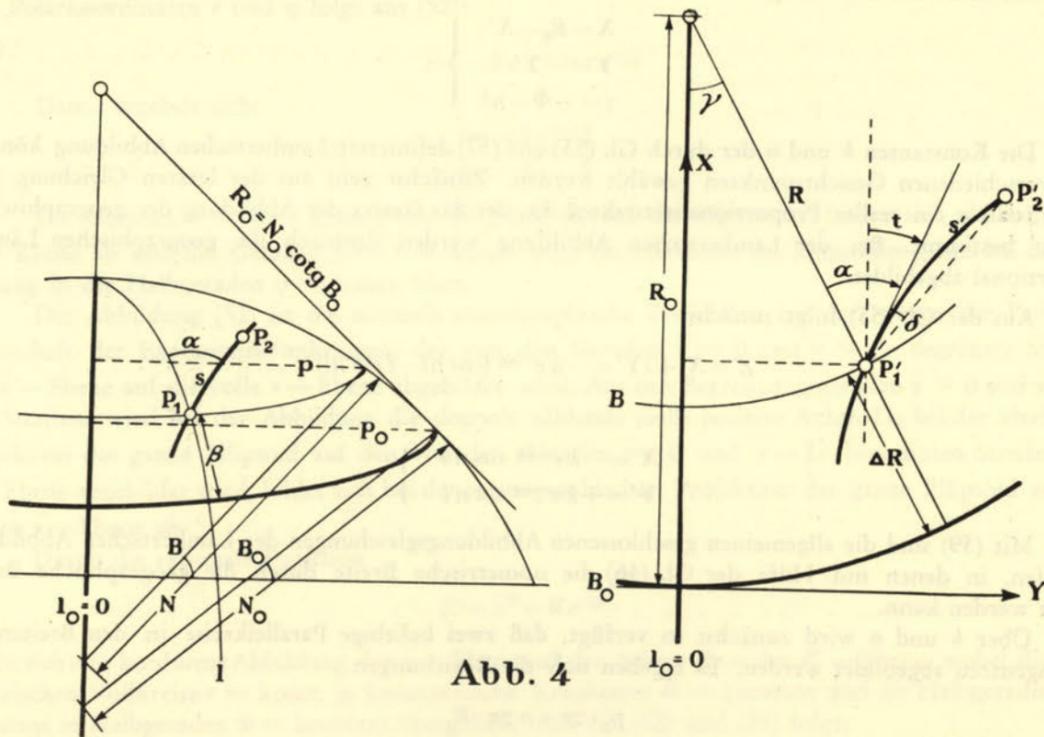


Abb. 4

Die Länge der Erzeugenden des Berührungskegels ist gleich $N_0 \cotg B_0$ und wegen der Abbildung des Berührungsparallels als längentreuer Kreisbogen ergibt sich

$$R_0 = N_0 \cotg B_0 \dots \dots \dots (64)$$

Damit folgt aus Gl. (63) und (57)

$$\left. \begin{aligned} n &= \sin B_0 \\ \gamma &= \sin B_0 \cdot l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

γ ist die Meridiankonvergenz der Abbildung. Für die Abbildungsfunktionen ergibt sich nach (56), (57), (59) und (65)

$$\left. \begin{aligned} X &= R_0 - R \cos \gamma \\ Y &= R \sin \gamma \\ R_0 - R &= \Delta R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66)$$

Die Gl. (66) lassen sich auch in den folgenden Formen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta R + 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ Y &= 2R \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66')$$

oder

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta R + Y \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ Y &= R \sin \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66'')$$

Mit Hilfe der Gleichung (65) und (66'') werden die Lambertschen aus den geographischen Koordinaten ermittelt, wenn eine Tafel zur Verfügung steht, die ΔR als Funktion der geographischen Breite angibt. Ferner werden 9-stellige Funktionstabellen für sinus und tangens benötigt. Für die umgekehrte Aufgabe, die geographischen Koordinaten aus den rechtwinkligen zu berechnen, dienen dieselben Formeln und Tafeln.

Es ist

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{Y}{R_0 - X} \\ l &= \frac{\gamma}{\sin B_0} \\ \Delta R &= X - Y \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

Für das Halbmessergesetz der Abbildung ergibt sich noch:

$$R = -k e^{-nq} = R_0 e^{-n(q-q_0)} = R_0 e^{-n\Delta q} \dots \dots \dots (68)$$

2. Entwicklung von ΔR als Funktion von β und von ΔB .

Die Entwicklung ergibt sich durch Reihenentwicklung von (68). Es ist

$$e^{-n\Delta q} = 1 - n\Delta q + \frac{n^2}{2} \Delta q^2 - \frac{n^3}{6} \Delta q^3 + \frac{n^4}{24} \Delta q^4 - \dots$$

und

$$R = R_0 \left\{ 1 - n\Delta q + \frac{n^2}{2} \Delta q^2 - \frac{n^3}{6} \Delta q^3 + \frac{n^4}{24} \Delta q^4 - \dots \right\} \dots \dots \dots (69)$$

Würde die aus (46) gewonnene Beziehung zwischen Δq und ΔB in (69) eingesetzt werden, so würde unmittelbar der Ausdruck für ΔR als Funktion von ΔB folgen. Im Hinblick auf die benötigte Beziehung zwischen ΔR und dem Meridianbogen β zwischen den Breiten B_0 und B muß ein anderer Weg beschritten werden.

Ein aus Parallelkreisen und Meridianen gebildetes unendlich kleines Viereck hat auf dem Ellipsoid und in der Ebene folgende Seitenlängen:

	Ellipsoid	Ebene
Meridian:	$d\beta = M dB$	$d\Delta R$
Parallelkreis:	$p dl$	$(R_0 - \Delta R) \sin B_0 dl$

Wegen der Konformität der Abbildung folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta R}{d\beta} &= \frac{(R_0 - \Delta R) \sin B_0}{N \cos B} = \frac{R \sin B_0}{N \cos B} \\ \frac{d\Delta R}{R} &= \frac{p_0}{R_0 p} d\beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

Ferner ist

$$dq = \frac{d\beta}{p} = \frac{d\beta}{N \cos B} \dots \dots \dots (71)$$

Zunächst wird $\frac{p_0}{p}$ in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{p_0}{p} = f(p) = f(p_0) + \frac{df}{d\beta}(p_0) \cdot \beta + \frac{d^2 f}{d\beta^2}(p_0) \frac{\beta^2}{2} + \frac{d^3 f}{d\beta^3}(p_0) \frac{\beta^3}{6} + \dots$$

Die Ableitungen sind an der Stelle p_0 zu nehmen.

Es wird

$$f(p_0) = 1 \text{ und } \frac{df}{d\beta} = \frac{df}{dB} \cdot \frac{dB}{d\beta} = -\frac{p_0}{p^2} \cdot \frac{dp}{dB} \cdot \frac{dB}{d\beta}$$

Mit

$$\frac{dB}{d\beta} = \frac{1}{M}$$

und

$$\frac{dp}{dB} = -M \sin B$$

folgt:

$$f' = \frac{df}{d\beta} = \frac{p_0}{p^2} \sin B; \quad \frac{df}{d\beta}(p_0) = \frac{\sin B_0}{p_0} = \frac{t_0}{N_0}$$

Ferner wird:

$$f'' = \frac{d^2 f}{d\beta^2} = \frac{df'}{d\beta} = \frac{df'}{dB} \cdot \frac{dB}{d\beta} = p_0 \frac{V^2 + 2t^2}{N^3 \cos B}$$

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2}(p_0) = \frac{1}{M_0 N_0} + \frac{2t_0^2}{N_0^2}$$

Die dritte Ableitung wird:

$$f''' = \frac{d^3 f}{d\beta^3} = \frac{df''}{d\beta} = \frac{df''}{dB} \cdot \frac{dB}{d\beta} = \frac{p_0 \operatorname{tg} B}{N^2 \cos B} \left(\frac{9}{MN} - \frac{4}{M^4} + \frac{6t^2}{N} \right)$$

$$\frac{d^3 f}{d\beta^3}(p_0) = \frac{t_0}{N_0} \left(\frac{9}{M_0 N_0} - \frac{4}{M_0^2} + \frac{6t_0^2}{N_0^2} \right) = \frac{5t_0 + 6t_0^3 + t_0 \gamma_0^2 - 4t_0 \gamma_0^4}{N_0^3}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{t_0}{N_0} \beta + \left(\frac{1}{M_0 N_0} + \frac{2t_0^2}{N_0^2} \right) \frac{\beta^2}{2} + \frac{t_0}{N_0} \left(\frac{9}{M_0 N_0} - \frac{4}{M_0^2} + \frac{6t_0^2}{N_0^2} \right) \frac{\beta^3}{6} + \dots \dots \dots (72)$$

Aus Gleichung (71) folgt mit Gl. (72):

$$dq = \frac{1}{p_0} \left\{ 1 + \frac{t_0}{N_0} \beta + \left(\frac{1}{M_0 N_0} + \frac{2t_0^2}{N_0^2} \right) \frac{\beta^2}{2} + \dots \right\} d\beta$$

Wird die zuletzt gefundene Gleichung integriert, so folgt

$$q - q_0 = \Delta q = \frac{1}{p_0} \left\{ \beta + \frac{t_0}{N_0} \frac{\beta^2}{2} + \left(\frac{1}{M_0 N_0} + \frac{2t_0^2}{N_0^2} \right) \frac{\beta^3}{6} + \frac{t_0}{N_0} \left(\frac{9}{M_0 N_0} - \frac{4}{M_0^2} + \frac{6t_0^2}{N_0^2} \right) \frac{\beta^4}{24} + \dots \right\} \dots \dots (73)$$

Wird Δq in Gl. (69) eingeführt, so erhält man die gesuchte Beziehung:

$$\Delta R = R_0 - R = \beta + \frac{1}{6M_0 N_0} \beta^3 + \frac{t_0}{24M_0 N_0^2} (1 - 4\gamma_0^2) \beta^4 + \dots \dots \dots (74)$$

Wird in (74) für β der Ausdruck (4) eingesetzt, so folgt der ferner gewünschte Ausdruck für ΔR als Funktion von ΔB . Es ist

$$\Delta R = M_0 \Delta B + \frac{3}{2} \frac{M_0 \gamma_0^2 t_0}{V_0^2} \Delta B^2 + \frac{M_0}{6V_0^4} (1 + 4\gamma_0^2 - 3\gamma_0^2 t_0 + 3\gamma_0^4 + 12\gamma_0^4 t_0^2) \Delta B^3 + \left. \dots \dots \dots (75) \right\}$$

$$+ \frac{M_0}{24V_0^6} (1 + 3\gamma_0^2 + 35\gamma_0^4 - 45\gamma_0^4 t_0^2) \Delta B^4$$

Nun können die rechtwinkligen Koordinaten x, y auch durch die geographischen Koordinaten $\Delta B, l$ ausgedrückt werden. Da $\gamma = \sin B_0 l$ ist, ergeben sich zunächst für $\sin \gamma$ und $\cos \gamma$ bis einschließlich der Glieder 4. Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \sin \gamma &= \sin B_0 l - \sin^3 B_0 \frac{l^3}{6} + \dots \\ \cos \gamma &= 1 - \sin^2 B_0 \frac{l^2}{2} + \sin^4 B_0 \frac{l^4}{24} - \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

Werden die Ergebnisse (75) und (76) in die Gleichung (66) eingeführt und werden in den Gliedern 3. Ordnung η_0^4 und in den Gliedern 4. Ordnung η_0^2 vernachlässigt, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} X &= M_0 \Delta B + \frac{3}{2} \frac{M_0 \gamma_0^2 t_0}{V_0^2} \Delta B^2 + \frac{N_0 t_0 \cos^2 B_0}{2} l^2 - \frac{M_0 \sin^2 B_0}{2} \Delta B l^2 + \\ &+ \frac{N_0}{6} (1 + \gamma_0^2 - 3\gamma_0^2 t_0^2) \Delta B^3 + \frac{N_0 t_0}{24} \Delta B^4 - \frac{N_0 t_0^3 \cos^4 B_0}{24} l^4 \\ Y &= N_0 \cos B_0 l - M_0 \sin B_0 \Delta B l - \frac{3}{2} \frac{N_0 \gamma_0^2 t_0^2 \cos B_0}{V_0^4} \Delta B^2 l - \\ &- \frac{N_0 t_0^2 \cos^3 B_0}{6} l^3 - \frac{N_0 \sin B_0}{6} \Delta B^3 l + \frac{N_0 \sin^3 B_0}{6} \Delta B l^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77)$$

Der Vollständigkeit halber werden noch die Formeln für die umgekehrte Berechnung angegeben:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \frac{1}{M_0} X - \frac{3}{2} \frac{\gamma_0^2 t_0}{N_0^2} V_0^2 X^2 - \frac{1}{2} \frac{t_0 V_0^2}{N_0^2} Y^2 - \frac{1}{2} \frac{t_0^2 V_0^2 (1 - 3\gamma_0^2)}{N_0^3} XY^2 - \\ &- \frac{1}{6} \frac{V_0^2 (1 + 4\gamma_0^2 - 3\gamma_0^2 t_0^2)}{N_0^3} X^3 - \frac{1}{4} \frac{t_0 (2t_0^2 - 1)}{N_0^4} X^2 Y^2 - \frac{1}{24} \frac{t_0}{N_0^4} X^4 + \frac{1}{8} \frac{t_0^3}{N_0^4} Y^4 \\ l &= \frac{1}{\cos B_0} \left\{ \frac{1}{N_0} Y + \frac{t_0}{N_0^2} XY + \frac{t_0^2}{N_0^2} X^2 Y - \frac{1}{3} \frac{t_0^2}{N_0^3} Y^3 + \frac{t_0^3}{N_0^4} X^3 Y - \frac{t_0^3}{N_0^4} X Y^3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78)$$

Die Gleichungen (77) und (78) finden sich in Jordan-Eggert, III. Band, 2. Halbband, Seite 211 bis 213.

3. Die Verzerrungen der Lambertschen Abbildung

a) Das Vergrößerungsverhältnis

Um die allgemeine Behandlung der Lambertprojektion zu vervollständigen, muß nun ein Studium der bei ihr auftretenden Verzerrungen stattfinden.

Die erste Gleichung (70) ist der Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung.

$$m = \frac{R \sin B_0}{p} \dots \dots \dots (79)$$

Man findet dieses Ergebnis bestätigt, wenn man m auf Grund seiner für konforme Abbildungen allgemein geltenden Formel

$$m = \frac{\left| \frac{dZ'}{d\xi} \right|}{p}$$

ermittelt. Aus Gl. (55) ergibt sich

$$\frac{dZ'}{d\xi} = k n e^{-n\xi} = -nZ', \quad \dots \quad (80)$$

und da der absolute Betrag von $Z' = R$ ist,

$$m = \frac{R \cdot \sin B_0}{p}$$

m hängt nur von der geographischen Breite ab, so daß die Parallelkreisbilder die Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses sind. Aus Gl. (70) und (74) folgt ferner:

$$m = \frac{d\Delta R}{d\beta} = 1 + \frac{1}{2M_0 N_0} \beta^2 + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{6M_0 N_0^2} \beta^3 + \dots \quad (81)$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für β als Funktion von ΔB nach Gl. (4) ergibt sich ferner:

$$m = 1 + \frac{1}{2V_0^2} \Delta B^2 + \frac{t_0(1+5\eta_0^2)}{6V_0^4} \Delta B^3 + \dots \quad (82)$$

Mit Hilfe der Gleichung (78) kann nun m auch als Funktion von X und Y ausgedrückt werden. Es folgt

$$m = 1 + \frac{X^2}{2N_0 M_0} + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{6N_0^2 M_0} X^3 - \frac{t_0}{2N_0^2 M_0} X Y^2 \quad \dots \quad (83)$$

b) Die Längenreduktion

Eine geodätische Linie von der Länge s bildet sich als gekrümmte Linie von der Länge s' ab. Für genaue ebene Berechnungen kann die Differenz

$$\delta s = s' - s$$

die als Längenreduktion bezeichnet wird, benötigt werden. s erhält man durch Integration. Es ist

$$s = \int_0^{s'} \frac{1}{m} ds'$$

Die Integration ergibt bekanntlich

$$s = \frac{s'}{6} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_2} \right) \quad \dots \quad (84)$$

m_1 , m_0 und m_2 bedeuten die Werte des Vergrößerungsverhältnisses im Anfangspunkt, der Mitte und dem Endpunkt der geodätischen Strecke.

Um einen für die Praxis brauchbaren Ausdruck für die Längenreduktion zu erhalten, wird $m = 1 + \delta m$ und $\frac{1}{m} = 1 - \delta m + \delta m^2$ gesetzt. Nach Gl. (83) ist δm von der 2. und 3. Ordnung, so daß δm^2 vernachlässigt werden kann. Unter Berücksichtigung, daß

$$X_0 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad Y_0 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

ist, findet man mit (83) und (84)

$$\frac{\delta s}{s'} = \frac{1}{6} (\delta m_1 + 4\delta m_0 + \delta m_2)$$

und

$$\frac{\delta s}{s'} = \frac{X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2}{6M_0 N_0} - \frac{t_0}{2M_0 N_0^2} X_0 Y_0^2 + \frac{t_0}{6N_0^3} X_0^3 \quad \dots \quad (85)$$

In den Gliedern 3. Ordnung von (85) sind die Koordinaten des Mittelpunktes von s' zu verwenden.

c) Die Richtungsreduktion

Die Richtungsreduktion δ (siehe Abb. 4) einer Dreiecksseite ist der spitze Winkel, den die Tangente an das im allgemeinen gekrümmte Bild der Dreiecksseite mit der Sekante nach dem Bild des Endpunktes der Seite im Anfangspunkt der Seite s' bildet. Die Richtungsreduktion ist die Größe, die an den gemessenen oder auf dem Ellipsoid berechneten Richtungen angebracht werden muß, um diese Winkel für die ebene Berechnung verwenden zu können. Sie ist im Anfangs- und Endpunkt einer geodätischen Strecke im allgemeinen verschieden.

Sind die Azimute der Dreiecksseiten bekannt, so lassen sich die Richtungsreduktionen der Lambertprojektion ohne weiteres angeben. Da die Azimute unverändert abgebildet werden, besteht für den ebenen Richtungswinkel t die Beziehung (siehe Abb. 4):

$$t = \alpha - \gamma + \delta$$

Bei bekanntem ebenen Richtungswinkel t und bei bekannter Meridiankonvergenz γ folgt für die Richtungsreduktion

$$\delta = \gamma + t - \alpha \quad \dots \quad (86)$$

Das Vorzeichen von δ erhält man ohne Schwierigkeit bei Berücksichtigung der Tatsache, daß das Bild einer Dreiecksseite seine hohle Seite stets gegen den Mittelparallel der Projektion wendet.

Da im allgemeinen das Azimut nicht bekannt ist, müssen für δ weitere Beziehungen aufgestellt werden.

Die Richtungsreduktion ist hauptsächlich von der Krümmung des ebenen Bildes einer geodätischen Linie abhängig. Bei konformen Abbildungen besteht für die Krümmung K die Beziehung:

$$k = \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dn} = \frac{d \ln m}{dn} \quad \dots \quad (87)$$

Das Zeichen dn bedeutet, daß die Differentiation in der Richtung der Normalen zum ebenen Bild der geodätischen Linie auszuführen ist (siehe Abb. 5).

Der französische Geodät Laborde hat bewiesen, daß für die Richtungsreduktion bei konformen Abbildungen der Ausdruck besteht:

$$\delta = \frac{\rho}{2} k_{1/3} \cdot s + \frac{\rho}{72} k'' s^3$$

Das die zweite Ableitung der Krümmung enthaltende 2. Glied kann immer vernachlässigt werden, wodurch folgt:

$$\delta = \frac{\rho}{2} k_{1/3} \cdot s \quad \dots \quad (88)$$

$K_{1/3}$ ist die Bildkrümmung im ersten Drittpunkt der Dreiecksseite, deren Länge s ist.

