



3. Jahrgang

Heft 6

MITTEILUNGEN

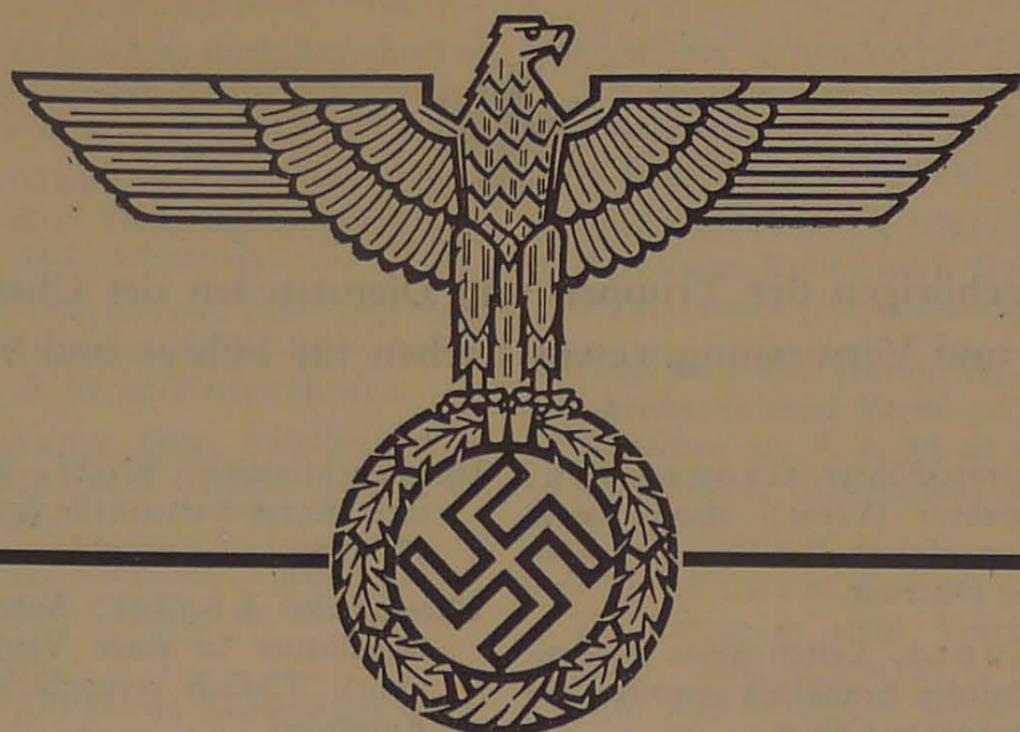
des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Juni 1944

I N H A L T :

Major Dipl.-Ing. Burkert: Erfahrungen bei Triangulationen höherer Ordnung der Heeresvermessung	S. 263
Chefastronom Dr. Wl. K. Hristow: Änderung der Gauß-Krügerschen Koordinaten infolge Verschiebung, Streckung, Verdrehung des Koordinatensystems und Übergang zu einem anderen Referenzellipsoid	S. 274
Prof. Dr. A. Buchholz: Versuch einer Orientierung des lettischen Dreiecksnetzes nach astronomischen Bestimmungen	S. 280
Oblt. d. R. Dr.-Ing. H. Bodemüller: Ellipsoidische Abbildungen von Rotationsellipsoiden mit Hilfe von Differentialformeln	S. 291
Lt. d. R. L. Jäger: Das entzerrte Einzelluftbild mit Kartengitter	S. 340
Oberst Grobler: Buchbesprechung	S. 346

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin



3. Jahrgang

Heft 6

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Juni 1944

I N H A L T :

- Major Dipl.-Ing. Burkert: Erfahrungen bei Triangulationen
höherer Ordnung der Heeresvermessung S. 263
- Chefastronom Dr. Wl. K. Hristow: Änderung der Gauß-
Krügerschen Koordinaten infolge Verschiebung, Streckung,
Verdrehung des Koordinatensystems und Übergang zu
einem anderen Referenzellipsoid S. 274
- Prof. Dr. A. Buchholtz: Versuch einer Orientierung des let-
tischen Dreiecksnetzes nach astronomischen Bestimmungen S. 280
- Oblt. d. R. Dr.-Ing. H. Bodemüller: Ellipsoidische Ab-
bildungen von Rotationsellipsoiden mit Hilfe von Differen-
tialformeln S. 291
- Lt. d. R. L. Jäger: Das entzerrte Einzelluftbild mit Kartengitter S. 340
- Oberst Grobler: Buchbesprechung S. 346

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin



Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland

- Leutnant und Komp.-Führer **Gronemann**, Johannes, Inspektor (Verm.), ehem. Leiter eines Heeres-Kartenlagers. Gefallen am 6. 4. 44 im Norden der Ostfront.
- Oberinspektor **Kunte**, Leiter eines Heeres-Kartenlagers. Infolge Krankheit gestorben am 17. 4. 44 im besetzten Gebiet.
- Unteroffizier **Breitkopf**, Ewald, Uffz. in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 23. 3. 44 infolge Unglücksfalles in Rußland.
- Obergefreiter **Marten**, Otto, Kraftfahrer in einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 7. 12. 43 in Adshamka, ostw. Kirowograd.
- Obergefreiter **Dehn**, Kurt, Kraftfahrer in einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 13. 2. 44 bei Komarowka, Rußland.
- Gefreiter **Müller**, Berthold, Schneider, Ordonanz bei der Abt. f. Kr.-Kart.- u. Verm.-Wes. Infolge Krankheit gestorben am 19. 5. 44 in Wünsdorf.
- Major **Dr. Hörning**, akt. Offizier bei Führer-Res. einer H.-Gr. Seinen schweren Verletzungen am 12. 6. 44 im Lazarett von Brzezany erlegen.
- Unteroffizier (ROB) **Großewächter**, Heinrich, Beobachter in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 7. 12. 43 in Smela (Rußland).
- Unteroffizier **Schneider**, Ewald, Vermessungstechniker, Photogrammeter in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 30. 3. 44 bei Kamenez-Podolsk (Rußland).
- Wachtmeister **Knipp**, Paul, Verm.-Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 15. 4. 44 in Westfrankreich.
- Unteroffizier **Gast**, Helmut, Kfz.-Uffz. in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Tödlich verunglückt am 21. 4. 44 in Belgien.
- Fhj. Wachtmeister d. R. **Bauer**, Leonhardt, Dipl.-Ing. (Vm), Vermessungs-Truppführer in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 6. 6. 44 in Westfrankreich.
- Unterwachtmeister **Wolf**, Willi, Drucker in einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 10. 5. 44 in Sebastopol.
- Unteroffizier **Kögler**, Anton, Zimmermann, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Tödlich verunglückt am 2. 6. 44 in Rumänien.
- Unteroffizier **Hoppe**, Hans, Uffz. in einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 10. 6. 44 bei La Caine (Normandie).
- Oberwachtmeister **Bungart**, Josef, Vermessungs-Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 12. 7. 44 bei einem Bandenüberfall im Osten.
- Feldwebel **Weigert**, Werner, Maschinensetzer, Kartenzeichner in einer Div.-Kart.-Stelle. Gefallen am 22. 1. 44 bei einem Bombenangriff in Tondi, Mittel-Italien.
- Wachtmeister **Hädrich**, Friedrich, Vermessungsrat, Zugführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 30. 6. 44 in Rifredo (Provinz Florenz), südl. Firenzuola.
- Unteroffizier **Albrecht**, Walter, Studienrat Dr. phil., Führer einer Div.-Kart.-Stelle (mot). Gefallen am 13. 6. 44 in Jabo, westl. Orvieto (Provinz Florenz).
- Unteroffizier **Seidel**, Werner, Dekorationsmaler, Kraftfahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 30. 6. 44 in Rifredo, südl. Firenzuola (Provinz Florenz).
- Unteroffizier **Grünen**, Kurt, Graveur, Führer einer Div.-Kart.-Stelle. Gefallen am 22. 7. 44 in Triest.
- Unteroffizier **Birnbaum**, Alfred, Vermessungs-Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 31. 7. 44 im Osten.
- Unteroffizier **Krombach**, Kurt, Verm.-Ass., Beobachter und Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 8. 44 im Gefecht mit Banden in Kroatien.
- Unteroffizier **Schmidt**, Werner, Truppführer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 25. 8. 44 in Nordostfrankreich.

- Obergefreiter **N i e t s c h k e**, Karl, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen an. 15. 4. 44 in Westfrankreich.
- Obergefreiter **H i l d e b r a n d**, Richard, Hilfsbeobachter in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 6. 6. 44 in Westfrankreich.
- Gefreiter **S c h i f f e r m ü l l e r**, Olaf, Dipl.-Ing. (Vm), Beobachter in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 6. 6. 44 in Westfrankreich.
- Gefreiter **E i s e n m a n n**, Otto, Aufschreiber in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 6. 6. 44 in Westfrankreich.
- Oberkanonier **F r a n z**, Reinhold, Drucker in einer Korps-Kartenstelle. Gefallen am 13. 4. 44 in Buga (Bessarabien).
- Obergefreiter **L a n g e**, Erwin, Angehöriger einer Verm.- und Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 5. 5. 44 infolge einer schweren Verwundung in Rußland.
- Gefreiter **K o w a l k**, Ernst, Angehöriger einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 10. 6. 44 in La Caine (Normandie).
- Gefreiter **S t e j s k a l**, Franz, Angehöriger einer Korps-Kartenstelle (mot). Gefallen am 11. 6. 44 in Brionze-Flers (Normandie).
- Gefreiter **M o r i t z**, Paul, Signalbauer in einem Kr.-Kart.- u. Verm.-Amt. Gefallen am 27. 6. 44 in Nordfrankreich.
- Gefreiter **K l e i n**, Wilhelm, Kraftfahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 27. 6. 44 in Norwegen.
- Obergefreiter **H e l l m u n d**, Walter, Dipl.-Ing. (Verm.), Beobachter in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 30. 6. 44 in Westfrankreich.
- Obergefreiter **H e r z o g**, Rudolf, Kraftfahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 12. 7. 44 bei einem Bandenüberfall im Osten.
- Obergefreiter **P e t e r s e n**, Peter, Aufschreiber in einer Verm.- und Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 12. 7. 44 bei einem Bandenüberfall im Osten.
- Obergefreiter **W e i k**, Karl, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 12. 7. 44 bei einem Bandenüberfall im Osten.
- Obersoldat **M a r k o w s k i**, Kurt, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 7. 44 bei einem Bandenüberfall im Osten.
- Obergefreiter **T r u m m e r**, Walter, Zimmermann, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 30. 6. 44 an den Folgen einer Verwundung bei Firenzuola (Provinz Florenz).
- Obergefreiter **G u m h o l d**, Johann, Spediteur, Kfz.-Wart in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 6. 7. 44 infolge Unglücksfalles in Köppling (Steiermark).
- Obergefreiter **N o a c k**, Hans, Kfz.-Führer in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 19. 8. 44 in Traversara (Mittel-Italien).
- Gefreiter **B r o d a**, Viktor, Reg.-Verm.-Rat, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gestorben am 6. 6. 44 an den Folgen einer Verwundung (Bandengef.) im Feldlazarett in Bologna.
- Gefreiter **K u n z e**, Oswald, Appreturarbeiter, Kfz.-Fahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 30. 6. 44 in einem Gefecht mit Banden in Rifredo (südlich Firenzuola (Provinz Florenz).
- Gefreiter **U h l e m a n n**, Kurt, techn. Zeichner, Kraftfahrer in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 9. 7. 44 in einem Bandengefecht bei Bibbiena.
- Kanonier **K o r n**, Otto, kaufm. Angestellter, Zeichner in einer Armee-Kartenstelle (mot). Gestorben am 30. 4. 44 an den Folgen einer schweren Verwundung in Avesano (Mittel-Italien).
- Obergefreiter **M ü l l e r**, Karl, Kartenzeichner in einer Verm.- und Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 29. 6. 44 in einem Bandengefecht bei Reischan (Galizien).
- Obergefreiter **B o r o w y**, Horst, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 7. 44 durch Luftangriff im Raum Sasow (Galizien).
- Obergefreiter **F o c h t m a n n**, Max, Kfz.-Fahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 7. 44 durch Luftangriff im Raum Sasow (Galizien).
- Obergefreiter **O b s t**, Bernhard, Kfz.-Fahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 7. 44 durch Luftangriff im Raum Sasow (Galizien).
- Gefreiter **L e i n e s**, Heinrich, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 14. 7. 44 durch Luftangriff im Raum Sasow (Galizien).
- Obergefreiter **V a l l e n t i n**, Hans, Zeichner in einer Div.-Kartenstelle. Gefallen am 21. 7. 44 bei Bukowa, Wlk.-Raum Cholm.
- Obergefreiter **D e m m e r**, Hans, Maler, Zeichner in einer Div.-Kartenstelle (mot). Gefallen am 23. 7. 44 in Ladance.

Obergefreiter Fürst, Bruno, Fahrer in einer Korps-Kartenstelle (mot). Gestorben infolge Unglücksfalles am 31. 7. 44 in Lisovice, südlich Stryj (Rußland).

Obergefreiter Figura, Max, Beobachter in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 25. 8. 44 in Nordostfrankreich.

Gefreiter Rudolf, Albert, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 25. 8. 44 in Nordostfrankreich.

Obergefreiter Blickle, Otto, Aufschreiber in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 31. 7. 44 durch Bandenüberfall beim Verm.-Einsatz im Osten.

Obergefreiter Rapp, Heinz, Kraftfahrer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot). Gefallen am 31. 7. 44 durch Bandenüberfall beim Verm.-Einsatz im Osten.

Gefreiter Both, Paul, Kraftfahrer in einer Verm.-u.Kart.-Abt.(mot). Gefallen am 2. 9. 44 durch Tiefflieger bei Kragujevac (Serbien).

Gefreiter Seitz, Fritz, Angehöriger eines Kr.-Kart.-Verm.-Amtes. Gefallen am 14. 9. 44 durch Tiefflieger bei Belgrad.

Leutnant d. R. Sterkel, Helmut, Dipl.-Ing. (Verm.), Zugführer in einer Verm.-Battr. (mot). Gefallen am 9. 8. 44 in der Normandie (Grosbois).

Oberfähnrich Wendler, Siegfried, techn. Oberinspektor. Gefallen am 12. 8. 44 beim Bombenangriff in Metz.

Fhj. Feldweibel G a s d e, Helmut, techn. Inspektor. Gestorben am 11. 4. 44 an einer schweren Verwundung im Osten.

Fhj. Oberwachtmeister K u n t h, Hans, Oberinspektor, Leiter eines Heeres-Kartenlagers. Gefallen am 21. 2. 44 im Osten.

Erfahrungen bei Triangulationen höherer Ordnung der Heeresvermessung

Von Major Dipl.-Ing. Burkert

Kommandeur der Vermessungs- und Karten-Lehr-Abteilung

Die Heeresvermessung hat die Aufgabe, schnell und hinreichend genau Ausgangswerte für die Truppenvermessung und für die photogrammetrische Kartenherstellung zu schaffen. Hierzu baut die Heeresvermessung ihre Arbeiten im allgemeinen auf den Ergebnissen der Landesvermessungen auf. Es handelt sich vornehmlich um Triangulationen niedriger Ordnung.

Besondere Umstände (festpunktlose Räume, fehlende Beutekoordinaten) können jedoch Triangulationen höherer Ordnung als Grundlage für Kleinnetze erforderlich machen. Wenn von der Heeresvermessung Triangulationen höherer Ordnung ausgeführt werden, so gelten für sie — ihrem Zweck entsprechend — folgende Grundsätze:

1. Die Messungen höherer Ordnung müssen den gleichzeitig laufenden Verdichtungsarbeiten Schritt halten — besser noch voraus sein.
2. Die Auswertung muß hinreichende Genauigkeit gewährleisten — darf aber die Berechnung der Verdichtungsnetze nicht sonderlich verzögern.

Diese Voraussetzungen bedingen für Triangulationen höherer Ordnung besondere Maßnahmen für Signalbau, Beobachtung und Auswertung (Ausgleichung).

Es wird über eine unter diesen Voraussetzungen von der Verm.- und Karten-Lehr-Abteilung ausgeführten Triangulation höherer Ordnung und die dabei angewandten Verfahren und gemachten Erfahrungen berichtet. Die Ausführungen beziehen sich auf die

Messung einer Hauptkette von 300 km Länge und

Verdichtung eines Gebietes von 3750 km², für die eine Batterie mit zwei Vermessungszügen und einem verstärkten Hochbauzug vier Monate lang eingesetzt war.

Allgemeines

Anfang 1943 verlief die Front im Bereich der Heeresgruppe Mitte in Gebieten, von denen nur

Beutekoordinaten einzelner russischer T. P. I. O. und einiger weniger T. P. II. O. vorhanden waren. Die Heeresvermessung hatte für den ersten Bedarf der Truppe Festpunktnetze geschaffen, die keinen strengen Zusammenhang hatten. Um die Einzelnetze zusammenzuschließen, wurde im März 1943 für die Gesamtfrente der Heeresgruppe Mitte die Herstellung eines einheitlichen Festpunktfeldes befohlen.

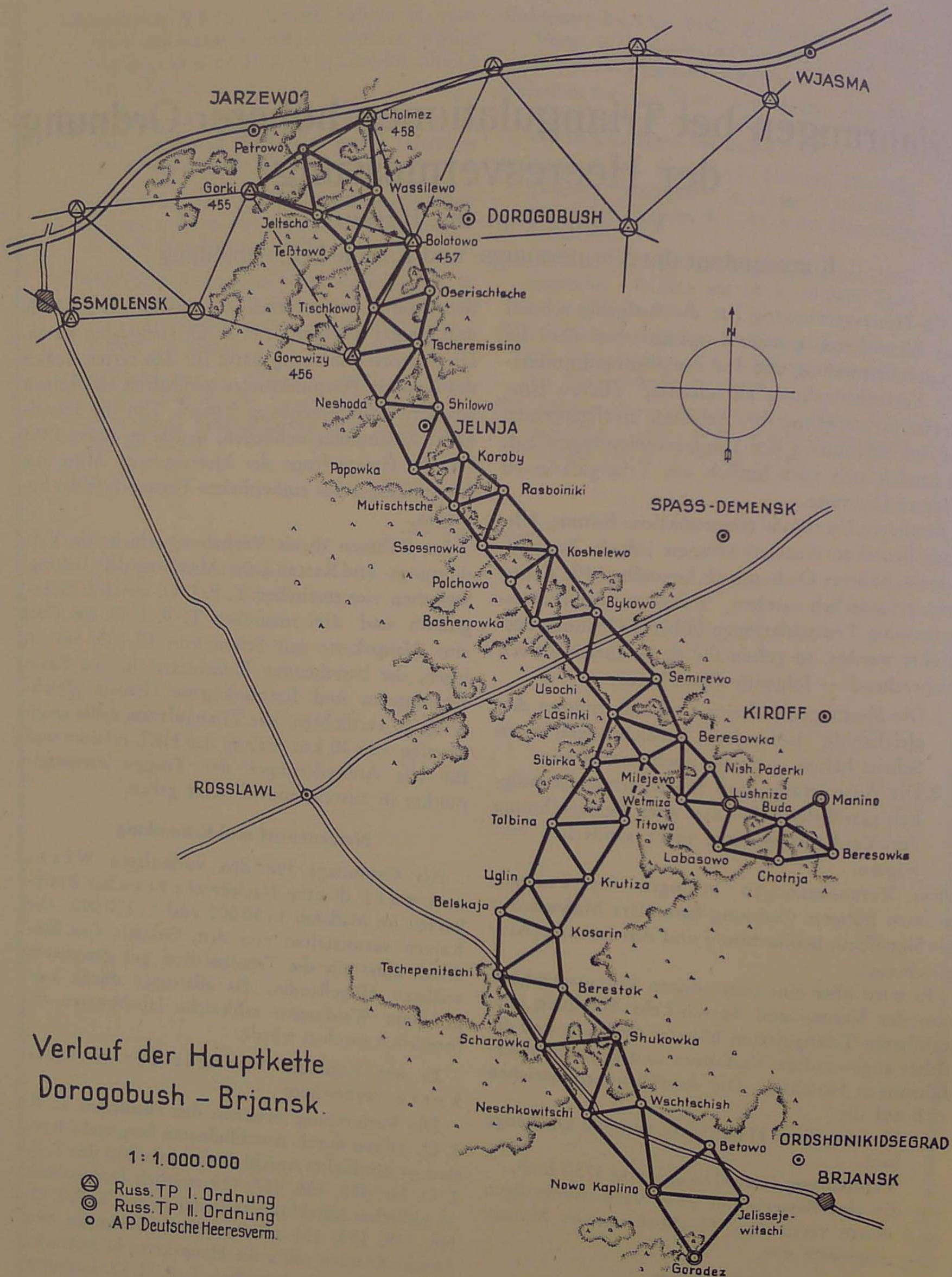
Im Rahmen dieses Vorhabens erhielt die Vermessungs- und Karten-Lehr-Abteilung den Auftrag, zwischen vier russischen T. P. I. O. westlich Dorogobush und drei russischen T. P. I. O. bei Orel eine Hauptkette mit Seiten von 10—15 km zu legen, die bestehenden Einzelnetze in die Kette einzubinden und festpunktarme Gebiete gleichzeitig zu verdichten. Die Triangulation sollte einen Streifen von 30 km entlang der HKL erfassen und für alle Anforderungen der Truppe Ausgangspunkte in ausreichendem Maße geben.

Netzentwurf und Erkundung

Als Grundlage für den vorläufigen Netzentwurf dienten Nachdrucke russischer Beutekarten im Maßstab 1 : 50 000 und 1 : 100 000. Die Karten vermittelten von dem Gelände den Eindruck eines für die Triangulation gut geeigneten welligen Hügellandes, das allerdings durch ausgedehnte Waldungen zahlreiche Hochbauten erforderlich machen würde.

Es war folgender Verlauf der Hauptkette vorgesehen:

Die Verbindung zwischen den russischen T. P. I. O. sollten durch Anschlußnetze hergestellt werden — nördliches Anschlußnetz zwischen den T. P. I. O. Nr. 455, 456, 457, 458 westlich Dorogobush — südliches Anschlußnetz zwischen den T. P. I. O. Nr. 149, 150, 151 nördlich Orel. Zwischen den Anschlußnetzen sollte die Hauptkette in gestrecktem Zug über die russischen T. P. II. O. Lushniza und Manino geführt werden (Übersicht 1).



Die Erkundung im Gelände ergab,

1. daß der beabsichtigte Verlauf der Kette durchführbar war,
2. daß es sich in dem gesamten Einsatzraum um Hochwald mit Baumböhen von 20—30 m handelte,
3. daß in dem leicht welligen Hügelland die Sichten häufig dicht über den Erdboden gingen.

Um einer ungünstigen Beeinflussung der Messung durch Bodenausstrahlung im Sommer vorzubeugen, wurden für die Hochbauten Zuschläge von 4 m zu den ermittelten Beobachtungshöhen und bei den Bodenpunkten 4 m hohe Beobachtungsstände befohlen.

Deutsche oder russische Signalbauweise

Die Notwendigkeit, eine große Anzahl von Hochbauten in kurzer Zeit errichten zu müssen, drängte zu dem Entschluß, die Hochbauten in russischer Bauweise herzustellen, um Zeit und Material zu sparen.

Beim deutschen Hochbau ist Tafelgerüst und Beobachtungsgerüst vollkommen von einander getrennt. Der Hochbau russischer Art besteht aus einem vierseitigen (nur gelegentlich dreiseitigen) Tafelgerüst, in dessen oberen Teil das Beobachtungsgerüst eingezogen ist — Gemeinschaftsgerüst. (Siehe auch Pürkner, Hochbauanweisung, Mittlg. d. Chef Kr.K. Verm. W. 1944/1.)

achters auf das Instrument übertragen. Es wurde deshalb eine Messungsanordnung angestrebt, bei der Bewegungen des Beobachters auf ein Mindestmaß beschränkt bleiben. Diese Forderung führte zur satzweisen Einzelwinkelmessung nach benachbarten Zielen. Die Richtigkeit dieser Messungsanordnung wurde bestätigt durch eine Versuchsmessung.