Zunächst wird die Richtungsreduktion als Funktion der rechtwinkligen Koordinaten entwickelt. Für das Vergrößerungsverhältnis m wird der durch Vernachlässigung von η_0 und durch Einführung der Beziehung $M_0 = N_0 = r_0 = \sqrt{M_0 N_0}$ vereinfachte Ausdruck (83) verwandt.

$$m = 1 + \frac{X^2}{2r_0^2} + \frac{t_0}{6r_0^3} X^3 - \frac{t_0}{2r_0^3} X Y^2 \quad \dots \quad (89)$$

Nach Abb. 5 läßt sich Gl. (87) umformen in

$$k = \frac{1}{m} \left\{ \frac{\partial m}{\partial X} \sin t - \frac{\partial m}{\partial Y} \cos t \right\} \quad \dots \quad (90)$$

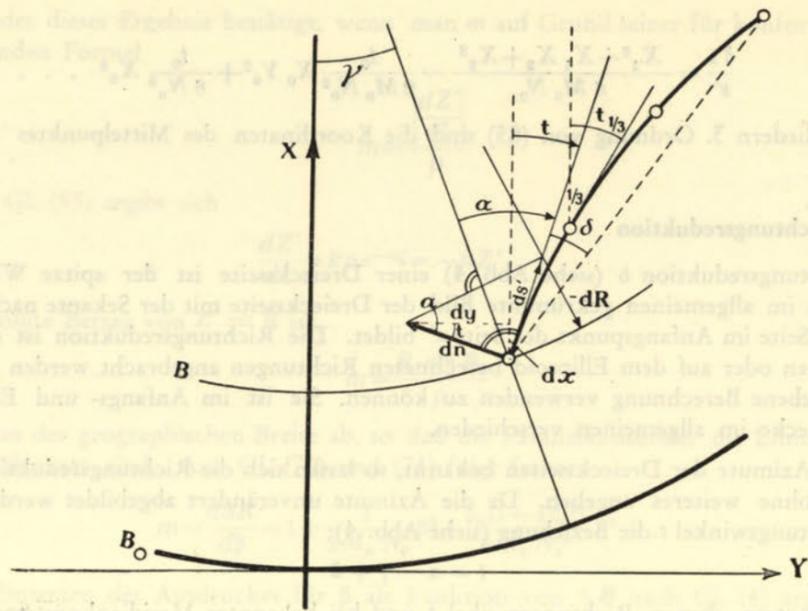


Abb. 5

Nach (89) ist ferner

$$\frac{\partial m}{\partial X} = \frac{X}{r_0^2} + \frac{t_0}{2r_0^3} (X^2 - Y^2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial Y} = -\frac{t_0}{r_0^3} XY$$

Mit Hilfe der Gleichung (88) folgt daher für Gl. (90):

$$\delta = \frac{\rho}{2 \cdot m_{1/3}} \left\{ \left[\frac{X}{r_0^2} + \frac{t_0}{2r_0^3} (X^2 - Y^2) \right] \sin t + \frac{t_0}{r_0^3} XY \cos t \right\} \cdot s \quad \dots \quad (91)$$

s wird in die Klammer genommen und es wird gesetzt:

$$s \cdot \sin t_{1/3} = \Delta Y^*$$

$$s \cdot \cos t_{1/3} = \Delta X^*$$

Der Richtungswinkel der Dreiecksseite im Drittelpunkt $t_{1/3}$ hat sich gegenüber dem Richtungswinkel im Anfangspunkt t um den Betrag Δt geändert. Bei Berücksichtigung von Δt ist

$$\Delta X^* = \Delta X - \Delta Y \frac{\Delta t}{\rho}$$

$$\Delta Y^* = \Delta Y + \Delta X \frac{\Delta t}{\rho}$$

Die Glieder mit Δt können im Rahmen der gewünschten Genauigkeit vernachlässigt werden. Ebenso darf ohne weiteres für $m_{1/3}$ gleich m gesetzt werden. Aus Gl. (91) erhält man daher:

$$\delta = \frac{\rho}{2r_0^2} \Delta Y \left(X + \frac{\Delta X}{3} \right) + \frac{\rho t_0}{4r_0^3} [2XY \Delta X + (X^2 - Y^2) \Delta Y] \quad \dots \quad (92)$$

Die Auswertung des Ausdrucks (92) erfolgt in dem für Maschinen- und Rechenschieberrechnung geeigneten Vordruck 1.

Laborde empfiehlt folgende Methode für die Ermittlung der Richtungsreduktion: Für das Vergrößerungsverhältnis m wird ein möglichst einfacher und guter Näherungswert m_a , der z. B. in Gl. (89) die Glieder 2. Ordnung umfaßt, angenommen. Der Zuschlag zu m_a ist ϵ , so daß

$$m = m_a + \epsilon$$

ist.

Berechnung der Richtungsreduktionen

L.I.

System Lambert Nord: Konstanten für $\varphi = 55^\circ$, $r = \text{Rechts} - 600\,000$, $h = \text{Hoch} - 200\,000$

Rechenformel: $\delta = \frac{(3h + \Delta h)\Delta r}{A} + \frac{rh \cdot \Delta h}{B} + \frac{(h^2 - r^2)\Delta r}{C} = t - T$

Konstanten: $A = \frac{6R^2}{\rho} = 3,838$ $B = \frac{2R^8}{\rho \cdot t_0} = 700$ $C = \frac{4R^8}{\rho \cdot t_0} = 1,395$

Rechengang: 1. Mit Doppelrechenmaschine

I Hebel links weiß		II Hebel links weiß		III Hebel links weiß	
A	(4) $(3h + \Delta h) \cdot 10^{-4}$ (4)	B	(4) $rh \cdot 10^{-8}$ (4)	C	(4) $(h^2 - r^2) \cdot 10^{-8}$ (4)
$\Delta r \cdot 10^{-4}$ (10) einkurbeln	I (10)	$\Delta h \cdot 10^{-4}$ (10) einkurbeln	II (10)	$\Delta r \cdot 10^{-4}$ (10) einkurbeln	III (10)

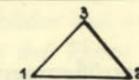
Vorzeichenregel:

Haben die Größen, die in das Einstellwerk rechts und das Ergebniswerk links eingestellt werden, gleiche Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv. Haben sie dagegen verschiedene Vorzeichen, so ist das Ergebnis negativ.

oder 2. Mit Rechenschieber

Die Exzeßprobe wird durchgeführt nach der Formel:

$$\delta_{12} - \delta_{21} + \delta_{23} - \delta_{32} + \delta_{31} - \delta_{13} = -\epsilon$$



von:								
nach:								
$r \cdot 10^{-4}$	- 26,67	-	-	-	-	-	-	-
$h \cdot 10^{-4}$	- 7,40	-	-	-	-	-	-	-
$r \cdot h \cdot 10^{-8}$	+ 198,	-	-	-	-	-	-	-
$(h^2 - r^2) \cdot 10^{-8}$	- 657,	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta r \cdot 10^{-4}$	- 3,88	-	-	-	-	-	-	-
$\Delta h \cdot 10^{-4}$	+ 1,24	-	-	-	-	-	-	-
$(3h + \Delta h) \cdot 10^{-4}$	- 20,97	-	-	-	-	-	-	-
I	+ 21,21	-	-	-	-	-	-	-
II	+ 0,35	-	-	-	-	-	-	-
III	+ 1,83	-	-	-	-	-	-	-
δ	+ 23,39	-	-	-	-	-	-	-

Nach Gl. (87) ergibt sich nun genähert

$$K = \frac{1}{m_a} \frac{dm_a}{dn} + \frac{d\epsilon}{dn}$$

Gl. (88) und (90) gehen somit über in

$$\delta = \frac{\rho}{2} \frac{s}{m_a} \left(\frac{\partial m_a}{\partial X} \sin t - \frac{\partial m_a}{\partial Y} \cos t \right) + \frac{\rho}{2} s \left(\frac{d\epsilon}{dn} \right)_{1/3} \quad \dots \quad (93)$$

Das erste Glied von (93) ist einfach zu berechnen, da nach Voraussetzung m_a ein einfacher Ausdruck ist. Das 2. Glied von (93) kann leicht tabelliert werden. Laborde gibt für die Ermittlung des 2. Gliedes noch ein graphisches Verfahren an.

d) Die Bildkrümmung K einer geodätischen Linie

Um einen strengen Ausdruck für die Krümmung der Bilder der geodätischen Linien zu finden, wird von Gleichung (87) ausgegangen.

$$K = \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dn}$$

Der Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis m ist nach Gleichung (79)

$$m = \frac{R \sin B_0}{p}$$

Aus Abb. 5 ist zu ersehen, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{ds'} &= -\cos \alpha \\ \frac{dR}{dn} &= -\sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94)$$

ist.
Aus (94) folgt

$$\frac{ds'}{dn} = \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (95)$$

Damit wird

$$K = \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{ds'} \operatorname{tg} \alpha$$

Durch Ableitung des Vergrößerungsverhältnisses nach s' folgt:

$$\frac{dm}{ds'} = \frac{\sin B_0}{p^2} \left(p \frac{dR}{ds'} - R \frac{dp}{ds'} \right)$$

Es ist

$$\frac{dp}{ds'} = \frac{dp}{dB} \cdot \frac{dB}{ds'} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dB} = -M \sin B$$

Um den Ausdruck für $\frac{dB}{ds'}$ zu finden, wird von den Gl. (59) und (57) ausgegangen und die Gleichung für das Quadrat des ebenen Linienelements abgeleitet. Es ist zunächst

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2$$

Ferner

$$\left. \begin{aligned} dX &= -k n e^{-nq} (\cos nl \, dq + \sin nl \, dl) \\ dY &= +k n e^{-nq} (\sin nl \, dq - \cos nl \, dl) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (96)$$

Durch Einführung der Beziehung (56) für R und durch Quadrieren und Addieren der Gl. (96) erhält man:

$$ds'^2 = R^2 \sin^2 B_0 (dq^2 + dl^2) \dots \dots \dots (97)$$

oder

$$\frac{ds'^2}{dq^2} = R^2 \sin^2 B_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Damit ergibt sich

$$\frac{dq}{ds'} = \frac{\cos \alpha}{R \sin B_0} \dots \dots \dots (98)$$

Nun ist

$$\frac{dB}{ds'} = \frac{dB}{dq} \cdot \frac{dq}{ds'}$$

Wegen der Gl. (45) ergibt sich

$$\frac{dB}{ds'} = \frac{\cos \alpha}{R \sin B_0} \cdot \frac{p}{M} \dots \dots \dots (99)$$

Dadurch wird

$$\frac{dp}{ds'} = - \frac{p \sin B \cos \alpha}{R \sin B_0}$$

und

$$\frac{dm}{ds'} = \frac{\cos \alpha}{p} (\sin B - \sin B_0) \dots \dots \dots (100)$$

Nun erhält man für K

$$K = \frac{\sin B - \sin B_0}{R \sin B_0} \sin \alpha \dots \dots \dots (101)$$

In jedem Punkt der Abbildung ändert sich die Krümmung des Bildes einer geodätischen Linie mit dem Sinne des Azimuts. Sie erreicht ihr Maximum, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ und ihr Minimum, wenn $\alpha = 0$ oder π ist. Die größte Bildkrümmung tritt also in der Tangentenrichtung der Bilder der Parallelkreise auf. Da die maximale Krümmung nur von der geographischen Breite abhängt, sind die Parallelkreisbilder sowohl Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses, als auch Linien gleicher größter Bildkrümmung geodätischer Linien. Die Krümmung der Projektion geodätischer Linien wird bei der Lambertprojektion erstens in der Richtung der Meridianbilder und zweitens für $B = B_0$ gleich Null. Im ersten Falle werden die geodätischen Linien Geraden der Ebene und im zweiten Falle besitzen die Bilder der geodätischen Linien, die den Mittelparallelkreis schneiden, in dessen Bild einen Wendepunkt, wenn sie nicht Geraden sind.

Bei der Lambertschen Abbildung wachsen Vergrößerungsverhältnis und maximale Bildkrümmung geodätischer Linien mit dem Abstand vom Mittelparallel. Beide Verzerrungsgrößen sind auf Parallelkreisbildern konstant. Wendet man deshalb die Lambertprojektionen auf Zonen an, die von symmetrisch zum Mittelparallelkreis gelegenen Parallelkreisen begrenzt sind, so erreichen Vergrößerungsverhältnis und maximale Richtungsreduktion keine größeren Beträge, als sie für dieses Anwendungsgebiet unvermeidlich sind. Für Zonen stellt daher die Lambertprojektion die überhaupt beste konforme Abbildung dar.

4. Lambert Nord de Guerre

a) Abbildungsgleichungen

Für die im Jahre 1915 erfolgte Einführung einer Lambertschen Abbildung für die Zwecke der französischen Kriegsvermessung waren neben den guten Verzerrungseigenschaften, das für die französische Heeresleitung günstige Anwendungsgebiet und vor allem die Einfachheit der Übertragungsgleichungen von geographischen in ebene Koordinaten und umgekehrt maßgebend. Da die Mehrzahl der Festpunkte bis zur Einführung der Lambertschen Abbildung in geographischen Koordinaten bestimmt worden war, sah man sich gezwungen, Hilfsmittel für eine einfache Umformung geographischer in ebene Koordinaten zur Verfügung zu stellen. Das wichtigste Hilfsmittel dieser Art ist eine Projektionstafel, die außerdem als Blatteckentafel Verwendung findet.

Die französische Neutriangulation war bei Ausbruch des ersten Weltkrieges noch nicht so weit fortgeschritten, daß man auf ihr hätte aufbauen können. Man war deshalb genötigt, die Lambertsche Abbildung auf das Ellipsoid von Plessis zu begründen und ausschließlich im System der alten Triangulation zu arbeiten.

Der Mittelmeridian der eingeführten Lambertschen Abbildung liegt 6 Neugrad ostwärts des Meridians von Paris und der Mittelparallelkreis in 55^s Breite. Um nur positive Koordinaten zu erhalten, wurden dem Koordinatennullpunkt ein Rechtswert von 500 km und ein Hochwert von 300 km zugeschrieben.

Bei der Anwendung der Lambertprojektionen gingen die französischen Geodäten nicht von den Gleichungen (77) oder (78) aus, wie etwa die Mecklenburgische Landesvermessung oder das griechische Mil.-Geogr. Institut, sondern sie benutzten unmittelbar die einfachen Beziehungen (65), (66) und (67). Dieses sehr praktische Vorgehen setzt lediglich die Tabellierung von ΔR als Funktion der Breite und das Vorhandensein von geeigneten Funktionstafeln für Sinus und Tangens für verhältnismäßig kleine Winkel voraus.

Bei der Einführung der Lambertschen Abbildung nahm man an Stelle des Ausdruckes (74) für ΔR die vereinfachte Beziehung für das Halbmessergesetz

$$\Delta R = \beta + \frac{\beta^3}{6N_0^2} \dots \dots \dots (102)$$

Man vernachlässigte die Glieder 4. Ordnung von (74) und nahm ferner im Glied 3. Ordnung für den Nenner an Stelle von $N_0 M_0$ den Betrag N_0^2 . Man benutzte also für die Berechnung des Gliedes 3. Ordnung der Gl. (102) für die Kugel mit mittlerem Krümmungshalbmesser eine Kugel mit dem Querkrümmungshalbmesser des Ellipsoides als Radius. Diese Kugel berührt das Ellipsoid im Mittelparallel der Projektion.

Die Folge dieser genäherten Festsetzung des Halbmessergesetzes ist der Verlust der strengen Konformität, d. h. das Auftreten einer kleinen Winkelverzerrung.

Die Gründe, die für diese genäherte Annahme von ΔR maßgebend waren und später geltend gemacht wurden, sind verschiedener Art. Man wollte ursprünglich wohl lediglich die Rechenarbeit bei der Aufstellung der Projektionstafeln noch weiter vereinfachen, da die Vernachlässigung so gering ist, daß sie für militärische Zwecke ohne Bedeutung ist. Später entdeckte man die Identität der mit Hilfe der Gleichung (102) neu entstandenen Projektion mit der von Tissot für die Herstellung großmaßstäblicher Karten von Zonen entwickelten Projektionen mit dem Minimum der Verzerrungen. Gerade diesem Umstand legte man eine große Bedeutung bei. Welche Gründe auch immer zu Gunsten der auf Glieder 3. Ordnung beschränkten Projektionen angeführt werden, so ist, trotz gewisser Vorteile in rechnerischer Hinsicht, der Nachteil nicht zu übersehen, daß die strenge Konformität dabei verloren geht. Im Falle der Lambertschen Abbildung wäre durch eine geringfügige Mehrarbeit die Konformität der Abbildung gewahrt worden.

b) Die Verzerrungen von Lambert Nord de Guerre

a) Das Vergrößerungsverhältnis

Aus Gleichung (102) folgt für das Vergrößerungsverhältnis, da $m = \frac{d\Delta R}{d\beta}$ ist, der einfache Ausdruck

$$m = 1 + \frac{\beta^2}{2N_0^2} = h \dots \dots \dots (103)$$

Es ist aber zu berücksichtigen, daß bei der von Frankreich angewandten Projektion das Vergrößerungsverhältnis von der Richtung abhängt und Gl. (103) das Vergrößerungsverhältnis h in Richtung der Meridianbilder bedeutet. Das in Richtung der Parallelkreisbilder auftretende Vergrößerungsverhältnis k ist unverändert durch den Ausdruck (81) gegeben.

$$k = 1 + \frac{1}{2M_0 N_0} \beta^2 + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{6M_0 N_0^2} \beta^3 \dots \dots \dots (81)$$

Das auf den Grenzparallelkreisen auftretende Vergrößerungsverhältnis m_1 kann durch eine maßstäbliche Verkleinerung der Projektion auf die Hälfte reduziert werden. Dadurch wird m auf dem Mittelparallel um denselben Betrag kleiner als 1, wie es auf den Grenzparallelkreisen größer als 1 wird. Zwei zwischen Mittel- und Grenzparallelkreisen gelegene Parallelkreise werden bei dieser maßstäblichen Verkleinerung längentreu abgebildet. Nach der allgemeinen Theorie der Lambertprojektionen entspricht der Maßstabsänderung ein Übergang von einer Berührungskegel- auf eine Schnittkegelprojektion. Da das Gesetz für die Abbildung der geographischen Längen bei diesem Übergang unverändert bleibt, erfährt auch die Projektionskonstante $n = \sin B_0$ keine Änderung. In Gleichung (61) und (62) wäre für die durch maßstäbliche Verkleinerung entstandene Schnittkegelprojektion für $n = \sin B_0$ zu setzen.

Wegen der Einführung einer genähert konformen Projektion konnte bei der Festsetzung des Verkleinerungsfaktors f kein strenger Weg beschritten werden. Wenn der Grenzparallelkreis die Bogenlänge β_1 hat, so besitzt er nach (103) das Vergrößerungsverhältnis

$$m_1 = 1 + \frac{\beta_1^2}{2N_0^2}$$

Den Verkleinerungsfaktor f erhält man aus der Beziehung

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\beta_1^2}{4N_0^2}} = 1 - \frac{\beta_1^2}{4N_0^2} \dots \dots \dots (104)$$

Werden die Gleichungen (66) mit f multipliziert, dann ergeben sich zwei im Abstand von $\pm \beta_2$ vom Mittelparallel gelegene längentreue Parallelkreise.

Es ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta_2^2}{2N_0^2} &= \frac{\beta_1^2}{4N_0^2} \\ \beta_2 &= \pm \frac{\beta_1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (105)$$

Durch die beschriebene Maßnahme wird erreicht, daß das Meridianvergrößerungsverhältnis im Mittelparallel $1 - \frac{\beta_1^2}{4N_0^2}$ und im Grenzparallel $1 + \frac{\beta_1^2}{4N_0^2}$ wird.

Das System Nord de Guerre wird 2^o5' nördlich und südlich des Mittelparallels $B_0 = 55^{\circ}$ erstreckt. Aus Gleichung (105) würde man für $\beta_2 = \pm \frac{250}{\sqrt{2}} = \pm 177$ km erhalten. Man nahm jedoch für $\beta_2 = 200$ 170 m, um zu erreichen, daß ungefähr die Parallelkreise in 53^o und 55^o Breite längentreu abgebildet werden. Mit $\beta_2 = 200$ 170 m und $N_0 = 6$ 388 482 m berechnete der S. G. A.

$$f = 1 - \frac{1}{2037} = 1 - 0,000491 \dots \dots \dots (106)$$

f wurde in den Projektionstafeln und — Konstanten berücksichtigt. Denkt man sich die Gleichung (66) mit f multipliziert, so ersieht man, daß die verkleinerten Koordinatenwerte X und Y dadurch entstehen, daß für R_0 und ΔR die mit f multiplizierten Beträge in Rechnung gestellt werden.

β) Richtungs- und Längenreduktion

Zur Berechnung von Richtungsreduktionen wurde beim Projektionssystem Nord de Guerre folgender, durch Vereinfachung von (92) entstandene Ausdruck angewandt:

$$\delta = \frac{\rho}{2N_0^2} \left(X + \frac{\Delta X}{3} \right) \Delta Y \dots \dots \dots (107)$$

Die Berechnung der Längenreduktion erfolgte mit Hilfe der vereinfachten Beziehungen (85). Es ist hier

$$\frac{\delta s}{s'} = \frac{X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2}{6N_0^2} \dots \dots \dots (108)$$

Besondere Hilfsmittel für die Berechnung der Richtungs- und Längenreduktion wurden für das Koordinatensystem Nord de Guerre nicht bearbeitet.

c) Projektionstafeln

Die Projektionstafeln, welche die Handhabung einer Projektion, die den häufigen Übergang von geographischen in ebene rechtwinklige Koordinaten und umgekehrt erfordert, wesentlich vereinfachen, bedeuten ein sehr vorteilhaftes und militärisch wichtiges Hilfsmittel. Ihre Berechnung und ihr Aufbau werden aus diesem Grunde im folgenden ausführlich behandelt und es werden die für ihre Anwendung wichtigsten Gesichtspunkte angegeben.

Der Parallelkreisbogen für 10 Neuminuten geographischen Längenunterschiedes sei in der Projektion für die Breite B mit P' und für die Breite B_0 mit P_0' bezeichnet. Es folgt ohne weiteres

$$P' = P_0' \frac{R}{R_0} = \frac{P_0'}{R_0} (R_0 - \Delta R) \dots \dots \dots (109)$$

Aus Gl. (66) ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta R + R \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^4}{24} + \frac{\gamma^6}{720} - \dots \right) \\ Y &= R \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{120} - \dots \right) \\ \tilde{\gamma} &= \tilde{l} \sin B_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Ein beliebiger Parallelkreisbogen b des Bildes berechnet sich aus der Gleichung

$$b = R \cdot \gamma = n P'$$

oder

$$\gamma = \frac{n}{R} P' \dots \dots \dots (111)$$

Mit Gleichung (109) folgt daraus

$$\gamma = n \frac{P'_0}{R_0} \dots \dots \dots (112)$$

Damit gehen die Gl. (110) über in

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta R + \frac{R}{2} \left(\frac{P'_0}{R_0} \right)^2 n^2 - \frac{R}{24} \left(\frac{P'_0}{R_0} \right)^4 n^4 + \frac{R}{720} \left(\frac{P'_0}{R_0} \right)^6 n^6 \\ Y &= P'_0 n - \frac{R}{6} \left(\frac{P'_0}{R_0} \right)^3 n^3 + \frac{R}{120} \left(\frac{P'_0}{R_0} \right)^5 n^5 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} X &= \Delta R + A n^2 - C n^4 + E n^6 \\ Y &= P' n - B n^3 + D n^5 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113')$$

Die Bedeutung der Koeffizienten A bis E geht durch Vergleichung von Gl. (113) mit (113') hervor.

Der in Gl. (111) eingeführte Faktor n hat folgende Bedeutung:

Nach Definition ist

$$P'_0 = 0^{\circ},1 \sin B_0 \cdot R_0 \dots \dots \dots (114)$$

Also ist nach (109)

$$P' = R \sin B_0 \cdot 0^{\circ},1 \dots \dots \dots (114')$$

Mit Gl. (112) ist aber

$$\gamma = n \cdot 0^{\circ},1 \sin B_0 = l \sin B_0$$

oder

$$n = \frac{l^{\circ}}{0^{\circ},1} \dots \dots \dots (115)$$

n ist gleich der in Einheiten von Zehntel Grad ausgedrückten geographischen Länge.

Um unmittelbar die durch den Faktor f reduzierten Koordinaten zu erhalten, wurden R_0 und ΔR und damit auch die Glieder der Gl. (113) bzw. (113') mit f multipliziert.

Zwecks Aufstellung der Projektionstafeln wurden zunächst die Meridianbogenlängen β von Grad zu Grad berechnet. Anschließend wurden die Größen ΔR nach Gl. (102), P' nach (114') und A bis E nach (113) ermittelt. Alle diese von Breitengrad zu Breitengrad berechneten Ergebnisse wurden in einer Tafel zusammengestellt. In eine 2. Tafel wurden die mit Hilfe der Gl. (113) ermittelten rechtwinkligen ebenen Koordinaten von Grad zu Grad in Länge und Breite getrennt für X und Y aufgenommen. Durch Interpolation unter Berücksichtigung der Differenzen höherer Ordnung erhielt man aus der 2. Tafel die Lambertschen Koordinaten der Schnittpunkte der Meridiane und Parallelkreise von 10 zu 10 Neuminuten.

Die Projektionstafeln für Lambert Nord de Guerre enthalten in senkrechten Kolonnen von 10 zu 10 Längenminuten und in horizontalen Zeilen von 10 zu 10 Breitenminuten folgende Größen: Die rechtwinkligen Koordinaten X, Y , ihre ersten Differenzen für zunehmende Breite $\Delta X_B, \Delta Y_B$, ihre ersten Differenzen für zunehmende Länge $\Delta X_L, \Delta Y_L$ und die Differenzen von $\Delta X_B, \Delta Y_B$ für zunehmende geographische Länge $\Delta^2 X_{Bl}, \Delta^2 Y_{Bl}$.

Die Umrechnung geographischer Koordinaten B, l mit Hilfe der Projektionstafeln erfolgt streng nach folgenden Interpolationsformeln

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + n \Delta X_B + n' \Delta X_L + n n' \Delta^2 X_{Bl} + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 X_{BB} + \frac{n'(n'-1)}{2} \Delta^2 X_{LL} \\ Y &= Y_0 + n \Delta Y_B + n' \Delta Y_L + n n' \Delta^2 Y_{Bl} + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 Y_{BB} + \frac{n'(n'-1)}{2} \Delta^2 Y_{LL} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (116)$$

Die nächstniedereren in der Tafel enthaltenen Werte für die Breite und Länge sind B_0 und l_0 , denen die Tafelwerte X_0 und Y_0 entsprechen. n und n' sind Zuschläge, die an B_0 und l_0 anzubringen sind, um sie in B und l überzuführen.

Es ist

$$B = B_0 + n, \quad l = l_0 + n'$$

Für die Berechnungen im System Nord de Guerre wurden vereinfachte Interpolationsformeln, in denen lediglich die in der Tafel angegebenen Differenzen benutzt werden, verwandt.

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + n \Delta X_B + n' \Delta X_L + n' n' \Delta^2 X_{Bl} \\ Y &= Y_0 + n \Delta Y_B + n' \Delta Y_L + n n' \Delta^2 Y_{Bl} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (116')$$

Die Anwendung der vereinfachten Interpolationsformeln, die auch der Ermittlung Bonnescher Koordinaten nach Gl. (38) dienen, ist in einer Genauigkeitsgrenze von 1 dm zulässig. Bei Anwendung der strengen Interpolationsformeln (116) müssen die Differenzen $\Delta^2 X_{BB}, \Delta^2 Y_{BB}, \Delta^2 X_{LL}$ und $\Delta^2 Y_{LL}$, die nicht in der Tafel enthalten sind, rechnerisch gebildet werden.

Im Rahmen der Maßnahmen, die zur Abwehr etwaiger Angriffe von der Schweiz aus getroffen wurden, wurde im Jahre 1916 ein weiteres Lambertsches Koordinatensystem, das man später als Sud de Guerre bezeichnete, eingeführt.

Der Nullpunkt dieses Systems ist die Sternwarte von Bern, der ein Rechtswert von 350 km und ein Hochwert von 250 km zugeschrieben wurde.

Ausgangsellipsoid für das System Sud de Guerre ist das Besselsche. Wegen einer nachträglich festgestellten Differenz in der Ausgangsbreite, mußten die Hochwerte der Projektionstafeln für Sud de Guerre um 81,6 m verbessert werden.

5. Die neuen französischen Lambertprojektionen

a) Allgemeines und Hilfsmittel

Im Jahre 1920 führte der S. G. A. für die Berechnung der neuen franz. Triangulation und für die Herstellung der großmaßstäblichen Karten Lambertprojektionen ein, die auf dem Ellipsoid von Clarke (1880) und auf den neuen geodätischen Grundlagen beruhen. Dieselben Abbildungen wurden in Nord- und Westafrika und in Syrien angewandt. Für Frankreich wählte man den neuen Meridian von Paris als Mittelmeridian und die Parallelkreise $B_0 = 55^{\circ}, 52^{\circ}$ und 49° als Mittelparallelkreise von 3 Lambertschen Abbildungen. Die französischen Systeme erhielten folgende Benennungen:

- $B_0 = 55^{\circ}$, Lambert I Zone Nord
- $B_0 = 52^{\circ}$, Lambert II Zone Zentral
- $B_0 = 49^{\circ}$, Lambert III Zone Süd

Die Abbildungen 6 und 7 zeigen die Anwendungsgebiete der neuen französischen und afrikanischen Lambertprojektionen und die Abgrenzung zwischen Nord und Nord de Guerre, das aus militärischen Gründen noch solange beibehalten werden sollte, bis es durch das System Lambert I Zone Nord abgelöst werden konnte.

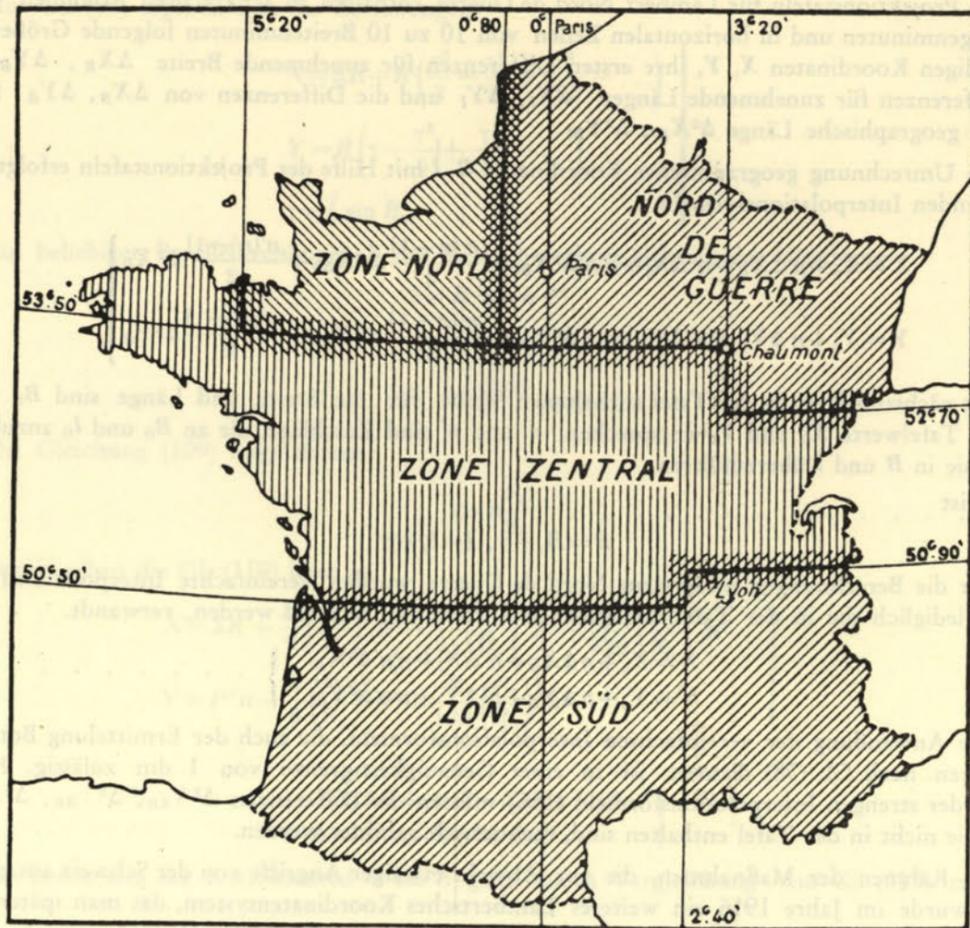


Abb. 6

Die Nullpunkte, Benennungen, Anwendungsgebiete und Grundlagen der neuen Lambertprojektionen sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Land	System	Nullpunkt B_0	l_0	Anwendungsbereich (einschl. Überlappung)	Bemerkungen
Frankreich	Nord de Guerre	55°	6° ostw. Paris		Ellipsoid von Plessis alte Triangulation einschl. Elsaß einschl. Bretagne Mit Verlängerung nach Süden bis einschl. Korsika
	I Zone Nord	55°	0° Paris	52,5 — 57,0	
	II Zone Zentral	52°	0° Paris	50,0 — 54,4	
	III Zone Süd	49°	0° Paris	47,0 — 51,0	
Algerien	Nord Algerien	40°	3° ostw. Greenwich	37,5 — 42,5	Ellipsoid von Clarke Neue Triangulation
	Süd Algerien	37°	3° ostw. Greenwich	34,5 — 39,5	
Tunesien	Nord Tunesien	40°	11° ostw. Greenwich	37,5 — 42,5	
	Süd Tunesien	37°	11° ostw. Greenwich	34,5 — 39,5	
Marokko	Nord Marokko	37°	6° westl. Greenwich	34,5 — 39,5	
	Süd Marokko	33°	6° westl. Greenwich	30,5 — 35,5	
Syrien	Levant	38° 5'	41° 5' ostw. Greenwich	35,5 — 41,5	

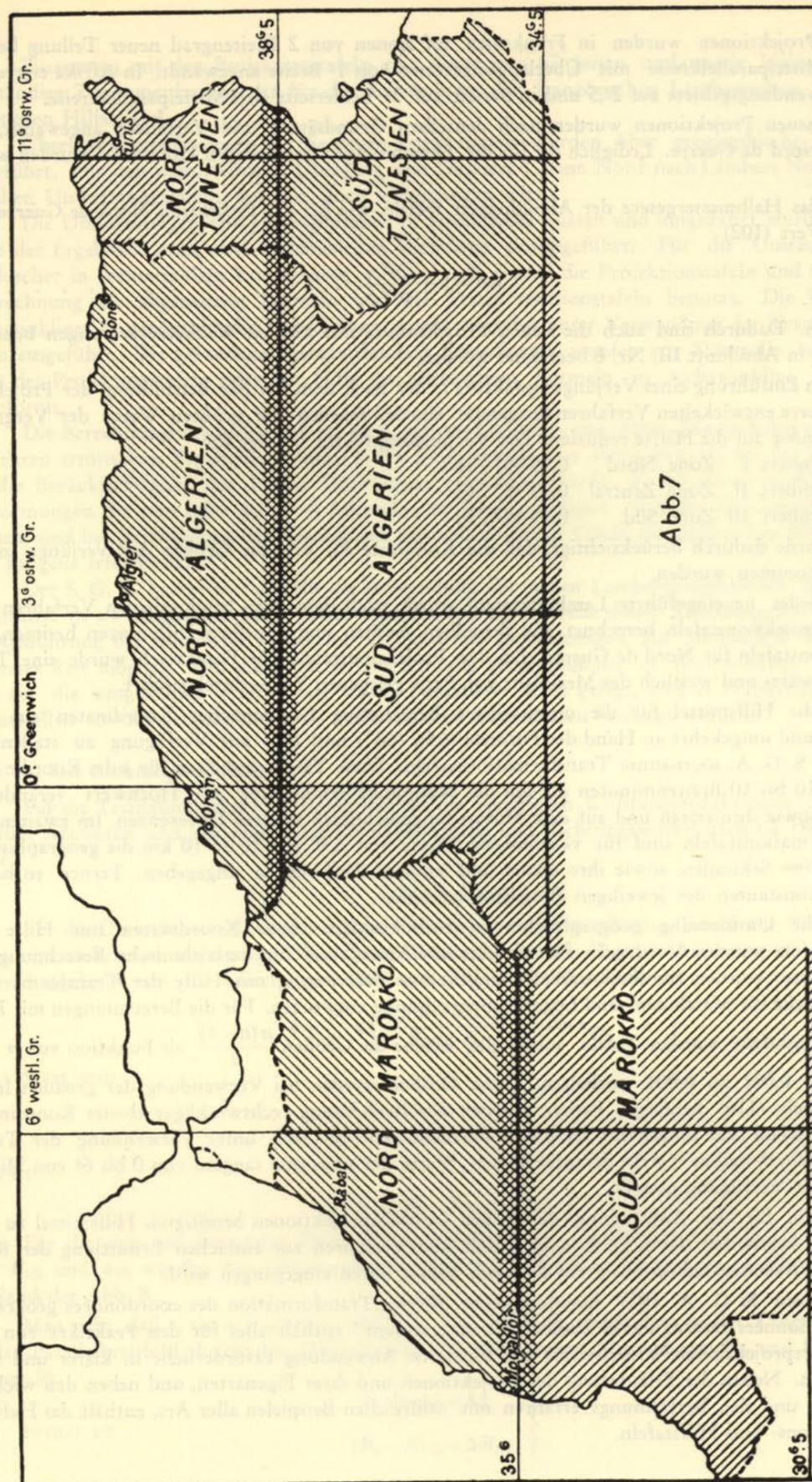


Abb. 7

Die Projektionen wurden in Frankreich auf Zonen von 2 Breitengrad neuer Teilung beiderseits der Mittelparallelkreise mit Überlappungszonen von 1^s Breite angewandt. In Afrika erstrecken sich die Anwendungsgebiete auf 2^s,5 und in Syrien auf 3^s beiderseits der Mittelparallelkreise.

Die neuen Projektionen wurden nach denselben Grundsätzen und Verfahren angewandt, wie das System Nord de Guerre. Lediglich die für die Berechnungen bearbeiteten Hilfsmittel wurden weiter ausgebaut.

Für das Halbmessergesetz der Abbildungen wurde, wie bei der Projektion Nord de Guerre, der genäherte Wert (102)

$$\Delta R = \beta + \frac{\beta^3}{6N_0^2} \dots \dots \dots (102)$$

angenommen. Dadurch sind auch die neuen Projektionen mit kleinen Winkelverzerrungen behaftet, deren Werte in Abschnitt III, Nr. 6 berechnet werden.

Durch Einführung eines Verjüngungsfaktors f , der nach dem bei der Behandlung der Projektion Nord de Guerre entwickelten Verfahren festgesetzt wurde, wurden die größten Werte der Vergrößerungsverhältnisse auf die Hälfte reduziert. Der Verjüngungsfaktor beträgt für

Lambert I	Zone Nord	0,99 987 734
Lambert II	Zone Zentral	0,99 987 742
Lambert III	Zone Süd	0,99 987 750

Er wurde dadurch berücksichtigt, daß die Konstante R_0 und die Größen ΔR verjüngt in die Tafeln übernommen wurden.

Für jedes neueingeführte Lambertsystem wurde nach dem oben beschriebenen Verfahren eine bzw. zwei Projektionstafeln berechnet, die denselben Aufbau und dieselben Differenzen besitzen, wie die Projektionstafeln für Nord de Guerre. Bei den Projektionstafeln für Frankreich wurde eine Trennung des ostwärts und westlich des Meridians von Paris gelegenen Teiles durchgeführt.

Um die Hilfsmittel für die unmittelbare Berechnung Lambertscher Koordinaten aus geographischen und umgekehrt an Hand der Formeln (65), (66'') und (67) zur Verfügung zu stellen, berechnete der S. G. A. sogenannte Transformationstafeln. Diese Tafeln enthalten für jedes Koordinatensystem von 10 bis 10 Breitenminuten die um die Nullpunktverschiebung im Hochwert veränderten Werte ΔR , sowie ihre ersten und auf eine Minute umgerechneten zweiten Differenzen. Im zweiten Teil der Transformationstafeln sind für verschobene Werte von ΔR von 10 zu 10 km die geographischen Breiten auf $1/1000$ Sekunden, sowie ihre ersten und zweiten Differenzen angegeben. Ferner enthalten Tafeln die Konstanten des jeweiligen Projektionssystems.

Für die Umformung geographischer in rechtwinklige ebene Koordinaten mit Hilfe der Projektionstafeln wurden Vordrucke für Maschinenrechnung und für logarithmische Berechnung bearbeitet. Ebenso wurden für diese und die umgekehrte Berechnung mit Hilfe der Transformationstafeln Vordrucke für Maschinen- und Logarithmenrechnung entworfen. Für die Berechnungen mit Hilfe der Projektionstafeln wurden Tafeln aufgestellt, welche die Größen $\frac{n(n-1)}{2}$ als Funktion von n von 0 bis 1, von 0,001 zu 0,001, enthalten. Diese Größen werden bei Verwendung der genauen Interpolationsformeln (116) benötigt. Ferner wurden zur Berechnung rechtwinkliger ebener Koordinaten aus geographischen und umgekehrt nach den Formeln (65) bis (67) unter Verwendung der Transformationstafeln 9-stellige Tafeln der natürlichen Werte des sinus und tangens von 0 bis 6^s von Minute zu Minute zur Verfügung gestellt.

Um die für die Anwendung der neuen Lambertprojektionen benötigten Hilfsmittel zu vervollständigen, bearbeitete der S. G. A. noch Tafeln und Verfahren zur einfachen Ermittlung der Richtungs- und Entfernungsreduktionen, auf die noch weiter unten eingegangen wird.

Das vom S. G. A. 1937 herausgegebene Werk „Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées rectangulaires Lambert et inversement“ enthält alles für den Praktiker von den neuen Lambertprojektionen Wissenswerte und für deren Anwendung Erforderliche in klarer und kurz gefaßter Form. Neben der Erläuterung der Projektionen und ihrer Eigenarten, und neben den wichtigsten Formeln und den Berechnungsverfahren mit zahlreichen Beispielen aller Art, enthält das Heft die Transformations- und Hilfstafeln.

Zusammen mit den Projektionstafeln gibt dieser nun 67 Seiten umfassende kleine Band eine vollständige Zusammenfassung der für die Anwendung der französischen Lambertschen Abbildungen benötigten Hilfsmittel.

Überlappungsrechnungen für die neuen Projektionen wurden über geographische Koordinaten ausgeführt. Für den unmittelbaren Übergang von Lambert I Zone Nord nach Lambert Nord de Guerre bestehen Umformungstafeln, auf die noch eingegangen wird.

Die Umformungen von geographischen in ebene Koordinaten und umgekehrt wurden zur Kontrolle der Ergebnisse nach zwei verschiedenen Verfahren durchgeführt. Für die Umrechnung geographischer in rechtwinklige Koordinaten wurden z. B. einmal die Projektionstafeln und für die Kontrollrechnung die allgemeinen Formeln und die Transformationstafeln benutzt. Die Umrechnung rechtwinkliger in geographische Koordinaten wurde zunächst unter Verwendung der Transformationstafeln ausgeführt. Die gefundenen geographischen Koordinaten wurden zur Kontrolle entweder mit Hilfe der Projektionstafeln oder mit Hilfe der allgemeinen Formeln in rechtwinklige Koordinaten umgeformt.

Die Berechnungen wurden auf cm bzw. auf $1/1000$ Sekunden ausgeführt. Die nach den verschiedenen Verfahren ermittelten Ergebnisse können 2 bis 3 cm voneinander abweichen, da bei der Interpolation auf die Berücksichtigung der dritten Differenzen verzichtet wurde. Es ist daher nutzlos, bei den Umformungen die mm oder die $1/10000$ Sekunden zu berücksichtigen. Um die cm-Genauigkeit zu erreichen, sind bei Verwendung der allgemeinen Formeln 9-stellige Tafeln der natürlichen Werte des Sinus und Tangens erforderlich.