Auf einem Hochbau russischer Bauweise wurde nach sechs gleichmäßig am Horizont verteilten Zielen beobachtet. Die Zielpunkte hatten gleiche Entfernung und waren gut signalisiert. Es wurden in sechs Sätzen Richtungsmessungen und Einzelmessungen nach benachbarten Zielen durchgeführt. Die Einzelwinkelmessungen wurden mit Horizontabschluß auf $400''$ gemessen, um ein Maß für die Genauigkeit und gleichzeitig eine Genauigkeitssteigerung zu bekommen. Abbildung 2 zeigt die Messungsanordnung für drei Strahlen.

Die Bewegung des Turmes wurde durch Beobachtung einer Mire mit einem zweiten Instrument überwacht.

Es ergab sich:

1. Die Bewegungen des Turmes bei Richtungsmessung waren größer als bei Einzelwinkelmessung, und zwar um 50—60 Prozent.
2. Der mittlere Fehler einer Richtung bei satzweiser Richtungsmessung war größer als bei

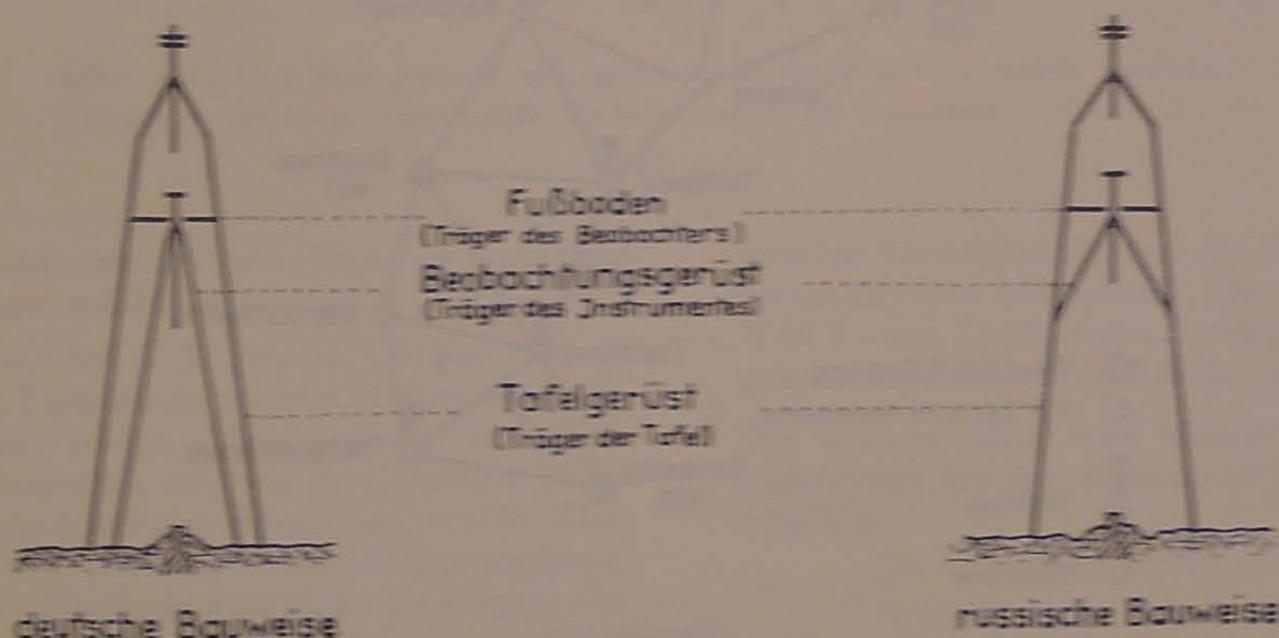


Abbildung 1

Beobachtungsverfahren auf Hochbauten mit Gemeinschaftsgerüst

Es mußte nun festgestellt werden, ob der Hochbau russischer Bauweise für Beobachtungen höherer Genauigkeit hinreichend gute Messungen gestattet.

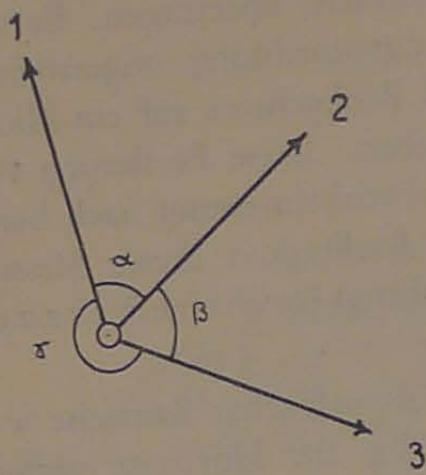
Durch die Verbindung zwischen Tafelgerüst und Beobachtungsgerüst wird jede Bewegung des Beob-

achters auf das Instrument übertragen. Es wurde deshalb eine Messungsanordnung angestrebt, bei der Bewegungen des Beobachters auf ein Mindestmaß beschränkt bleiben.

Richtungsmessung: $m = \pm 4,6''$

Einzelwinkelmessung: $m = \pm 3,6''$

Die Einzelwinkelmessung brachte eine eindeutige Genauigkeitssteigerung (um reichlich 20 Prozent) gegenüber der Richtungsmessung.



Kreisstellungen	0°			1 π/6			2 π/6			3 π/6			4 π/6			5 π/6		
Richtungen	F I			1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	F II			2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
Winkel	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ	α	β	γ
Summe	$\alpha + \beta + \gamma = 400^\circ$																	

Abbildung 2

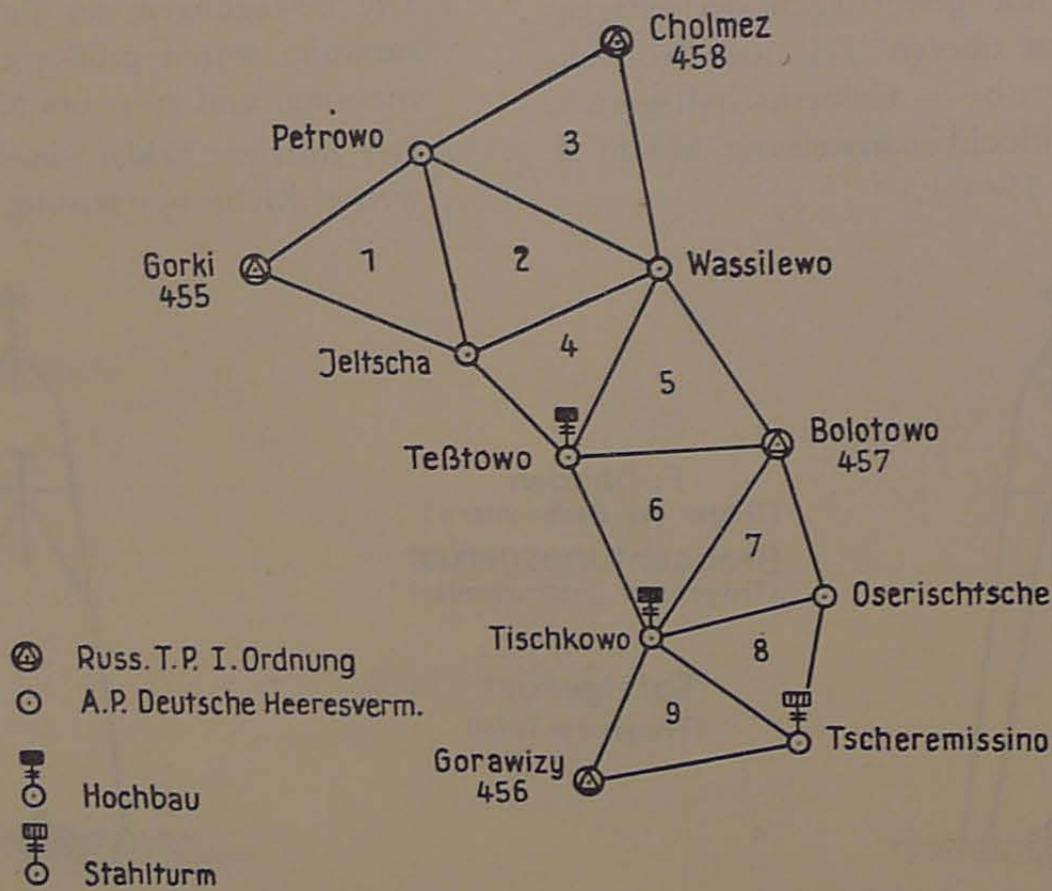
Überprüfung der Messungsanordnung

Die erste Bestätigung für die Richtigkeit der angestellten Überlegungen und getroffenen Maßnahmen sollte die Messung und Auswertung des nördlichen Anschlußnetzes zwischen Cholmez und Gorawizy bringen. Das Netz besteht aus 9 Dreiecken mit durchschnittlich 12 km langen Seiten (Übersicht 2). Hochbauten russischer Bauweise waren errichtet auf den A. P. Tesstowo und Tishkowo. Der A. P. Tscheremissino war mit dem 24-m-Stahlurm bebaut.

die Eignung des Th 40 zu Messungen höherer Genauigkeit unter feldmäßigen Bedingungen zulassen.

Bei der Messung zeigte sich:

1. Die Standfestigkeit der deutschen Hochbauten russischer Bauart war ausreichend. Sie war der Standfestigkeit des 24-m-Stahlurmes überlegen. Die Messungen auf den Hochbauten konnten ohne Rücksicht auf Witterung durchgeführt werden. Für Beobachtungen auf dem Stahlurm mußten windstille Tage abgewartet



Übersicht 2

Die Winkel wurden zu verschiedenen Tageszeiten und wechselnden Messungsumständen mit dem Theodolit Th 40 (planmäßiges Truppeninstrument) in sechs Sätzen mit Horizontabschluß beobachtet — und unter gleichen Voraussetzungen mit dem Präzisionsinstrument Wild T 3 für II. O. Die Gegenüberstellung der Messungsergebnisse mit den beiden Instrumenten sollte einen Schluß auf

werden. — Die geringe Standfestigkeit des Stahlurmes dürfte in dessen Alter — Nachlassen der überbeanspruchten Schrauben usw. — zu suchen gewesen sein.

2. Bei Beobachtungen auf Hochbauten (auf Beobachtungstisch) mit Th 40 zeigte sich, daß das Instrument zu kopflastig ist. Dies wirkte sich besonders bei Wind ungünstig aus. Für Turm-

beobachtungen müßte der Th 40 mit einer Fußplatte ausgestattet werden.

3. Das Instrument Wild T 3 lieferte bei schwierigen Visuren sicherere Beobachtungen als der Th 40. Auf Stationen mit schwierigen Visuren waren bei Messung mit dem Th 40 mehr zusätzliche Satzmessungen erforderlich als mit Wild T 3, um die angestrebte Genauigkeit zu erreichen. Offenbar wird bei Zielungen um 15 km Länge die Grenze der optischen Leistungsfähigkeit des Th 40 erreicht. Der Th 40 hat eine nutzbare Objektivöffnung von 40 mm, der Wild T 3 von 60 mm. Bei schwierigen Visuren muß diesem Umstand durch klare Signalisierung — insbesondere auch durch Leuchten mit dem

Die Ausgleichung ergab:

1. Die Messungsergebnisse auf den Hochbauten unterscheiden sich in ihrer Güte nicht von denen auf anderen Stationen. Die mittleren Fehler eines einmal gemessenen Winkels (Tabelle 1) auf den Hochbauten haben den anderen Punkten gegenüber dieselbe Größenordnung.
2. Die mittleren Fehler eines einmal gemessenen Winkels (Tabelle 1) sind beim Stahlurm größer als bei anderen Punkten, wenn von den mit Stern bezeichneten Werten abgesehen wird. Der Stahlurm gestattet weniger genaue Messungen.
3. Die Beobachtungen mit dem Wild T 3 sind genauer als die mit Th 40. Die mit dem Th 40

Mittlerer Winkelfehler aus Stationsbeobachtungen in $^{\circ}$

Punkt	Mittlerer Fehler eines einf. gemess. Winkels		Mittlerer Fehler des gemittelten Winkels	
	Th 40	Wild T 3	Th 40	Wild T 3
Gorki	± 7	± 6	$\pm 2,8$	$\pm 2,1$
Petrowo	± 8	± 2	$\pm 3,1$	$\pm 1,0$
Jeltscha	$\pm 10^*$	± 5	$\pm 4,2^*$ (7—9)	$\pm 2,0$
Cholmez	$\pm 14^*$	± 5	$\pm 3,9^*$ (11)	$\pm 1,9$
Wassilewo	$\pm 17^*$	± 5	$\pm 3,9^*$ (10—19)	$\pm 1,9$
Tesstowo (Hochbau)	$\pm 12^*$	± 4	$\pm 3,1^*$ (15)	$\pm 1,8$
Bolotowo	± 9	± 6	$\pm 3,2$	$\pm 2,2$
Tishkowo (Hochbau)	± 9	± 9	$\pm 3,5$	$\pm 3,8$
Oserischtsche	± 9	± 8	$\pm 2,6$ (15)	$\pm 2,4$ (12)
Tscheremissino (Stahlurm)	± 13	± 13	$\pm 4,4$ (8—10)	$\pm 3,1$ (9—24)
Gorawizy	± 8	± 8	$\pm 3,1$	$\pm 2,2$ (12)

Sofern mehr als 6 Sätze gemessen sind, ist die Anzahl der Sätze in Klammern vermerkt.

* Messungen mit leicht verschmutzter Umdrehungsachse der Instrumente.

Tabelle 1

Trig.-Scheinwerfer am Tage — Rechnung getragen werden.

4. Die auf den A. P. Jeltscha, Cholmez, Wassilewo, Tesstowo eingesetzten Instrumente Th 40 wiesen geringe Verschmutzung der Umdrehungsachse auf, was durch höhere Horizontabschlußfehler offenkundig wurde. Dies wirkte sich auf die Beobachtungen ungünstig aus und bedingte zusätzliche Messungen. Die vier A. P. sind in Tabelle 1 mit einem Stern bezeichnet. Sie sind zu den folgenden Betrachtungen nur teilweise herangezogen worden. Die Verschmutzung wurde im weiteren Einsatz beseitigt.

Das Anschlußnetz Cholmez — Gorawizy wurde nach vermittelnden Beobachtungen in einem Guß ausgeglichen. Die Messungen mit dem Instrument Wild T 3 und Th 40 wurden getrennt ausgewertet.

erreichte Genauigkeit ist aber für Heeresvermessungszwecke ausreichend. Die mit dem Wild T 3 und Th 40 erzielte Genauigkeit eines gemessenen Winkels ist aus Tabelle 1 ersichtlich.

Der mittlere Fehler eines Winkels des Anschlußnetzes aus den Stationsmessungen beträgt bei:

$$\text{Th 40 : } m = \pm 3,5^{\circ}$$

$$\text{Wild T 3 : } m = \pm 2,4^{\circ}$$

Dies entspricht einem Genauigkeitsunterschied von 30 Prozent.

4. Die Dreieckswidersprüche sind bei der Messung mit Wild T 3 geringer als bei der Messung mit Th 40. Die Dreieckswidersprüche bei der Messung mit Th 40 sind aber noch tragbar. Die Gegenüberstellung der Dreiecksschlußfehler zeigt Tabelle 2.

Dreieckswidersprüche im nördl. Anschlußnetz in ^{cc}

Dreieck	Dreieckswidersprüche bei Messungen mit	
	Th 40	Wild T 3
1	+5 (±5)	+3 (±3)
2	-3 (±7)	+3 (±3)
3	+7 (±6)	-3 (±3)
4	-12 (±7)	±0 (±4)
5	-5 (±5)	-4 (±4)
6	+18 (±5)	+8 (±6)
7	+10 (±5)	+7 (±5)
8	-8 (±7)	-16 (±5)
9	+1 (±7)	+7 (±7)

In Klammern sind die nach den mittleren Fehlern der gemessenen Winkel (Tab. 1) zu erwartenden Dreieckswidersprüche beigefügt.

Tabelle 2

Der mittlere Fehler eines Winkels aus den Dreieckswidersprüchen beträgt bei Messung mit

$$\text{Th 40: } m = \pm 5,2^{\text{cc}}$$

$$\text{Wild T 3: } m = \pm 4,1^{\text{cc}}$$

Wenn in diesen Fehlern außer den reinen Messungsfehlern auch andere Fehler (Zentrierungsfehler, Refraktionserscheinungen usw.) enthalten sind, so zeigt der Vergleich der mit den beiden Instrumenten erzielten Ergebnisse auch hier das gleiche Bild:

- Die aus Dreieckswidersprüchen ermittelten Winkelfehler sind um 35 Prozent bei Messung mit Th 40 und um 40 Prozent bei Messung mit Wild T 3 größer als die aus der Stationsmessung ermittelten Werte.
- Die Beobachtungen mit Wild T 3 sind um 20 Prozent genauer als die Beobachtungen mit Th 40.

Zusammenfassend ergab die Untersuchung des Netzanschlusses:

- Die Hochbauten russischer Art genügen den Anforderungen der Heeresvermessung.
- Die angehobenen Beobachtungsstände haben sich bewährt.
- Der Th 40 liefert hinreichend genaue Ergebnisse.

Auf Grund dieser Erfahrungen wurden im weiteren Verlauf zur Einsparung von Material und Zeit die Hochbauten über 8 Meter nach russischem Muster ausgeführt. Für Beobachtungshöhen unter 8 Meter wurde die getrennte Bauweise von Tafelgerüst und Beobachtungsgerüst beibehalten. Bei kleinen Bauten ergibt ein Gemeinschaftsgerüst keinen Vorteil. — Der Stahlurm wurde nicht mehr eingesetzt. —

Die Winkel wurden einzeln, satzweise mit dem Th 40 von Zeiß und dem Wild T 3 gemessen, die beim nördlichen Anschlußnetz gemachten Erfahrungen zu erhärten.

Die Hauptkette Gorawizy — Lushniza

Die Hauptkette zwischen Gorawizy und Lushniza besteht aus 20 Dreiecken mit Seitenlängen von 12—15 km. Auf 15 A. P. standen Hochbauten. Sie hatten Beobachtungshöhen von 20—50 m. Ein Teil davon waren russische Hochbauten, deren Koordinaten jedoch nicht bekannt waren. Auf den übrigen A. P. wurden Beobachtungsstände bis zu 10 m Beobachtungshöhe errichtet.

Nachdem die Hauptkette bis zu den russischen T. P. II. O. Lushniza und Manino vorgetrieben war, mußte von der Fortsetzung zu den T. P. I. O. bei Orel abgesehen werden, da die Front nach Westen verlegt wurde. Die Hauptkette wurde nunmehr dem neuen Frontverlauf entsprechend geplant von den A. P. Lasinki und Milejewo ausgehend über T. P. II. O. bei Briansk bis zu russischen T. P. I. O. der Parallelkette I. O. 52° 30' bei Starodub.

Bei der Messung der Hauptkette bestätigten sich die im Anschlußnetz gemachten Erfahrungen. Die Hochbauten russischer Bauart erwiesen sich als gut beobachtungsfähig. Die Ergebnisse mit dem Th 40 waren gut.

Bei der Auswertung ergab die vorläufige Durchrechnung der Kette zwischen dem nördlichen Anschlußnetz und den russischen T. P. II. O. Lushniza und Manino auf eine Länge von 120 km einen Abschlußfehler von 5,50 Meter. Dieses Ergebnis berechtigte zu dem Entschluß, die Beutepunkte II. O., über deren Genauigkeit in diesem Raum keine Angaben vorlagen, als Anschlußpunkte für die Hauptkette zu benutzen und die neu geplante Hauptkette für die Auswertung in drei Teilstücke zu zerlegen.

- Teilstück: Gorawizy — Lushniza,
- Teilstück: Milejewo — Gorodez (bei Briansk),
- Teilstück: Gorodez — Starodub.

Die Ausgleichung wurde im deutschen Heeresgitter durchgeführt. Anschließend an die Ausgleichung des nördlichen und südlichen Anschlußnetzes nach vermittelnden Beobachtungen wurde die Kette zwischen den beiden Anschlußnetzen nach dem Verfahren von Urmanjeff ausgeglichen. Die Messungsergebnisse mit Th 40 und Wild T 3 wurden getrennt ausgewertet.

Das Ausgleichungsverfahren Urmanjeff

Das Verfahren Urmanjeff ist aus der amerikanischen Bowie-Methode entwickelt, die beim Coast auf Geodetic Survey verwendet wird. Es hat der Bowie-Methode gegenüber den Vorteil, daß durch Anwendung des Verfahrens von Krüger die Dreiecksbedingungen von den übrigen Bedingungen getrennt in die Rechnung eingehen und die Rechenarbeiten damit erheblich vermindert werden.

Das Verfahren von Urmanjeff zur Ausgleichung einer Dreieckskette zwischen zwei Ausgangsseiten besteht darin:

Es sind neben den Dreiecksbedingungen eine Grundlinien-, eine Richtungs- und zwei Koordinatenbedingungen (je eine für Rechts- und Hochwert) zu erfüllen.

Zunächst werden die Dreiecke aufgestellt und die Dreieckswidersprüche (gleichmäßig, gegebenenfalls unter Zugrundelegen von Gewichten) verteilt. Damit sind die Dreiecksbedingungen erfüllt.

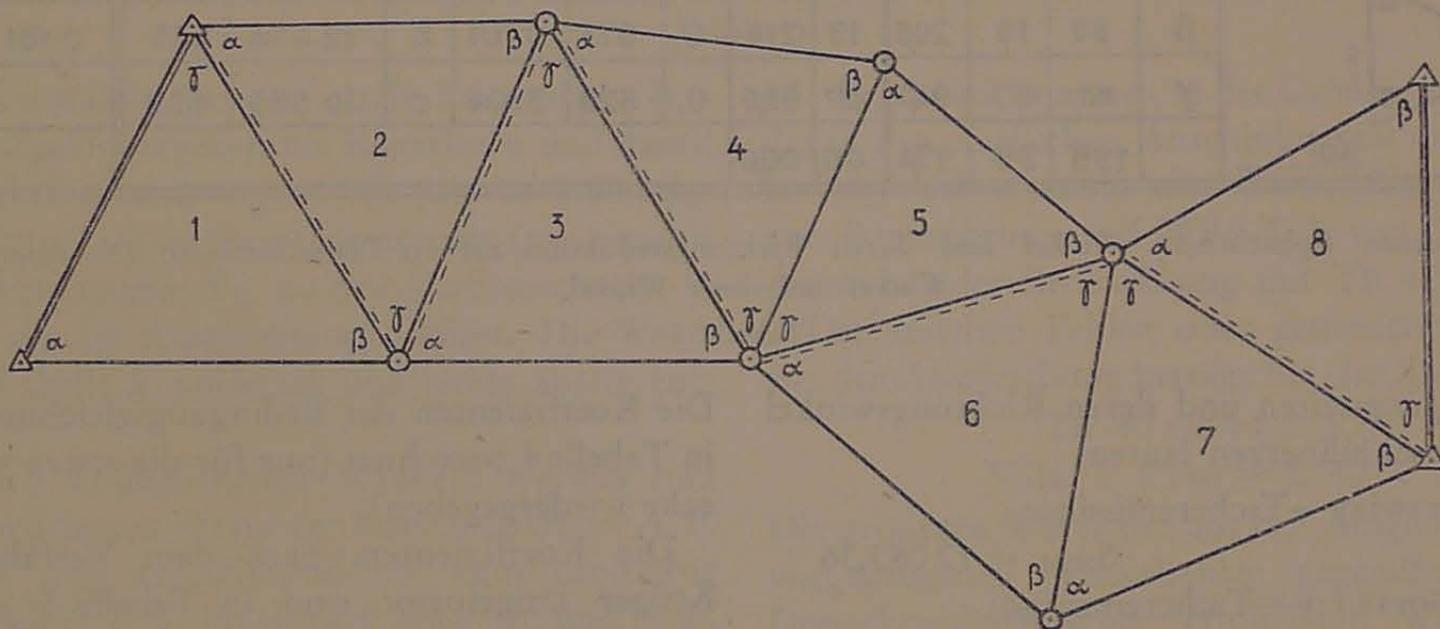


Abbildung 3

Nun wird in der Kette ein fortlaufender Linienzug zwischen den Anfangs- und Endpunkten ausgewählt — in Abb. 3 durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

Die durch den Linienzug erfaßten Seiten und Winkel dienen zur Aufstellung der Grundlinien-, Richtungs- und Koordinaten-Bedingungsgleichungen. Im Hinblick auf den ausgewählten Linienzug erhalten die Bedingungsgleichungen die Form:

$$\text{Richtungsgleichung: } \Sigma[\pm v_{\gamma}] + w_1 = 0$$

$$\text{Seitengleichung: } \Sigma[\Delta_{\alpha} \cdot v_{\alpha}] - \Sigma[\Delta_{\beta} \cdot v_{\beta}] + w_2 = 0$$

$$\text{Abszissengleichung: } \Sigma[(x_n - x)^{km} \cdot \Delta_{\alpha} \cdot v_{\alpha}] - \Sigma[(x_n - x)^{km} \cdot \Delta_{\beta} \cdot v_{\beta}] - \Sigma[k(y_n - y)^{km}(\pm v_{\gamma})] + 10^3 \cdot M \cdot w_3^m = 0$$

$$\text{Ordinatengleichung: } \Sigma[(y_n - y)^{km} \cdot \Delta_{\alpha} \cdot v_{\alpha}] - \Sigma[(y_n - y)^{km} \cdot \Delta_{\beta} \cdot v_{\beta}] + \Sigma[k(x_n - x)^{km}(\pm v_{\gamma})] + 10^3 \cdot M \cdot w_4^m = 0$$

$$k = \frac{10^6 \cdot M}{\rho^{cc}} = 0,682; \Delta = \log \sin \text{ Fortschritt für } 1^{cc} \text{ in Einheiten der 6. Stelle}$$

Die Widersprüche werden mit Hilfe der vorläufigen (abgeglichenen) Dreieckswinkel bestimmt.