Der S. G. A. bearbeitete alle für die Anwendung der neuen Lambertprojektionen erforderlichen Hilfsmittel in zweckmäßiger Form unter Ausnutzung der Vorteile dieser Abbildungsart. Dadurch ist die Ausführung der mit dieser Projektion verbundenen Berechnungen auf einfachste Weise und in kürzester Zeit möglich. Auf die einfache Umrechnung geographischer in rechtwinklige Koordinaten und auf die umgekehrte Umformung wurde besonderer Wert gelegt, weil in Frankreich von vielen Dienststellen sowohl geographische als rechtwinklige Koordinaten benötigt werden.

b) Die Richtungsreduktion

Für die Triangulationen I. Ordnung wurden die benötigten Richtungsreduktionen aus den bekannten Azimuten und aus ebener Meridiankonvergenz und Richtungswinkel nach Gl. (86) berechnet. Es ist

$$\delta = \gamma + t - \alpha \dots \dots \dots (86)$$

Für die Dreiecksnetze II. und niederer Ordnung wurden graphische Tafeln zur Ermittlung der Richtungsreduktionen angefertigt. Die diesen Tafeln zu Grunde liegende Ableitung ist die folgende: Ausgehend von den Gleichungen (88) und (101) läßt sich schreiben:

$$\delta = \frac{\rho}{2} \cdot s \left(\frac{\sin B - \sin B_0}{R \sin B_0} \right)_{1/3} \cdot \sin \alpha_{1/3} \dots \dots \dots (117)$$

Setzt man

$$\frac{\rho}{2} \cdot \frac{\sin B - \sin B_0}{R \sin B_0} \cdot \frac{1}{R_0 - R} = C, \dots \dots \dots (118)$$

dann ist

$$\delta = C_{1/3} (R_0 - R)_{1/3} \sin \alpha_{1/3} \cdot s \dots \dots \dots (119)$$

Für die sich auf den ersten Drittelpunkt des Bildes der geodätischen Linie beziehenden Größen $C_{1/3}$, $R_{1/3}$ und $\alpha_{1/3}$ werden nun Näherungswerte benötigt. Ein Wert für $s \cdot \sin \alpha_{1/3}$ ergibt sich zunächst an Hand der Abb. 8.

Man sieht, daß $s \cdot \sin \alpha_{1/3}$ genähert gleich $a_1 + a_2$ ist, d. h. gleich dem in der Tangentenrichtung an das Parallelkreisbild durch den Drittelpunkt $P'_{1/3}$ gemessenen Abstand von P'_1 und P'_2 (siehe Abbildung 9)

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \sin \alpha_{1/3} &= \Delta \xi \\ (R_0 - R)_{1/3} &= \Delta R_{1/3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (120)$$

Ferner ist

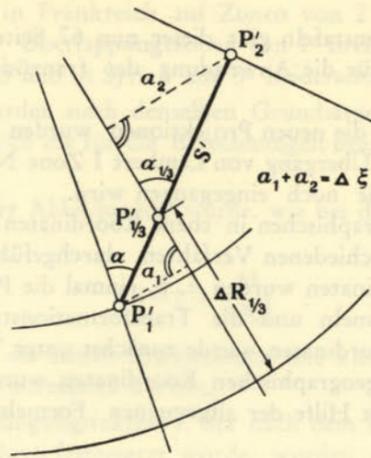


Abb. 8

Um für C einen geeigneten Ausdruck zu finden, werden in Gl. (118) die Glieder 2. und höherer Ordnung vernachlässigt. Es ist genähert

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\rho \cotg F_0 \Delta B}{2 R_0 M \Delta B} \\ C &= \frac{\rho}{2MN} = \frac{\rho}{2r^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (121)$$

C ist also genähert gleich dem Faktor des sphärischen Exzesses. Für δ folgt nun

$$\delta = \frac{\rho}{2r^2} \Delta R_{1/3} \Delta \xi \dots \dots \dots (122)$$

Der S. G. A. wertete die Gleichung (122) in der Form aus, daß er auf Transparentpapier im Maßstab 1:100 000 die gleichseitigen Hyperbelscheren $\delta = \text{konstant}$ konstruierte. Diese mehrere Blätter umfassende graphische Tafel kann für alle Koordinatensysteme verwendet werden. Das Verfahren setzt das Vorliegen einer Karte im Maßstab 1:100 000 mit eingetragenen Festpunkten voraus. Die Handhabung der transparenten Tafeln ergibt sich ohne weiteres aus der Gl. (122).

Da der deutschen Heeresvermessung keine Festpunktarten 1:100 000 zur Verfügung standen, wurde vor Einführung des Vordruckes 1. (Gl. (92)), folgendes aus Gl. (122) abgeleitete Verfahren zur Ermittlung der Richtungsreduktionen angewandt.

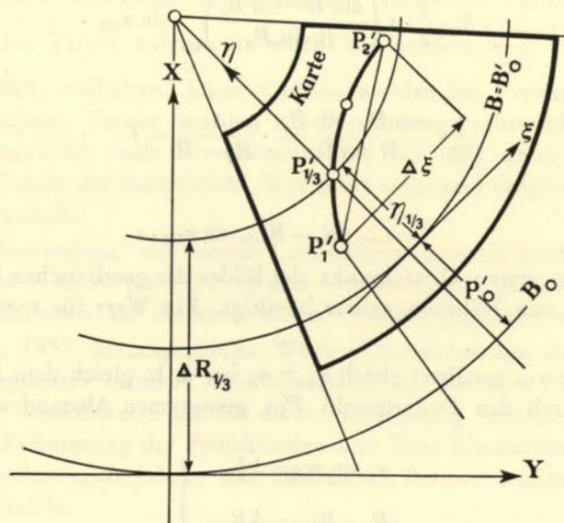


Abb. 9

Wie Abb. 9 zeigt, setzt das Verfahren, wie dasjenige des S. G. A. voraus, daß eine Karte mit Meridian- und Parallelkreisbildern vorliegen muß. Die Dreiecksseite, deren Richtungsreduktion ermittelt werden soll, wird zunächst in die Karte eingetragen. Als Karten eignen sich die Karte 1:80 000 und deren Vergrößerungen auf den Maßstab 1:50 000, sowie die neue Karte von Frankreich 1:50 000.

Bei der Ermittlung von $\Delta R_{1/3}$ wird von dem dem Dreieckspunkt $P'_{1/3}$ am nächsten gelegenen in der Karte durchgezogenen Parallelkreisbild ausgegangen. Der Wert für ΔR dieses eingetragenen Parallelkreises, der mit P'_0 bezeichnet wird, ist in der Transformationstafel enthalten. Nun werden $\eta_{1/3}$ und $\Delta \xi$ aus der Karte abgegriffen. δ berechnet man aus Gleichung (122), das noch in der Form

$$\rho = \frac{\rho}{2r^2} (p'_0 + \eta_{1/3}) \Delta \xi \dots \dots \dots (122')$$

geschrieben werden kann, mit Hilfe eines Nomogrammes oder des Rechenschiebers.

Dieses halbgraphische Verfahren ist leicht anwendbar und liefert genügend genaue Ergebnisse für Triangulationen III. Ordnung.

c) Die Längenreduktion

Der S. G. A. begnügte sich mit der Entwicklung eines einfachen Näherungsverfahrens für die Ermittlung der Längenreduktion mit der Begründung, daß für Triangulationen selten genaue Werte der Längenreduktionen benötigt werden. Das Verfahren ist also nur für Zwecke gedacht, bei denen eine genäherte Berücksichtigung genügt, wie bei trigonometrischen Höhenmessungen oder bei Polygonisierungen.

Bei der Bestimmung der Längenreduktionen ist neben dem Vergrößerungsverhältnis auch der Verjüngungsfaktor f zu berücksichtigen. f beträgt für ganz Frankreich mit für diesen Zweck ausreichender Genauigkeit 12 Einheiten der 5. Dezimale.

Die Längenreduktion wird einfach dadurch ermittelt, daß das Vergrößerungsverhältnis der Mitte der Dreiecksseite nach Berücksichtigung von f mit der Seitenlänge multipliziert wird. Wenn m das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung ist, so wird $\delta m = m - 1$ für ΔR -Werte von 10 zu 10 km in einer kleinen Tabelle zusammengestellt. Die mittlere Breite der Seite, deren Längenreduktion zu ermitteln ist, wird aus einer Karte entnommen. Mit dieser Breite wird aus der Transformationstafel ΔR und mit ΔR aus dem Täfelchen δm bestimmt.

Da die Maßstabsänderung f eine Verkleinerung der ebenen Bilder bedeutet, muß beim Übergang vom Ellipsoid zur Ebene $\delta m - f$ und beim Übergang von der Ebene zum Ellipsoid $f - \delta m$ mit der Länge der Dreiecksseite multipliziert werden, um die Längenreduktion δs zu erhalten.

Das Verfahren ist verhältnismäßig genau und sehr einfach. Es eignet sich auch für die meisten Zwecke der Heeresvermessung.

Alle für die Bestimmung der Richtungs- und Längenreduktionen nach dem Verfahren des S. G. A. benötigten Hilfsmittel sind in dem erwähnten Heft des S. G. A. „Transformation des coordonnées géographiques“, Literaturnachweis (1) zusammengestellt.

6. Die Winkelverzerrungen der französischen Lambertschen Abbildung

Da sich bei den französischen genähert konformen Lambertprojektionen die Bilder der Meridiane und Parallelkreise überall unter rechten Winkeln schneiden, ist dieses Netz das Hauptnetz der Projektion im Sinne der Tissotschen Sätze. Die Halbachsen a und b der Tissotschen Indikatrix fallen in die Richtung der Parallelkreis- und Meridianbilder und sind identisch mit den in Gl. (81) und (10) angegebenen Werten für k und h . Es ist

$$a = k = 1 + \frac{\beta^2}{2M_0 N_0} + \frac{t_0 (1 - 4\tau_0^2)}{6N_0^2 M_0} \beta^3 \dots \dots \dots (81)$$

$$b = h = 1 + \frac{\beta^2}{2N_0^2} \dots \dots \dots (103)$$

Die größte Winkelverzerrung $2w$ erhält man aus der Beziehung

$$\sin w = - \frac{a - b}{a + b}$$

Aus Gl. (81) und (103) ergeben sich

$$a-b = \frac{\eta_0^2}{2N_0^2} \beta^2 + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{6N_0^2 M_0} \beta^3$$

$$a+b = 2 \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{4N_0^2} (2+\eta_0^2) + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{12N_0^2 M_0} \beta^2 \right\}$$

Mit $\sin \omega = \frac{\omega}{\rho}$ folgt

$$|2\omega| = \frac{\rho \eta_0^2}{2N_0^2} \beta^2 + \frac{\rho t_0(1-4\eta_0^2)}{6N_0^2 M_0} \beta^3 \dots (123)$$

Man berechnet mit Gleichung (123) beispielsweise folgende Werte

$\beta = +100$ km	$ 2\omega = 0''67$ (N. T.)
$\beta = +200$ km	$ 2\omega = 4''32$ (N. T.)
$\beta = -100$ km	$ 2\omega = 0''14$ (N. T.)
$\beta = -200$ km	$ 2\omega = 2''21$ (N. T.)

Bei genauen ebenen Berechnungen kann die Winkelverzerrung der französischen Lambertprojektionen nicht vernachlässigt werden. Es dürfte zweckmäßiger sein, die genäherten mit Hilfe der im nächsten Abschnitt entwickelten Differenzialformeln in streng konforme Koordinaten überzuführen, als die Winkelverzerrungen laufend in Rechnung zu stellen oder etwa sphäroidisch zu rechnen, wenn die Genauigkeit der Berechnungen die Berücksichtigung der Winkelverzerrungen erfordert.

7. Die Vernachlässigungen der französischen Lambertschen Abbildungen

Die auf Glieder 3. Ordnung im Halbmessergesetz beschränkten von Frankreich angewandten Lambertprojektionen ergeben rechtwinklige Koordinaten, die der Verbesserungen δX und δY bedürfen, um sie in streng konforme Koordinaten überzuführen.

Es ist aus verschiedenen Gründen wichtig, die Vernachlässigungen im Halbmessergesetz und in den Koordinaten in geeigneten Ausdrücken darzustellen.

Wird die Gl. (102) von (74) abgezogen, dann folgt

$$\delta \Delta R = \frac{\eta_0^2}{6N_0^2} \beta^3 + \frac{t_0(1-4\eta_0^2)}{24N_0^2 M_0} \beta^4 \dots (124)$$

Die Vernachlässigung im Halbmessergesetz beträgt für $\beta = +200$ km rund 40 cm und für $\beta = 150$ km rund 15 cm. Daraus folgt, daß die Koordinatenverbesserung δX im Maximum den Betrag von 40 cm erreicht.

Um die Auswirkung der Vernachlässigung in ΔR auf die rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, wird zunächst in Gleichung (124) mittels der Beziehung (4) an Stelle von β , ΔB eingeführt. Es folgt

$$\delta \Delta R = \frac{M_0}{24V_0^6} \{ 4\eta_0^2(1+\eta_0^2) \Delta B^3 + t_0(1-3\eta_0^2+24\eta_0^4) \Delta B^4 \} \dots (125)$$

Nun ist nach Gl. (66)

$$X = R_0 - (R_0 - \Delta R) \cos \gamma$$

$$Y = (R_0 - \Delta R) \sin \gamma$$

Ferner ergeben sich, wenn sich ΔR um $\delta \Delta R$ ändert

$$\delta X = \delta \Delta R \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} \right)$$

$$\delta Y = -\delta \Delta R \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{6} \right)$$

Wenn die Ausdrücke für δX , δY auf Glieder 4. Ordnung beschränkt bleiben, wird

$$\left. \begin{aligned} \delta X &= \delta \Delta R \\ \delta Y &= -\delta \Delta R l \sin B_0 \end{aligned} \right\} \dots (126)$$

Aus Gl. (126) ergeben sich unter Einführung von (125)

$$\left. \begin{aligned} \delta X &= \frac{M_0}{24V_0^6} \{ 4\eta_0^2(1+\eta_0^2) \Delta B^3 + t_0(1-3\eta_0^2+14\eta_0^4) \Delta B^4 \} \\ \delta Y &= -\frac{M_0 \sin B_0}{6V_0^4} \eta_0^2 \Delta B^3 l \end{aligned} \right\} \dots (127)$$

Werden für ΔB und l mit Hilfe der Gl. (78) X und Y eingeführt, dann folgt

$$\left. \begin{aligned} \delta X &= \frac{\eta_0^2}{6N_0^2} X^3 + \frac{t_0(1-3\eta_0^2-4\eta_0^4)}{24N_0^3} X^4 - \frac{t_0 \eta_0^2}{4N_0^3} X^2 Y^2 \\ \delta Y &= -\frac{\eta_0^2 t_0}{6N_0^3} X^3 Y \end{aligned} \right\} \dots (128)$$

Mit Vernachlässigung von η_0^2 in den Gliedern 4. Ordnung, findet man

$$\left. \begin{aligned} \delta X &= \frac{\eta_0^2}{6N_0^2} X^3 + \frac{t_0}{24N_0^3} X^4 \\ \delta Y &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (129)$$

Die Näherungsformeln (129) bedingen für Frankreich Abweichungen von höchstens 2 cm gegenüber den Gl. (128). Sie genügen daher den meisten praktischen Anforderungen.

Die Berücksichtigung von δX , das höchstens 0,40 m erreicht, erfolgt im Bedarfsfalle am besten graphisch. In eine kleinmaßstäbliche Karte von Frankreich werden die zur Y -Achse parallelen Geraden $\delta X = \text{konstant}$ von cm zu cm eingezeichnet. Die Entnahme von δX auf cm kann für jeden Punkt leicht erfolgen. Noch genauer können die nach Gl. (124) berechneten Werte $\delta \Delta R$ der Konstruktion der Linien gleicher $\delta X = \delta \Delta R$ zu Grunde gelegt werden.

Die Formeln (125) bis (128) können zur Ableitung der Ausdrücke für das Halbmessergesetz und für die rechtwinkligen Koordinaten der genäherten Projektion als Funktionen der geographischen bzw. rechtwinkligen Koordinaten verwendet werden. Da jedoch diese Beziehungen in der Praxis nicht benötigt werden, wird von ihrer Entwicklung abgesehen.

8. Die Untersuchung des Schnittkegels

Von mehr theoretischer Bedeutung ist die Frage, welche Parallelkreise bei den von Frankreich angenommenen Lambertprojektionen längentreu abgebildet werden. Die Berechnung des Verjüngungsfaktors f läßt erkennen, daß diese Parallelkreise etwa in den Breiten $\pm 1^\circ$ beiderseits der Mittelparallelkreise liegen.

Bei der durch maßstäbliche Verkleinerung der Berührungskegelprojektion entstandenen Schnittkegelprojektion werden die geographischen Längen nach unverändertem Gesetz

$$\gamma = l \cdot \sin B_0$$

übertragen. Die Breiten der längentreu abgebildeten Parallelkreise werden mit B_1 und B_2 bezeichnet. Größen, die durch Multiplikation mit f verkleinert wurden, werden mit dem Exponenten „*“ versehen. Es ergibt sich unmittelbar

$$2\pi \cdot N_1 \cos B_1 = 2\pi \sin B_0 R_1^*$$

$$2\pi \cdot N_2 \cos B_2 = 2\pi \sin B_0 R_2^*$$

oder

$$\left. \begin{aligned} N_1 \cos B_1 &= \sin B_0 \cdot R_1^* \\ N_2 \cos B_2 &= \sin B_0 \cdot R_2^* \end{aligned} \right\} \dots (130)$$

Die Auflösung der Gl. (130) erfolgt durch Einführung von Näherungswerten $B_{1,0}$ von B_1 und $B_{2,0}$ von B_2 mit Hilfe von bis zu Gliedern 2. Ordnung entwickelten Reihen. Es ist

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_{1,0} + \delta B_1 \\ B_2 &= B_{2,0} + \delta B_2 \end{aligned} \right\} \dots (131)$$

oder allgemein

$$B_i = B_{i,0} + \delta B_i$$

$N_i \cos B_i$ wird nun an der Stelle $B_{i,0}$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt. Es ergibt sich

$$N_i \cos B_i = N_{i,0} \cos B_{i,0} - M_{i,0} \sin B_{i,0} \delta B_i - M_{i,0} \cos B_{i,0} (1 + 3\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2) \frac{\delta B_i^2}{2} \dots (132)$$

Für R_i^* ist zu setzen

$$R_i^* = R_0^* - \Delta R^* = R_0^* - f \left(\beta_i + \frac{\beta_i^3}{6N_0^2} \right) \dots (133)$$

Der $B_{i,0}$ entsprechende Meridianbogen ist $\beta_{i,0}$ und es ist

$$\beta_i = \beta_{i,0} + \delta \beta_i$$

$\delta \beta_i$ ist der δB_i entsprechende kleine Meridianbogen zwischen den Breiten $B_{i,0}$ und B_i . Es ist

$$\delta \beta_i = M_{i,0} \delta B_i + \frac{3}{2} \frac{M_{i,0}}{V_{i,0}^2} \gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2 \delta B_i^2 \dots (134)$$

Aus Gl. (132) und (134) leitet man für R_i^* folgenden Ausdruck ab:

$$R_i^* = R_0^* - f \left\{ M_{i,0} \left(1 + \frac{\beta_{i,0}^2}{2N_0^2} \right) \delta B_i + 3M_{i,0} \left(\frac{\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2}{2V_{i,0}^2} + \frac{\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2}{4V_{i,0}^2 N_0^2} \beta_{i,0}^2 + \frac{M_{i,0}}{6N_0^2} \beta_{i,0} \right) \delta B_i^2 \right\}.$$

Mit

$$1 + \frac{\beta_{i,0}^2}{2N_0^2} = m_{i,0}$$

folgt:

$$R_i^* \sin B_0 = R_{i,0}^* \sin B_0 - f M_{i,0} \sin B_0 \left\{ m_{i,0} \delta B_i + 3 \left(\frac{\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2}{V_{i,0}^2} m_{i,0} + \frac{\beta_{i,0} M_{i,0}}{3N_0^2} \right) \frac{\delta B_i^2}{2} \right\} \dots (135)$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse (132) und (135) in die Gleichung (130) ergibt sich die quadratische Bestimmungsgleichung für δB_i

$$(\sin B_{i,0} - f m_{i,0} B_0) \delta B_i + \left\{ \cos B_{i,0} (1 + 3\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2) - 3f \sin B_0 \left(\frac{\gamma_{i,0}^2 t_{i,0}^2}{V_{i,0}^2} m_{i,0} + \frac{\beta_{i,0} M_{i,0}}{3N_0^2} \right) \right\} \frac{\delta B_i^2}{2} + \left\{ + V_{i,0}^2 \cotg B_{i,0} (f \sin B_0 - \sin B_{i,0}) \right\} = 0 \quad (136)$$

Als Beispiel wird das Koordinatensystem Lambert I Zone Nord und das Clarkesche Ellipsoid gewählt: Es werden $B_0 = 55^\circ$, $B_{1,0} = 54^\circ$ und $B_{2,0} = 56^\circ$ angenommen. Die Auflösung der Gl. (136) ergibt

$$\begin{aligned} \delta B_1 &= -19^{\text{cc}}21 \\ \delta B_2 &= -45^{\text{cc}}90 \end{aligned}$$

Also werden in Wirklichkeit die Parallelkreise

$$\begin{aligned} B_1 &= 53^{\text{ff}}9980,79 \\ B_2 &= 55^{\text{ff}}9954,10 \end{aligned}$$

längentreu abgebildet.

IV. Die gegenseitigen Beziehungen der französischen Koordinatensysteme

1. Umrechnung der Lambertkoordinaten von neuem zu neuem System

Unter Voraussetzung gleicher, geodätischer Grundlagen lassen sich die Beziehungen zwischen zwei streng konformen Lambertschen Koordinatensystemen z' und z'' durch folgende analytische Funktion angeben:

$$z'' = \alpha z'^\beta \dots (137)$$

Bei dieser Abbildung entsprechen sich die in Abb. 10 dargestellten Sektoren, wobei die Parallelkreisbilder der z' -Ebene wieder in konzentrische Kreisbogen der z'' -Ebene und die Meridianbilder der z' -Ebene in Radien der Parallelkreisbilder der z'' -Ebene übergehen. Der Mittelmeridian ist für beide Abbildungen des Ellipsoides derselbe.

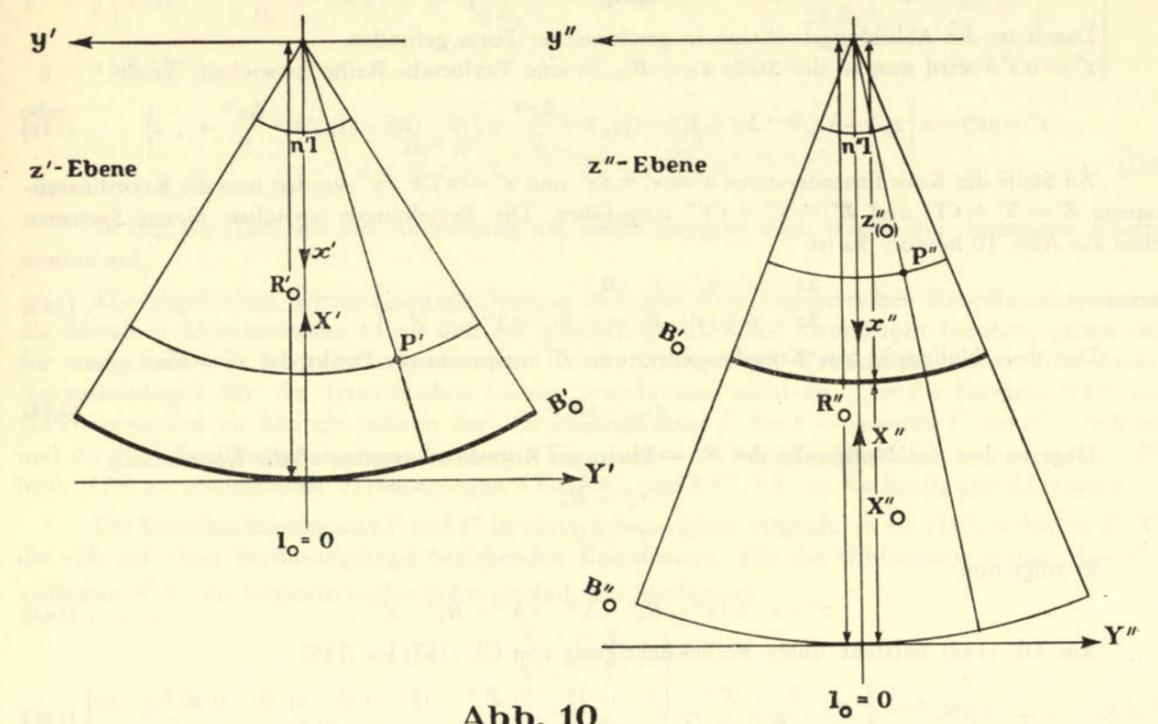


Abb. 10

Die Konstanten α und β werden aus Gl. (55), die sowohl auf die z' -, als auch auf die z'' -Ebene angewandt werden kann, ermittelt. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} z' &= -k' e^{-n'\zeta} \\ z'' &= -k'' e^{-n''\zeta} \end{aligned} \right\} \dots (138)$$

Wird von Berührungskegelprojektionen ausgegangen, dann ist nach Gl. (63)

$$\left. \begin{aligned} k' &= -R_0' e^{n'q_0'} \\ k'' &= -R_0'' e^{n''q_0''} \\ n' &= \sin B_0' \\ n'' &= \sin B_0'' \end{aligned} \right\} \dots (139)$$

Aus den Gl. (138) kann $\xi = q + il$ eliminiert werden. Es folgt

$$\zeta = -\frac{1}{n'} \ln \left(-\frac{z'}{k'} \right) = -\frac{1}{n''} \ln \left(-\frac{z''}{k''} \right)$$

oder

$$z'' = -\frac{k''}{(-k')^{\frac{n''}{n'}}} z'^{\frac{n''}{n'}} \dots (140)$$

Durch Vergleichung der Gl. (140) mit (137) findet man:

$$\alpha = -\frac{k''}{(-k')^{\frac{n''}{n'}}}; \quad \beta = \frac{n''}{n'}$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (139) folgt daraus

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{R_0''}{R_0'^\beta} e^{n''(q_0''-q_0')} \\ \beta &= \frac{\sin B_0''}{\sin B_0'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (141)$$

Damit ist die Abbildungsfunktion in geschlossener Form gefunden.

$z'' = \alpha z' \beta$ wird nun an der Stelle $z'_0 = R'_0$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt. Es ist

$$z'' = \alpha z' \beta = \alpha \left\{ z'_0 \beta + \beta z'_0 \beta^{-1} \Delta z' + \beta(\beta-1) z'_0 \beta^{-2} \frac{\Delta z'^2}{2} + \beta(\beta-1)(\beta-2) z'_0 \beta^{-3} \frac{\Delta z'^3}{6} + \dots \right\} \dots (142)$$

An Stelle der Koordinatensysteme $z' = x' + i y'$ und $z'' = x'' + i y''$ werden nun die Koordinatensysteme $Z' = X' + i Y'$ und $Z'' = X'' + i Y''$ eingeführt. Die Beziehungen zwischen diesen Systemen gehen aus Abb. 10 hervor. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta z' &= z' - z'_0 = z' - R'_0 \\ \Delta z' &= x' + i y' - R'_0 = -X' - i Y' = -Z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (143)$$

Der dem Nullpunkt des Koordinatensystems Z' entsprechende Punkt der z'' -Ebene ist

$$z''_{(0)} = \alpha R_0' \beta \dots \dots \dots (144)$$

Dagegen hat der Nullpunkt der Z'' -Ebene im Koordinatensystem z'' die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_0'' &= R_0'' \\ y_0'' &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt nun

$$z'' = x'' + i y'' = R_0'' - X'' - i Y'' = R_0'' - Z'' \dots \dots \dots (145)$$

Aus Gl. (142) entsteht unter Berücksichtigung von Gl. (143) bis (145)

$$Z'' = R_0'' - z''_{(0)} + \alpha \beta R_0' \beta^{-1} \left\{ Z' - \frac{\beta-1}{R_0'} \frac{Z'^2}{2} + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{R_0'^2} \frac{Z'^3}{6} - \frac{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{R_0'^3} \frac{Z'^4}{24} + \dots \right\} (146)$$

$R_0 - z''_{(0)}$ ist die Strecke zwischen dem Nullpunkt des Z'' -Systems und dem Bild des Nullpunktes des Z' -Systems.

$R_0 - z''_{(0)}$ wird mit X''_0 bezeichnet.

Um die Trennung des reellen und imaginären Teiles von Gl. (146) vorzubereiten, werden berechnet:

$$\begin{aligned} Z' &= X' + i Y' \\ Z'^2 &= X'^2 + 2i X' Y' - Y'^2 \\ Z'^3 &= X'^3 + 3i X'^2 Y' - 3X' Y'^2 - i Y'^3 \\ Z'^4 &= X'^4 + 4i X'^3 Y' - 6X'^2 Y'^2 - 4i X' Y'^3 + Y'^4 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in die Funktion (146) ergibt die Trennung des reellen und imaginären Teiles:

$$\left. \begin{aligned} X'' &= X_0'' + g \left\{ X' - \frac{\beta-1}{2R_0'} (X'^2 - Y'^2) + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2} (X'^3 - 3X' Y'^2) - \frac{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{24R_0'^3} (X'^4 - 6X'^2 Y'^2 + Y'^4) \right\} \\ Y'' &= g \left\{ Y' - \frac{\beta-1}{2R_0'} 2X' Y' + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2} (3X'^2 Y' - Y'^3) - \frac{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{24R_0'^3} (4X'^3 Y' - 4X' Y'^3) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (147)$$

Werden in Gl. (147) mittels der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} X' &= s' \cos t' \\ Y' &= s' \sin t' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (148)$$

Polarkoordinaten eingeführt, dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} X'' &= X''_0 + g \left\{ s' \cos t' - \frac{\beta-1}{2R_0'} s'^2 \cos 2t' + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2} s'^3 \cos 3t' - \frac{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{24R_0'^3} \cos 4t' \right\} \\ Y'' &= g \left\{ s' \sin t' - \frac{\beta-1}{2R_0'} s'^2 \sin 2t' + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2} s'^3 \sin 3t' - \frac{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{24R_0'^3} \sin 4t' \right\} \\ g &= \alpha \beta R_0' \beta^{-1} \end{aligned} \right\} (149)$$

oder

$$g = \frac{R_0'' n''}{R_0' n'} e^{n''(q_0''-q_0')} = \frac{p_0''}{p_0'} e^{n''(q_0''-q_0')} \dots \dots \dots (150)$$

In den Gl. (149), die zur Auswertung am besten geeignet sind, treten nur konstante Koeffizienten auf.

Die abgeleiteten Übertragungsgleichungen zwischen zwei Lambertischen Koordinatensystemen, die denselben Mittelmeridian haben und auf gleichen geodätischen Grundlagen beruhen, gelten nur für streng konforme Koordinatensysteme und für Berührungskegel. Tatsächlich treffen diese beiden Voraussetzungen für die französischen Lambertprojektionen nicht zu. Um die Formeln (147) und (149) verwenden zu können, müssen der Verjüngungsfaktor f' des z' -Systems, f'' des z'' -Systems und die zur Überführung in streng konforme Koordinaten zu berücksichtigenden und nach Gl. (128) bzw. (129) zu ermittelnden Verbesserungen $\delta Y'$, $\delta X'$ und $\delta Y''$, $\delta X''$ in Rechnung gestellt werden.

Die Berücksichtigung von f' und f'' ist ohne Schwierigkeit möglich. In Gl. (147) bedeuten X' , Y' , die sich auf einen Berührungskegel beziehenden Koordinaten. Für die Umformung stehen aber Koordinaten \bar{X}' , \bar{Y}' , die folgendermaßen definiert sind, zur Verfügung

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}' &= f' X' \\ \bar{Y}' &= f' Y' \\ \bar{X}'' &= f'' X'' \\ \bar{Y}'' &= f'' Y'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

In Gl. (147) wird also für $X' = \frac{\bar{X}'}{f'}$ und für $Y' = \frac{\bar{Y}'}{f'}$ eingeführt. In Z'' -System erhält man die Berührungskegel-Koordinaten X'' , Y'' während in Wirklichkeit \bar{X}'' , \bar{Y}'' gesucht sind. Man findet \bar{X}'' , \bar{Y}'' , indem man die rechte Seite von (147) noch mit f'' multipliziert. Die Werte f' und f'' können in die Koeffizienten übernommen werden. Dadurch entsteht die Form der Übertragungsgleichungen, die unmittelbar Schnittkegelkoordinaten einzusetzen und zu berechnen erlaubt. Es ist z. B.

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}'' &= f'' X_0'' + \frac{f'' g}{f'} \left\{ \bar{X}' - \frac{\beta-1}{2R_0' f'} (\bar{X}'^2 - \bar{Y}'^2) + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2 f'^2} (\bar{X}'^3 - 3\bar{X}' \bar{Y}'^2) - \dots \right\} \\ \bar{Y}'' &= \frac{f'' g}{f'} \left\{ \bar{Y}' - \frac{\beta-1}{2R_0' f'} 2\bar{X}' \bar{Y}' + \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{6R_0'^2 f'^2} (\bar{X}'^3 - 3\bar{X}' \bar{Y}'^2) - \dots \right\} \end{aligned} \right\} (147')$$

Die Koordinaten \bar{X}' , \bar{Y}' und \bar{X}'' , \bar{Y}'' sind noch nicht die gegebenen oder gesuchten französischen Lambert-Koordinaten. Die genähert konformen Koordinaten werden mit \bar{X}' , \bar{Y}' , X'' , \bar{Y}'' bezeichnet. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}' &= \bar{X}' + \delta X' \\ \bar{Y}' &= \bar{Y}' + \delta Y' = \bar{Y}' \\ \bar{X}'' &= \bar{X}'' + \delta X'' \\ \bar{Y}'' &= \bar{Y}'' + \delta Y'' = \bar{Y}'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (152)$$

Der weiteren Betrachtung werden die vereinfachten Ausdrücke (129) zu Grunde gelegt. Ferner werden die Glieder mit 2. und höheren Potenzen von $\delta X'$ und $\delta Y'$ vernachlässigt. Setzt man die

Gleichung (152) in (147') ein, dann findet man, daß auf der rechten Seite der Gleichung (147') folgende genäherten Ausdrücke addiert werden müssen, um die genähert konformen Koordinaten einsetzen zu können und zu erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \text{In } \bar{X}'' & \quad \frac{f''}{f'} g \delta X' - \delta X'' + \frac{f''}{f'} g \frac{\beta-1}{R_0' f'} \bar{X}' \delta X' \\ \text{In } \bar{Y}'' & \quad -\frac{f''}{f'} g \frac{\beta-1}{R_0' f'} \bar{Y}' \delta X' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (153)$$

Die Größen $\delta X'$ und $\delta X''$ werden aus graphischen Tafeln entnommen. Sie können zur Berechnung der Ausdrücke (153) benutzt oder unmittelbar an den französischen Koordinaten angebracht werden. Im letzteren Falle sind die französischen Hochwerte vor der Umrechnung nach Gl. (147') um $\delta X'$ zu verbessern. Das Ergebnis \bar{X}'' ist um $\delta X''$ zu verringern, um den genäherten Hochwert des zweiten Systems zu erhalten.

Für umfangreiche Umformungen, wie sie in den Überlappungszonen zu erwarten sind, werden zweckmäßig an Hand der gegebenen Entwicklungen Tafeln für die Umrechnung durch Interpolation aufgestellt. Diese Tafeln geben von 10 zu 10 km des einen Systems die Koordinaten des Nachbarsystems und die benötigten ersten und zweiten Differenzen.

2. Übergang von alten zu neuen geodätischen Grundlagen

Bis zur Fertigstellung der neuen französischen Triangulation und der neuen Karte von Frankreich müssen die auf alten und neuen geodätischen Grundlagen beruhenden Koordinaten und Karten nebeneinander verwendet werden. Die vom größten Teil Frankreichs zur Verfügung stehenden Unterlagen haben die alte Triangulation der Ingenieur-Geographen als Grundlage. Dagegen beruhen die Koordinaten und Karten der Gebiete, die von der Neutriangulation gedeckt sind, teils auf alten, teils auf neuen Grundlagen. Aus militärischen Gründen sah sich der S. G. A. veranlaßt, die dichten Dreiecksnetze des Weltkrieges, die in Nord- und Ostfrankreich auf alter Grundlage bestimmt worden waren, vorerst beizubehalten. Um die auf alten und neuen geodätischen Grundlagen aufgebauten Karten und Koordinatensysteme gleichzeitig verwenden zu können, führte der S. G. A. zunächst eine Umformung der auf alten Grundlagen beruhenden geographischen Koordinaten in das System der neuen Triangulation durch.

Die Formeln wurden ohne Berücksichtigung der Triangulationsergebnisse lediglich auf Grund der Änderung der Ausgangswerte der geographischen Breite und Länge, des Ausgangszimuts und der Ellipsoidskonstanten infolge des Überganges vom Delambreschen auf das Clarkesche Ellipsoid entwickelt. Im Sinne von Verbesserungen der alten Ausgangswerte sind

die Breitenänderung	$dB_0 = -6^{\text{cc}}37$	
„ Längenänderung	$dl_0 = -0^{\text{cc}}12$	(ostw. Längen sind negativ)
„ Azimutänderung	$d\alpha_0 = +5^{\text{cc}}62$	
„ Änderung der großen Halbachse	$da = +1264,2 \text{ m}$	
„ Änderung der ersten Exzentrizität	$de^2 = +0.00033398764$	

Für die Breiten- und Längenänderung eines beliebigen Punktes wurde folgende Taylorsche Reihe, die sich auf lineare Glieder beschränkt, angesetzt:

$$\left. \begin{aligned} dB &= \frac{\partial B}{\partial B_0} dB_0 + \frac{\partial B}{\partial l_0} dl_0 + \frac{\partial B}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 + \frac{\partial B}{\partial e^2} de^2 + \frac{\partial B}{\partial a} da \\ dl &= \frac{\partial l}{\partial B_0} dB_0 + \frac{\partial l}{\partial l_0} dl_0 + \frac{\partial l}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 + \frac{\partial l}{\partial e^2} de^2 + \frac{\partial l}{\partial a} da \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (154)$$

Das Endergebnis stimmt im wesentlichen mit den in der deutschen Fachliteratur wiederholt behandelten Lösungen dieses Problems überein. Zuletzt gab K. Hristow in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1942, Heft 5, eine genaue Ableitung des Problems, die Änderung der geographischen

Koordinaten infolge Umorientierung eines geodätischen Netzes und Überganges zu einem anderen Referenzellipsoid, zu bestimmen.

Der S. G. A. berechnete auf Grund seiner Formeln Tafeln, die für geographische Breiten und Längen von 0,2 zu 0,2 Neugrad die Werte für dB und dl angeben. Die Tafel wurde auf den Bereich von $B = 46^{\text{s}}$ bis 58^{s} und $l = -8^{\text{s}}$ bis $+8^{\text{s}}$ ausgedehnt.

Für kartographische Zwecke wurden in einer weiteren Tafel die Verbesserungen der Lambert'schen Koordinaten infolge des Überganges auf die neuen Grundlagen von Grad zu Grad in Breite und Länge zusammengestellt. Diese zweite Tafel dient zur Ermittlung der Verschiebungen der geographischen Netzlinien in Karten, die auf alten geodätischen Grundlagen beruhen, um sie mit der neuen Triangulation in Einklang zu bringen. Die Projektionstafeln für die neuen Lambertprojektionen können im Zusammenhang mit auf alten Grundlagen beruhenden Karten nur angewandt werden, wenn entweder die geographischen Netzlinien auf die neuen Grundlagen bezogen, also in der Karte verschoben werden, oder wenn die Koordinaten der Projektionstafeln um die in der hier behandelten zweiten Tafel angegebenen Werte verändert werden, bevor sie mit diesen Karten in Beziehung gebracht werden.

Das für die Angleichung der alten an die neue Triangulation angewandte einfache theoretische Verfahren kann wegen der in beiden Netzen vorhandenen Fehler größere Abweichungen zwischen im Neunetz bestimmten und umgerechneten identischen Altnetzpunkten ergeben.

Die Ableitung der Formeln und die Tafeln sind im Tome III des „Mémorial du Service Géographique de l'Armée“ 1930 und in dem Heft Literaturverzeichnis (5) veröffentlicht.

Für die Zwecke der deutschen Heeresvermessung wurden mit Hilfe der hier erläuterten Tafeln Nomogramme bearbeitet und in die Anlage 30 zum Planheft Frankreich 1940 aufgenommen.

3. Umrechnung von Koordinaten des Systems Lambert I Zone Nord in Lambert Nord de Guerre (table Générale).

Das System Lambert Nord de Guerre hat das Ellipsoid von Plessis und das Koordinatensystem Lambert I Zone Nord das Clarkesche Ellipsoid zur Ausgangsfläche. Die im Weltkriege bestimmten Koordinaten des Systems Nord de Guerre beruhen ausschließlich auf der alten franz. Triangulation. Sie wurden durch Umrechnung der alten geographischen Koordinaten mit Hilfe der Projektionstafeln bzw. durch Verdichtung eines auf diesem Wege ermittelten Festpunktnetzes bestimmt.

Vor Ausbruch des jetzigen Krieges wurden sämtliche in Ost- und Nordfrankreich bestimmten Festpunkte der neuen Triangulation außer im System Lambert I auch im System Nord de Guerre berechnet. Für die Umrechnung der Koordinaten von Lambert I Zone Nord nach Lambert Nord de Guerre wurden Tafeln aufgestellt. Um diese in Nord de Guerre festzulegenden Punkte der neuen Triangulation mit den Nord-de-Guerre-Koordinaten, die aus der Triangulation der Ingenieur-Geographen stammen, möglichst in Einklang zu bringen, wurden die Tafeln auf Grund von in der alten und neuen Triangulation identischen Punkten I. Ordnung berechnet. In den Jahren 1930—1935 wurden fünf örtliche Tafeln für diese Umrechnungsarbeit angewandt. Die örtlichen Tafeln standen unter sich jedoch nicht vollkommen in Einklang und beruhen teilweise auf unsicheren Ergebnissen für die neue Triangulation. Sie wurden aber für die Aufstellung der Koordinatenhefte des Nordostens Frankreichs benutzt. Zu den 5 örtlichen Tafeln wurden zunächst ergänzende Rechentafeln, die eine gegenseitige Übereinstimmung sichern sollten, aufgestellt.

Im Jahre 1937 wurde für ganz Nordostfrankreich eine allgemeine Transformationstafel eingeführt. Diese „Table générale de transformation des coordonnées Lambert I Zone Nord en coordonnées Nord de Guerre 1937“ gibt von 10 zu 10 km der Koordinaten des Systems Lambert I die zugehörigen Koordinaten des Systems Nord de Guerre. Ferner enthält die Tafel die für eine lineare Interpolation benötigten ersten Differenzen.

Sind X, Y die Koordinaten der Zone Nord und x, y der Zone Nord de Guerre, so enthalten die Tafeln die Werte von X und Y von 10 zu 10 km als Eingänge, die ihnen entsprechende Koordinaten x_0, y_0 und die Differenzen $\Delta x_X, \Delta x_Y, \Delta y_X$ und Δy_Y .

Die Umrechnung der Punkte X, Y erfolgt nach der Interpolationsformel

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + n' \Delta x_X + n \Delta x_Y \\ y &= y_0 + n' \Delta y_X + n \Delta y_Y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (155)$$

n' ist der Zuschlag von X_0 und n von Y_0 , wenn X_0, Y_0 die x_0, y_0 entsprechenden Koordinaten der Zone Nord bedeuten. Es ist

$$\begin{aligned} X &= X_0 + n' \\ Y &= Y_0 + n \end{aligned}$$

Nach dem Jahre 1937 wurden Umformungen von Lambert I nach Lambert Nord de Guerre nur noch mit der „Table Générale“ ausgeführt. Die Ergebnisse früherer Umformungen wurden jedoch beibehalten, obwohl Differenzen von 2 bis 3 m gegenüber der Berechnung nach 1937 möglich sind.