Um bei Auflösung der Bedingungsgleichungen die vorweg erfüllten Dreiecksbedingungen nicht zu zerstören, werden die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen nach dem von Krüger angegebenen Verfahren umgeformt. An Stelle der Koeffizienten $l_{\alpha i}$, $l_{\beta i}$, $l_{\gamma i}$ einer Gleichung, die sich auf das Dreieck i beziehen, werden die Koeffizienten

$$L_{\alpha i} = l_{\alpha i} - \frac{1}{3}(l_{\alpha i} + l_{\beta i} + l_{\gamma i})$$

$$L_{\beta i} = l_{\beta i} - \frac{1}{3}(l_{\alpha i} + l_{\beta i} + l_{\gamma i})$$

$$L_{\gamma i} = l_{\gamma i} - \frac{1}{3}(l_{\alpha i} + l_{\beta i} + l_{\gamma i})$$

gesetzt. Wobei als Kontrolle gilt: $\Sigma L = 0$. Die Umformung bewirkt, daß die Summe der Winkelverbesserungen für jedes Dreieck Null wird.

Ausgleichung des 1. Teilstückes der Hauptkette

Die Zusammenstellung der Dreiecke der Hauptkette und ihre Ausgleichung durch gleichmäßige

Verteilung der Widersprüche (V_1) gibt Tabelle 3 (nur für die ersten 4 Dreiecke wiedergegeben).

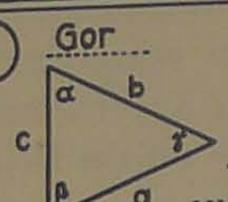
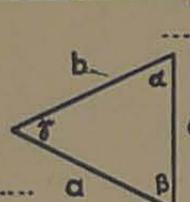
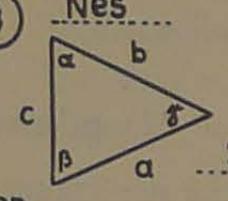
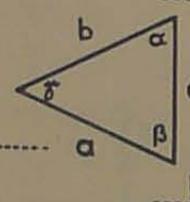
Die nördlichen und südlichen Anschlußpunkte der Dreieckskette haben die Koordinaten

$$\text{Gorawizy } r = 64\ 99\ 102,36$$

$$h = 60\ 62\ 692,10$$

$$\text{Lushniza } r = 65\ 70\ 353,40$$

$$h = 59\ 80\ 267,20$$

Dreieck	Winkel	g	c	cc	c	cc	o	sin	s	Fortschritt log. sin f. 10 ⁶				
① Gor  Nes	α	77	05	099	05	108	0,	935	7273	a	12 795,	474	0,257	+0,9
	β	68	98	433	98	442	0,	883	6511	b	12 083,	365	0,362	+0,9
	γ	53	96	441	96	450	0,			c				+0,9
			199	99	973	00	00,0							
② Tsch  Nes	α	56	98	693	98	677	0,	780	3004	a	10 839,	247	0,547	-1,6
	β	74	54	603	54	586	0,	921	1261	b	12 795,	474	0,289	-1,7
	γ	68	46	754	46	737	0,	879	8198	c	12 221,	683		-1,7
			200	00	050	00	00,0							
③ Nes  Pop	α	65	32	309	32	281	0,	855	2786	a	12 474,	885	0,413	-2,8
	β	53	33	307	33	280	0,	743	1392	b	10 839,	247	0,614	-2,7
	γ	81	34	467	34	439	0,			c				-2,8
			200	00	083	00	00,0							
④ Shil  Pop	α	53	22	822	22	830	0,	742	0398	a	9 513,	047	0,616	+0,8
	β	85	19	205	19	214	0,	973	0701	b	12 474,	885	0,161	+0,9
	γ	61	57	947	57	956	0,	823	3504	c	10 555,	459		+0,9
			199	99	974	00	00,0							

Die gemessenen (sphärischen) Winkel sind durch Richtungsreduktion auf die Ebene bezogen. Die eingetragenen Winkel sind ebene Winkel.

Tabelle 3

Die Ausgangsseiten und deren Richtungswinkel aus den Anschlußnetzen lauten:

Seite Gorawizy—Tscheremissino:

$$S_{\text{Nord}} = 12\,083,36$$

Ri.Wi. Gorawizy—Tscheremissino:

$$T_{\text{Nord}} = 89^{\circ}32'27,5$$

Seite Lushniza—Labosowo: $S_{\text{Süd}} = 8\,123,30$

Ri.Wi. Lushniza—Labosowo:

$$T_{\text{Süd}} = 212^{\circ}5,4368$$

Mit diesen Werten und dem abgeglichenen Dreieckswinkel ergeben sich die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen und deren Widersprüche.

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen sind in Tabelle 4 berechnet (nur für die ersten vier Dreiecke wiedergegeben).

Die Koeffizienten, nach dem Verfahren von Krüger umgeformt, sind in Tabelle 5 enthalten (nur für die ersten vier Dreiecke wiedergegeben).

Mit diesen umgeformten Koeffizienten ergeben sich die Normalgleichungen zu:

$$+121,50k_A + 0,33k_B - 85,65k_C - 109,17k_D + 38,40 = 0$$

$$+ 0,33k_A + 71,71k_B - 81,38k_C + 76,76k_D - 84,50 = 0$$

$$- 85,65k_A - 81,38k_B + 224,74k_C - 20,09k_D + 166,16 = 0$$

$$- 109,17k_A + 76,76k_B - 20,09k_C + 258,37k_D - 172,11 = 0$$

Berechnung der Koeffizienten

Nr. der Dreiecke	Scheitelpunkte der zwischenliegenden Winkel	H in km x	R in km y	$x_n - x$	$y_n - y$	$\Delta\alpha$	$-\Delta\beta$	$\Delta\alpha(x_n - x)$	$\Delta\alpha(y_n - y)$	$-\Delta\beta(x_n - x)$	$-\Delta\beta(y_n - y)$	$k \cdot (x_n - x)$	$k \cdot (y_n - y)$
1	Tscheremissino	64,7	11,0	84,4	59,3	+0,257	-0,362	-21,7	+15,2	+30,6	-21,5	-57,6	+40,5
2	Neshoda	53,8	04,3	73,6	66,1	+0,547	-0,289	-40,2	+36,1	+21,3	-19,1	-50,2	+45,1
3	Shilowo	53,2	15,1	72,9	55,3	+0,413	-0,614	-30,1	+22,8	+44,8	-33,9	-49,7	+37,7
4	Popowka	41,5	10,8	61,2	59,6	+0,616	-0,161	-37,7	+36,7	+ 9,8	- 9,6	-41,7	+40,6

Tabelle 4

Um die Genauigkeit der gegenseitigen Punktlage zu bestimmen, wurde noch der mittlere Fehler der Strecke und Richtung zwischen Bashenowka und Koshelewo bestimmt:

Bashenowka Koshelewo (13,7 km)	Th 40	Wild T 3
m_s	$\pm 0,12 \text{ m}$	$\pm 0,10 \text{ m}$
m_T	$\pm 5,2 \text{ cc}$	$\pm 4,3 \text{ cc}$

Dies entspricht einem relativen Fehler der ausgeglichenen Seiten von 1/110 000 und 1/140 000.

Strenge Ausgleichung und genäherte Berechnung

Für die Auswertung des 1. Teilstückes der Hauptkette war ein Rechenrupp (1 Truppführer, 2 Rechner) eingesetzt.

Neben der strengen Ausgleichung wurde eine genäherte Berechnung auf Grund reinen Dreiecksabgleiches und stufenweiser Verteilung der Fehler durchgeführt. Aus der Gegenüberstellung sollte beurteilt werden können:

1. Der Mehraufwand an Zeit für die Ausgleichung.
2. Größe der Abweichungen zwischen den Ergebnissen.

Die genäherte Berechnung der Kette von den ebenen Winkeln bis zu den Koordinaten erforderte $\frac{1}{2}$ Tag.

Die strenge Ausgleichung der Kette von den ebenen Winkeln bis zu den Koordinaten erforderte zwei Tage (ohne zusätzliche Fehlerberechnung).

Dreieckswidersprüche des 2. Teilstücks der Hauptkette in cc

Instrument	Nr. der Dreiecke																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Th 40	± 0	$+3$	$+5$	$+6$	$+1$	$+6$	$+6$	$+8$	$+2$	-5	$+1$	$+1$	-18	-20	$+13$	-19	$+14$

Die Messungen der Dreiecke 13—17 standen unter starker Refraktionsbeeinträchtigung

Tabelle 7

Der Mehraufwand an Zeit ist bei strenger Ausgleichung nach dem Verfahren von Urmanjeff gering. Sofern eine gute Genauigkeit mit der Triangulation angestrebt wird, ist das Verfahren zu empfehlen.

Zwischen den Ergebnissen der genäherten Berechnung und der strengen Ausgleichung ergaben sich im Höchstwert Abweichungen von 0,45 m in der Mitte der Kette. Dieser Betrag ist auf eine Länge von 60 km ($\frac{1}{2}$ der Kettenlänge) für Heeresvermessungszwecke ohne weiteres tragbar. Bei Zeitmangel kann auf die Ausgleichung verzichtet werden.

Fortsetzung der Hauptkette nach Süden

Im Anschluß an das 1. Teilstück der Hauptkette von Gorawizy bis Lushniza wurde das 2. Teilstück der Hauptkette von Milejewo bis Gorodez (bei Briansk) beobachtet. Nach Beendigung der Messungen bei Briansk setzten Absetzbewegungen ein. Die Hauptkette konnte daher nicht mehr — wie beabsichtigt — auf den russischen T. P. I. O. bei Starodub abgeschlossen werden.

Die Beobachtungen wurden nach denselben Gesichtspunkten ausgeführt. Erfahrungen, die sich bei den bisherigen Messungen ergeben hatten, wurden verwertet. Sie machten sich vorteilhaft bemerkbar. Im Südteil führte die Kette entlang einer Hauptstraße, auf der nach Einsetzen der Absetzbewegungen sehr starke Staubentwicklung auftrat. Starke Refraktionserscheinungen waren die Folge. Außerdem mußten die Beobachter zu besonderer Eile angehalten werden, um die Ergebnisse rechtzeitig der Truppe liefern zu können. Diese beiden Umstände wirkten sich auf die Güte der Beobachtungen im Süden nachteilig aus.

Das Instrument Wild T 3 wurde mit den Ergebnissen bei einem Bandenüberfall vernichtet. Für diesen Teil der Kette stehen daher nur die Messungen mit dem Th 40 zur Verfügung.

Die Ausgleichung in der bisherigen Weise erbrachte erneut den Nachweis für die Brauchbarkeit des Th 40. Tabelle 7 gibt die Zusammenstellung der Dreieckswidersprüche.

Es ergab sich der mittlere Fehler eines Winkels aus den Dreieckswidersprüchen

$$m = \pm 5,7 \text{ cc.}$$

Der mittlere Fehler eines Winkels vom nördlichen Kettenteil (der frei ist von der offensichtlichen Beeinträchtigung durch Refraktion und der geringeren Beobachtungssorgfalt) beträgt:

$$m = \pm 2,5 \text{ cc.}$$

Der mittlere Fehler aus der Ausgleichung, wobei die mit groben Fehlern behafteten südlichen Dreiecke enthalten sind, beträgt:

$$m = \pm 6,6 \text{ cc.}$$

Trotz der Beeinträchtigung der Messungsgenauigkeit durch die geschilderten Verhältnisse im Südteil der Hauptkette zeigt die Gegenüberstellung, daß es sich bei den mitgeteilten Angaben über die Hauptkette Gorawizy — Lushniza nicht um zufällige Ergebnisse handelt.

Vergleich mit der russischen Triangulation II. O.

Für Triangulationen II. O. sind in der Vorschrift über trigonometrische Verdichtungsarbeiten II., III. und IV. Ordnung, Moskau 1939, folgende Genauigkeitsgrenzen gesetzt, die nicht überschritten werden dürfen:

1. Für den mittleren Fehler eines aus der Ausgleichung hervorgehenden Winkels: $\pm 9^{\text{cc}}$.
2. Für den höchstzulässigen relativen Fehler einer ausgeglichenen Seite: $1/35\ 000$.
3. Für den zulässigen Wert des Dreieckswiderspruchs: 27^{cc} .
4. Für den mittleren Fehler eines Winkels aus Dreieckswidersprüchen (bei mindestens 15 Dreiecken): $7,5^{\text{cc}}$.

Beobachtungen gemachten Erfahrungen ist anzunehmen, daß sich die Ergebnisse noch günstiger gestalten.

Schlußbetrachtung

Die Auswertung der Beobachtungen des Hauptnetzes von Dorogobush bis Briansk ergab:

1. Die Standfestigkeit der Hochbauten russischer Art genügen den Anforderungen der Heeresvermessung — auch bei erhöhten Ansprüchen an die Genauigkeit, wie in vorliegendem Fall. Auf Grund der guten Messungsergebnisse auf den Hochbauten russischer Art und im Hinblick auf die hohe Zeit- und Materialersparnis für die Errichtung, sind Hochbauten mit Gemeinschaftsgerüst für die Heeresvermessung zweckmäßig.
2. Der planmäßige Theodolit der Verm.- und Karten-Abteilungen, der Th 40, liefert ausreichende Ergebnisse, gegebenenfalls unter Beachtung der Forderung, daß weite und schwierige Sichten geleuchtet werden müssen.

	Nördliches Anschlußnetz		Hauptkette				Zulässig nach russ. Vorschrift
	Th 40	Wild T 3	1. Teilstück		2. Teilstück		
	Th 40	Wild T 3	Th 40	Wild T 3	Th 40	Wild T 3	
Mittlerer Fehler eines ausgeglichenen Winkels	$\pm 4,9^{\text{cc}}$	$\pm 4,9^{\text{cc}}$	$\pm 5,7^{\text{cc}}$	$\pm 4,7^{\text{cc}}$	$\pm 6,6^{\text{cc}}$		$\pm 9^{\text{cc}}$
Relativer Fehler einer ausgeglichenen Seite			$\frac{1}{110\ 000}$	$\frac{1}{140\ 000}$			$\frac{1}{35\ 000}$
Höchstwert für den Dreieckswiderspruch	18^{cc}	16^{cc}	22^{cc}	15^{cc}	20^{cc}		27^{cc}
Mittl. Fehler eines Winkels aus Dreieckswidersprüchen	$\pm 5,2^{\text{cc}}$	$\pm 4,1^{\text{cc}}$	$\pm 5,0^{\text{cc}}$	$\pm 3,9^{\text{cc}}$	$\pm 5,7^{\text{cc}}$		$\pm 7,5^{\text{cc}}$

Tabelle 8

Die Gegenüberstellung der Ergebnisse zeigt, daß die Fehler in allen Fällen weit unterhalb der Grenzen der russischen Vorschrift bleiben.

Die Anordnung der Messungen hat sich auch unter diesem Gesichtspunkt bewährt. Mit ihr war es möglich, mit unter häufiger Feindeinwirkung ausgeführten Messungen friedensmäßige Genauigkeit zu erzielen. Unter Beachtung der bei den

3. Die satzweise Einzelwinkelmessung nach benachbarten Zielen ist auf Bauten mit Gemeinschaftsgerüst anderen Beobachtungsverfahren gegenüber im Vorteil.

4. Das Ausgleichungsverfahren von Urmanjeff ist für die Heeresvermessung besonders geeignet. Es ist einfach durchzuführen und führt schnell zum Ziel.

Änderung der Gauß-Krügerschen Koordinaten infolge Verschiebung, Streckung, Verdrehung des Koordinaten- systems und Übergang zu einem anderen Referenzellipsoid

Von Dr. Wl. K. Hristow, Sofia

Es sei auf dem Referenzellipsoid eine geodätische Strecke gegeben, deren Anfangs- bzw. Endpunkt die Gauß-Krügerschen Koordinaten x, y bzw. x', y' hat; ferner sei die Länge der geodätischen Strecke s und die beiden Gaußschen Richtungswinkel seien T und T' . In meinem Werk „Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid“, Leipzig und Berlin 1943, habe ich darunter die folgenden Zusammenhänge abgeleitet, daselbst § 9 (13) bis (16)

$$\Delta x = x' - x = \left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \cos T + \frac{1}{R^2} y s^2 \cos T \sin T + \frac{1}{3R^2} s^3 \cos T \sin^2 T \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta y = y' - y = \left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \sin T - \frac{1}{2R^2} y s^2 \cos^3 T + \frac{1}{2R^2} y s^2 \sin^2 T - \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{6R^2} s^3 \cos^2 T \sin T + \frac{1}{6R^2} s^3 \sin^3 T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\Delta T = T' - T \pm \pi = -\frac{1}{R^2} y s \cos T - \frac{1}{2R^2} s^2 \cos T \sin T, \dots \dots \dots (3)$$

worin $\frac{1}{R^2}$ mit der Fußpunktsbreite φ zu entnehmen ist, die der Abszisse x entspricht.

Nun stellen wir uns die Aufgabe vor: Wir verschieben den Anfangspunkt der geodätischen Strecke (Änderung der Gauß-Krügerschen Koordinaten dx, dy), vergrößern die Länge der geodätischen Strecke (Änderung der Länge ds), verdrehen die geodätische Strecke im Anfangspunkt (Änderung des Gaußschen Richtungswinkels dT), gehen zu einem anderen Referenzellipsoid über (Änderung der großen Halbachse da und der Abplattung $d\alpha$), und fragen nach den Änderungen dx', dy' und dT' im Endpunkt.

Zunächst entnehmen wir mit der neuen Abszisse $x+dx$ auf dem neuen Referenzellipsoid ($a+da, \alpha+da$) die neue Fußpunktsbreite $\varphi+d\varphi$, womit auch die Änderung $d\varphi$ der Fußpunktsbreite festgelegt wird. Auf diese Weise haben wir alle sechs Argumente $\varphi+d\varphi, y+dy, s+ds, T+dT, a+da$ und $\alpha+da$, welche zu einer eventuellen neuen Berechnung von $\Delta x, \Delta y$ und ΔT nach (1), (2) und (3) notwendig sind. Statt dessen errechnen wir direkt die Änderungen von $\Delta x, \Delta y$ und ΔT infolge der Änderungen $d\varphi, dy, ds, dT$ und da und $d\alpha$, was zumal genauer gemacht werden kann.

Vorgreifend geben wir die Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{R^2}, \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{R^2} \text{ und } \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R^2}, \text{ wo}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R^2} &= \frac{1}{N^2} (1 + \eta^2) = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2}{a^2 (1 - e^2)} \\ e^2 &= 2\alpha - \alpha^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ist. Es findet sich mit genügender Genauigkeit