4. Französische Koordinatenverzeichnisse und Karten

Die Verhältnisse liegen bezüglich der Karten relativ einfach. Wie bereits ausgeführt, gibt es französische Kartenwerke, die auf alten und solche die auf neuen geodätischen Grundlagen beruhen. Es kommt häufig vor, daß auf alten Grundlagen beruhende Karten Gitternetze der neuen Koordinatensysteme und auf neuen Grundlagen entworfene Karten das Gitternetz der Zone Nord de Guerre tragen. Z. B. gibt es Blätter der Karte von Frankreich 1:80 000, die mit Gitternetzen der Systeme Lambert I Zone Nord oder Lambert Nord de Guerre versehen sind. Ferner trägt der größte Teil der fertiggestellten Blätter der neuen Karte von Frankreich 1:50 000 das Gitternetz der Zone Nord de Guerre.

Mit Hilfe der die theoretisch ermittelten Unterschiede zwischen alter und neuer Triangulation enthaltenden Tafeln können die Verschiebungen, die an den geographischen Netzlinien der Karten oder an den Blatteckenwerten vorzunehmen sind, wenn Karten alten Ursprungs mit neuen oder Karten neuer Grundlagen mit alten Systemen entsprechenden Gitternetzen versehen werden sollen, berechnet werden. Diese Zusammenhänge sind in den Anlagen 30 zum Planheft Frankreich, „Blatteckenwerte zum Eintragen des deutschen Gauß-Krüger-Gitternetzes des 2. Meridianstreifens in die Kartenwerke 1:20 000 (25 000) und 1:50 000 von Frankreich“ und 34, „Anweisung für den Gebrauch der Karten 1:25 000, 1:50 000 und 1:80 000 und der Koordinatenverzeichnisse von Nord- und Ostfrankreich“ eindeutig klargelegt.

Die Unterschiede zwischen den nach verschiedenen Verfahren ermittelten Koordinaten der Systeme Nord de Guerre, Lambert I Zone Nord usw. sind vom kartographischen Standpunkt i. a. bedeutungslos.

Die in Koordinatenlisten und -Heften des S. G. A. vorhandenen koordinatenmäßigen Originalunterlagen besitzen eine große Vielfalt des Ursprunges und der Wertigkeit. Während des letzten Weltkrieges waren die Verhältnisse noch eindeutig und übersichtlich. Es bestanden lediglich Koordinatenverzeichnisse, die auf alten geodätischen Grundlagen beruhten, da die lückenhaften Ergebnisse der Neutriangulation noch keine Verwertung erlaubten. Mit fortschreitender Neutriangulation und mit Einführung der neuen Koordinatensysteme, sowie der Umrechnungsverfahren zur Angleichung der alten an die neuen Triangulationsergebnisse und von Lambert I Zone Nord an Lambert Nord de Guerre, wuchs auch die Anzahl der verschiedenartigen Koordinatenverzeichnisse.

Im begreiflichen Bestreben, stets die erforderlichen Koordinatenverzeichnisse bereit zu haben, wurden teilweise auch vorläufige Koordinaten der Neutriangulation in Koordinatenverzeichnisse aufgenommen. Diese Anhäufung von Koordinaten verschiedenster Herkunft trug naturgemäß nicht zur Schaffung klarer geodätischer Verhältnisse in Nord- und Ostfrankreich bei.

Ohne auf die einzelnen Koordinatenverzeichnisse, Hefte und Listen näher einzugehen, seien die Koordinaten, mit denen die deutsche Heeresvermessung zu rechnen hat, hinsichtlich ihrer Entstehung zusammenfassend behandelt. Die Betrachtungen werden auf die Systeme Lambert I Zone Nord und Lambert Zone Nord de Guerre beschränkt. Für die übrigen französischen Koordinatensysteme treten keine weiteren Gesichtspunkte hinzu.

1. Es bestehen französische Koordinatenverzeichnisse, die folgende Werte für Nord de Guerre enthalten:

a) Aus geographischen Koordinaten der Triangulation der Ingenieur-Geographen mit Hilfe der Projektionstafel für Nord de Guerre berechnete Werte und ihre hauptsächlich im Weltkriege durch ebene Berechnung bestimmten Verdichtungspunkte.

- b) Aus der neuen franz. Triangulation mit Hilfe der „Table générale“ ermittelte Nord de Guerre Koordinaten.
 c) Koordinaten, die mittels einer vor Einführung der „Table générale“ gebräuchlichen Tafel aus Werten der neuen Triangulation berechnet wurden.
 d) Aus vorläufigen Koordinaten der neuen Triangulation errechnete Werte.
 e) (Der weiter noch mögliche und naheliegende Weg, die geographischen Koordinaten der I. G. auf die neuen geodätischen Grundlagen umzuformen und aus diesen Werten mit Hilfe der Projektionstafeln zunächst Koordinaten des Systems Lambert I und daraus mittels der „Table générale“ Koordinaten des Systems Nord de Guerre zu berechnen, wurde nicht besprochen.)

Die Koordinaten b) bis d) wurden stets zusammen verwendet, dagegen wurden sie nur im dringenden Bedarfsfalle gemeinsam mit den Koordinaten a) benutzt.

2. Für das Koordinatensystem Lambert I Zone Nord bestehen folgende Koordinatenverzeichnisse.

- a) Aus geographischen Koordinaten der alten Triangulation der I. G. auf Grund der Korrektortafeln an die neue Triangulation angeglichen und mit Hilfe der Projektionstafeln in das System Lambert I umgerechnete Werte (angeglichene Koordinaten der alten Triangulation).
 b) Die Ergebnisse der neuen Triangulation, wobei auch vorläufige Koordinaten verwendet wurden.

Die Koordinaten unter a) und b) wurden nur in dringenden Fällen gemeinsam verwendet.

Ein Beispiel zeigt diese Verhältnisse anschaulich. Es werden aus sämtlichen in Gebrauch stehenden Koordinatenverzeichnissen die Koordinaten der Festpunkte Huppy (I. O.) und Rambures (II. O.) zusammengestellt und es wird deren Ursprung nachgewiesen.

	Huppy		Rambures	
	1. Alte Triangulation			
a) Geogr. Koordinaten	55 ^g 58660	+0 ^g 63237	55 ^g 49475	+0 ^g 69908
	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
b) Nord de Guerre	73 060,6	375 597,5	68 041,8	366 781,4
c) Lambert I Nord	559 235,1	258 784,0	554 857,8	249 626,1
	2. Neue Triangulation			
d) Geogr. Koordinaten	55,5857495	+0,6321778	—	—
	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
e) Nord de Guerre	73 062,9	375 596,4	68 044,5	366 781,1
f) Lambert I Nord	559 232,61	258 782,48	554 856,5	249 626,0

3. Berechnungen

- g) Die Umformung von a) in Nord de Guerre mit Hilfe der Transformationstafel ergibt

	Huppy		Rambures	
	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
Nord de Guerre	73 061,8	375 598,6	68 042,2	366 781,4

In der alten Triangulation entstanden die Koordinaten b) demnach aus a) durch Umformung mittels der Projektionstafel, wobei bei Huppy etwas andere Ausgangswerte vorlagen, als in den vorhandenen Listen a) angegeben sind.

- h) Die Koordinaten a) werden auf neue geodätische Grundlagen umgerechnet. Es folgen

$$dB = -8^{\text{cc}}337, \quad dL = -2^{\text{cc}}308 \quad | \quad dB = -8^{\text{cc}}187, \quad dL = -2^{\text{cc}}496$$

$$\text{Geogr. Koordinaten} \quad 55^{\text{g}}5857663 + 0^{\text{g}}6321392 \quad 55^{\text{g}}4939313 + 0^{\text{g}}6988304$$

- i) Die geographischen Koordinaten h) werden mit Hilfe der Transformationstafeln in Koordinaten Lambert I, umgerechnet

	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
Lambert I, Nord	559 235,1	258 784,1	554 857,8	249 626,2

Die Koordinaten Lambert I der alten Triangulation wurden demnach nach dem Verfahren h) und i) ermittelt.

k) Aus i) werden mit der „Table générale“ folgende Werte berechnet

	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
Nord de Guerre	73 065,5	375 597,9	68 045,8	366 781,1

Das unter 1. e) angegebene Verfahren zur Ermittlung der Nord de Guerre Koordinaten wurde also nicht angewandt. Dadurch stehen in den Listen der alten Triangulation die Koordinaten von Nord de Guerre und Lambert I Nord in Widerspruch zur „Table générale“.

l) Aus den Koordinaten des Systems Lambert I der neuen Triangulation werden mit Hilfe der „Table générale“ die Koordinaten des Systems Nord de Guerre berechnet.

	Rechts	Hoch	Rechts	Hoch
Nord de Guerre	73 062,9	375 596,4	68 044,5	366 781,0

In der neuen Triangulation erfolgte die Umrechnung von Lambert I Zone Nord in Lambert Nord de Guerre tatsächlich mit der „Table générale“.

Literaturverzeichnis

1. L. Puissant: Instruction sur l'usage des tables de projection usw., Paris 1821.
2. Mémorial du Dépôt Générale de la Guerre, Tome IV 1828, Seite 13—30 enthält einen Aufsatz von L. Puissant „Notice sur les tables de projection calculées par Plessis . . .“.
3. Extrait des tables de Plessis (Projection de Bonne) avec une préface donnant divers renseignements cartographiques sur la France et les pays limitrophes. Etabli par Hasse pendant la guerre 1914—1918.
4. Ch. H. Deetz, Lambert Projektion Tables with Conversion Tables usw., Washington 1918.
5. Service Géographique de l'Armée, Formules et tables pour la transformation des coordonnées des points de l'ancienne triangulation de la France dans la nouvelle triangulation, Paris, Mai 1922.
6. Service Géographique de l'Armée, Tables de projection, z. B. Système Lambert région nord, longitudes ouest-table III^{bis}, France-Paris 1926.
7. Service Géographique de l'Armée, Mémorial du Service Géographique de l'Armée, Tome III, Paris 1929.
8. Driencourt-Laborde, Traité des Projections des Cartes Géographiques, Premier Fascicule: Théorie générale des projections, Troisième Fascicule: Emploi des projections limitées aux termes du troisième ordre en Géodésie.
9. P. Tardi, Traité de Géodésie, Fascicule 1, Paris 1934.
10. Service Géographique de l'Armée, Rapport sur les travaux exécutés du 1^{er} août 1914 au 31 décembre 1919, Paris 1936.
11. Service Géographique de l'Armée, Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées rectangulaires Lambert et inversement, 1937.
12. Table Générale de transformation des coordonnées Lambert I Zone Nord en coordonnées Nord de Guerre, 1937.
13. Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, Drit ter Band, 1. Halbband 1939 und 2. Halbband 1941.
14. Planheft Frankreich.

Umrechnung der französischen Lambert-Koordinaten in das deutsche Heeresgitter

Von Oberleutnant Dr.-Ing. Bodemüller

Die Arbeit bezweckt die Entwicklung von Formeln und Verfahren, welche mit aller Schärfe auf möglichst einfachem Wege die unmittelbare Umrechnung der französischen Lambert-Koordinaten in die Gauß-Krügerschen Koordinatensysteme des „Deutschen Heeresgitters“ ermöglichen.

Die neue französische Triangulation wurde auf dem Ellipsoid Clarke (1880) und auf Grund geodätischer Ausgangswerte, die von denen des deutschen Einheitssystems um kleine Beträge abweichen, berechnet. Um die wahrscheinlichsten Werte der Abweichungen zu ermitteln, werden zunächst die französischen geographischen Koordinaten durch Überführung vom Clarkeschen auf das Besselsche Ellipsoid mit den geographischen Koordinaten des deutschen Einheitssystems vergleichbar gemacht. Die Unterschiede der geographischen Koordinaten von beiden Netzen gemeinsamen Festpunkten haben ihre Ursache in beiderseitigen Netzfehlern und in den verschiedenen Grundlagen, insbesondere in den Unterschieden der astronomischen Ausgangswerte. Die Angleichung des zu verändernden französischen Festpunktnetzes an das festzuhaltende Einheitssystem erfolgt nun zweckmäßig nach dem Helmertschen Verfahren. Unter völliger Wahrung der Netzform ergibt die auf dem Ellipsoid durchzuführende Helmertsche Anfelderung die wahrscheinlichsten Werte für die Parallelverschiebung, Drehung und Maßstabsänderung des französischen Systems.

Der Grundgedanke für die Entwicklung des Umrechnungsverfahrens besteht darin, daß an den französischen Lambert-Koordinaten vor ihrer Umformung in Gauß-Krügersche alle Verbesserungen angebracht werden, die sie mit dem Deutschen Heeresgitter auf gleiches Ellipsoid und gleiche geodätische Grundlagen bringen und die mathematisch einfache Umrechnungsgleichungen gewährleisten. Alle Verbesserungen werden als Funktionen der französischen Lambert-Koordinaten entwickelt, zusammengefaßt und in numerischen oder graphischen Tafeln dargestellt. Die Gesamtverbesserung enthält den Einfluß

1. des Überganges vom Clarkeschen auf das Besselsche Ellipsoid;
2. der sich aus der Anfelderung ergebenden Parallelverschiebung und Drehstreckung der französischen Triangulation; und
3. der Überführung der vom französischen „Service Géographique de l'Armée“ angewandten genähert konformen in eine streng konforme Abbildung.

Mit Ausnahme der Anfelderung erfolgen bei diesem Vorgehen sämtliche Berechnungen in den Projektionsebenen.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Formeln für den Zusammenhang der Lambertschen und der Gauß-Krügerschen Projektion entwickelt. Im zweiten Teil werden die Ausdrücke für die Verbesserungen der französischen ebenen Koordinaten zwecks Angleichung an das Einheitssystem abgeleitet. In einer weiteren Arbeit werden die mit der praktischen Umrechnung im Zusammenhang stehenden Fragen behandelt.

I. Ableitung der Umrechnungsformeln

Bei der Entwicklung der Umrechnungsformeln kann vorausgesetzt werden, daß die französische Projektion streng konform und mit dem Heeresgitter auf gleiches Ellipsoid und gleiche geodätische Grundlagen bezogen ist.

Es werden folgende allgemeine Bezeichnungen verwandt:

- L Geographische Längen des Bessel-Ellipsoides, bezogen auf den Meridian von Greenwich,
- B Geographische Breiten des Bessel-Ellipsoides,
- l' Geographische Längen in Bezug auf die Nullmeridiane des Heeresgitters,
- l'' Geographische Längen, bezogen auf den Meridian von Paris, der 106,93⁰⁰ westlich des Kreuzes des Panthéon von Paris liegt,
- q Isometrische Breiten,
- x', y' Hoch- und Rechtswerte der Gauß-Krügerschen Projektion, bezogen auf den Schnittpunkt des Nullmeridians des Heeresgitters mit dem Äquator,
- X'', Y'' Hoch- und Rechtswerte der Lambert-Projektion, bezogen auf die Schnittpunkte der Mittelparallelkreise mit dem Meridian von Paris unter Voraussetzung von Berührungskegeln,
- x'', y'' Hoch- und Rechtswerte der Lambert-Projektion, bezogen auf die Bilder der Kegelspitzen als Koordinatennullpunkte,
- L, l', l'' werden nach Osten positiv gezählt.

Auf dem Nullmeridian der Gauß-Krügerschen Projektion wird ein rechnerischer Nullpunkt gewählt, der gleichzeitig auf dem jeweiligen Normalparallel der Lambert-Projektion liegt. Er hat den Gauß-Krügerschen Hochwert x'_0 , die geographische Breite B_0 und die isometrische Breite q_0 . Die auf den rechnerischen Nullpunkt bezogenen Gauß-Krügerschen Hochwerte werden mit $\Delta x'$ und die auf ihn bezogenen isometrischen bzw. geographischen Breitenunterschiede mit Δq bzw. ΔB bezeichnet. Es ist demnach $B = B_0 + \Delta B$ und $q = q_0 + \Delta q$.

Die folgende in der Gauß-Krügerschen Projektionsebene gedachte Abb. 1 zeigt die geometrische Bedeutung der Bezeichnungen.

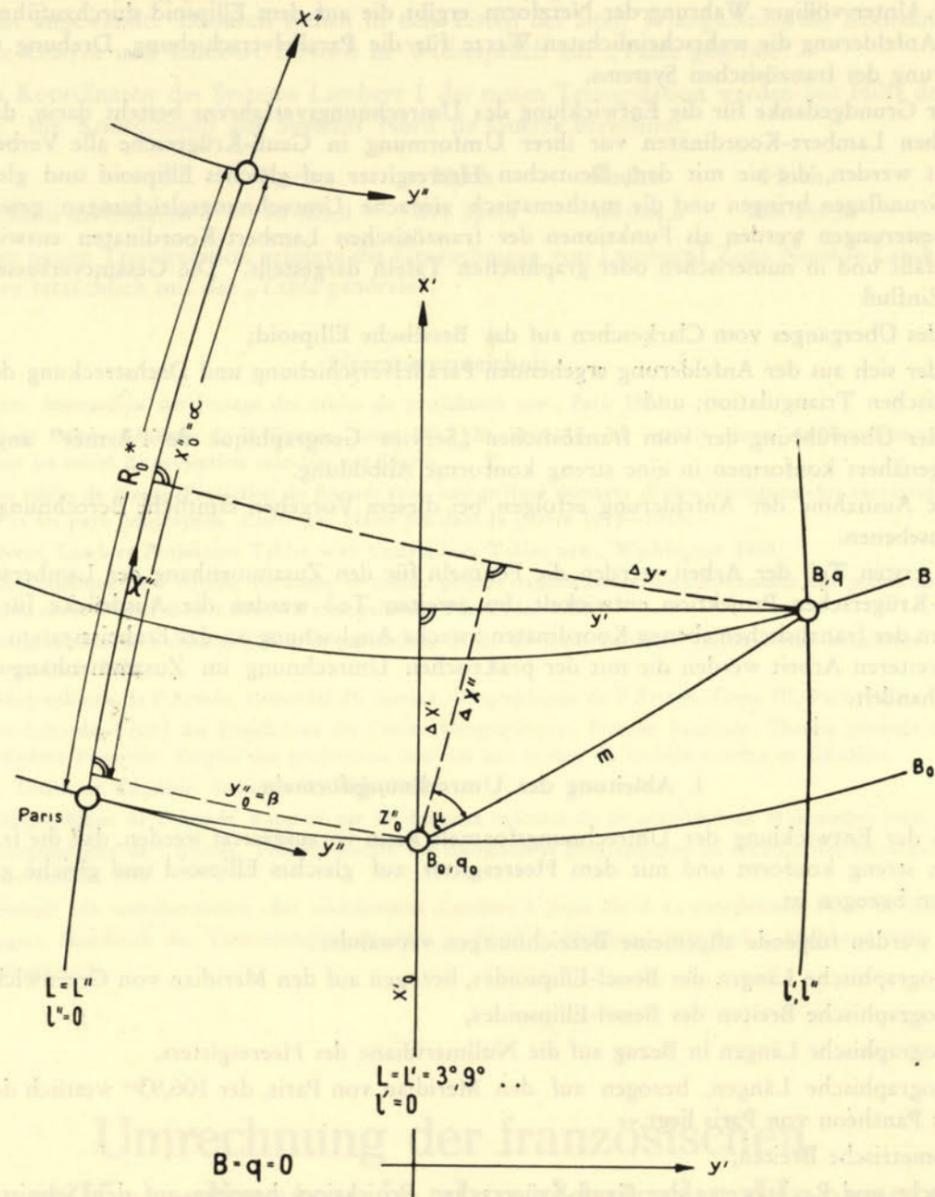


Abbildung 1

Der geographische Längenunterschied zwischen dem Nullmeridian eines Gauß-Krügerschen Systems und dem Nullmeridian der französischen Lambert-Projektionen beträgt:

$$L' - L'' = \lambda$$

Zwischen l' und l'' besteht damit die Beziehung:

$$l' + \lambda = l'' \quad (1)$$

Die komplexen Veränderlichen sind:

$$\left. \begin{aligned} x'' + iy'' = z'' \\ \Delta q + il' = \zeta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Lambert-Projektion ist durch folgende analytische Funktion charakterisiert:¹⁾

$$z'' = -k \cdot e^{-n(q+il'')} \quad (3)$$

Werden die isometrischen Breiten auf den rechnerischen Nullpunkt und die geographischen Längen auf den Nullmeridian des Gauß-Krügerschen Systems bezogen, so folgt aus $q = q_0 + \Delta q$ und Gleichung (1):

$$z'' = -k \cdot e^{-n(q_0 + \Delta q + il')} \cdot e^{-n(\Delta q + il')} \quad (3)$$

Wird ferner $-k \cdot e^{-n(q_0 + il')} = a$ gesetzt, so ergibt sich:

$$z'' = a \cdot e^{-n(\Delta q + il')} \quad (4)$$

Die geometrische Bedeutung der komplexen Konstanten a ist zu erkennen, wenn in (3) Δq und l' gleich Null gesetzt werden. a ist der Wert von z'' im rechnerischen Nullpunkt:

$$a = z''_0$$

Der Funktionswert von z'' für den Projektionsmittelpunkt des Lambert-Systems $l'' = 0$ und $\Delta q = 0$ ergibt sich zu:

$$x'' = -k \cdot e^{-nq_0} = -R_0$$

R_0 ist der Radius des Bildes des Normalparallels für die Berührungskegel-Projektion. Es besteht also die weitere Beziehung:

$$X'' = R_0 + x'' \quad (5)$$

Die Konstanten k und n bestimmen die Kegelprojektion vollständig. Bei konformen Berührungskegel-Projektionen ist bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} k = N_0 \cdot \cotg B_0 \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B_0}{2} \right) \left(\frac{1 - \varepsilon \cdot \sin B_0}{1 + \varepsilon \cdot \sin B_0} \right)^{\frac{\varepsilon n}{2}} \\ n = \sin B_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

N_0 ist der Querkrümmungshalbmesser in der Breite B_0 und ε die erste Exzentrizität des Besselschen Ellipsoides.

Von Gleichung (4) ausgehend, wird nun $\Delta q + il' = \zeta$ als Funktion von z'' entwickelt. Es ist

$$-n \cdot \zeta = \ln \frac{z''}{a} = \ln \left[\left(\frac{z''}{a} - 1 \right) + 1 \right]$$

Durch Reihenentwicklung ergibt sich:

$$\zeta = -\frac{1}{an} (z'' - a) + \frac{1}{2a^2n} (z'' - a)^2 - \frac{1}{3a^3n} (z'' - a)^3 + \frac{1}{4a^4n} (z'' - a)^4 - \frac{1}{5a^5n} (z'' - a)^5 + \dots \quad (7)$$

Für die Gauß-Krügersche Abbildung besteht folgende Beziehung, wenn in den Gliedern 5. Ordnung die Glieder mit ε^4 vernachlässigt werden:²⁾

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' + iy' = N \cos B (\Delta q + il') - \frac{1}{2} N \cos^2 B \cdot t (\Delta q + il')^2 + \frac{1}{6} N \cos^3 B (-1 + t^2 - \eta^2) (\Delta q + il')^3 + \\ + \frac{1}{24} N \cos^4 B \cdot t (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) (\Delta q + il')^4 + \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2) (\Delta q + il')^5 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$t = \operatorname{tg} B \text{ und } \eta^2 = \varepsilon'^2 \cos^2 B$$

Die Koeffizienten von (8) sind für die konstante Breite B_0 zu berechnen.

Wird in (8) für $\Delta q + il' = \zeta$ die Beziehung (7) eingesetzt, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Lambertschen und der Gauß-Krügerschen Projektion. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' + iy' = -\frac{N}{at} (z'' - a) + \frac{N}{6a^2t^3} (1 + \eta^2) (z'' - a)^3 + \frac{N}{24a^4t^5} (3\eta^2 + 4\eta^4 - 1) (z'' - a)^4 + \\ + \frac{N}{120a^5t^5} (3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5) (z'' - a)^5 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹⁾ Siehe Jordan-Eggert, III. Band, 2. Halbband, § 41.

²⁾ Siehe z. B. Jordan-Eggert, III. Band, 2. Halbband, § 32.

Die Trennung des reellen und imaginären Teiles der Funktion (9) bedarf einer Vorbereitung: Die komplexe Konstante a wird zunächst zerlegt: Es ist

$$a = z_0'' = -k \cdot e^{-n(q_0 + i\lambda)} = \alpha + i\beta$$

$$\alpha + i\beta = -k \cdot e^{-nq_0} (\cos n\lambda - i \sin n\lambda)$$

Für α und β folgen die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = x_0'' &= -k \cdot e^{-nq_0} \cdot \cos n\lambda = -R_0 \cos n\lambda \\ \beta = y_0'' &= +k \cdot e^{-nq_0} \cdot \sin n\lambda = +R_0 \sin n\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Die geometrische Bedeutung von α und β geht aus der Abb. 1 hervor. Für $z'' - a$ ergibt sich damit:

$$z'' - a = x'' + iy'' - x_0'' - iy_0'' = \Delta x'' + i\Delta y'' = \Delta z''.$$

Durch Einführung von $\Delta z''$ als unabhängige Veränderliche werden die Lambert-Koordinaten auf denselben rechnerischen Nullpunkt bezogen wie die Gauß-Krügerschen.

Aus $a = \alpha + i\beta$ ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = K_I - i K_{II} \\ \frac{1}{a^3} &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^3} - i \frac{3\alpha^2\beta - \beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^3} = K_{III} - i K_{IV} \\ \frac{1}{a^4} &= \frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^4} - i \frac{4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3}{(\alpha^2 + \beta^2)^4} = K_V - i K_{VI} \\ \frac{1}{a^5} &= \frac{\alpha^5 - 10\alpha^3\beta^2 + 5\alpha\beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^5} - i \frac{5\alpha^4\beta - 10\alpha^2\beta^3 + \beta^5}{(\alpha^2 + \beta^2)^5} = K_{VII} - i K_{VIII} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Damit erhält man zunächst für die Abbildungsfunktion:

$$\Delta x' + iy' = -\frac{N}{t} (K_I - i K_{II}) \Delta z'' + \frac{N}{6t^3} (K_{III} - i K_{IV}) (1 + \eta^2) \Delta z''^3 + \frac{N}{24t^5} (K_V - i K_{VI}) (3\eta^2 - 4\eta^4 - 1) \Delta z''^5 + \frac{N}{120t^5} (K_{VII} - i K_{VIII}) (3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5) \Delta z''^5$$

Die weitere Ausrechnung und die Trennung des reellen und imaginären Teiles ergibt vorerst:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= -\frac{N}{t} (K_I \Delta x'' + K_{II} \Delta y'') + \frac{N}{6t^3} (1 + \eta^2) \{ K_{III} \Delta x''^3 - 3K_{III} \Delta x'' \Delta y''^2 + 3K_{IV} \Delta x''^2 \Delta y'' - K_{IV} \Delta y''^3 \} + \\ &+ \frac{N}{24t^5} (3\eta^2 + 4\eta^4 - 1) \{ K_V (\Delta x''^4 - 6\Delta x''^2 \Delta y''^2 + \Delta y''^4) + K_{VI} (4\Delta x''^3 \Delta y'' - 4\Delta x'' \Delta y''^3) \} + \\ &+ \frac{N}{120t^5} (3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5) \{ K_{VII} (\Delta x''^5 - 10\Delta x''^3 \Delta y''^2 + 5\Delta x'' \Delta y''^4) + \\ &+ K_{VIII} (5\Delta x''^4 \Delta y'' - 10\Delta x''^2 \Delta y''^3 + \Delta y''^5) \} \\ y' &= +\frac{N}{t} (K_{II} \Delta x'' - K_I \Delta y'') - \frac{N}{6t^3} (1 + \eta^2) \{ K_{IV} \Delta x''^3 - 3K_{IV} \Delta x'' \Delta y''^2 - 3K_{III} \Delta x''^2 \Delta y'' + K_{III} \Delta y''^3 \} + \\ &+ \frac{N}{24t^5} (3\eta^2 + 4\eta^4 - 1) \{ K_{VI} (4\Delta x''^3 \Delta y'' - 4\Delta x'' \Delta y''^3) - K_{V} (\Delta x''^4 - 6\Delta x''^2 \Delta y''^2 + \Delta y''^4) \} + \\ &+ \frac{N}{120t^5} (3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5) \{ K_{VIII} (5\Delta x''^4 \Delta y'' - 10\Delta x''^2 \Delta y''^3 + \Delta y''^5) - \\ &- K_{VII} (\Delta x''^5 - 10\Delta x''^3 \Delta y''^2 + 5\Delta x'' \Delta y''^4) \} \end{aligned} \right\} (12)$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{N}{t} = R_0 \text{ und } V^2 = 1 + \eta^2$$

und der Gleichungen (10) und (11) lassen sich die Hilfsgrößen K_I bis K_{VIII} eliminieren und die Koeffizienten von (12) vereinfachen. Man erhält durch eine kleine Umformung:

$$\left. \begin{aligned} K_I \cdot \frac{N}{t} &= -\cos n\lambda, & K_{II} \cdot \frac{N}{t} &= +\sin n\lambda, \\ K_{III} \cdot \frac{N}{t^3} &= -\frac{1}{N^2} \cos 3n\lambda, & K_{IV} \cdot \frac{N}{t^3} &= +\frac{1}{N^2} \sin 3n\lambda, \\ K_V \cdot \frac{N}{t^5} &= +\frac{t}{N^3} \cos 4n\lambda, & K_{VI} \cdot \frac{N}{t^5} &= -\frac{t}{N^3} \sin 4n\lambda, \\ K_{VII} \cdot \frac{N}{t^5} &= -\frac{1}{N^4} \cos 5n\lambda, & K_{VIII} \cdot \frac{N}{t^5} &= +\frac{1}{N^4} \sin 5n\lambda. \end{aligned} \right\}$$

Werden diese Beziehungen in die Gleichungen (12) eingesetzt, so ergeben sich die gesuchten Abbildungsfunktionen bis zu Gliedern 5. Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \cos n\lambda \Delta x'' - \sin n\lambda \Delta y'' + \frac{V^2}{6N^2} \{ \cos 3n\lambda (3\Delta x'' \Delta y''^2 - \Delta x''^3) + \sin 3n\lambda (3\Delta x''^2 \Delta y'' - \Delta y''^3) \} + \\ &+ \frac{t(3\eta^2 + 4\eta^4 - 1)}{24N^3} \{ \cos 4n\lambda (\Delta x''^4 - 6\Delta x''^2 \Delta y''^2 + \Delta y''^4) - \sin 4n\lambda (4\Delta x''^3 \Delta y'' - 4\Delta x'' \Delta y''^3) \} \\ &+ \frac{(3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5)}{120N^4} \{ \cos 5n\lambda (10\Delta x''^3 \Delta y''^2 - 5\Delta x'' \Delta y''^4 - \Delta x''^5) + \sin 5n\lambda (5\Delta x''^4 \Delta y'' - \\ &- 10\Delta x''^2 \Delta y''^3 + \Delta y''^5) \} \\ y' &= \sin n\lambda \Delta x'' + \cos n\lambda \Delta y'' - \frac{V^2}{6N^2} \{ -\sin 3n\lambda (3\Delta x'' \Delta y''^2 - \Delta x''^3) + \cos 3n\lambda (3\Delta x''^2 \Delta y'' - \Delta y''^3) \} + \\ &+ \frac{t(3\eta^2 + 4\eta^4 - 1)}{24N^3} \{ \sin 4n\lambda (\Delta x''^4 - 6\Delta x''^2 \Delta y''^2 + \Delta y''^4) + \cos 4n\lambda (4\Delta x''^3 \Delta y'' - 4\Delta x'' \Delta y''^3) \} \\ &+ \frac{(3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5)}{120N^4} \{ \sin 5n\lambda (10\Delta x''^3 \Delta y''^2 - 5\Delta x'' \Delta y''^4 - \Delta x''^5) - \cos 5n\lambda (5\Delta x''^4 \Delta y'' - \\ &- 10\Delta x''^2 \Delta y''^3 + \Delta y''^5) \} \end{aligned} \right\} (13)$$

Die Koeffizienten der Gleichungen (13) sind für die konstante Breite B_0 zu berechnen.

Die Formeln (13) wurden unter Voraussetzung einer Berührungskegel-Projektion abgeleitet. Tatsächlich wandte der „Service Geographique de l'Armée“ eine Schnittkegel-Projektion an, die durch maßstäbliche Verkleinerung der Berührungskegel-Projektion unter Verwendung des Faktors $1/f$ entstanden gedacht werden kann. Um die französischen Lambert-Koordinaten unmittelbar in die Gleichungen, die unter Annahme eines Berührungskegels entwickelt wurden, einsetzen zu können, bedürfen sie der Vergrößerung mit dem Faktor f .

Die für Gl. (13) benötigten Koordinatenunterschiede $\Delta x''$ und $\Delta y''$ werden aus den französischen Lambertkoordinaten \bar{x}'' , \bar{y}'' und aus den Konstanten x_0'' , y_0'' und R_0 , die sich auf die Berührungskegel-Abbildung beziehen, mit Hilfe der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta x'' &= x'' - x_0'' = x'' - (R_0 + x_0'') = f\bar{x}'' - 2R_0 \sin^2 \frac{n\lambda}{2} \\ \Delta y'' &= y'' - y_0'' = f\bar{y}'' - R_0 \sin n\lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

berechnet.

Die Umrechnungsgleichungen (13) lassen sich durch Einführung von Polarkoordinaten μ und m , die sich auf den rechnerischen Nullpunkt beziehen (siehe Abb. 1), noch in anderer Form schreiben. Setzt man für $\Delta y'' = m \cdot \sin \mu$ und für $\Delta x'' = m \cdot \cos \mu$ in die Glieder 2. und höherer Ordnung der Gleichungen (13) ein, so ergeben sich nach einer Umformung:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x' &= \cos n\lambda \Delta x'' - \sin n\lambda \Delta y'' - \frac{V^2}{6N^2} m^3 \cos 3(n\lambda + \mu) - \frac{t(1 - 3\eta^2 - 4\eta^2)}{24N^3} m^4 \cos 4(n\lambda + \mu) - \\ &- \frac{(3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5)}{120N^4} m^5 \cos 5(n\lambda + \mu) \\ y' &= \sin n\lambda \Delta x'' + \cos n\lambda \Delta y'' - \frac{V^2}{6N^2} m^3 \sin 3(n\lambda + \mu) - \frac{t(1 - 3\eta^2 - 4\eta^2)}{24N^3} m^4 \sin 4(n\lambda + \mu) - \\ &- \frac{(3t^2 - 14\eta^2 + 3\eta^2 t^2 - 5)}{120N^4} m^5 \sin 5(n\lambda + \mu) \end{aligned} \right\} (15)$$

Da die linearen Glieder der Gleichungen (13) zweckmäßig mit Hilfe von Doppelrechenmaschinen ausgewertet werden, wurde für sie von der Einführung von Polarkoordinaten abgesehen.

Mit den Gleichungen (13) und (15) sind die gewünschten Beziehungen zwischen den von Frankreich angewandten Lambert-Koordinaten und dem deutschen Heeresgitter, unter Voraussetzung gleicher Ellipsoide, einheitlicher geodätischer Grundlagen und streng konformer Abbildungen in allgemein gültiger Form, gefunden. Die Beziehungen (15) entsprechen im wesentlichen den Gleichungen, die K. Hristow in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1935, Heft 5, auf anderem Wege abgeleitet hat.

II. Ableitung der Verbesserungsformeln.

Die Überführung der für die Anfelderung zu verwendenden Vergleichspunkte vom Clarkeschen auf das Besselsche Ellipsoid erfolgt lediglich unter Berücksichtigung des Abplattungsunterschiedes δa beider Ellipsoide. Der Einfluß des Unterschiedes der großen Halbachsen auf die Verbesserungen der geographischen Koordinaten wird in die sich bei der Helmertschen Anfelderung ergebende Maßstabsänderung übernommen.

Bei der Anfelderung werden folgende Verbesserungen der Ausgangswerte der französischen Triangulation ermittelt:

δB_0 , die Verschiebung der geographischen Breite des Nullpunktes,

δl_0 , die Verschiebung der geographischen Länge des Nullpunktes,

δA_0 , die Drehung, und

δp , die Maßstabsänderung des Netzes.

$\partial \alpha$, ∂B_0 , ∂l_0 , ∂A_0 und ∂p sind im Sinne von Verbesserungen der französischen Werte zu betrachten.

Um zunächst die Verbesserungen δB und $\delta l''$ der französischen geographischen Koordinaten B und l'' infolge der Veränderung der geodätischen Grundlagen zu erhalten, wird auf die von F. R. Helmert anlässlich der Aufstellung der Lotabweichungsgleichungen gelöste Aufgabe zurückgegriffen. Wird angenommen, daß die trigonometrischen Punkte durch sphäroidische Polarkoordinaten, bezogen auf den Koordinatennullpunkt, festgelegt sind, so lautet das Problem:

Die Änderungen δB und $\delta l''$ der geographischen Koordinaten B, l'' des Endpunktes einer geodätischen Strecke sind zu ermitteln, wenn sich die geographischen Koordinaten des Anfangspunktes der Strecke um δB_0 und δl_0 , das Anfangsazimut um δA_0 , die Strecke s um δs (wobei $\delta p = \delta s/s$ ist) und die Abplattung des Ellipsoides um δa ändern.

Wenn sich außerdem die große Halbachse um δa ändert, so ist bei allgemeinerer Behandlung des Problems an Stelle von $\frac{\partial s}{s}$, $\frac{\partial s}{s} - \frac{\partial a}{a}$ zu schreiben.

Die von Helmert angegebene Lösung der Aufgabe, bei der δB und $\delta l''$ in Form von Reihen mit veränderlichen Koeffizienten erhalten werden, ist für den vorliegenden Zweck ungeeignet. Werden dagegen die Helmertschen Formeln in Reihen mit konstanten Koeffizienten entwickelt, so ergeben sich im wesentlichen die von K. Hristow in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1942, Heft 5, mitgeteilten Formeln. Die Nachprüfung der Entwicklungen Hristows ergab, daß in der vorletzten Zeile der Gleichung (60) an Stelle von $1+4t_0^2-9t_0^4:1-5t_0^2$ stehen sollte.

Mit den hier angewandten Bezeichnungen und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im vorliegenden Falle δa gleich Null gesetzt ist, lauten die Gleichungen für δB und $\delta l''$:

$$\left. \begin{aligned} \delta B &= \delta B_0 + \left\{ -3\gamma^2 t(1-\gamma^2) \delta B_0 + \delta p + \cos^2 B (2-t^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 t^4 - \frac{1}{4}\gamma^4 - \frac{1}{8}\gamma^4 t^2 + \frac{3}{8}\gamma^4 t^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8}\gamma^4 t^6) \partial \alpha \right\} \Delta B - \cos B (1+\gamma^2) \delta A_0 l'' + \left\{ -\frac{3}{2}\gamma^2 (1-t^2) \delta B_0 - \frac{3}{2}\gamma^2 t \delta p - \frac{3}{2} \cos^2 B t (2-3\gamma^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma^2 t^2) \partial \alpha \right\} \Delta B^2 + 3 \sin B \gamma^2 \delta A_0 \Delta B l'' + \left\{ -\frac{\cos^2 B}{2} (1+t^2 + \gamma^2) \delta B_0 - \frac{1}{2} \cos^2 B t (1+\gamma^2) \delta p + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos^4 B t^3 (1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) \partial \alpha \right\} l''^2 + \left\{ -\frac{1}{3} \cos^2 B \delta p + \frac{1}{3} \cos^4 B (1-5t^2) \partial \alpha \right\} \Delta B l''^2 + \frac{1}{6} \cos B \delta A_0 l''^3 \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta l'' &= \delta l_0 + \frac{1-\gamma^2 + \gamma^4}{\cos B} \delta A_0 \Delta B + \left\{ t(1-\gamma^2 + \gamma^4) \delta B_0 + \delta p - \sin^2 B (1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 + \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{3}{4}\gamma^4 t^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8}\gamma^4 t^4) \partial \alpha \right\} l'' + \frac{t}{\cos B} (1 - \frac{1}{2}\gamma^2) \delta A_0 \Delta B^2 + \left\{ (1+t^2 - \gamma^2 - 2\gamma^2 t^2) \delta B_0 + t(1-\gamma^2) \delta p - \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -t \sin^2 B (1 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) \partial \alpha \right\} \Delta B l'' - \frac{1}{2} \sin B \delta A_0 l''^2 + \frac{1+3t^2}{3 \cos B} \delta A_0 \Delta B^3 + \left\{ t(1+t^2) \delta B_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(2+3t^2) \delta p - \frac{1}{3} \sin^2 B (2+3t^2) \partial \alpha \right\} \Delta B^2 l'' - \frac{1}{2 \cos B} \delta A_0 \Delta B l''^2 + \left\{ -\frac{1}{6} t \delta B_0 - \frac{1}{6} \sin^2 B \delta p + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \sin^4 B \partial \alpha \right\} l''^3 \end{aligned} \right\} (16)$$

Werden in den Gleichungen (16) δB_0 , δl_0 , δA_0 und δp gleich Null gesetzt, so ergeben sich die für die Anfelderung benötigten Beziehungen für die Umrechnung der geographischen Koordinaten von einem Ellipsoid auf ein anderes mit verschiedener Abplattung:

$$\left. \begin{aligned} \delta B &= \cos^2 B (2-t^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 t^4 - \frac{1}{4}\gamma^4 - \frac{1}{8}\gamma^4 t^2 + \frac{3}{8}\gamma^4 t^4 + \frac{1}{8}\gamma^4 t^6) \partial \alpha \Delta B - \frac{3}{2} \cos^2 B t (2-3\gamma^2 + \\ &\quad + 2\gamma^2 t^2) \partial \alpha \Delta B^2 + \frac{1}{2} \cos^4 B t^3 (1 + \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) \partial \alpha l''^2 + \frac{1}{6} \cos^4 B (1-5t^2) \partial \alpha \Delta B l''^2 \\ \delta l'' &= -\sin^2 B (1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 + \frac{3}{8}\gamma^4 - \frac{3}{4}\gamma^4 t^2 - \frac{1}{8}\gamma^4 t^4) \partial \alpha l'' - t \sin^2 B (1 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2) \partial \alpha \Delta B l'' - \\ &\quad - \frac{1}{3} \sin^2 B (2+3t^2) \partial \alpha \Delta B^2 l'' + \frac{1}{6} \sin^4 B \partial \alpha l''^3 \end{aligned} \right\} (16a)$$

Die Reihenentwicklungen für die Lambert-Koordinaten als Funktionen der geographischen Koordinaten und umgekehrt lauten z. B. nach: Großh. Mecklenburgische Landesvermessung, V. Teil, Schwerin 1895, Gleichungen (3) und (4):

$$\left. \begin{aligned} x'' &= M \Delta B + \frac{3M\gamma^2 t}{2V^2} \Delta B^2 + \frac{1}{2} N t \cos^2 B l''^2 - \frac{1}{2} M \sin^2 B \Delta B l''^2 + \frac{N}{6} (1+\gamma^2 - 3\gamma^2 t^2) \Delta B^3 + \\ &\quad + \frac{t}{24} N \Delta B^4 - \frac{N}{24} \sin^3 B \cos B l''^4 \\ y'' &= N \cos B l'' - M \sin B \Delta B l'' - \frac{3M\gamma^2 t \sin B}{2V^2} \Delta B^2 l'' - \frac{N}{6} \sin^2 B \cos B l''^3 - \\ &\quad - \frac{N}{6} \sin B \Delta B^3 l'' + \frac{N}{6} \sin^3 B \Delta B l''^3 \end{aligned} \right\} (17)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= V^2 \left\{ \frac{x''}{N} - \frac{3\gamma^2 t}{2N^2} x''^2 - \frac{t}{2N^2} y''^2 - \frac{t^2(1-3\gamma^2)}{2N^3} x'' y''^2 - \frac{1+4\gamma^2-3\gamma^2 t^2}{6N^3} x''^3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{t(2t^2-1)}{4N^4} x''^2 y''^2 - \frac{t}{24N^4} x''^4 + \frac{t^3}{8N^4} y''^4 \right\} \\ l'' &= \frac{1}{\cos B} \left\{ \frac{y''}{N} + \frac{t}{N^2} x'' y'' + \frac{t^2}{N^3} x''^2 y'' - \frac{t^2}{3N^3} y''^3 + \frac{t^3}{N^4} x''^3 y'' - \frac{t^3}{N^4} x'' y''^3 \right\} \end{aligned} \right\} (18)$$

Die Koeffizienten der Gleichungen (17) und (18) sind für die konstante Breite B_0 zu berechnen. Für sämtliche Winkel ist zunächst das Bogenmaß eingeführt.