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{R^2} &= -\frac{4t\eta^2}{R^2} = -\frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi \\ \frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{R^2} &= -\frac{2}{R^2} \frac{1}{a} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{R^2} &= \frac{2}{R^2} \cos^2 \varphi (1 - t^2) = \frac{2}{R^2} \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Nun gibt die Differentiation von (1), (2) und (3) sofort:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial \varphi} &= -\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 s \cos T - \frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y s^2 \cos T \sin T - \frac{2e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi s^3 \cos T \sin^2 T \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \varphi} &= -\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 s \sin T + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y s^2 \cos^2 T - \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y s^2 \sin^2 T + \\ &\quad + \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi s^3 \cos^2 T \sin T - \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi s^3 \sin^3 T \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi} &= \frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi s \cos T + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi s^2 \cos T \sin T \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial y} &= \frac{1}{R^2} y s \cos T + \frac{1}{R^2} s^2 \cos T \sin T \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial y} &= \frac{1}{R^2} y s \sin T - \frac{1}{2R^2} s^2 \cos^2 T + \frac{1}{2R^2} s^2 \sin^2 T \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial y} &= -\frac{1}{R^2} s \cos T \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} s \frac{\partial \Delta x}{\partial s} &= \left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \cos T + \frac{2}{R^2} y s^2 \cos T \sin T + \frac{1}{R^2} s^3 \cos T \sin^2 T \\ s \frac{\partial \Delta y}{\partial s} &= \left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \sin T - \frac{1}{R^2} y s^2 \cos^2 T + \frac{1}{R^2} s^2 \sin^2 T - \frac{1}{2R^2} s^3 \cos^2 T \sin T + \frac{1}{2R^2} s^3 \sin^3 T \\ s \frac{\partial \Delta T}{\partial s} &= -\frac{1}{R^2} y s \cos T - \frac{1}{R^2} s^2 \cos T \sin T \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial T} &= -\left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \sin T + \frac{1}{R^2} y s^2 \cos^2 T - \frac{1}{R^2} y s^2 \sin^2 T + \frac{2}{3R^2} s^3 \cos^2 T \sin T - \frac{1}{3R^2} s^3 \sin^3 T \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial T} &= \left(1 + \frac{1}{2R^2} y^2\right) s \cos T + \frac{2}{R^2} y s^2 \cos T \sin T - \frac{1}{6R^2} s^3 \cos^3 T + \frac{5}{6R^2} s^3 \cos T \sin^2 T \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial T} &= \frac{1}{R^2} y s \sin T - \frac{1}{2R^2} s^2 \cos^2 T + \frac{1}{2R^2} s^2 \sin^2 T \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial \Delta x}{\partial a} &= -\frac{1}{R^2} y^2 s \cos T - \frac{2}{R^2} y s^2 \cos T \sin T - \frac{2}{3R^2} s^3 \cos T \sin^2 T \\ a \frac{\partial \Delta y}{\partial a} &= -\frac{1}{R^2} y^2 s \sin T + \frac{1}{R^2} y s^2 \cos^2 T - \frac{1}{R^2} y s^2 \sin^2 T + \frac{1}{3R^2} s^3 \cos^2 T \sin T - \frac{1}{3R^2} s^3 \sin^3 T \\ a \frac{\partial \Delta T}{\partial a} &= \frac{2}{R^2} y s \cos T + \frac{1}{R^2} s^2 \cos T \sin T \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 s \cos T + \frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y s^2 \cos T \sin T + \frac{2}{3R^2} \cos 2\varphi s^3 \cos T \sin^2 T \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 s \sin T - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y s^2 \cos^2 T + \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y s^2 \sin^2 T - \\ &\quad - \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi s^3 \cos^2 T \sin T + \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi s^3 \sin^3 T \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial \alpha} &= -\frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y s \cos T - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi s^2 \cos T \sin T \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Weiter kehren wir (1) und (2) um:

$$s \cos T = \left(1 - \frac{1}{2R^2} y^2\right) \Delta x - \frac{1}{R^2} y \Delta x \Delta y - \frac{1}{3R^2} \Delta x \Delta y^2 \dots \dots \dots (12)$$

$$s \sin T = \left(1 - \frac{1}{2R^2} y^2\right) \Delta y + \frac{1}{2R^2} y \Delta x^2 - \frac{1}{2R^2} y \Delta y^2 + \frac{1}{6R^2} \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{6R^2} \Delta y^3 \dots \dots \dots (13)$$

und setzen (12) und (13) in (6) bis (11) ein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial \varphi} &= -\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 \Delta x - \frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x \Delta y - \frac{2e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta x \Delta y^2 \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \varphi} &= -\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 \Delta y + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x^2 - \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta y^2 + \\ &\quad + \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta x^2 \Delta y - \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta y^3 \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi} &= \frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi \Delta x \Delta y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial y} &= \frac{1}{R^2} y \Delta x + \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial y} &= \frac{1}{R^2} y \Delta y - \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta y^2 \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial y} &= -\frac{1}{R^2} \Delta x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} s \frac{\partial \Delta x}{\partial s} &= \Delta x + \frac{1}{R^2} y \Delta x \Delta y + \frac{2}{3R^2} \Delta x \Delta y^2 \\ s \frac{\partial \Delta y}{\partial s} &= \Delta y - \frac{1}{2R^2} y \Delta x^2 + \frac{1}{2R^2} y \Delta y^2 - \frac{1}{3R^2} \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{3R^2} \Delta y^3 \\ s \frac{\partial \Delta T}{\partial s} &= -\frac{1}{R^2} y \Delta x - \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial T} &= -\Delta y + \frac{1}{2R^2} y \Delta x^2 - \frac{1}{2R^2} y \Delta y^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{6R^2} \Delta y^3 \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial T} &= \Delta x + \frac{1}{R^2} y \Delta x \Delta y - \frac{1}{6R^2} \Delta x^3 + \frac{1}{2R^2} \Delta x \Delta y^2 \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial T} &= \frac{1}{R^2} y \Delta y - \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta y^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial \Delta x}{\partial a} &= -\frac{1}{R^2} y^2 \Delta x - \frac{2}{R^2} y \Delta x \Delta y - \frac{2}{3R^2} \Delta x \Delta y^2 \\ a \frac{\partial \Delta y}{\partial a} &= -\frac{1}{R^2} y^2 \Delta y + \frac{1}{R^2} y \Delta x^2 - \frac{1}{R^2} y \Delta y^2 + \frac{1}{3R^2} \Delta x^2 y - \frac{1}{3R^2} \Delta y^3 \\ a \frac{\partial \Delta T}{\partial a} &= \frac{2}{R^2} y \Delta x + \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 \Delta x + \frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x \Delta y + \frac{2}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta x \Delta y^2 \\ \frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 \Delta y - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x^2 + \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta y^2 - \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta y^3 \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial \alpha} &= -\frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi \Delta x \Delta y. \end{aligned} \right\} (19)$$

Jetzt bleibt ein einziger Schritt übrig, um die endgültigen Formeln zu erhalten. Durch die Differentiation von

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \Delta x \\ y' &= y + \Delta y \\ T' &= T + \Delta T \pm \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

haben wir

$$dx' = dx + \frac{\partial \Delta x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \Delta x}{\partial y} dy + s \frac{\partial \Delta x}{\partial s} \frac{ds}{s} + \frac{\partial \Delta x}{\partial T} dT + a \frac{\partial \Delta x}{\partial a} \frac{da}{a} + \frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} d\alpha \quad (21)$$

$$dy' = \frac{\partial \Delta y}{\partial \varphi} d\varphi + \left(1 + \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\right) dy + s \frac{\partial \Delta y}{\partial s} \frac{ds}{s} + \frac{\partial \Delta y}{\partial T} dT + a \frac{\partial \Delta y}{\partial a} \frac{da}{a} + \frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha} d\alpha \quad (22)$$

$$dT' = \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \Delta T}{\partial y} dy + s \frac{\partial \Delta T}{\partial s} \frac{ds}{s} + \left(1 + \frac{\partial \Delta T}{\partial T}\right) dT + a \frac{\partial \Delta T}{\partial a} \frac{da}{a} + \frac{\partial \Delta T}{\partial \alpha} d\alpha \quad (23)$$

worin wir (14) bis (19) eintragen:

$$\left. \begin{aligned} dx' &= dx + \left(-\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 \Delta x - \frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x \Delta y - \frac{2e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta x \Delta y^2 \right) d\varphi + \left(\frac{1}{R^2} y \Delta x + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \right) dy + \left(\Delta x + \frac{1}{R^2} y \Delta x \Delta y + \frac{2}{3R^2} \Delta x \Delta y^2 \right) \frac{ds}{s} + \left(-\Delta y + \frac{1}{2R^2} y \Delta x^2 - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2R^2} y \Delta y^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{6R^2} \Delta y^3 \right) dT + \left(-\frac{1}{R^2} y^2 \Delta x - \frac{2}{R^2} y \Delta x \Delta y - \right. \\ &- \left. \frac{2}{3R^2} \Delta x \Delta y^2 \right) \frac{da}{a} + \left(\frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 \Delta x + \frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x \Delta y + \frac{2}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta x \Delta y^2 \right) d\alpha \end{aligned} \right\} (24)$$

$$\left. \begin{aligned} dy' &= \left(-\frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y^2 \Delta y + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x^2 - \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta y^2 + \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta x^2 \Delta y - \right. \\ &- \left. \frac{e'^2}{3R^2} \sin 2\varphi \Delta y^3 \right) d\varphi + \left(1 + \frac{1}{R^2} y \Delta y - \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta y^2 \right) dy + \left(\Delta y - \frac{1}{2R^2} y \Delta x^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2R^2} y \Delta y^2 - \frac{1}{3R^2} \Delta x^2 \Delta y + \frac{1}{3R^2} \Delta y^3 \right) \frac{ds}{s} + \left(\Delta x + \frac{1}{R^2} y \Delta x \Delta y - \frac{1}{6R^2} \Delta x^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2R^2} \Delta x \Delta y^2 \right) dT + \left(-\frac{1}{R^2} y^2 \Delta y + \frac{1}{R^2} y \Delta x^2 - \frac{1}{R^2} y \Delta y^2 + \frac{1}{3R^2} \Delta x^2 \Delta y - \frac{1}{3R^2} \Delta y^3 \right) \frac{da}{a} + \\ &+ \left(\frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y^2 \Delta y - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x^2 + \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta y^2 - \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta x^2 \Delta y + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3R^2} \cos 2\varphi \Delta y^3 \right) d\alpha \end{aligned} \right\} (25)$$

$$\left. \begin{aligned} dT' &= \left(\frac{2e'^2}{R^2} \sin 2\varphi y \Delta x + \frac{e'^2}{R^2} \sin 2\varphi \Delta x \Delta y \right) d\varphi - \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y + \left(-\frac{1}{R^2} y \Delta x - \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \right) \frac{ds}{s} + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{R^2} y \Delta y - \frac{1}{2R^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2R^2} \Delta y^2 \right) dT + \left(\frac{2}{R^2} y \Delta x + \frac{1}{R^2} \Delta x \Delta y \right) \frac{da}{a} + \\ &+ \left(-\frac{2}{R^2} \cos 2\varphi y \Delta x - \frac{1}{R^2} \cos 2\varphi \Delta x \Delta y \right) d\alpha \end{aligned} \right\} (26)$$

Die Entwicklungen (24), (25) und (26) ordnen wir noch nach Δx und Δy , setzen die notwendigen e , schreiben zur Abkürzung

$$dp = \frac{ds}{s} \dots \dots \dots (27)$$

fügen den ungestrichenen Größen den Index 0 hinzu und streichen bei den gestrichenen Größen den Strich durch. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta y &= y - y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\begin{aligned} dx &= dx_0 + \left(-\frac{e'^2}{\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0^2 d\varphi_0 + \frac{1}{R_0^2} y_0 dy_0 + d\varphi - \frac{1}{R_0^2} y_0^2 \frac{da}{a} + \frac{1}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0^2 da \right) \cdot \Delta x - \\ &- \frac{1}{\rho} dT_0 \cdot \Delta y + \frac{1}{2\rho R_0^2} y_0 dT_0 \cdot \Delta x^2 + \left(-\frac{2e'^2}{\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0 d\varphi_0 + \frac{1}{R_0^2} dy_0 + \frac{1}{R_0^2} y_0 dp - \right. \\ &- \left. \frac{2}{R_0^2} y_0 \frac{da}{a} + \frac{2}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0 da \right) \cdot \Delta x \Delta y - \frac{1}{2\rho R_0^2} y_0 dT_0 \cdot \Delta y^2 + \frac{1}{2\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^2 \Delta y + \\ &+ \left(-\frac{2e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 + \frac{2}{3R_0^2} dp - \frac{2}{3R_0^2} \frac{da}{a} + \frac{2}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 da \right) \cdot \Delta x \Delta y^2 - \\ &- \frac{1}{6\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta y^3 \end{aligned} \quad \left. \dots \dots \dots (29) \right\}$$

$$\begin{aligned} dy &= dy_0 + \frac{1}{\rho} dT_0 \cdot \Delta x + \left(-\frac{e'^2}{\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0^2 d\varphi_0 + \frac{1}{R_0^2} y_0 dy_0 + dp - \frac{1}{R_0^2} y_0^2 \frac{da}{a} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0^2 da \right) \cdot \Delta y + \left(\frac{e'^2}{\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0 d\varphi_0 - \frac{1}{2R_0^2} dy_0 - \frac{1}{2R_0^2} y_0' dp + \frac{1}{R_0^2} y_0 \frac{da}{a} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0 da \right) \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{\rho R_0^2} y_0 dT_0 \cdot \Delta x \Delta y + \left(-\frac{e'^2}{\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0 d\varphi_0 + \frac{1}{2R_0^2} dy_0 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2R_0^2} y_0 dp - \frac{1}{R_0^2} y_0 \frac{da}{a} + \frac{1}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0 da \right) \cdot \Delta y^2 - \frac{1}{6\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^3 + \\ &+ \left(\frac{e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 - \frac{1}{3R_0^2} dp + \frac{1}{3R_0^2} \frac{da}{a} - \frac{1}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 da \right) \cdot \Delta x^2 \Delta y + \\ &+ \frac{1}{2\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x \Delta y^2 + \left(-\frac{e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 + \frac{1}{3R_0^2} dp - \frac{1}{3R_0^2} \frac{da}{a} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 da \right) \cdot \Delta y^3 \end{aligned} \quad \left. \dots \dots \dots (30) \right\}$$

$$\begin{aligned} dT &= dT_0 + \left(\frac{2e'^2}{R_0^2} \sin 2\varphi_0 y_0 d\varphi_0 - \frac{\rho}{R_0^2} dy_0 - \frac{\rho}{R_0^2} y_0 dp + \frac{2\rho}{R_0^2} y_0 \frac{da}{a} - \right. \\ &- \left. \frac{2\rho}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 y_0 da \right) \cdot \Delta x + \frac{1}{R_0^2} y_0 dT_0 \cdot \Delta y - \frac{1}{2R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{e'^2}{R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 - \right. \\ &- \left. \frac{\rho}{R_0^2} dp + \frac{\rho}{R_0^2} \frac{da}{a} - \frac{\rho}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 da \right) \cdot \Delta x \Delta y + \frac{1}{2R_0^2} dT_0 \cdot \Delta y^2. \end{aligned} \quad \left. \dots \dots \dots (31) \right\}$$

Die Koeffizientenausdrücke vor den Potenzen von Δx und Δy werden besonders einfach, wenn von Anfang an $\gamma_0 = 0$ gemacht wird:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ y &= y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

$$dx = dx_0 + dp \cdot \Delta x - \frac{1}{\rho} dT_0 \cdot y + \frac{1}{R_0^2} dy_0 \cdot \Delta xy + \frac{1}{2\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^2 y + \left(-\frac{2e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3R_0^2} dp - \frac{2}{3R_0^2} \frac{da}{a} + \frac{2}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 d\alpha \right) \cdot \Delta xy^2 - \frac{1}{6\rho R_0^2} dT_0 \cdot y^3 \quad (33)$$

$$dy = dy_0 + \frac{1}{\rho} dT_0 \cdot \Delta x + dp \cdot y - \frac{1}{2R_0^2} dy_0 \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2R_0^2} dy_0 \cdot y^2 - \frac{1}{6\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^3 + \\ + \left(\frac{e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 - \frac{1}{3R_0^2} dp + \frac{1}{3R_0^2} \frac{da}{a} - \frac{1}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 d\alpha \right) \cdot \Delta x^2 y + \\ + \frac{1}{2\rho R_0^2} dT_0 \cdot \Delta xy^2 + \left(-\frac{e'^2}{3\rho R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 + \frac{1}{3R_0^2} dp - \frac{1}{3R_0^2} \frac{da}{a} + \frac{1}{3R_0^2} \cos 2\varphi_0 d\alpha \right) \cdot y^3 \quad (34)$$

$$dT = dT_0 - \frac{\rho}{R_0^2} dy_0 \cdot \Delta x - \frac{1}{2R_0^2} dT_0 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{e'^2}{R_0^2} \sin 2\varphi_0 d\varphi_0 - \frac{\rho}{R_0^2} dp + \right. \\ \left. + \frac{\rho}{R_0^2} \frac{da}{a} - \frac{\rho}{R_0^2} \cos 2\varphi_0 d\alpha \right) \cdot \Delta xy + \frac{1}{2R_0^2} dT_0 \cdot y^2 \quad (35)$$

Die Formeln (28) bis (31) bzw. (32) bis (35) sind besonders geeignet, wenn ein ganzes Koordinatenverzeichnis von Gauß-Krügerschen Koordinaten auf neue Orientierung des Koordinatensystems und ein anderes Referenzellipsoid umzurechnen ist. Dabei charakterisieren überhaupt die Größen dx_0 und dy_0 die Translation des Koordinatensystems, die Größen dp und dT_0 die Streuung und Drehung des Koordinatensystems, und die Größen da und $d\alpha$ das neue Referenzellipsoid.

Vom praktischen Standpunkt aus sind die Formeln (32) bis (35) vor den Formeln (28) bis (31) vorzuziehen, was man immer erreichen kann. Auffallend bei diesen Formeln für Koordinatenumänderungen ist die gewöhnliche ebene Form der linearen Glieder, weiter, daß die quadratischen Glieder nur von dy_0 herrühren und ferner, daß die übrigen Elemente $d\varphi_0$, ds , dT_0 , da und $d\alpha$ nur in den äußerst kleinen Gliedern 3. Ordnung auftreten. Bezüglich des Einflusses von dT_0 habe ich das schon früher geklärt, da als Sonderfall von (33) und (34), wenn $dx_0 = dy_0 = dp = da = d\alpha = 0$ und $dT_0 = -a$ gesetzt wird, meine Formeln in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jhrg. 1940, S. 421, F. (37) erscheinen.

Bei der praktisch-rechentechnischen Verwendung kann man entweder 1. mit festen Koeffizienten und mit Δx und Δy , oder 2. mit veränderlichen Koeffizienten — tabuliert nach x — und mit y , oder aber 3. mit Gliedern tabuliert nach x und y , rechnen.

Die Gedankengänge in dieser Arbeit stimmen im wesentlichen überein mit denjenigen in meiner Arbeit „Änderung der geographischen Koordinaten infolge Umorientierung eines geodätischen Netzes und Übergang zum anderen Referenzellipsoid“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Jhrg. 1942, S. 132 bis 140.

Versuch einer Orientierung des lettischen Dreiecksnetzes nach astronomischen Bestimmungen

Von Professor Dr. A. Buchholtz

Das Dreiecksnetz I. O. der neuen lettischen Landstriangulation ist gruppenweise, nach einzelnen Dreiecksketten oder anderen Netzgebilden, unter Berücksichtigung der betreffenden Anschlußbedingungen ausgeglichen worden.

Hierbei sind u. a. auch die für mehrere Punkte — Riga Petrikirche, Jekabpils (Jakobstadt), Aloja, Essemäe, Jemilova, Sörve, Kolkasrags (Domesnäs), Kabile, Gailitis, Puči — erfolgten astronomischen Längen- und Azimutbestimmungen durch Einführung entsprechender Laplacescher Gleichungen berücksichtigt worden.

Ohne auf diesbezügliche Einzelheiten einzugehen, sei nur kurz bemerkt, daß die erwähnten astronomischen Bestimmungen nur zur inneren Ausgleichung der betreffenden Dreieckssysteme, nicht aber als Grundlage für die absolute Orientierung des lettischen Dreiecksnetzes auf dem Bezugsellipsoid (Bessel) benutzt worden sind. Außerdem handelt es sich in mehreren Fällen um vorläufige Ergebnisse astronomischer Bestimmungen, die sich mitunter recht beträchtlich von den später ermittelten endgültigen Ergebnissen unterscheiden.

Die Orientierung des lettischen Dreiecksnetzes auf dem Bezugsellipsoid ist in unmittelbarer Anlehnung an die in den Jahren 1903—1905 ausgeführte, auf dem Ellipsoid von Bessel und im System Dorpat II berechnete russische Triangulation von Jemeljanoff-Nikiforoff erfolgt. Aus dieser Triangulation sind für den Ausgangspunkt der lettischen Landstriangulation Riga Petrikirche, Turmspitze, die geodätischen Koordinaten

$$B_0 = 56^{\circ} 56' 53'',919$$

$$L_0 = 24^{\circ} 06' 31'',898 \text{ ostw. Greenwich}$$

und das Ausgangsazimut

$$\text{Riga Petrikirche — Mitau Deutsche Kirche} = 215^{\circ} 24' 04'',38$$

übernommen worden.

Nach bereits erfolgter Ausgleichung und Berechnung des lettischen Dreiecksnetzes I. O. haben in den letzten Jahren die auf dieses Dreiecksnetz bezüglichen astronomischen Bestimmungen sowohl gewisse Berichtigungen als auch recht weitgehende Ergänzungen erfahren.

An Stelle der bei der Ausgleichung benutzten vorläufigen, liegen jetzt bereits die betreffenden endgültigen Ergebnisse astronomischer Bestimmungen vor. Ferner sind in mehreren Punkten des lettischen Dreiecksnetzes I. O. neue astronomische Beobachtungen ausgeführt und endgültig ausgewertet worden. Schließlich sind gewisse Teile der Dreiecksnetze I. O. Estlands, Litauens und Polens im System der lettischen Landstriangulation berechnet und dadurch mehrere von estnischer, litauischer und polnischer Seite ausgeführte astronomische Bestimmungen unmittelbar für das lettische Dreiecksnetz nutzbar gemacht worden.

Eine diesbezügliche Übersicht ist in der Tabelle 1 gegeben, wo die im erweiterten lettischen Dreiecksnetz I. O. astronomisch bestimmten Breiten B' , Längen L' und Azimute A' den entsprechenden im System der lettischen Landstriangulation geodätisch ermittelten Elementen B, L, A gegenübergestellt sind. Die in dieser Tabelle für Riga Petrikirche, angegebenen und in der vorliegenden Berechnung benutzten Koordinaten und Azimute beziehen sich nicht auf die Turmspitze, sondern auf das besonders vermarkte Zentrum (Riga Petrikirche Z.).

Tabelle 1

Bezeichnung des TP.			B'	B	B'-B		L'	L	L'-L	Azimut nach:			A'	A	A'-A		
		°	'	"	"	"	°	'	"	"	"	°	'	"	"	"	
1.	Abruka (estn.)	58	08	24,66	28 29	-3,63	22	30	08,19	06,95	+1,24	Sörve (estn.)	225	57		59,77	
2.	Sörve (estn.)	57	54	35,39	37,72	-2,33	22	03	22,84	18,38	+4,46	Kolkasrags	118	46	29,09	32,26	- 3,17
3.	Hummuli (estn.)	57	53	11,40	13,70	-2,30	26	02	23,46	27,56	-4,10	Essemäe (estn.)	142	30		51,55	
4.	Antsla (estn.)	57	48	47,79	51,56	-3,77	26	30	14,52	15,76	-1,24	Urvaste (estn.)	24	58		46,34	
5.	Aloja	57	46		24,59		24	52	46,50	47,92	-1,42	Kirbiži	239	10	35,43	42,66	- 7,23
6.	Kolkasrags	57	45		10,32		22	35	24,10	17,25	+6,85	Sörve (estn.)	209	13	34,80	36,56	- 1,76
7.	Renceni	57	45		01,85		25	30		53,42		Trikata	151	38	42,29	57,11	-14,82
8.	Kirbiži	57	39		40,07		24	31	47,22	48,27	-1,05	Aloja	58	52	51,11	57,72	- 6,61
9.	Essemäe (estn.)	57	38	19,93	20,16	-0,23	26	23	41,10	42,86	-1,76	Hummuli (estn.)	322	48	43,34	50,28	- 6,94
10.	Trikata	57	33		08,14		25	42	40,71	49,26	-8,55	Renceni	331	48	48,21	61,85	-13,64
11.	Delinkalns	57	32		35,39		26	56	42,93	38,43	+4,50	Belava	199	33	58,14	60,03	- 1,89
12.	Belava	57	17		13,13		26	46		33,33		Delinkalns	19	25	24,82	30,18	- 5,36
13.	Kangari	57	05		43,41		27	35	47,04	39,45	+7,59	Jemilova	112	42	28,39	26,89	+ 1,50
14.	Elkukalns	57	05		03,34		25	35		27,67		Gaisinkalns	136	30	44,96	58,96	-14,00
15.	Malpils	57	01		01,89		24	56	08,06	13,62	-5,56	Zadzene	154	59	06,07	17,58	-11,51
16.	Jemilova	57	00		16,71		27	59	20,96	20,43	+0,53	Kangari	293	02	13,30	19,30	- 6,00
17.	Kabile	56	57		09,66		22	22	06,38	04,32	+2,06	Gailitis	174	39	47,35	50,77	- 3,42
18.	Riga, Petrikirche Z.	56	56	56,70	53,94	+2,76	24	06	35,58	31,94	+3,64	Baldone	143	44	44,46	48,73	- 4,27
19.	Gaisinkalns	56	52		15,03		25	57	38,60	34,92	+3,68	Elkukalns	316	49	29,24	31,81	- 2,57
20.	Veccepli	56	38	51,18	48,39	+2,79	23	45	32,80	26,39	+6,41	Sarmes	316	48		37,44	
21.	Pučī	56	36		43,34		23	13	06,36	04,93	+1,43	Sarmes	36	52	32,39	38,14	- 5,75
22.	Gailitis	56	36		09,48		22	25	43,53	37,71	+5,82	Kabile	354	42	47,63	49,29	- 1,66
23.	Jekabpils	56	30	04,99	07,57	-2,58	25	51	24,81	24,78	+0,03	Daborkalns	312	21	50,82	56,94	- 6,12
24.	Narvydžiai (lit.)	56	17	04,55	08,54	-3,99	21	34	13,94	07,40	+6,54	Gudeliai (lit.)	133	53	29,21	34,73	- 5,52
25.	Šiliai (lit.)	56	15	41,84	43,61	-1,77	22	03	05,72	01,09	+4,63	Gudeliai (lit.)	122	04	39,47	41,57	- 2,10
26.	Gudeliai (lit.)	56	08	07,34	09,77	-2,43	21	50	51,81	48,21	+3,60	Anulynai (lit.)	119	01	14,53	19,00	- 4,47
27.	Viški	56	02		41,99		26	46	22,34	18,76	+3,58	Jarmaniški	180	37	06,70	11,75	- 5,05
28.	Anulynai (lit.)	56	01		09,30		22	13	19,17	14,75	+4,42	Šatrija (lit.)	127	27	14,60	16,60	- 2,00
29.	Žvirblaičiai (lit.)	55	58	13,88	17,18	-3,30	21	50	48,36	44,96	+3,40	Žvaginiai (lit.)	201	10	42,94	46,78	- 3,84
30.	Žvaginiai (lit.)	55	44	33,16	34,12	-0,96	21	41	23,49	19,87	+3,62	Žvirblaičiai (lit.)	21	02	54,61	59,09	- 4,48
31.	Dziedzinka (poln.)	55	42	11,31	13,93	-2,62	27	29	58,05	51,15	+6,90	Dworne Siolo (poln.)	147	52	31,30	32,58	- 1,28
32.	Svekšna (lit.)	55	30	59,75	61,08	-1,33	21	36	46,59	43,93	+2,66	Skomantai (lit.)	310	31	34,62	41,68	- 7,06
33.	Akmeniškiai (lit.)	55	19	09,81	09,13	+0,68	21	49	55,65	55,11	+0,54	Kukštine (lit.)	26	36	50,09	57,55	- 7,46

Wie aus der Tabelle 1 ersichtlich, liegt für das in oben angedeuteter Weise erweiterte lettische Dreiecksnetz I. O. bereits jetzt ein ziemlich reichhaltiges Material astronomischer Breiten-, Längen- und Azimutbestimmungen vor.