Die Gleichungen (17) werden nun für die Änderungen von B um δB und von l'' um $\delta l''$ in Taylorsche Reihen mit Gliedern bis einschließlich der 2. Ordnung entwickelt. Wenn sich die geographischen Koordinaten infolge eines Ellipsoidüberganges ändern, so sind die Gl. (17) auch nach dem Meridiankrümmungshalbmesser M , dem Querkrümmungshalbmesser N und nach der Mittelbreite B der Lambertprojektion zu differenzieren. Es ist im Falle, daß der Zentralpunkt des Ellipsoidüberganges mit dem Projektionsmittelpunkt zusammenfällt:

$$\left. \begin{aligned} \delta x'' &= \frac{\partial x''}{\partial \Delta B} \delta B + \frac{\partial x''}{\partial l''} \delta l'' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 x''}{\partial \Delta B^2} \delta B^2 + 2 \frac{\partial^2 x''}{\partial \Delta B \partial l''} \delta B \delta l'' + \frac{\partial^2 x''}{\partial l''^2} \delta l''^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial x''}{\partial M} \delta M + \frac{\partial x''}{\partial N} \delta N + \frac{\partial x''}{\partial B} \delta B \\ \delta y'' &= \frac{\partial y''}{\partial \Delta B} \delta B + \frac{\partial y''}{\partial l''} \delta l'' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 y''}{\partial \Delta B^2} \delta B^2 + 2 \frac{\partial^2 y''}{\partial \Delta B \partial l''} \delta B \delta l'' + \frac{\partial^2 y''}{\partial l''^2} \delta l''^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\partial y''}{\partial M} \delta M + \frac{\partial y''}{\partial N} \delta N + \frac{\partial y''}{\partial B} \delta B \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Nach Ausführung der Differentiationen erhält man mit ausreichender Genauigkeit:

$$\begin{aligned} \delta x'' = & \left\{ M + \frac{3M\eta^2 t}{V^2} \Delta B - \frac{1}{2} M \sin^2 B l''^2 + \frac{N}{2} (1 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) \Delta B^2 + \frac{Nt}{6} \Delta B^3 \right\} \delta B \\ & + \left\{ Nt \cos^2 B l'' - M \sin^2 B \Delta B l'' - \frac{N}{6} \sin^3 B \cos B l''^3 \right\} \delta l'' + \\ & + \left\{ \frac{3M\eta^2 t}{V^2} + N(1 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) \Delta B + \frac{Nt}{2} \Delta B^2 \right\} \frac{\delta B^2}{2} - M \sin^2 B l'' \delta B \delta l'' + \\ & + \left\{ Nt \cos^2 B - M \sin^2 B \Delta B - \frac{N}{2} \sin^3 B \cos B l''^2 \right\} \frac{\delta l''^2}{2} + \left(\Delta B + \frac{3\eta^2 t}{2V^2} \Delta B^2 + \dots \right) \delta M + \\ & + \frac{t \cos^2 B}{2} l''^2 \delta N + \dots \\ \delta y'' = & \left\{ -M \sin B l'' - \frac{3M\eta^2 t \sin B}{V^2} \Delta B l'' - \frac{N}{2} \sin B \Delta B^2 l'' + \frac{N}{6} \sin^3 B l''^3 \right\} \delta B + \\ & + \left\{ N \cos B - M \sin B \Delta B - \frac{3M\eta^2 t \sin B}{2V^2} \Delta B^2 - \frac{N}{2} \sin^2 B \cos B l''^2 - \frac{N}{6} \sin B \Delta B^3 + \right. \\ & \left. + \frac{N}{2} \sin^3 B \Delta B l''^2 \right\} \delta l'' + \left\{ -\frac{3M\eta^2 t \sin B}{V^2} l'' - N \sin B \Delta B l'' \right\} \frac{\delta B^2}{2} + \\ & + \left\{ -M \sin B - \frac{3M\eta^2 t \sin B}{V^2} \Delta B - \frac{N}{2} \sin B \Delta B^2 + \frac{N}{2} \sin^3 B l''^2 \right\} \delta B \delta l'' + \\ & + \left\{ -N \sin^2 B \cos B l'' + N \sin^3 B \Delta B l'' \right\} \frac{\delta l''^2}{2} + l'' \cos B \delta N - \sin B \Delta B l'' \delta M - N \sin B l'' dB \end{aligned} \quad (20)$$

Bei den Entwicklungen werden in den Gliedern 2. Ordnung der Koordinaten die Größen η^4 und in den Gliedern 3. Ordnung die Größen η^2 vernachlässigt. δM , δN und dB sind als Konstanten zu betrachten.

Werden die Gleichungen (16) in (20) eingesetzt und werden mit Hilfe der Gleichungen (18) an Stelle der geographischen die Lambertschen Koordinaten eingeführt, so ergeben sich die gesuchten Beziehungen für die Verbesserungen $\delta x''$ und $\delta y''$. Bei einem der zur Ableitung beschrittenen Wege ergaben sich folgende Zwischenergebnisse:

Führt man in den Gleichungen (20) mit Hilfe von (18) die ebenen Koordinaten ein, so folgen:

$$\begin{aligned} \delta x'' = & \left\{ M + 3\eta^2 t (1 - \eta^2) x'' + \frac{1 + 3\eta^2 - 3\eta^2 t^2}{2N} x''^2 - \frac{t^2 (1 + 2\eta^2)}{2N} y''^2 - \frac{t(1 + 2t^2)}{2N^2} x'' y''^2 + \frac{t}{6N^2} x''^3 \right\} \delta B + \\ & + \sin B y'' \delta l'' + \left\{ \frac{3M\eta^2 t}{V^2} + (1 + 2\eta^2 - 3\eta^2 t^2) x'' - \frac{t(1 + 2\eta^2 - 3\eta^2 t^2)}{2N} y''^2 + \frac{t(1 - \eta^2)}{2N} x''^2 \right\} \frac{\delta B^2}{2} - \\ & - \frac{t \sin B}{V^2} \left\{ y'' + \frac{t}{N} x'' y'' \right\} \delta B \delta l'' + \sin^2 B \left\{ \frac{N}{t} - x'' + \frac{3\eta^2 t}{2N} x''^2 \right\} \frac{\delta l''^2}{2} + \left(\frac{V^2}{N} x'' - \frac{tV^2}{2N^2} y''^2 \right) \delta M + \\ & + \frac{t}{2N^2} y''^2 \delta N \\ \delta y'' = & - \frac{t}{V^2} \left\{ y'' + \frac{t}{N} x'' y'' + \frac{3\eta^2 t}{N} x'' y'' - \frac{t^2}{2N^2} y''^3 + \frac{1 + 2t^2}{2N^2} x''^2 y'' \right\} \delta B + \sin B \left\{ \frac{N}{t} - x'' \right\} \delta l'' - \\ & - \left\{ \frac{3\eta^2 t^2}{V^4} y'' + \frac{t(1 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2)}{N} x'' y'' \right\} \frac{\delta B^2}{2} - \sin B \left\{ M + 3\eta^2 t x'' + \frac{1 + 2\eta^2}{2N} x''^2 + \right. \\ & + \left. \frac{t^2(1 + 3\eta^2)}{2N} y''^2 \right\} \delta B \delta l'' - \sin^2 B \left\{ y'' - \frac{\eta^2 t}{N} x'' y'' \right\} \frac{\delta l''^2}{2} - \frac{tV^2}{N^2} x'' y'' \delta M + \left(y'' + \right. \\ & \left. + \frac{t}{N} x'' y'' \right) \left(\frac{\delta N}{N} - t dB \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Die Formeln (21) vereinfachen sich, wenn als größte Verschiebungen δB und $\delta l'' \pm 30''$ und als größte Fehler in $\delta x''$ und $\delta y'' \pm 1$ mm zugelassen werden. In diesem Falle ergeben sich:

$$\begin{aligned} \delta x'' = & \left\{ M + 3\eta^2 t (1 - \eta^2) x'' + \frac{1 + 3\eta^2 - 3\eta^2 t^2}{2N} x''^2 - \frac{t^2 (1 + 2\eta^2)}{2N} y''^2 - \frac{t(1 + 2t^2)}{2N^2} x'' y''^2 + \frac{t}{6N^2} x''^3 \right\} \delta B + \\ & + \sin B y'' \delta l'' + \frac{N \sin^2 B}{2t} \delta l''^2 + \frac{3\eta^2 t M}{2V^2} \delta B^2 + \left(\frac{V^2}{N} x'' - \frac{tV^2}{2N^2} y''^2 \right) \delta M + \frac{t}{2N^2} y''^2 \delta N \\ \delta y'' = & - \frac{t}{V^2} \left\{ y'' + \frac{t}{N} (1 + 3\eta^2) x'' y'' - \frac{t^2}{2N^2} y''^3 + \frac{1 + 2t^2}{2N^2} x''^2 y'' \right\} \delta B + \frac{N}{t} \sin B \delta l'' - \sin B x'' \delta l'' - \\ & - M \sin B \delta B \delta l'' - \frac{tV^2}{N^2} x'' y'' \delta M + \left(y'' + \frac{t}{N} x'' y'' \right) \left(\frac{\delta N}{N} - t dB \right) \end{aligned} \quad (21a)$$

Werden ferner die Gleichungen (18) in (16) eingeführt, so folgen:

$$\begin{aligned} \delta B = & \delta B_0 + \left\{ -3\eta^2 t (1 - \eta^2) \delta B_0 + \delta p + \cos^2 B (2 - t^2 + \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 - \frac{1}{2} \eta^4 t^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \frac{1}{8} \eta^4 t^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t^4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \eta^4 t^6) \delta \alpha \right\} \frac{x''}{M} - \delta A_0 \frac{y''}{M} + \frac{3}{2} \eta^2 (t^2 - 1) \delta B_0 - 2\eta^2 t \delta p - t \cos^2 B (2 - \eta^2 + \eta^2 t^2) \delta \alpha \left\} \frac{x''^2}{M^2} - \right. \\ & - \frac{t(1 - 2\eta^2)}{N^2} \delta A_0 x'' y'' - \left\{ (1 + t^2 + \eta^2 - 3\eta^2 t^2) \delta B_0 + 2t(1 + \eta^2) \delta p + t \cos^2 B (2 - 2t^2 + 3\eta^2 + \right. \\ & \left. + 2\eta^2 t^2 - \eta^2 t^4) \delta \alpha \right\} \frac{y''^2}{2N^2} - \left\{ \delta p + \cos^2 B (2 - t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^3}{6N^3} - t^2 \delta A_0 \frac{x''^2 y''}{N^3} - \left\{ 6t(1 + t^2) \delta B_0 + \right. \\ & \left. + (9t^2 + 2) \delta p - \cos^2 B (2 + 2t^2 + 9t^4) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''^2}{6N^3} + (1 + 3t^2) \delta A_0 \frac{y''^3}{6N^3} \\ \delta l'' = & \delta l_0 + \frac{\delta A_0}{N \cos B} x'' + \left\{ t(1 - \eta^2 + \eta^4) \delta B_0 + \delta p - \sin^2 B (1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \eta^4 t^4) \delta \alpha \right\} \frac{y''}{N \cos B} + \frac{t \delta A_0}{N^2 \cos B} x''^2 + \left\{ (1 + 2t^2 - 2\eta^2 t^2) \delta B_0 + 2t \delta p - t \sin^2 B (2 - \eta^2 + \right. \\ & \left. + \eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''}{N^2 \cos B} - \frac{t \delta A_0}{N^2 \cos B} y''^2 + \frac{(1 + 6t^2) \delta A_0}{6N^3 \cos B} x''^3 + \left\{ 3t(2 + 3t^2) \delta B_0 + (2 + 9t^2) \delta p - \right. \\ & \left. - \sin^2 B (2 + 9t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^2 y''}{3N^3 \cos B} - \frac{(1 + 6t^2) \delta A_0}{2N^3 \cos B} x'' y''^2 - \left\{ 2t(2 + 3t^2) \delta B_0 + 6t^2 \delta p - \right. \\ & \left. - 6t^2 \sin^2 B \delta \alpha \right\} \frac{y''^3}{6N^3 \cos B} \end{aligned} \quad (22)$$

Die für Lambert-Projektionen allgemein gültigen Beziehungen für $\delta x''$ und $\delta y''$ als Funktionen von x'' , y'' und der Verbesserungen δB_0 , δl_0 , δA , δp , $\delta \alpha$, δM , δN und dB erhält man durch Einsetzen der Gl. (22) in die Gl. (21):

$$\begin{aligned} \delta x'' = & M \delta B_0 + \frac{Nt \cos^2 B}{2} \delta l_0^2 + \frac{3\eta^2 t M}{2V^2} \delta B_0^2 + \left\{ \delta p + \cos^2 B (2 - t^2 + \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 - \frac{1}{2} \eta^4 t^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \eta^4 t^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t^4 + \frac{1}{8} \eta^4 t^6) \delta \alpha \right\} x'' + \left\{ \sin B \delta l_0 - \delta A_0 \right\} y'' + \left\{ \delta B_0 - 3t \cos^2 B (2 - 3\eta^2 + \right. \\ & \left. + 3\eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^2}{2N} - \left\{ \delta B_0 + t \cos^2 B (2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{y''^2}{2N} + \left\{ t \delta B_0 + 2 \delta p + \right. \\ & \left. + 2 \cos^2 B (2 - t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^3}{6N^2} - \delta A_0 \frac{x''^2 y''}{2N^2} - \left\{ 3t \delta B_0 + 2 \delta p - 2 \cos^2 B (1 - 2t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''^2}{6N^2} + \\ & + \delta A_0 \frac{y''^3}{6N^2} + \left(\frac{V^2}{N} x'' - \frac{tV^2}{2N^2} y''^2 \right) \delta M + \frac{t}{2N^2} y''^2 \delta N \\ \delta y'' = & N \cos B \delta l_0 - M \sin B \delta B_0 \delta l_0 + \left\{ \delta p - \sin^2 B (1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t^4) \delta \alpha \right\} y'' - \\ & - \left\{ \sin B \delta l_0 - \delta A_0 \right\} x'' + \left\{ \delta B_0 - t \cos^2 B (2 + \eta^2 + 3\eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''}{N} + \delta A_0 \frac{x''^3}{6N^2} + \left\{ 3t \delta B_0 + 4 \delta p + \right. \\ & \left. + 2 \sin^2 B \delta \alpha \right\} \frac{x''^2 y''}{6N^2} - \delta A_0 \frac{x'' y''^2}{2N^2} + \left\{ -t \delta B_0 + 6 \sin^2 B \delta \alpha \right\} \frac{y''^2}{6N^3} - \frac{tV^2}{N^2} x'' y'' \delta M + \\ & + \left(y'' + \frac{t}{N} x'' y'' \right) \left(\frac{\delta N}{N} - t dB \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Die Koeffizienten der Gleichungen (23) sind für die konstante Breite B_0 zu berechnen.

Die Verbesserungen $\delta x''$ und $\delta y''$ bedürfen nun noch einer Berichtigung, die von der Abweichung der vom S. G. A. angewandten Abbildung von der streng konformen normalen Kegelprojektion herrührt. Diese Verbesserungen betragen

$$\left. \begin{aligned} \text{In } \delta x'' &: + \frac{\eta^2}{6N^2} x''^3 + \frac{t(1-3\eta^2)}{24N^3} x''^4 - \frac{\eta^2 t}{4N^3} x''^2 y'' \\ \text{In } \delta y'' &: - \frac{\eta^2 t}{6N^3} x''^3 y'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Für die maximalen Koordinaten von $x'' = +200$ km und $y'' = +400$ km nehmen in den Gleichungen (24) die Verbesserung für $\delta x'' + 36,9$ cm und für $\delta y'' - 0,7$ cm an.

Werden die Beziehungen (23) und (24) zusammengefaßt und wird zum Winkelmaß übergegangen, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \delta x'' &= \frac{M}{\rho} \delta B_0 + \frac{N t \cos^2 B}{2 \rho^2} \delta l_0^2 + \frac{3 \eta^2 t M}{2 \rho^2 V^2} \delta B_0^2 + \left\{ \delta p + \cos^2 B (2 - t^2 + \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 - \frac{1}{2} \eta^2 t^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \eta^4 t^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t^4 + \frac{1}{8} \eta^4 t^6) \delta \alpha \right\} x'' + \left\{ \sin B \delta l_0 - \delta A_0 \right\} \frac{y''}{\rho} + \left\{ \frac{\delta B_0}{\rho} - 3 t \cos^2 B (2 - 3 \eta^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^2}{2N} - \left\{ \frac{\delta B_0}{\rho} + t \cos^2 B (2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{y''^2}{2N} + \left\{ \eta^2 + \frac{t \delta B_0}{\rho} + 2 \delta p + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos^2 B (2 - t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x''^3}{6N^2} - \frac{\delta A_0}{2 \rho N^2} x''^2 y'' - \left\{ \frac{3 t \delta B_0}{\rho} + 2 \delta p - 2 \cos^2 B (1 - 2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''^2}{6N^2} + \\ &\quad + \frac{\delta A_0}{6 \rho N^2} y''^3 + \frac{t(1-3\eta^2)}{24N^3} x''^4 - \frac{\eta^2 t}{4N^3} x''^2 y'' + \left(\frac{V^2}{N} x'' - \frac{t V^2}{2N^2} y'' \right) \delta M + \frac{t}{2N^2} y''^2 \delta N \\ \delta y'' &= \frac{N \cos B}{\rho} \delta l_0 - \frac{M \sin B}{\rho^2} \delta E_0 \delta l_0 + \left\{ \delta p - \sin^2 B (1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t^4) \delta \alpha \right\} y'' - \\ &\quad - \left\{ \sin B \delta l_0 - \delta A_0 \right\} \frac{x''}{\rho} + \left\{ \frac{\delta B_0}{\rho} - t \cos^2 B (2 + \eta^2 + 3 \eta^2 t^2) \delta \alpha \right\} \frac{x'' y''}{N} + \frac{\delta A_0}{6 \rho N^2} x''^3 + \left\{ \frac{3 t \delta B_0}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. + 4 \delta p + 2 \sin^2 B \delta \alpha \right\} \frac{x''^2 y''}{6N^2} - \frac{\delta A_0}{2 \rho N^2} x'' y''^2 + \left\{ - \frac{t \delta B_0}{\rho} + 6 \sin^2 B \delta \alpha \right\} \frac{y''^3}{6N^2} - \frac{\eta^2 t}{6N^3} x''^3 y'' - \\ &\quad - \frac{t V^2}{N^2} x'' y'' \delta M + \left(y'' + \frac{t}{N} x'' y'' \right) \cdot \left(\frac{\delta N}{N} - t d B \right) \end{aligned} \right\} (25)$$

Die Gl. (25) gelten für den Fall, daß der Mittelpunkt der Lambertschen Abbildung mit dem Zentralpunkt des Ellipsoidüberganges zusammenfällt. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann ist folgendermaßen zu verfahren:

Mit Hilfe der Gl. (16) werden die Verbesserungen δB_1 und $\delta l''_1$ der Projektionsmittelpunkte der betrachteten Lambertschen Koordinatensysteme ermittelt. Zieht man die Beträge δB_1 und $\delta l''_1$ von den mit den Gl. (16) für beliebige Punkte berechneten Verbesserungen δB und $\delta l''$ ab, so erhält man die Änderungen der geographischen Koordinaten dieser Punkte relativ zu den Projektionsmittelpunkten, ausgedrückt durch geographische Koordinatenunterschiede in Bezug auf den Zentralpunkt des Ellipsoidüberganges. Die relativen Änderungen $\delta' B$ und $\delta' l''$ werden nun durch geographische Koordinatenunterschiede bezogen auf den Projektionsmittelpunkt ausgedrückt und mit Hilfe der Gl. (18) werden die Lambertschen Koordinaten als unabhängige Veränderliche eingeführt. In den Gl. (21) bedeuten nun x'' , y'' die Lambertschen Koordinaten des betrachteten Koordinatensystems und δB , $\delta l''$ die relativen Änderungen $\delta' B$, $\delta' l''$. Letztere werden als Funktionen der Lambertschen Koordinaten in die Gl. (21) eingesetzt, wodurch das den Gl. (23) entsprechende Endergebnis erhalten wird.

Mit den Gleichungen (13) bzw. (15) und (25) sind die für die Überführung der französischen Lambert-Koordinaten in das Deutsche Heeresgitter benötigten Beziehungen entwickelt. Die praktische Anwendung der Formeln ist möglich, sobald die aus der Helmertschen Anfölderung sich ergebenden Konstanten bekannt sind.