Da dieses Material wohl in nächster Zeit noch weiter anwachsen dürfte, erscheint es verfrüht, schon jetzt eine regelrechte Neuausgleichung des lettischen Dreiecksnetzes unter Berücksichtigung der betreffenden astronomischen Bestimmungen vorzunehmen. Es mag aber doch von einigem praktischen Interesse sein, den Versuch einer näherungsweise Orientierung des Netzes auf dem Bezugsellipsoid nach den zur Zeit vorliegenden astronomischen Bestimmungen zu machen.

Bei dem im folgenden aufgezeigten diesbezüglichen Versuch gelangt ein im wesentlichen auf der sogenannten Feldermethode¹⁾ begründetes Verfahren zur Anwendung, das bei im übrigen vorhandener Ähnlichkeit mit dem von Prof. F. N. Krassowsky²⁾ angegebenen Verfahren sich von demselben durch gewisse Maßnahmen zur Berücksichtigung der Laplaceschen Widersprüche unterscheidet.

Bevor in die auf die absolute Orientierung des lettischen Dreiecksnetzes nach astronomischen Bestimmungen bezügliche zahlenmäßige Rechnung eingetreten wird, sollen zunächst die theoretischen Grundlagen des erwähnten Verfahrens kurz umrissen und die betreffenden Formeln abgeleitet werden.

Theoretische Grundlagen

Wenn es sich, wie im hier vorliegenden Fall, um astronomische Bestimmungen handelt, die bei der Ausgleichung des betreffenden Dreiecksnetzes überhaupt nicht oder doch nur unvollkommen berücksichtigt worden sind, so ist damit zu rechnen, daß im ausgeglichenen Netz hinsichtlich der auf Längen und Azimute bezüglichen entsprechenden astronomischen und geodätischen Bestimmungen gewisse Laplacesche Widersprüche bestehen. Es ist auch durchaus möglich, daß diese Widersprüche eine mehr oder weniger beträchtliche systematische Komponente enthalten.

Bei der nachträglichen astronomischen Orientierung nach der Feldermethode wird das in seiner ursprünglichen Orientierung gegebene Dreiecksnetz — als bewegliches Punktfeld — ohne Formänderung in einem gewissen Bezugspunkt solcherweise in der Breiten- und Längenrichtung parallel verschoben und azimuthal gedreht, daß die den Lotabweichungskomponenten ξ und η entsprechenden restlichen Widersprüche zwischen den astronomischen und den transformierten geodätischen Koordinaten der Vergleichspunkte mit ihrer Quadratsumme der Minimumbedingung genügen.

Da bei diesem Vorgang die Form des Dreiecksnetzes grundsätzlich keine Veränderung erfährt, kann natürlich nicht verlangt werden, daß anfänglich vorhandene Laplacesche Widersprüche — sofern sie Komponenten unregelmäßigen Charakters enthalten — im Endergebnis restlos getilgt sein sollen. Es kann und soll aber wohl erreicht werden, daß die restlich verbleibenden Laplaceschen Widersprüche keine systematische Komponente aufweisen.

Das kann u. a. in der Weise geschehen, daß man die systematische Komponente der anfänglich vorhandenen Laplaceschen Widersprüche zunächst durch entsprechende vorläufige Verlegung des Nullmeridians zum Verschwinden bringt.

Die darauf folgende, auf das vorläufig nur in der Längenrichtung parallel verschobene, bewegliche geodätische Punktfeld bezügliche endgültige Koordinatentransformation ist dann so vorzunehmen, daß in ihrem Ergebnis die Lotabweichungskomponenten ξ und η der Minimumbedingung genügen, die bereits vorher hinsichtlich ihrer systematischen Komponente bereinigten Laplaceschen Widersprüche jedoch nicht aufs neue mit einer solchen Komponente belastet werden.

Zu diesem Zweck sind bei der endgültigen Koordinatentransformation deren auf die Längenverschiebung und die Orientierungsänderung bezüglichen Konstanten so aufeinander abzustimmen, daß die nachträgliche Veränderung der vorläufig bereits veränderten geodätischen Längen durch die gleichzeitige Veränderung der geodätischen Azimute sinngemäß ersetzt wird.

Auf solche Weise wird also die systematische Komponente der Laplaceschen Widersprüche letzten Endes in ihren Längenanteil und azimuthalen Anteil aufgespalten und dementsprechend getilgt.

¹⁾ Siehe hierzu M. Kneißl: Näherungsverfahren zum Zusammenschluß von Dreiecksnetzen. Verlag von H. Wichmann, Berlin 1941.

²⁾ F. N. Krassowsky: Höhere Geodäsie, II. Teil. Leningrad 1932.

Die anfänglichen Laplaceschen Widersprüche werden zweckmäßig nach der Formel

$$W = (L' - L) - (A' - A) \operatorname{cosec} B \dots \dots \dots (1)$$

berechnet.

Ihr sämtliche in dieser Hinsicht in Betracht kommenden Vergleichspunkte berücksichtigendes arithmetisches Mittel W_m ergibt dann mit umgekehrtem Vorzeichen den Betrag, um den der Nullmeridian zwecks vorläufiger Tilgung der systematischen Komponente der betreffenden Laplaceschen Widersprüche zu verlegen ist.

In die endgültige Koordinatentransformation wird alsdann mit den ursprünglichen geodätischen Breiten B und den vorläufig veränderten geodätischen Längen

$$(L) = L + W_m$$

eingetreten.

Wenn nun bei der endgültigen Koordinatentransformation das bewegliche geodätische Punktfeld in einem gewissen Bezugspunkt S um die Beträge ΔB_s und $\Delta(L_s)$ in der Breiten- und Längenrichtung parallel verschoben und außerdem um ΔA_s azimuthal gedreht wird, so erfahren dadurch die für einen beliebigen Netzkpunkt gegebenen Elemente $B, (L), A$ entsprechende Veränderungen $\Delta B, \Delta(L), \Delta A$.

In Anlehnung an die bekannten Helmertschen Differentialformeln schreiben wir:

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= + p_1 \Delta B_s + p_4 \Delta A_s \\ \Delta(L) &= + q_1 \Delta B_s + q_4 \Delta A_s + \Delta(L_s) \\ \Delta A &= + r_1 \Delta B_s + r_4 \Delta A_s + \Delta A_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

wobei wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= + \frac{M_s}{M} \cos l \\ p_4 &= - \frac{N_s}{M_s} \cos B_s \frac{1}{\rho} \\ p_5 &= + b - \frac{l^2}{4\rho} \sin(B_s + B) \\ q_1 &= + \frac{M_s}{N} \operatorname{tg} B \frac{1}{\rho} \\ q_4 &= + \frac{p_5}{\rho \cos B} \\ r_1 &= + \frac{1}{\rho \cos B} (1 - e^2 \sin^2 B \cos^2 B) \\ r_4 &= + \frac{p_5}{\rho} \frac{M}{N} \operatorname{tg} B - \frac{s^2}{2R^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

und mit b und l den Breiten- und Längenunterschied des betreffenden Netzkpunktes gegenüber dem Bezugspunkt S , mit M_s und M die Meridiankrümmungsradien und mit N_s und N die Normalkrümmungsradien im Bezugspunkt und im Netzkpunkt, mit e die Exzentrizität des Bezugsellipsoids, mit s und R den Abstand des Netzkpunktes vom Bezugspunkt und den mittleren Erdkrümmungsradius bezeichnen.

Wie bereits erwähnt, sollen nach erfolgter endgültiger Koordinatentransformation, also nach Veränderung der geodätischen Längen (L) und Azimute A um die entsprechenden Beträge $\Delta(L)$ und ΔA , die Laplaceschen Widersprüche in den betreffenden Vergleichspunkten keine systematische Komponente enthalten. Die erwähnten $\Delta(L)$ und ΔA müssen also der Bedingung

$$[(L' - (L) - \Delta(L)) - (A' - A - \Delta A) \operatorname{cosec} B] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

genügen.

Infolge der vorläufigen Verlegung des Nullmeridians um $-W_m$ ist aber

$$[(L' - (L)) - (A' - A) \operatorname{cosec} B] = 0$$

Darum kann (4) durch die einfachere Bedingung

$$[\Delta(L) - \Delta A \operatorname{cosec} B] = 0$$

ersetzt werden, die sich unter Berücksichtigung der Formeln (2) in der Schreibweise

$$[q_1 - r_1 \operatorname{cosec} B] \Delta B_s + [q_4 - (1 + r_4) \operatorname{cosec} B] \Delta A_s + n \Delta(L_s) = 0 \dots \dots \dots (5)$$

darstellen läßt, wobei n die Anzahl der betreffenden Vergleichspunkte bezeichnet.

Wenn man, wie es im folgenden geschehen wird, den Bezugspunkt S im Koordinatenschwerpunkt des für die Bestimmung Laplacescher Widersprüche in Betracht kommenden Punktfeldes wählt, so kann in praktisch genügender Annäherung

$$\left. \begin{aligned} [q_1 - r_1 \operatorname{cosec} B] &= 0 \\ [q_4 - (1 + r_4) \operatorname{cosec} B] &= -n \operatorname{cosec} B_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

gesetzt werden; die Formel (5) geht also dann in

$$-n \operatorname{cosec} B_s \Delta A_s + n \Delta(L_s) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

über.

Damit ist besagt, daß zwecks Erfüllung der erwähnten Bedingung die Transformationskonstanten $\Delta(L_s)$ und ΔA_s zueinander im Verhältnis

$$\frac{\Delta(L_s)}{\Delta A_s} = \operatorname{cosec} B_s \dots \dots \dots (8)$$

stehen müssen.

Diesem erforderlichen Verhältnis wird Rechnung getragen, indem man setzt

$$\left. \begin{aligned} \Delta(L_s) &= -\eta_s \sec B_s \\ \Delta A_s &= -\eta_s \operatorname{tg} B_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Nach dem Muster von (9) mag ferner noch

$$\Delta B_s = -\xi_s \dots \dots \dots (10)$$

gesetzt werden.

Auf solche Weise sind dann die zu ermittelnden Transformationskonstanten ΔB_s , $\Delta(L_s)$ und ΔA_s als Verbesserungen der Lotabweichungen in Breite, Länge und Azimut im Koordinatenschwerpunkt des vorläufig in der Längenrichtung um W_m verschobenen beweglichen geodätischen Punktfeldes gedeutet.

Indem man die astronomischen Koordinaten B' und L' eines beliebigen Netzpunktes mit dessen endgültig transformierten geodätischen Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= B + \Delta B \\ \bar{L} &= (L) + \Delta(L) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

vergleicht, erhält man unter Berücksichtigung von (2), (9) und (10):

$$\left. \begin{aligned} B' - \bar{B} &= (B' - B) - \Delta B = \\ &= (B' - B) - p_1 \Delta B_s - p_4 \Delta A_s = \\ &= (B' - B) + p_1 \xi_s + p_4 \operatorname{tg} B_s \eta_s \\ L' - \bar{L} &= (L' - (L)) - \Delta(L) = \\ &= (L' - (L)) - q_1 \Delta B_s - q_4 \Delta A_s - \Delta(L_s) = \\ &= (L' - (L)) + q_1 \xi_s + (q_4 \operatorname{tg} B_s + \sec B_s) \eta_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Wenn ξ und η die Lotabweichungskomponenten im betreffenden Netzpunkt sind, so ist

$$\left. \begin{aligned} B' - \bar{B} &= \xi \\ L' - \bar{L} &= \eta \sec B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Man kann also die Formeln (12) in folgender Schreibweise darstellen:

$$\left. \begin{aligned} (B' - B) + p_1 \xi_s + p_4 \operatorname{tg} B_s \eta_s &= \xi \\ (L' - (L)) \cos B + q_1 \cos B \xi_s + \frac{\cos B}{\cos B_s} (q_4 \sin B_s + 1) \eta_s &= \eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

In endgültiger Form schreiben wir

$$\left. \begin{aligned} p'_1 \xi_s + p'_4 \eta_s + (B' - B)' &= \xi \\ q'_1 \xi_s + q'_4 \eta_s + (L' - (L))' &= \eta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

indem wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} p'_1 &= +p_1 & q'_1 &= +q_1 \cos B \\ p'_4 &= +p_4 \operatorname{tg} B_s & q'_4 &= +\frac{\cos B}{\cos B_s} (q_4 \sin B_s + 1) \\ (B' - B)' &= (B' - B) \\ (L' - (L))' &= (L' - (L)) \cos B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Nach dem Muster der Gleichungen (15) können für jede im Dreiecksnetz astronomisch bestimmte Breite und Länge entsprechende Fehlergleichungen gebildet und zur Berechnung der Transformationskonstanten ξ_s und η_s sowie der Lotabweichungskomponenten ξ und η in den einzelnen Netzpunkten verwendet werden.

Zur Berechnung der endgültig transformierten geodätischen Breiten und Längen hat man dann die Formeln (11) in Verbindung mit (2) oder die Formeln (13), also:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= B + \Delta B = B' - \xi \\ \bar{L} &= (L) + \Delta(L) = L + W_m + \Delta(L) = L' - \eta \sec B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Die entsprechende Formel für die endgültig transformierten geodätischen Azimute lautet:

$$\bar{A} = A + \Delta A \dots \dots \dots (18)$$

Wenn man die Laplaceschen Widersprüche vernachlässigt, so gilt zugleich mit dieser auch die folgende Formel:

$$\bar{A} = A' - \eta \operatorname{tg} B \dots \dots \dots (19)$$

und es ergibt sich dann aus (18) und (19):

$$\eta = ((A' - A) - \Delta A) \operatorname{ctg} B \dots \dots \dots (20)$$

Nach dieser Formel können — bei bekannten Transformationskonstanten und unter Vernachlässigung Laplacescher Widersprüche — auch für solche Punkte, für die nur auf Azimute bezügliche astronomische Bestimmungen vorhanden sind, die betreffenden Lotabweichungskomponenten η näherungsweise ermittelt werden.

Für die endgültigen Laplaceschen Widersprüche hat man, nach dem Muster von (1), die Formel

$$\bar{W} = (L' - \bar{L}) - (A' - \bar{A}) \operatorname{cosec} B$$

die man im Hinblick auf (13) und (18) in der Schreibweise

$$\bar{W} = \eta \sec B - (A' - A) \operatorname{cosec} B + \Delta A \operatorname{cosec} B \dots \dots \dots (21)$$

darstellen kann.

Da die endgültigen Laplaceschen Widersprüche keine systematische Komponente enthalten sollen, soll $[\bar{W}] = 0$ sein.

Anwendung auf das lettische Dreiecksnetz

In der Tabelle 2 sind für diejenigen Punkte des erweiterten lettischen Dreiecksnetzes, für die sowohl auf Längen als auch auf Azimute bezügliche astronomische Bestimmungen vorliegen, die Laplaceschen Widersprüche W nach der Formel (1) berechnet.

Die anfänglichen Laplaceschen Widersprüche W weisen offensichtlich eine recht beträchtliche systematische Komponente auf. Im übrigen ist die Streuung der W nicht allzu groß, mit Ausnahme der *TP. Narvydžiai* und *Svekšna*, für welche die erhaltenen W ziemlich weit außerhalb der für die übrigen Punkte geltenden Streuungsgrenzen liegen.

Da deshalb die auf die *TP. Narvydžiai* und *Svekšna* bezüglichen Längen und Azimute nicht ganz zuverlässig erscheinen, sind diese Punkte in der ganzen folgenden Rechnung nicht berücksichtigt worden.

Tabelle 2

	Bezeichnung des TP.	B	cosec B	A'—A	(A'—A) cosecB	L'—L	W
		° ' "		"	"	"	"
1.	Sörve	57 54,6	1,1803	— 3,17	— 3,74	+ 4,46	+ 8,20
2.							
3.							
4.	Aloja	57 46,4	1,1821	— 7,23	— 8,55	— 1,42	+ 7,13
5.							
6.							
7.	Kolkasrags	57 45,2	1,1824	— 1,76	— 2,08	+ 6,85	+ 8,93
8.							
9.							
10.	Kirbiži	57 39,7	1,1836	— 6,61	— 7,82	— 1,05	+ 6,77
11.							
12.							
13.	Essemäe	57 38,3	1,1839	— 6,94	— 8,22	— 1,76	+ 6,46
14.							
15.							
16.	Trikata	57 33,1	1,1850	— 13,64	— 16,16	— 8,55	+ 7,61
17.							
18.							
19.	Delinkalns	57 32,6	1,1851	— 1,89	— 2,24	+ 4,50	+ 6,74
20.							
21.							
22.	Kangari	57 05,7	1,1911	+ 1,50	+ 1,79	+ 7,59	+ 5,80
23.							
24.							
25.	Malpils	57 01,0	1,1921	— 11,51	— 13,72	— 5,56	+ 8,16
26.							
27.							
28.	Jemilova	57 00,3	1,1923	— 6,00	— 7,15	+ 0,53	+ 7,68
29.							
30.							
31.	Kabile	56 57,2	1,1930	— 3,42	— 4,08	+ 2,06	+ 6,14
32.							
33.							
34.	Riga, Petrikirche Z.	56 56,9	1,1931	— 4,27	— 5,09	+ 3,64	+ 8,73
35.							
36.							
37.	Gaisinkalns	56 52,3	1,1941	— 2,57	— 3,07	+ 3,68	+ 6,75
38.							
39.							
40.	Puči	56 36,7	1,1977	— 5,75	— 6,89	+ 1,43	+ 8,32
41.							
42.							
43.	Gailitis	56 36,2	1,1978	— 1,66	— 1,99	+ 5,82	+ 7,81
44.							
45.							
46.	Jekabpils	56 30,1	1,1992	— 6,12	— 7,34	+ 0,03	+ 7,37
47.							
48.							
49.	Šiliai	56 15,7	1,2025	— 2,10	— 2,53	+ 4,63	+ 7,16
50.							
51.							
52.	Gudeliai	56 08,2	1,2043	— 4,47	— 5,38	+ 3,60	+ 8,98
53.							
54.							
55.	Viški	56 02,7	1,2056	— 5,05	— 6,09	+ 3,58	+ 9,67
56.							
57.							
58.	Anulynai	56 01,2	1,2059	— 2,00	— 2,41	+ 4,42	+ 6,83
59.							
60.							
61.	Žvirblaičiai	55 58,3	1,2066	— 3,84	— 4,63	+ 3,40	+ 8,03
62.							
63.							
64.	Žvaginiai	55 44,6	1,2099	— 4,48	— 5,42	+ 3,62	+ 9,04
65.							
66.							
67.	Dziedzinka	55 42,2	1,2105	— 1,28	— 1,55	+ 6,90	+ 8,45
68.							
69.							
70.	Akmeniškiai	55 19,2	1,2160	— 7,46	— 9,07	+ 0,54	+ 9,61
71.							
72.							
73.	Narvydžiai	56 17,1	1,2022	— 5,52	— 6,64	+ 6,54	+ 13,18
74.							
75.							
76.	Sveķšna	55 31,0	1,2132	— 7,06	— 8,57	+ 2,66	+ 11,23
77.							
78.							

Bei solcher Beschränkung hinsichtlich der Vergleichspunkte gelangt also die systematische Komponente der betreffenden Laplaceschen Widersprüche W durch deren arithmetisches Mittel

$$W_m = + 7'',77$$

zum Ausdruck.

Indem die ursprünglichen geodätischen Längen L durch die entsprechenden (L) ersetzt werden, wird in die folgende Rechnung mit den bereits in der Tabelle 1 angegebenen Breitenelementen und den in der Tabelle 3 zusätzlich berechneten neuen Längenelementen (L) und $(L' - (L))$ eingetreten.

Als Bezugspunkt S für die endgültige Koordinatentransformation wird der Schwerpunkt des für die Berechnung Laplacescher Widersprüche in Betracht kommenden Punktfeldes (s. Tabelle 2 ohne Narvydžiai und Sveķšna) angenommen. Seine Koordinaten sind:

$$B_s = 56^\circ 46' 35'',7$$

$$(L_s) = 24^\circ 18' 25'',6$$

Mit diesen Konstanten sind nach den Formeln (3) und (16) die Koeffizienten der folgenden, nach dem Muster von (15) gebildeten Fehlergleichungen berechnet.

1. Abruķa . . . + 0,9993ξ_s + 0,0264η_s - 3,63 = ξ₁
- 0,0267ξ_s + 0,9994η_s - 3,45 = η₁
2. Sörve . . . + 0,9990ξ_s + 0,0329η_s - 2,33 = ξ₂
- 0,0332ξ_s + 0,9993η_s - 1,76 = η₂
3. Hummulī . . + 0,9994ξ_s - 0,0254η_s - 2,30 = ξ₃
+ 0,0256ξ_s + 0,9995η_s - 6,31 = η₃
4. Antsla . . . + 0,9991ξ_s - 0,0322η_s - 3,77 = ξ₄
+ 0,0324ξ_s + 0,9993η_s - 4,80 = η₄
5. Aloja + 0,0085ξ_s + 0,9998η_s - 4,90 = η₅
6. Kolkasrags . - 0,0253ξ_s + 0,9995η_s - 0,49 = η₆
8. Kirbiži . . . + 0,0033ξ_s + 0,9999η_s - 4,72 = η₈
9. Essemäe . . . + 0,9992ξ_s - 0,0306η_s - 0,23 = ξ₉
+ 0,0308ξ_s + 0,9994η_s - 5,10 = η₉
10. Trikata . . . + 0,0207ξ_s + 0,9997η_s - 8,76 = η₁₀
11. Delinkalns . + 0,0388ξ_s + 0,9992η_s - 1,75 = η₁₁
13. Kangari . . . + 0,0481ξ_s + 0,9988η_s - 0,10 = η₁₃
15. Malpils . . . + 0,0092ξ_s + 0,9999η_s - 7,26 = η₁₅
16. Jemilova . . + 0,0538ξ_s + 0,9985η_s - 3,94 = η₁₆
17. Kabile - 0,0283ξ_s + 0,9996η_s - 3,11 = η₁₇
18. Riga Petrik. Z. + 1,0000ξ_s + 0,0029η_s + 2,76 = ξ₁₈
- 0,0029ξ_s + 1,0000η_s - 2,25 = η₁₈
19. Gaisinkalns . + 0,0241ξ_s + 0,9997η_s - 2,24 = η₁₉
20. Veccepli . . . + 1,0000ξ_s + 0,0080η_s + 2,79 = ξ₂₀
- 0,0080ξ_s + 1,0000η_s - 0,75 = η₂₀
21. Puči - 0,0158ξ_s + 0,9999η_s - 3,49 = η₂₁

22. Gailitis . . . - 0,0273ξ_s + 0,9996η_s - 1,07 = η₂₂
23. Jekabpils . . + 0,9997ξ_s - 0,0227η_s - 2,58 = ξ₂₃
+ 0,0225ξ_s + 0,9997η_s - 4,27 = η₂₃
25. Šiliai + 0,9993ξ_s + 0,0330η_s - 1,77 = ξ₂₅
- 0,0327ξ_s + 0,9994η_s - 1,74 = η₂₅
26. Gudeliai . . . + 0,9992ξ_s + 0,0360η_s - 2,43 = ξ₂₆
- 0,0356ξ_s + 0,9993η_s - 2,32 = η₂₆
27. Viški + 0,0356ξ_s + 0,9993η_s - 2,34 = η₂₇
28. Anulynai . . . - 0,0301ξ_s + 0,9994η_s - 1,87 = η₂₈
29. Žvirblaičiai . + 0,9992ξ_s + 0,0360η_s - 3,30 = ξ₂₉
- 0,0355ξ_s + 0,9993η_s - 2,45 = η₂₉
30. Žvaginiai . . . + 0,9991ξ_s + 0,0383η_s - 0,96 = ξ₃₀
- 0,0377ξ_s + 0,9991η_s - 2,34 = η₃₀
31. Dziedzinka . . + 0,9986ξ_s - 0,0467η_s - 2,62 = ξ₃₁
+ 0,0459ξ_s + 0,9987η_s - 0,49 = η₃₁
33. Akmeniškiai . + 0,9993ξ_s + 0,0362η_s + 0,68 = ξ₃₃
+ 0,0354ξ_s + 0,9990η_s - 4,11 = η₃₃

Die entsprechenden Normalgleichungen lauten:

$$+ 14,0067\xi_s + 0,1167\eta_s - 20,1254 = 0$$

$$+ 0,1167\xi_s + 27,9820\eta_s - 88,1882 = 0$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\xi_s = + 1'',4106$$

$$\eta_s = + 3'',1457$$

Tabelle 3

Bezeichnung des TP.		L'	L	W _m	(L)	(L' - (L))
		o' "	"	"	"	"
1.	Abruķa	22 30 08,19	06,95	+ 7,77	14,72	- 6,53
2.	Sörve	22 03 22,84	18,38	+ 7,77	26,15	- 3,31
3.	Hummuli	26 02 23,46	27,56	+ 7,77	35,33	- 11,87
4.	Antsla	26 30 14,52	15,76	+ 7,77	23,53	- 9,01
5.	Aloja	24 52 46,50	47,92	+ 7,77	55,69	- 9,19
6.	Kolkasrags	22 35 24,10	17,25	+ 7,77	25,02	- 0,92
7.						
8.	Kirbiži	24 31 47,22	48,27	+ 7,77	56,04	- 8,82
9.	Essemäe	26 23 41,10	42,86	+ 7,77	50,63	- 9,53
10.	Trikata	25 42 40,71	49,26	+ 7,77	57,03	- 16,32
11.	Delinkalns	26 56 42,93	38,43	+ 7,77	46,20	- 3,27
12.						
13.	Kangari	27 35 47,04	39,45	+ 7,77	47,22	- 0,18
14.						
15.	Malpils	24 56 08,06	13,62	+ 7,77	21,39	- 13,33
16.	Jemilova	27 59 20,96	20,43	+ 7,77	28,20	- 7,24
17.	Kabile	22 22 06,38	04,32	+ 7,77	12,09	- 5,71
18.	Riga Petrik. Z.	24 06 35,58	31,94	+ 7,77	39,71	- 4,13
19.	Gaisinkalns	25 57 38,60	34,92	+ 7,77	42,69	- 4,09
20.	Veccepli	23 45 32,80	26,39	+ 7,77	34,16	- 1,36
21.	Puči	23 13 06,36	04,93	+ 7,77	12,70	- 6,34
22.	Gailitis	22 25 43,53	37,71	+ 7,77	45,48	- 1,95
23.	Jekabpils	25 51 24,81	24,78	+ 7,77	32,55	- 7,74
24.						
25.	Šiliai	22 03 05,72	01,09	+ 7,77	08,86	- 3,14
26.	Gudeliai	21 50 51,81	48,21	+ 7,77	55,98	- 4,17
27.	Viški	26 46 22,34	18,76	+ 7,77	26,53	- 4,19
28.	Anulynai	22 13 19,17	14,75	+ 7,77	22,52	- 3,35
29.	Žvirblaičiai	21 50 48,36	44,96	+ 7,77	52,73	- 4,37
30.	Žvaginiai	21 41 23,49	19,87	+ 7,77	27,64	- 4,15
31.	Dziedzinka	27 29 58,05	51,15	+ 7,77	58,92	- 0,87
32.						
33.	Akmeniškiai	21 49 55,65	55,11	+ 7,77	62,88	- 7,23

Durch Einführung dieser Zahlenwerte in die Fehlergleichungen sind die in der folgenden Tabelle 4 angegebenen Lotabweichungskomponenten ξ und η in den betreffenden Punkten berechnet.

Tabelle 4

Bezeichnung des TP.		ξ	η	Bezeichnung des TP.		ξ	η
1.	Abruka	-2,14	-0,34	18.	Riga, Petrikirche Z.	+4,18	+0,89
2.	Sörve	-0,82	+1,34	19.	Gaisinkalns		+0,94
3.	Hummuli	-0,97	-3,13	20.	Veccepli	+4,23	+2,38
4.	Antsla	-2,46	-1,61	21.	Pučī		-0,37
5.	Aloja		-1,74	22.	Gailītis		+2,04
6.	Kolkasrags		+2,62	23.	Jekabpils	-1,24	-1,09
7.				24.			
8.	Kirbiži		-1,57	25.	Šīliai	-0,26	+1,36
9.	Essemāe	+1,08	-1,91	26.	Gudeliai	-0,91	+0,77
10.	Trikata		-5,59	27.	Viški		+0,85
11.	Delinkalns		+1,45	28.	Anulynai		+1,23
12.				29.	Žvirblaičiai	-1,78	+0,64
13.	Kangari		+3,11	30.	Žvaginiai	+0,57	+0,75
14.				31.	Dziedzinka	-1,36	+2,72
15.	Malpils		-4,10	32.			
16.	Jemilova		-0,72	33.	Akmeniškiai	+2,20	-1,02
17.	Kabile		-0,01				

Den erhaltenen Zahlenwerten von ξ_s und η_s entsprechen die auf den Koordinatenschwerpunkt bezüglichen Transformationskonstanten

$$\begin{aligned} \Delta B_s &= -\xi_s &= -1'',4106 \\ \Delta (L_s) &= -\eta_s \sec B &= -5'',7413 \\ \Delta A_s &= -\eta_s \operatorname{tg} B &= -4'',8028 \end{aligned}$$

Damit sind für die Punkte Renceni, Belava und Elkukalns die Azimutänderungen ΔA und alsdann nach der Formel (20) die in der Tabelle 4a angegebenen Lotabweichungskomponenten η berechnet.

Ferner sind, unter Benutzung der Tabelle 2, in der Tabelle 5 für sämtliche in dieser Hinsicht in Betracht kommenden Punkte die endgültigen Laplaceschen Widersprüche \bar{W} berechnet:

Tabelle 4a

Bezeichnung des TP.		η
7.	Renceni	-6,20
12.	Belava	-0,25
14.	Elkukalns	-5,89

Tabelle 5

Bezeichnung des TP.		\bar{W}	Bezeichnung des TP.		\bar{W}
1.		"	18.	Riga, Petrikirche Z.	"
2.	Sörve	+0,54	19.	Gaisinkalns	+0,98
3.			20.		-1,05
4.			21.	Pučī	
5.	Aloja	-0,58	22.	Gailītis	+0,55
6.	Kolkasrags	+1,26	23.	Jekabpils	+0,07
7.			24.		-0,43
8.	Kirbiži	-0,95	25.	Šīliai	
9.	Essemāe	-1,28	26.	Gudeliai	-0,59
10.	Trikata	-0,15	27.	Viški	+1,21
11.	Delinkalns	-1,01	28.	Anulynai	+1,81
12.			29.	Žvirblaičiai	-0,95
13.	Kangari	-2,00	30.	Žvaginiai	+0,24
14.			31.	Dziedzinka	+1,24
15.	Malpils	+0,39	32.		+0,56
16.	Jemilova	-0,12	33.	Akmeniškiai	+1,79
17.	Kabile	-1,59			-0,06

$$[\bar{W}] =$$

Mit den ermittelten Zahlenwerten der Transformationskonstanten ΔB_s , $\Delta(L_s)$, ΔA_s ergeben sich in dem nach astronomischen Bestimmungen orientierten lettischen Dreiecksnetz für Riga Petrikirche Zentrum die Koordinaten:

$$\bar{B}_z = 56^\circ 56' 52'', 52$$

$$\bar{L}_z = 24^\circ 06' 33'', 95$$

und das Azimut nach Baldone

$$\bar{A}_z = 143^\circ 44' 43'', 91$$

die sich von den entsprechenden Elementen vor der Neuorientierung des Dreiecksnetzes um die Beträge

$$\Delta B_z = \bar{B}_z - B_z = -1'', 42$$

$$\Delta L_z = \bar{L}_z - L_z = +2'', 01$$

$$\Delta A_z = \bar{A}_z - A_z = -4'', 82 \quad \text{unterscheiden.}$$

Dieselben ΔB_z , ΔL_z , ΔA_z gelten natürlich auch für Riga Petrikirche Turmspitze. In dem nach astronomischen Bestimmungen orientierten Dreiecksnetz der lettischen Landstriangulation hat man also für den Ausgangspunkt Riga Petrikirche Turmspitze die Koordinaten

$$\bar{B}_0 = 56^\circ 56' 52'', 50$$

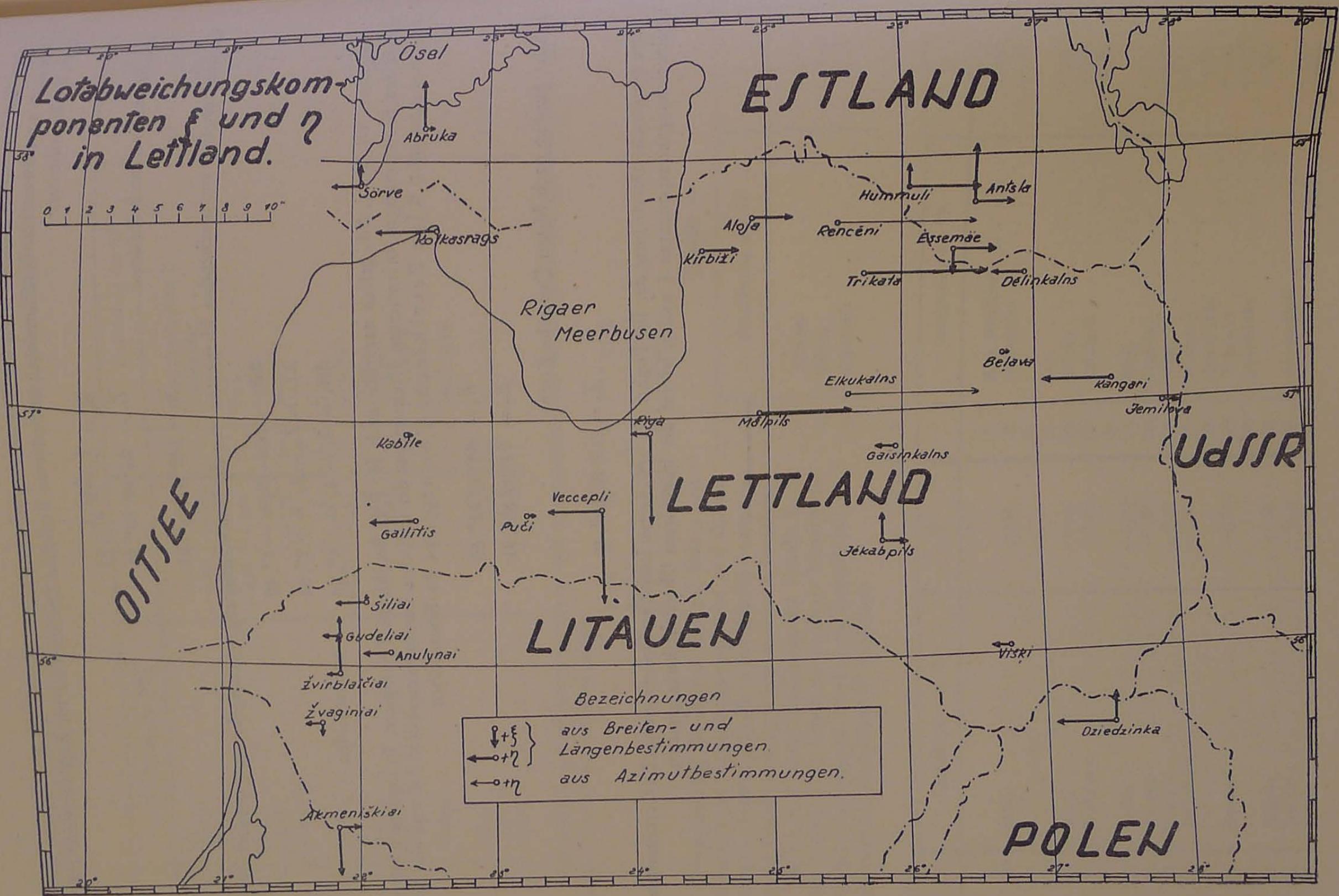
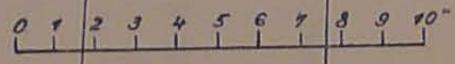
$$\bar{L}_0 = 24^\circ 06' 33'', 91$$

und das Azimut nach Mitau Deutsche Kirche

$$\bar{A}_0 = 215^\circ 23' 59'', 46$$

Eine graphische Darstellung der für Punkte des erweiterten lettischen Dreiecksnetzes I. O. ermittelten Lotabweichungskomponenten ξ und η ist auf der beigefügten Übersichtskarte gegeben.

Lotabweichungskomponenten ξ und η in Lettland.



Bezeichnungen

$\downarrow + \xi$	} aus Breiten- und Längenbestimmungen.
$\leftarrow + \eta$	
$\leftarrow + \eta$	aus Azimutbestimmungen.

Ellipsoidische Abbildungen von Rotationsellipsoiden mit Hilfe von Differentialformeln

Von Oberleutnant d. R. Dr.-Ing. H. Bodemüller

Gliederung:

1. Einleitung.
2. Geodätische Betrachtung der Ellipsoidübergänge.
3. Abbildungstheoretische Betrachtung der konformen Ellipsoidübergänge.
4. Der Helmertsche Ellipsoidübergang.
 - a) Allgemeine Bezeichnungen.
 - b) Die Formeln von Jordan.
 - c) Die Formeln von Hristow.
5. Abbildungstheoretische Untersuchung des Helmertschen Ellipsoidüberganges.
 - a) Ableitung der Übertragungsformeln in der Form Hristows.
 - b) Das Vergrößerungsverhältnis und die Hauptverzerrungen.
 - c) Berechnung der größten Winkelverzerrung $2w$.
 - d) Berechnung der Meridiankonvergenz.
6. Azimuttreuer konformer Ellipsoidübergang \ddot{U}_I
 - a) Geographischer und isometrischer Breitenunterschied.
 - b) Die Abbildungsgleichungen.
 - c) Das Vergrößerungsverhältnis von \ddot{U}_I .
 - d) Berechnung der Azimutreduktionen.
7. Konforme Ellipsoidübergänge mit geringsten Längenverzerrungen und Bildkrümmungen.
 - a) Abbildungsbedingungen.
 - b) Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für das Vergrößerungsverhältnis.
 - c) Ableitung der Ellipsoidübergänge für Meridianstreifen, Parallelkreiszone und für kreisförmige Gebiete.
8. Die allgemein gültige konforme Übertragung \ddot{U}_{II} .
 - a) Das Vergrößerungsverhältnis.
 - b) Die entwickelten Abbildungsgleichungen von \ddot{U}_{II} .
 - c) Die Meridiankonvergenz.
 - d) Ableitung der entwickelten Abbildungsgleichungen für \ddot{U}_K .
9. Zusammenfassung der Ergebnisse.
 - a) Vergleich mit den Hristowschen Formeln.
 - b) Begründung des Überganges \ddot{U}_K und Zusammenstellung der Rechenformeln.
 - c) Gegenüberstellung und Abschätzung der Vergrößerungsverhältnisse.
 - d) Gegenüberstellung und Abschätzung der Meridiankonvergenzen.
 - e) Wahl des Zentralpunktes des Ellipsoidüberganges mit Beispiel.
10. Ableitung der konformen Anfelderungsformeln.
 - a) Problemstellung.
 - b) Ableitung der allgemeinen Formel für das Vergrößerungsverhältnis.
 - c) Bestimmung der Konstanten.
 - d) Übertragungsgleichungen.
11. Schlußbetrachtung.

1. Einleitung

Die Entstehungsgeschichte der heute vorliegenden europäischen Vermessungswerke steht in engem Zusammenhang mit der politischen Entwicklung der einzelnen Länder und Europas. Die im vergangenen Jahrhundert in den meisten Ländern entstandenen Triangulationen und Kartenwerke wurden in der Regel ohne Rücksichtnahme auf die geodätischen Ergebnisse der Nachbarstaaten bearbeitet. Die Mehrzahl der Länder erneuerte mit fortschreitender Genauigkeitsanforderung ihre einseitig zweckbestimmten älteren Triangulationen oder baute sie völlig neu auf. Obwohl auch die modernen Triangulationen

gulationen größtenteils Einzelwerke sind, kann behauptet werden, daß sie mit geringen Ausnahmen brauchbare Glieder für eine zukünftige Neugestaltung der europäischen geodätischen Grundlagen sind. Bei der Verwirklichung dieses Planes ist man vorerst darauf angewiesen, die wertvollen Landestriangulationen beizubehalten, wenn man überhaupt in absehbarer Zeit mit Ergebnissen rechnen will. Dabei ermöglichen schon frühzeitig an den Landesgrenzen durchgeführte gemeinsame Vermessungen einen nachträglichen Zusammenschluß der Einzelnetze zu einer europäischen Großtriangulation. Bei der Ausführung dieser Arbeiten sind die vorliegenden astronomischen Messungen wenigstens näherungsweise zu verwerten und im Bedarfsfalle noch weitere Laplacesche Punkte zu bestimmen und zur Erzielung eines wissenschaftlich günstigen Ergebnisses zu verwenden. Ob die nachträgliche Berechnung eines bestanschmiegenden Referenzellipsoides möglich oder erforderlich ist, oder ob das Besselsche Ellipsoid beibehalten werden kann, hängt von Faktoren ab, die z. Z. noch nicht zu übersehen sind.

Dr. Kneißl hat in einer grundlegenden Arbeit¹⁾ die geodätischen und praktischen Fragen, die bei der Schaffung der europäischen Großraumtriangulation von Bedeutung sind, erschöpfend behandelt. Ferner hat Dr. Ledersteger in zwei Aufsätzen²⁾ die astronomisch-geodätischen Probleme, die mit dieser wichtigen Aufgabe im Zusammenhang stehen, untersucht und Vorschläge zur Lösung der dabei auftauchenden Fragen ausgearbeitet. Die Arbeiten sind richtungweisend für das Vorgehen beim Aufbau eines den astronomisch-geodätischen Forderungen genügenden Großdreiecksnetzes. Parallel mit diesen weitblickenden Planungen und Arbeiten der Heeresvermessung laufen zahlreiche Netzzusammenschlüsse mehr örtlichen Charakters. Sie dienen in erster Linie dem wichtigen Zweck, der Truppe laufend Vermessungsunterlagen und Karten zur Verfügung zu stellen, welche die Unterschiede und Klaffungen des geodätischen und kartographischen Materials benachbarter Länder möglichst wenig in Erscheinung treten lassen und damit einen stetigen und praktisch spannungsfreien Übergang von Land zu Land ermöglichen. Bei dieser immer wiederkehrenden Aufgabe kommt es hauptsächlich darauf an, die Spannungen, die für die Truppe von Bedeutung sein können, zu beseitigen. Soweit es die Lage zuläßt, sind diese Arbeiten in den Rahmen der Großraumtriangulation einzufügen.

Der Anschluß von selbständigen Dreiecksnetzen an eine feste Triangulation erfordert streng genommen eine Neuausgleichung der anzuschließenden Netze unter Berücksichtigung der geometrischen Anschluß- und Netzbedingungen und der astronomisch-geodätischen Bedingungsgleichungen. Da dieses strenge Vorgehen z. Z. nicht möglich ist, muß durch Anwendung eines Näherungsverfahrens ein in jeder Hinsicht vertretbarer behelfsmäßiger Weg zur Lösung dieser häufig anfallenden Aufgabe beschritten werden.

Wenn aber die Netzzusammenschlüsse nach irgendeinem Näherungsverfahren zu erfolgen haben, dann ist in der Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle eine Übertragung der geographischen Koordinaten auf ein anderes Ellipsoid erforderlich, um die Koordinaten erst einmal vergleichbar zu machen. Diese sogenannten *Ellipsoidübergänge* sind als Abbildungen eines Rotationsellipsoides auf ein anderes zu betrachten. Da die Änderungen der Ellipsoidkonstanten relativ klein sind, können die Koeffizienten der in Reihen nach den geographischen Koordinatenunterschieden entwickelten Abbildungsgleichungen in Form von Differentialformeln abgeleitet werden. Bei kleinen Dreiecksnetzen oder Netzteilen, die auf ein anderes Ellipsoid zu überführen sind, spielt natürlich die Art der ellipsoidischen Abbildung eine geringere Rolle als bei sehr großen Dreiecksnetzen, wo die mit dem Ellipsoidübergang verbundenen Netzdeformationen von Bedeutung sind.

Der Zusammenschluß von benachbarten selbständigen Dreiecksnetzen über die geographischen Koordinaten gemeinsamer Dreieckspunkte wurde nach erfolgtem Ellipsoidübergang bisher von der Heeresvermessung mit bestem Erfolg durch sogenannte Helmertsche Anfelderung³⁾ und beim gleichzeitigen Zusammenschluß mehrerer Triangulationen nach der Finsterwalderschen Feldermethode⁴⁾ durchgeführt. Die Ellipsoidübergänge und die Anfelderungen können die astronomisch-geodätischen Netzeigenschaften empfindlich stören. Dadurch werden z. B. Dreiecksnetze, die unter Berücksichtigung der beobachteten Laplaceschen Punkte ausgeglichen waren, nach dem Netzanschluß erneut erhebliche Lot-

¹⁾ Dr. Kneißl: Der geodätische Zusammenschluß Europas als Aufgabe der Heeresvermessung, Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens 1943, Heft 11.

²⁾ Dr. Ledersteger: Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens 1943, Heft 7: Die absolute astronomische Orientierung der Großraumtriangulationen und 1943, Heft 11: Die Grundlagen für den Zusammenschluß der südosteuropäischen Landestriangulationen.

³⁾ Helmert: Veröff. des Kgl. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1886, Heft I, Lotabweichungen.

⁴⁾ Dr. Kneißl: Näherungsverfahren zum Zusammenschluß von Dreiecksnetzen, Bad Liebenwerda, 1941.

abweichungen und Laplacesche Widersprüche aufweisen. Aus diesem Grunde ist im Sinne der Großraumtriangulationen das Helmertsche Verfahren im allgemeinen nicht mehr tragbar, wenigstens nicht ohne Modifikationen, die diesen Gesichtspunkten Rechnung tragen. Auch für kriegsmäßige Zwecke ist die Helmertsche Anfelderung in diesem Sinne nicht immer befriedigend. Allerdings erfordert es in den meisten Fällen die militärische Lage, sich mit derartigen Ergebnissen zufrieden zu geben. Hier wird ein abbildungstheoretischer Beitrag zur Frage der Ellipsoidübergänge und der Anfelderungen gegeben. Bei den Untersuchungen wird vor allem auf die Verzerrungen und die sich daraus ergebenden Folgeformen Ellipsoidübergänge für die Überführung größter Dreiecksnetze mit bestimmten und mit bestimmten günstigen Verzerrungseigenschaften. Entsprechend dem praktischen Vorgehen erfolgt eine getrennte Behandlung der reinen Ellipsoidübergänge und der Differentialformeln für die Anfelderungen. Letztere werden ebenfalls auf der Grundlage konformer Abbildungen für Änderungen des Ausgangsazimutes, der Koordinaten des Zentralpunktes und des Maßstabs entwickelt. Für die Umformung der Masse der Punkte werden die aus Ellipsoidübergang und Anfelderung erhaltenen Formeln gliedweise addiert, wodurch die Angleichung der Dreiecksnetze in einem Rechengang ermöglicht ist. Die Entwicklungen erfolgen durchweg in Form von konvergierenden Potenzreihen mit konstanten Koeffizienten. Dabei wurde auf eine den praktischen Anforderungen entsprechende Entwicklungsschärfe und Strenge besonderer Wert gelegt.

Die Untersuchungen führen zur Entwicklung zahlreicher, allgemein interessierender Differentialformeln, besonders zwischen den Ellipsoidkonstanten- und Hilfsgrößen. Das Endergebnis zeigt, daß die bisher angewandten Formelsysteme für Ellipsoidübergänge und Anfelderungen zweckmäßig durch schärfere und allgemeinere, die rechenbrauchbar zur Verfügung gestellt werden, zu ersetzen sind.

2. Geodätische Betrachtung der Ellipsoidübergänge

Um zwei benachbarte Triangulationen, die längs einer „Naht“ identische Dreieckspunkte besitzen, vergleichbar zu machen und zur Vorbereitung von Netzzusammenschlüssen muß im allgemeinen eines der Dreiecksnetze auf ein anderes Ellipsoid überführt werden. Eine zeitraubende Neuberechnung auf dem anderen Ellipsoid wird durch Verwendung von Differentialformeln für die Übertragung der Punkte vermieden. Dieser sogenannte Ellipsoidübergang sollte daher vom geodätischen Standpunkt aus weitestgehend die Ergebnisse liefern, die eine völlige Neuberechnung auf einem anderen Ellipsoid erbracht hätte. Bei den folgenden Ausführungen wird angenommen, daß die Voraussetzungen für eine neue Berechnung nicht erfüllt sind, was in der Mehrzahl der Fälle, die im Rahmen des Kriegsvermessungswesens auftreten, zutreffen wird. Bei einer Neuberechnung müssen vor allem die geometrischen Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes erfüllt sein. Da sich die geodätischen Exzesse innerhalb der möglichen Ellipsoidübergänge höchstens um einige Hundertstel Neusekunden ändern können, bleiben bei einer Neuberechnung auf einem anderen Ellipsoid die Winkel des Dreiecksnetzes praktisch dieselben. Der Ellipsoidübergang muß daher die ausgeglichenen Winkel möglichst unverändert lassen.

Obgleich das Dreiecksnetz auf ein Ellipsoid mit anderer Abplattung und mit veränderter großer Halbachse übertragen werden soll, muß dabei der aus Basismessungen ermittelte Maßstab des Netzes weitestgehend erhalten bleiben.

Ferner sollte sich beim Ellipsoidübergang die Orientierung des Netzes möglichst wenig ändern. Diese Forderung wird auf idealste Weise von den azimuttreuen konformen Ellipsoidabbildungen erfüllt. Da diese Übertragungen jedoch sehr große Längenverzerrungen zur Folge haben, kommen sie als Ellipsoidübergänge nur in Spezialfällen in Frage. Mindestens muß aber zur Folge haben, kommen sie als Ellipsoidübergänge nur in Spezialfällen in Frage. Mindestens muß aber beim Ellipsoidübergang der Meridian durch den Zentralpunkt in den Meridian durch das Bild des Zentralpunktes übergehen. Bei den hier behandelten Ellipsoidübergängen werden die Azimute der Meridianbilder, die sogenannten Meridiankonvergenzen, untersucht, um Aufschluß über die Veränderung der Orientierung der Netze zu erhalten.

Im Interesse einer wirtschaftlichen Durchführung der Ellipsoidübergänge sind ferner einfache Übertragungsgleichungen zu fordern. Der

astronomisch bestimmte Zentralpunkt der Triangulation muß, abgesehen von Nullpunktverschiebungen, die im Zusammenhang mit den Differentialgleichungen für die Verdrehung und Maßstabsänderung der Netze behandelt werden, auf dem zweiten Ellipsoid dieselben geographischen Koordinaten erhalten wie auf dem ersten Ellipsoid.

In der Praxis wird häufig an Stelle des Triangulationsnullpunktes ein willkürlicher Punkt als Zentralpunkt für den Ellipsoidübergang gewählt. Wenn dem Ellipsoidübergang eine Helmertsche Anfelderung folgt und wenn der gewählte Zentralpunkt nicht zu weit vom Triangulationshauptpunkt liegt, bestehen gegen dieses Verfahren keine Bedenken, da unter den getroffenen Voraussetzungen der Genauigkeitsverlust gering ist. Wenn dem Ellipsoidübergang keine Anfelderung nachfolgt, dann treten neben kleineren Verzerrungen die Meridiankonvergenz der beiden Zentralpunkte als Orientierungsfehler und eine Parallelverschiebung des Netzes auf. In Abschnitt 9e werden diese Zusammenhänge an Hand eines praktischen Beispiels ausführlicher behandelt.

3. Abbildungstheoretische Betrachtung der konformen Ellipsoidübergänge

Die Ellipsoidübergänge sind als umkehrbar eindeutige und stetige Abbildungen eines Ellipsoids auf einem anderen Ellipsoid zu betrachten. Dabei treten die Abbildungsgleichungen in Form von konvergierenden Potenzreihen mit konstanten Koeffizienten, die von den Änderungen der Abplattung und der großen Halbachse des ersten Ellipsoids abhängen, auf. Die wichtigsten geodätischen Forderungen werden von konformen Abbildungen am besten erfüllt. Dabei ist in erster Linie ausschlaggebend, daß bei den konformen Ellipsoidübergängen die Winkel unverändert übertragen werden. Allerdings gehen dabei die geodätischen Linien, welche die Dreieckspunkte verbinden, im allgemeinen nicht in geodätische Linien, sondern in Flächenkurven mit nicht verschwindender geodätischer Krümmung über. Tatsächlich werden aber auf dem Bildellipsoid zur Ausführung geodätischer Berechnungen die Bilder der Dreieckspunkte durch geodätische Linien verbunden gedacht. Damit tritt bei konformen Ellipsoidübergängen ein kleiner Winkel zwischen Bildkurve und geodätischer Linie auf, der als *Azimutreduktion* zu bezeichnen ist. Die Azimutreduktion ist an den ausgeglichenen Richtungen des ersten Ellipsoids anzubringen, um sie auf dem zweiten Ellipsoid verwenden zu können. Die Azimutreduktionen entsprechen daher sinngemäß den Richtungsreduktionen der ebenen Abbildungen. Es ist naheliegend zu fordern, daß die Azimutreduktionen möglichst klein bleiben sollen.

Die Azimutreduktion ist abhängig von der geodätischen Krümmung der Bilder der geodätischen Linien des ersten Ellipsoids. Damit bei konformen Abbildungen die Krümmungen im betrachteten Abbildungsbereich insgesamt möglichst klein bleiben, muß nach einem Satz von Eisenlohr⁵⁾ das Vergrößerungsverhältnis der Abbildung auf dem Rande des Bereiches konstant sein. Das Vergrößerungsverhältnis nimmt infolge dieser Bedingung auf dem Rande seinen größten Wert an. Im definierten Sinne sind daher konforme Ellipsoidübergänge mit auf dem Rande des Abbildungsbereiches konstantem Vergrößerungsverhältnis die besten.

Bei nicht konformen Ellipsoidübergängen treten neben den Azimutreduktionen noch Winkelverzerrungen auf. Sie ergeben deshalb in jedem Falle eine ungünstigere Winkelübertragung als die konformen Übergänge. Ähnlich verhält es sich mit dem Vergrößerungsverhältnis, das bei konformen Abbildungen von der Fortschrittsrichtung unabhängig ist und sich wie ein örtlicher Maßstabsfehler auswirkt, während es bei nichtkonformen Übertragungen von der Richtung abhängt und in jedem Punkt zwischen zwei extremen Werten schwankt. Selbst wenn der Maximalwert des Vergrößerungsverhältnisses kleiner ist als das Vergrößerungsverhältnis konformer Übertragungen, ist letztere auch in dieser Hinsicht zu bevorzugen.

Jede Abbildung hat ihre Vorzüge und Nachteile. So erfüllen auch die konformen Ellipsoidübergänge nicht alle wünschenswerten Forderungen auf ideale Weise, sondern es müssen auch bei ihnen unvermeidliche Verzerrungen in Kauf genommen werden.

⁵⁾ Eisenlohr: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 72. Band, Berlin 1870, S. 143 u. ff. „Über Flächenabbildung“.

4. Der Helmertsche Ellipsoidübergang

a) Allgemeines

Helmert⁶⁾ löste anlässlich der Durchführung seiner berühmten geodätischen Berechnungen die Aufgabe, die Änderungen der geographischen Koordinaten eines Dreiecksnetzes infolge Verschiebung des Triangulationshauptpunktes um δB_0 , δL_0 , Veränderung des Ausgangsazimuts um δA_0 , des Maßstabs um $\frac{\delta s}{s}$ der Abplattung um $\delta \alpha$ und der großen Halbachse um $\frac{\delta a}{a}$ durch Differentialformeln auszudrücken. Zu diesem Zwecke dachte sich Helmert die Triangulation durch die vom Zentralpunkt nach den Festpunkten verlaufenden geodätischen Strecken und durch deren Azimute festgelegt. Diese geodätischen Polarkoordinaten betrachtet Helmert bei der Ableitung der Ergebnisse als unveränderlich. Sieht man hier zunächst von der Parallelverschiebung, Drehung und Maßstabsänderung ab, dann sind die Abplattung und die große Halbachse die einzigen Veränderlichen. Es handelt sich demnach um einen Ellipsoidübergang, der als *mittabstandstreue Azimutalprojektion* eines Ellipsoides auf einem anderen zu bezeichnen ist. Diese nicht konforme Abbildung entspricht der Hattschen Azimutalprojektion der Ebene. Bei ihm treten verhältnismäßig große Winkelverzerrungen, aber kleine Längenverzerrungen auf. Die geodätischen Kreise mit dem Zentralpunkt als Mittelpunkt erfahren die größten Längenverzerrungen, während nach Definition ihre Radien längentreu übertragen werden. Ein Vorteil dieses Ellipsoidüberganges besteht darin, daß alle durch den Zentralpunkt verlaufenden geodätischen Linien unter demselben Azimut als geodätische Linien des zweiten Ellipsoides abgebildet werden. Die Einführung der Polarkoordinaten als unveränderliches Parameterpaar ist sinnvoll und, wie die späteren Untersuchungen zeigen werden, abbildungstheoretisch gesehen, vorteilhaft. Allerdings liegt kein einleuchtender Grund vor, gerade diesen Eigenschaften den Vorrang einzuräumen, da z. B. die der stereographischen Projektion entsprechende Ellipsoidübertragung im Zentralpunkt ebenfalls streng azimuttreu, dabei aber konform ist. Außerdem genügt es, wenn die Azimutreduktionen im Zentralpunkt praktisch verschwindend klein sind, was in Anbetracht der gestellten Forderungen bei jedem konformen Ellipsoidübergang in genügendem Maße gesichert ist.

Die Helmertschen Formeln für den Ellipsoidübergang sind etwas umständlich zu handhaben, wenn eine große Anzahl von Punkten überführt werden soll. Jordan⁷⁾ hat unter gewissen Vernachlässigungen auf dem Helmertschen Gedanken aufgebaute Formeln zwecks Gewinnung vereinfachter Gebrauchformeln entwickelt. Hristow⁸⁾ ging bei der Ableitung seiner Formeln in Form von Potenzreihen mit konstanten Koeffizienten ebenfalls vom Helmertschen Grundgedanken aus. Seine Form der Übertragungsgleichungen ist bei voller Strenge für Massenumformungen besonders geeignet.

Im folgenden werden zunächst die Helmertschen, Jordanschen und Hristowschen Formeln für den Ellipsoidübergang angegeben, um einen gegenseitigen Vergleich und den Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit zu ermöglichen.

b) Allgemeine Bezeichnungen

Bei den Ableitungen werden folgende Bezeichnungen benutzt:

b	geographische Breite eines beliebigen Punktes des 1. Ellipsoides
l	„ Länge „ „ „ „ 1. „
B	„ Breite „ „ „ „ 2. „
L	„ Länge „ „ „ „ 2. „

b_0, l_0 bzw. B_0, L_0 sind die geographischen Koordinaten des Zentralpunktes des Ellipsoidüberganges.

Ferner ist:

$$b - b_0 = \Delta b \quad , \quad B - B_0 = \Delta B$$

$$l - l_0 = \Delta l \quad , \quad L - L_0 = \Delta L$$

Zwischen Original- und Bildpunkten bestehen die Beziehungen:

$$B - b = \delta b$$

$$B_0 - b_0 = \delta b_0 = 0$$

$$L - l = \delta l$$

$$L_0 - l_0 = \delta l_0 = 0$$

⁶⁾ Helmert: Veröff. des Kgl. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1886, Heft I, Lotabweichungen.

⁷⁾ Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 2. Halbband, Stuttgart 1941, § 91, S. 430—434:

Einfluß einer Änderung der Ellipsoidkonstanten.

⁸⁾ Hristow: Zeitschrift für Vermessungswesen 1942, Heft 5: Änderung der geographischen Koordinaten infolge Umorientierung eines geodätischen Netzes und Übergang zum anderen Referenzellipsoid.

Ferner werden wie üblich bezeichnet:

a_1, b_1 große und kleine Ellipsoidhalbachse des 1. Ellipsoides,

$a_2 = a_1 + a$ große Halbachse des 2. Ellipsoides,

$\alpha_1 = \frac{a_1 - b_1}{a_1}$ Abplattung des 1. Ellipsoides

$\alpha_2 = \alpha_1 + \delta\alpha$ „ „ 2. „

Es werden folgende Hilfsgrößen benutzt:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$V^2 = 1 + \eta^2$$

$$e'^2 \cos^2 = \eta^2$$

$$c = \frac{a^2}{b}$$

$$\operatorname{tg} b = t$$

Die Verbesserungsgrößen $\delta b, \delta l, \delta b_0, \delta l_0, \frac{\delta a}{a}, \frac{\delta s}{s}, \delta\alpha$ und δA_0 werden als so klein vorausgesetzt, daß ihre 2. und höheren Potenzen vernachlässigt werden können.

Die sich auf das erste Ellipsoid beziehenden Größen werden mit dem Index „1“, die Größen des zweiten Ellipsoides mit dem Index „2“ bezeichnet. Die Größen, die für den Zentralpunkt zu berechnen sind, erhalten den Index „0“. Größen, die sich auf das Ausgangsellipsoid (1. Ellipsoid) beziehen, werden auch mit kleinen, solche des Bildellipsoides (2. Ellipsoid) mit großen Buchstaben bezeichnet.

Es bestehen noch folgende Beziehungen:

$N = \frac{c}{V}$ ist der Querkrümmungshalbmesser

$M = \frac{c}{V^3}$ ist der Meridiankrümmungshalbmesser

$$\frac{N}{M} = V^2$$

$p = N_1 \cos b$ ist der Parallelkreishalbmesser des 1. Ellipsoides

$P = N_2 \cos B$ ist der Parallelkreishalbmesser des 2. Ellipsoides.

c) Die Helmertschen Formeln⁹⁾

Die infolge der Veränderung der Ellipsoidkonstanten an den geographischen Koordinaten des 1. Ellipsoides anzubringenden Änderungen errechnen sich nach folgenden Formeln:

$$\delta b = -\Delta b \frac{\delta a}{a} + \delta\alpha \left(2\Delta b \cos^2 \frac{b+b_0}{2} - p_5 \sin^2 \frac{b+b_0}{2} \right)$$

$$\delta l = -\Delta l \frac{\delta a}{a} - \delta\alpha q_5 \sin^2 b_0$$

Dabei sind:

$$p_5 = \Delta b - \frac{\Delta l^2}{4\rho} \sin(b+b_0)$$

$$q_5 = \Delta l \frac{\cos b_0}{\cos b}$$

..... (a)

d) Die Formeln von Jordan¹⁰⁾

Es ergeben sich:

$$\delta b = \left(-\Delta b + \frac{\Delta l^2}{2\rho} \sin b \cos b \right) \frac{\delta a}{a} + \left\{ \Delta b (2 - 3 \sin^2 b_m) + \frac{\Delta l^2}{2\rho} \sin^3 b_m \cos b_m \right\} \delta\alpha$$

$$\delta l = -\Delta l \left\{ \frac{\delta a}{a} + \sin^2 b_0 \delta\alpha \right\} \frac{\cos b_0}{\cos b}$$

..... (b)

Dabei ist $b_m = \frac{b_0 + b}{2}$

⁹⁾ Helmert: Veröff. des Kgl. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1886, Heft I, Lotabweichungen.

¹⁰⁾ Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 2. Halbband, Stuttgart 1941, § 91, S. 430—434: Einfluß einer Änderung der Ellipsoidkonstanten.

Die Formeln in obiger Form wurden durch eine Weiterentwicklung der Jordanschen Beziehungen⁷⁾ Gl. (14) und (15) durch OKH/GenStdH/KrKVermChef angegeben.

e) Die Formeln von Hristow¹¹⁾

Wie Jordan geht auch Hristow von den Reihenentwicklungen nach Potenzen von s aus, entwickelt jedoch sämtliche Koeffizienten als Funktionen der konstanten Breite b_0 des Zentralpunktes. Die Koeffizienten werden für ein bestimmtes Ellipsoid und einen bestimmten Zentralpunkt ein für alle Mal berechnet und für die Übertragung der Punkte werden keinerlei Funktionen mehr benötigt. Ferner werden in der Mehrzahl der praktischen Fälle einige Glieder besonders der 3. Ordnung praktisch verschwinden, und man ist in der Lage, jede gewünschte Übertragungsschärfe anzuwenden.

Es ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} \delta B = & \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 \left(2 - t_0^2 + \eta^2 + \frac{7}{2} \eta^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta^2 t_0^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \frac{15}{8} \eta^4 t_0^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{2} \eta^4 t_0^4 + \frac{1}{8} \eta^4 t_0^6 \right) \delta \alpha \right\} \Delta b + \left\{ 3 \eta^2 t_0 \frac{\delta a}{a_1} - 3 t_0 \cos^2 b_0 (2 - 3 \eta^2 + \right. \\ & \left. + 2 \eta^2 t_0^2) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta b^2}{2} + \left\{ t_0 \cos^2 b_0 (1 + \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + t_0^3 \cos^4 b_0 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 \right) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta l^2}{2} + \left\{ \cos^2 b_0 \frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - 5 t_0^2) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta b \Delta l^2}{3} \\ \delta l = & - \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right) \cdot \delta \alpha \right\} \Delta l - \\ & - \left\{ t_0 (1 - \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + t_0 \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 \right) \delta \alpha \right\} \cdot \Delta b \Delta l - \\ & - \left\{ (2 + 3 t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 (2 + 3 t_0^2) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta b^2 \Delta l}{3} + \\ & + \left\{ \sin^2 b_0 \frac{\delta a}{a_1} + \sin^4 b_0 \delta \alpha \right\} \frac{\Delta l^3}{6} \end{aligned} \right\} \dots (c)$$

5. Abbildungstheoretische Untersuchung des Helmertschen Ellipsoidüberganges

a) Ableitung der Übertragungsformeln in der Form Hristows

Der Helmertsche Ellipsoidübergang ist eine mittabstandstreue Azimutalprojektion eines 1. Ellipsoides auf einem 2. Ellipsoid. Bei Ausnutzung dieser Definition ergibt sich eine einfachere und schärfere Ableitung der Hristowschen Formeln. Die Ableitung wurde zur unabhängigen Überprüfung des Hristowschen Ergebnisses und der im folgenden durchgeführten Entwicklungen ausgeführt und soll in kurzen Zügen mitgeteilt werden.

Die Lösung der ersten Hauptaufgabe der höheren Geodäsie, aus den geographischen Koordinaten eines Punktes sowie aus dem Azimut und der Länge s einer Dreiecksseite die geographischen Koordinaten des Endpunktes der Seite zu finden, führt zunächst zu den bekannten Reihenentwicklungen nach Potenzen von s , die in Jordan, Band III, 2. Halbband, Seite 69 und 70 angegeben sind. Werden die Berechnungen auf den Zentralpunkt $b_0 = B_0$, $l_0 = L_0$ bezogen und werden die Azimute mit α_0 , die sich auf das 1. Ellipsoid beziehenden Größen mit Index „1“, die des 2. Ellipsoides mit dem Index „2“ bezeichnet, dann folgen¹²⁾:

$$\left. \begin{aligned} b - b_0 = \Delta b = & s \frac{V_{1,0}^3}{c_1} \cos \alpha_0 - \frac{s^2}{2} \frac{V_{1,0}^4}{c_1^2} (t_0 \sin^2 \alpha_0 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0 \cos^2 \alpha_0) - \\ & - \frac{s^3}{6} \frac{V_{1,0}^5}{c_1^3} \cos \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 (1 + 3 t_0^2) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

¹¹⁾ Hristow: Zeitschrift für Vermessungswesen 1942, Heft 5: Änderung der geographischen Koordinaten infolge Umorientierung eines geodätischen Netzes und Übergang zum anderen Referenzellipsoid.

¹²⁾ Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 2. Halbband, Stuttgart 1941, Seite 69 u. 70.

$$l - l_0 = \Delta l = s \frac{V_{1,0}}{c_1} \frac{\sin \alpha_0}{\cos b_0} + s^2 \frac{V_{1,0}^2 t_0}{c_1^2 \cos b_0} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \frac{s^3}{3} \frac{V_{1,0}^3}{c_1^3 \cos b_0} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t_0^2) - \sin^3 \alpha_0 t_0^2 \end{array} \right\} \dots \quad (2)$$

In den Gliedern mit s^3 wurde $\eta_{1,0}^2$ vernachlässigt. Mit denselben Größen s und α_0 errechnen sich für das 2. Ellipsoid:

$$B - B_0 = \Delta B = s \frac{V_{2,0}^3}{c_2} \cos \alpha_0 - \frac{s^2}{2} \frac{V_{2,0}^4}{c_2^2} (t_0 \sin^2 \alpha_0 + 3 \eta_{2,0}^2 t_0 \cos^2 \alpha_0) - \frac{s^3}{6} \frac{V_{2,0}^5}{c_2^3} \cos \alpha_0 \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha_0 (1 + 3 t_0^2 + \eta_{2,0}^2 - 9 \eta_{2,0}^2 t_0^2) + \cos^2 \alpha_0 \cdot (3 \eta_{2,0}^2 - 3 \eta_{2,0}^2 t_0^2) \end{array} \right\} \dots \quad (3)$$

$$L - L_0 = \Delta L = s \frac{V_{2,0}}{c_2 \cos B_0} \sin \alpha_0 + s^2 \frac{V_{2,0}^2 t_0}{c_2^2 \cos B_0} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \frac{s^3}{3} \frac{V_{2,0}^3}{c_2^3 \cos B_0} \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha_0 \cdot \cos^2 \alpha_0 (1 + 3 t_0^2 + \eta_{2,0}^2) - \sin^3 \alpha_0 t_0^2 \end{array} \right\} \dots \quad (4)$$

In den Gleichungen (3) und (4) wird in den Gliedern mit $s^3 \eta_{2,0}^2$ nicht gleich Null sondern eine Funktion von $\delta\alpha$, die in den Gliedern 3. Ordnung nicht vernachlässigt werden soll.

Werden

$$s \cos \alpha_0 = u$$

$$s \sin \alpha_0 = v$$

$$l \cos b_0 = \lambda$$

gesetzt, dann folgen aus den Gleichungen (1) und (2) durch Reihenentwicklung

$$u = M_1 \Delta b + \frac{t_0}{2} N_1 \lambda^2 + \frac{3}{2} \frac{\eta_{1,0}^2 t_0}{V_1^2} M_1 \Delta b^2 + \frac{M_1}{6} (1 - 3 t_0^2) \Delta b \lambda^2 \dots \quad (5)$$

$$v = N_1 \lambda - t_0 M_1 \Delta b \lambda - M_1 \frac{\Delta b^2 \lambda}{3} - t_0^2 N_1 \frac{\lambda^3}{6} \dots \quad (6)$$

Der Einfachheit halber wurden in (5) und (6) die Bezeichnungen, die darauf hinweisen, daß alle Koeffizienten für die konstante Breite $b_0 = B_0$ zu berechnen sind, weggelassen.

Werden (5) und (6) in die Gleichungen (3) und (4) eingesetzt, dann ist die Elimination von s und α_0 vollzogen und die Aufgabe grundsätzlich gelöst.

Es ergeben sich zunächst:

$$\Delta B = \frac{M_1}{M_2} \Delta b + \frac{t_0}{2} \frac{M_1}{M_2} V_1^2 \left(1 - \frac{N_1}{N_2} \right) \lambda^2 + \frac{3}{2} t_0 \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{V_1^2} \left(\eta_{1,0}^2 - \eta_{2,0}^2 \frac{N_1}{N_2} \right) \cdot \Delta b^2 + \frac{M_1}{M_2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3 t_0^2 + 6 t_0^2 \frac{N_1}{N_2} - 9 \eta_{2,0}^2 t_0^2 \frac{N_1}{N_2} - \left(1 + 3 t_0^2 + \eta_{2,0}^2 - 9 \eta_{2,0}^2 t_0^2 \right) \frac{N_1^2}{N_2^2} \end{array} \right\} \frac{\Delta b \lambda^2}{6} - \frac{M_1^3}{M_2^3 V_2^4} \eta_{2,0}^2 (1 - t_0^2) \frac{\Delta b^3}{2} \dots \quad (7)$$

$$\Delta L = \frac{1}{\cos B_0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_1}{N_2} \lambda + \frac{t_0}{V_1^2} \frac{N_1}{N_2} \left(\frac{N_1}{N_2} - 1 \right) \Delta b \lambda - \frac{1}{V_1^2} \frac{N_1}{N_2} \left[1 + 3 t_0^2 \frac{N_1}{N_2} - (1 + 3 t_0^2 + \eta_{2,0}^2) \frac{N_1^2}{N_2^2} \right] \frac{\Delta b^2 \lambda}{3} - t_0^2 \frac{N_1}{N_2} \left(1 - 3 \frac{N_1}{N_2} + 2 \frac{N_1^2}{N_2^2} \right) \frac{\lambda^3}{6} \end{array} \right\} \dots \quad (8)$$

Nun sind noch die sich auf die Breite B_0 des Zentralpunktes des 2. Ellipsoides beziehenden Ausdrücke für den Meridian- und Querkrümmungshalbmesser sowie für den Parallelkreishalbmesser, $M_{2,0}$, $N_{2,0}$ und P_0 , die Hilfsgrößen $\eta_{2,0}^2$ usw. durch die entsprechenden Größen des 1. Ellipsoides und durch $\frac{\delta a}{a}$ und δa auszudrücken. Es ist zunächst:

$$\frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} = \frac{N_{1,0} \cos b_0}{N_{2,0} \cos B_0} = \frac{P_0}{P_0} = a$$

$$\frac{M_{1,0}}{M_{2,0}} = \frac{c_1 V_{2,0}^3}{c_2 V_{1,0}^3} = \frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} \frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}^2} = a \frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}^2}$$

Folglich sind die Verhältnisse der Parallelkreishalbmesser $\frac{P_0}{P_0}$ und der Hilfsgrößen $\frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}^2}$ für die konstante Breite b_0 zu entwickeln.

Zweite Exzentrizität und Abplattung ergeben sich aus den Beziehungen

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

und

$$a = \frac{a - b}{a}$$

Ändert sich a um δa , dann ändert sich e'^2 um $\delta e'^2$ und es wird

$$\delta e'^2 = 2 \frac{a_1^3}{b_1^3} \delta a + \dots \dots \dots (9)$$

Dabei ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \sqrt{1 + \eta^2 + \eta^2 t^2} \dots \dots \dots (9')$$

wobei η^2 für jede Breite eingesetzt werden kann.

Aus (9') ergibt sich durch Entwicklung

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{\eta^2}{2} (1 + t^2) - \frac{\eta^4}{8} (1 + t^2)^2 + \frac{\eta^6}{16} (1 + t^2)^3 \dots \dots \dots (9'')$$

und $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} \eta^2 (1 + t^2) + \frac{3}{8} \eta^4 (1 + t^2)^2 \dots \dots$

Damit erhält man:

$$e'^2 = e_1'^2 + \delta a \left(2 + 3\eta^2 + 3\eta^2 t^2 + \frac{3}{4} \eta^4 + \frac{3}{2} \eta^4 t^2 + \frac{3}{4} \eta^4 t^4 \right) \dots \dots \dots (10)$$

oder $\eta_{2,0}^2 = \eta_{1,0}^2 + \cos^2 b_0 \left(2 + 3\eta_{1,0}^2 + 3\eta_{1,0}^2 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 + \frac{3}{2} \eta_{1,0}^4 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 t_0^4 \right) \delta a \dots \dots (10')$

und $V_{2,0}^2 = V_{1,0}^2 + \cos^2 b_0 \left(2 + 3\eta_{1,0}^2 + 3\eta_{1,0}^2 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 + \frac{3}{2} \eta_{1,0}^4 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 t_0^4 \right) \delta a \dots \dots (10'')$

Aus (10'') folgt noch:

$$\frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}^2} = 1 + \cos^2 b_0 \left(2 + \eta_{1,0}^2 + 3\eta_{1,0}^2 t_0^2 - \frac{1}{4} \eta_{1,0}^4 - \frac{3}{2} \eta_{1,0}^4 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 t_0^4 \right) \delta a \dots \dots \dots (11)$$

Da das Verhältnis der Parallelkreishalbmesser bei den weiteren Ableitungen noch benötigt wird, erfolgt seine Ableitung für beliebige Punkte und Projektionen.

Es bestehen die Beziehungen:

$$P = N_2 \cos B, \quad p = N_1 \cos b$$

Mit $B = b + \delta b$ folgt $\cos B = \cos b - \sin b \delta b - \dots$ Dadurch ergibt sich:

$$\frac{P}{p} = \frac{N_2}{N_1} (1 - t \delta b) = \frac{c_2}{c_1} \frac{V_1}{V_2} (1 - t \delta b) \dots \dots \dots (12)$$

Zunächst ist noch

$$\frac{c_2}{c_1} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1}{b_1} \delta a \dots \dots \dots (13)$$

wobei für $\frac{a_1}{b_1}$ der Ausdruck (9'') zu setzen ist. Aus der Beziehung

$$V_1^2 = 1 + e_1'^2 \cos^2 b$$

folgt für Änderungen von $e_1'^2$ um $\delta e_1'^2$ und von b um δb folgende Reihenentwicklung:

$$V_2^2 = V_1^2 + de_1'^2 \cos^2 b - 2e_1'^2 \sin b \cos b \delta b$$

oder

$$V_2^2 = V_1^2 + 2 \frac{a_1^3}{b_1^3} \cos^2 b \delta \alpha - 2\eta_1^2 t \delta b \dots \dots \dots (14)$$

Daraus ergibt sich nun

$$V_2 = V_1 + \left(1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{3}{8} \eta_1^4\right) \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 \cos^2 b \delta \alpha - \eta_1^2 t \left(1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{3}{8} \eta_1^4\right) \delta b \dots \dots \dots (14')$$

und

$$\frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_1} - \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 \frac{\cos^2 b}{V_1^3} \delta \alpha + \frac{\eta_1^2 t}{V_1^3} \delta b$$

oder

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 - \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 \frac{\cos^2 b}{V_1^2} \delta \alpha + \frac{\eta_1^2 t}{V_1^2} \delta b \dots \dots \dots (14'')$$

Aus (12), (13) und (14'') erhält man

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin^2 b}{V_1^2} \delta \alpha - \frac{t_1}{V_1^2} \delta b \dots \dots \dots (15)$$

Mit Hilfe der Gleichung (15) läßt sich $\frac{P_0}{P}$ leicht angeben, da lediglich $\delta b = 0$, $b = b_0$ und $V_1 = V_{1,0}$ zu setzen sind. Es folgt

$$a = \frac{P_0}{P} = \frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} = 1 - \frac{\delta a}{a_1} - \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta_{1,0}^2}{2} + \frac{\eta_{1,0}^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta_{1,0}^4 - \frac{3}{4} \eta_{1,0}^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta_{1,0}^4 t_0^4\right) \delta \alpha \dots (16)$$

$\frac{M_{1,0}}{M_{2,0}}$ ergibt sich durch Multiplikation der Gleichungen (11) und (16) mit:

$$\frac{M_{1,0}}{M_{2,0}} = 1 - \frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 \delta \alpha \left(2 - t_0^2 + \eta_{1,0}^2 + \frac{7}{2} \eta_{1,0}^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta_{1,0}^2 t_0^4 - \frac{\eta_{1,0}^4}{4} - \frac{15}{8} \eta_{1,0}^4 t_0^2 + \frac{3}{2} \eta_{1,0}^4 t_0^4 + \frac{1}{8} \eta_{1,0}^4 t_0^6\right) \dots (17)$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) lassen sich nun mit Hilfe der Beziehungen (10), (16) und (17) die gesuchten Übertragungsgleichungen gewinnen. Da es sich um einfache Rechnungen handelt, kann das Endergebnis sofort angeschrieben werden.

Es folgen:

$$\delta b = \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 \left(2 - t_0^2 + \eta^2 + \frac{7}{2} \eta^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta^2 t_0^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \frac{15}{8} \eta^4 t_0^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t_0^4 + \frac{1}{8} \eta^4 t_0^6\right) \delta \alpha \right\} \Delta b + \frac{1}{2} t_0 \cos^2 b_0 \left\{ (1 + \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2}\right) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 + \dots (18)$$

$$+ \frac{3}{2} t_0 \left\{ \eta^2 \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 + \eta^2 + 2\eta^2 t_0^2) \cdot \delta \alpha \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{3} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l^2 - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \Delta b^3$$

$$\delta l = - \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4\right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \dots (19)$$

$$- t_0 \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2\right) \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l - \frac{1}{3} \left\{ (2 + 3t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 - 2t_0^2 - 3t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \Delta l + \frac{1}{6} \sin^2 b_0 \left(\frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha\right) \Delta l^3$$

Gegenüber den Hristowschen Formeln (c) zeigen sich einige kleine Abweichungen, die im einzelnen untersucht wurden. Es wurde festgestellt, daß diese Abweichungen in der Rechnung Hristows, abgesehen von einem bereits früher berichtigten Fehler im Glied mit $\Delta b \Delta l^2$, wo an Stelle von $1 + 4 t_0^2 - 9 t_0^4 : 1 - 5 t_0^2$ stehen sollte, auf einen etwas unschärferen Ansatz und einige Vernachlässigungen zurückzuführen sind.

b) Das Vergrößerungsverhältnis und die Hauptverzerrungen

Bei jeder umkehrbaren eindeutigen und stetigen Abbildung einer Fläche auf einer zweiten Fläche geht nach einem zuerst von Tissot ausgesprochenen Satz ein unendlich kleiner Kreis der 1. Fläche in eine unendlich kleine Ellipse oder in einen unendlich kleinen Kreis der 2. Fläche über. Man nennt diese unendlich kleine Ellipse die Tissotsche Indikatrix der Abbildung. Größen und Richtungen ihrer Halbachsen bestimmen die Verzerrungseigenschaften der Abbildung. Die Länge der großen Halbachse ist gleich dem größten, die der kleinen Halbachse gleich dem kleinsten Wert des Vergrößerungsverhältnisses in dem betreffenden Punkt. Die Hauptverzerrungen finden demnach in zwei zueinander senkrechten Richtungen, den sogenannten Hauptrichtungen statt. Nach Tissot hat jede beliebige, nicht konforme Abbildung genau ein rechtwinkliges Parameternetz, das wieder in ein Rechtwinkelnetz übergeht. Dieses Hauptnetz bestimmt die Richtungen der Hauptverzerrungen. Bei der mittabstandstreuen Azimutalprojektion ist das Hauptnetz aus den geodätischen Linien durch den Zentralpunkt und den dazu senkrechten Kleinkreisen mit dem Zentralpunkt als Mittelpunkt gebildet.

Für zwei sich auf den beiden Ellipsoiden entsprechende Linienelemente lauten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ellipsoid } ds^2 &= M_1^2 db^2 + p^2 dl^2 \\ 2. \text{ Ellipsoid } dS^2 &= M_2^2 dB^2 + P^2 dL^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Das Vergrößerungsverhältnis errechnet sich aus

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{M_2^2 dB^2 + P^2 dL^2}{M_1^2 db^2 + p^2 dl^2} \quad \dots \dots \dots (21)$$

Nun sind B und L Funktionen von b und l .

$$B = B(b, l); L = L(b, l)$$

Daraus folgt:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial b} db + \frac{\partial B}{\partial l} dl; \quad dL = \frac{\partial L}{\partial b} db + \frac{\partial L}{\partial l} dl$$

Damit wird der Ausdruck für dS^2 :

$$\begin{aligned} dS^2 &= \left\{ M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial b} \right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right)^2 \right\} db^2 + 2 \left\{ M_2^2 \frac{\partial B}{\partial b} \cdot \frac{\partial B}{\partial l} + P^2 \frac{\partial L}{\partial b} \cdot \frac{\partial L}{\partial l} \right\} db dl + \\ &+ \left\{ M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial l} \right)^2 \right\} dl^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (22)$$

oder

$$dS^2 = E db^2 + 2 F db dl + G dl^2,$$

wobei E, F, G die Fundamentalgrößen 1. Ordnung des 2. Ellipsoids sind. Damit wird zunächst

$$m^2 = \frac{E db^2 + 2 F db dl + G dl^2}{M_1^2 db^2 + p^2 dl^2} \quad \dots \dots \dots (23)$$

Es erfolgt noch die Herleitung eines anderen Ausdruckes für das Vergrößerungsverhältnis.

Bezeichnet man das Azimut des betrachteten Linienelementes des 1. Ellipsoides mit A_1 , das seines Bildes mit A_2 , so bestehen folgende Differentialgleichungen für die geodätischen Linien angehörenden Linienelemente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl}{db} &= \frac{M_1}{p} \operatorname{tg} A_1 \\ \frac{dL}{dB} &= \frac{M_2}{P} \operatorname{tg} A_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots : (24)$$

Setzt man die Beziehungen (24) in (21) ein, so folgen ganz allgemein:

$$m = \frac{M_2 \cos A_1}{M_1 \cos A_2} \frac{dB}{db} \dots \dots \dots (25)$$

$$m = M_2 \left(\frac{\partial B}{\partial b} \cdot \frac{1}{M_1} + \frac{\partial B}{\partial l} \cdot \frac{1}{p} \right) \frac{\cos A_1}{\cos A_2} \dots \dots \dots (25')$$

oder

Nach dem Satz von Clairaut ist längs einer geodätischen Linie das Produkt aus Parallelkreishalbmesser und dem Sinus des Azimuts konstant. Betrachtet man die von einem Zentralpunkt unter den Azimuten A_0 ausgehenden geodätischen Linien, dann ist in einem beliebigen Punkt dieser Linien für das 1. und 2. Ellipsoid

$$p \sin A_1 = p_0 \sin A_0$$

$$P \sin A_2 = P_0 \sin A_0$$

Daraus folgt:

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{P}{p} \cdot \frac{P_0}{P_0} \dots \dots \dots (26)$$

Mit den Gleichungen (26) können in (25) A_1 und A_2 eliminiert werden. Es folgt z. B.

$$m = \frac{P}{p} \cdot \frac{M_2 \sqrt{p^2 - p_0^2 \sin^2 A_0}}{M_1 \sqrt{P^2 - P_0^2 \sin^2 A_0}} \frac{dB}{db}$$

Zuerst werden die Beträge des Vergrößerungsverhältnisses h und k für die Meridian- und Parallelkreisrichtung ermittelt. Setzt man in (23) $l = \text{konst.}$, d. h. $dl = 0$, dann folgt h^2 , setzt man $b = \text{konst.}$ oder $db = 0$, dann ergibt sich k^2 . Es ist

$$h^2 = \frac{E}{M_1^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial b} \right)^2 + \frac{P^2}{M_2^2} \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right)^2 \right\}$$

$$k^2 = \frac{G}{P^2} = \frac{M_2^2}{P^2} \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial l} \right)^2 + \frac{P^2}{M_2^2} \left(\frac{\partial L}{\partial l} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Die Hauptverzerrungen a und b errechnet man nach Tissot aus den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= h^2 + k^2 + 2\sigma \\ (a-b)^2 &= h^2 + k^2 - 2\sigma \\ a^2 + b^2 &= h^2 + k^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

wobei σ die Flächenverzerrung der Projektion ist. Das Flächenelement des 1. Ellipsoides sei df und das des 2. Ellipsoides dF . Also ist

$$\sigma = \frac{dF}{df} \dots \dots \dots (29)$$

Nimmt man auf dem 1. Ellipsoid das ds entsprechende unendlich kleine Rechteck als Flächenelement, dann ist

$$df = M_1 p \, db \, dl \dots \dots \dots (30)$$

Die Bilder des Meridians und des Parallelkreises durch einen beliebigen Punkt P des 1. Ellipsoides haben auf dem Bildellipsoid die Azimute $A_{2,M}$ und $A_{2,P}$, die sich mit der zweiten Gleichung (24) er-

$$\text{Es ist } \text{tg } A_2 = \frac{P \frac{\partial L}{\partial b} db + \frac{\partial L}{\partial l} dl}{M_2 \frac{\partial B}{\partial b} db + \frac{\partial B}{\partial l} dl}$$

Mit $dl = 0$ ergeben sich für $A_{2,M}$ und mit $db = 0$ für $A_{2,P}$ die Beziehungen

$$\text{tg } A_{2,M} = \frac{P}{M_2} \frac{\frac{\partial L}{\partial b}}{\frac{\partial B}{\partial b}}, \quad \text{tg } A_{2,P} = \frac{P}{M_2} \frac{\frac{\partial L}{\partial l}}{\frac{\partial B}{\partial l}} \dots \dots \dots (31)$$

dF berechnet man nach der Formel

$$dF = dS_M \cdot dS_P \sin(A_{2,P} - A_{2,M}) \dots \dots \dots (32)$$

als unendlich kleines Bildparallelogramm.

dS_M erhält man aus (22) für $dl=0$, dS_P für $db=0$. Es folgen

$$\left. \begin{aligned} dS_M &= \sqrt{E} \cdot db = \sqrt{M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2} \cdot db \\ dS_P &= \sqrt{G} \cdot dl = \sqrt{M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial l}\right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial l}\right)^2} \cdot dl \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Aus der Beziehung für die geodätische Linie:

$$\sin A_2 = P \frac{dL}{dS} = \frac{P \frac{\partial L}{\partial b} db + \frac{\partial L}{\partial l} dl}{\sqrt{E db^2 + 2F db dl + G dl^2}}$$

folgt für $dl=0$, $\sin A_{2,M}$ und für $db=0$ $\sin A_{2,P}$. Es sind

$$\sin A_{2,M} = \frac{P}{\sqrt{E}} \frac{\partial L}{\partial b} ; \quad \sin A_{2,P} = \frac{P}{\sqrt{G}} \frac{\partial L}{\partial l} \dots \dots \dots (34)$$

Aus Gleichung (31) erhält man

$$\cos A_{2,M} = \frac{M_2}{\sqrt{E}} \frac{\partial B}{\partial b} ; \quad \cos A_{2,P} = \frac{M_2}{\sqrt{G}} \frac{\partial B}{\partial l} \dots \dots \dots (35)$$

Setzt man die Gleichungen (33), (34) und (35) in (32) ein, dann erhält man

$$dF = PM_2 \left(\frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial L}{\partial l} - \frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial L}{\partial b} \right) db dl \dots \dots \dots (36)$$

Für σ folgt aus (36) und (30)

$$\sigma = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{P}{p} \left(\frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial L}{\partial l} - \frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial L}{\partial b} \right) \dots \dots \dots (37)$$

Nun lassen sich a und b berechnen aus den allgemeinen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} (a \pm b)^2 &= \frac{1}{M_1^2} \left\{ M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \right\} + \frac{1}{P^2} \left\{ M_2^2 \left(\frac{\partial B}{\partial l}\right)^2 + P^2 \left(\frac{\partial L}{\partial l}\right)^2 \right\} \pm \\ &\pm 2 \frac{M_2}{M_1} \frac{P}{p} \left(\frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial L}{\partial l} - \frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial L}{\partial b} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

Soweit gelten die Entwicklungen für beliebige Abbildungen. Um die Ausdrücke für a und b für den Helmertschen Ellipsoidübergang zu finden, wird von den Gleichungen (18) und (19) ausgegangen. Allgemein lauten diese Beziehungen

$$B = b + A_1 \Delta b + A_2 \Delta b^2 + A_3 \Delta 1^2 + A_4 \Delta b \Delta 1^2 + A_5 \Delta b^3 \dots \dots \dots (18')$$

$$L = 1 + B_1 \Delta 1 + B_2 \Delta b \Delta 1 + B_3 \Delta b^2 \Delta 1 + B_4 \Delta 1^3 \dots \dots \dots (19')$$

Die Koeffizienten A_1 bis A_5 und B_1 bis B_4 sind homogen in den linearen Größen $\frac{\delta a}{a_1}$ und δa und verschwinden deshalb mit diesen. Zunächst werden die ersten partiellen Ableitungen von (18') und (19') gebildet. Es sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial b} &= 1 + A_1 + 2 A_2 \Delta b + A_4 \Delta 1^2 + 3 A_5 \Delta b^2 \\ \frac{\partial B}{\partial l} &= 2 A_3 \Delta l + 2 A_4 \Delta b \Delta l \\ \frac{\partial L}{\partial l} &= 1 + B_1 + B_2 \Delta b + B_3 \Delta b^2 + 3 B_4 \Delta 1^2 \\ \frac{\partial b}{\partial L} &= B_2 \Delta l + 2 B_3 \Delta b \Delta l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (39)$$

$\frac{(a \pm b)^2}{2}$ ist somit ein Polynom aus der Zahl 1 und aus linearen und quadratischen Gliedern von $\frac{\delta a}{a}$ und δa . Die Wurzel aus 1 plus einer kleinen Größe x errechnet sich aus der Formel

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \dots$$

Damit treten im Ausdruck für $a+b$ auch die ursprünglich quadratischen Glieder in $\frac{\delta a}{a}$ und δa auf. Da nach Voraussetzung nur lineare Glieder von $\frac{\delta a}{a}$ und δa betrachtet werden, fallen in (38) die Glieder mit $\left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2$, $\left(\frac{\partial B}{\partial l}\right)^2$ und $\frac{\partial B}{\partial l} \cdot \frac{\partial L}{\partial b}$ weg, und es bleibt übrig:

$$(a \pm b)^2 = \left(\frac{M_2}{M_1} \frac{\partial B}{\partial b}\right)^2 \pm 2 \frac{M_2}{M_1} \frac{P}{p} \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial L}{\partial l} + \left(\frac{P}{p} \frac{\partial L}{\partial l}\right)^2$$

oder
$$a \pm b = \frac{M_2}{M_1} \frac{\partial B}{\partial b} \pm \frac{P}{p} \frac{\partial L}{\partial l} \dots \dots \dots (40)$$

Daraus folgt innerhalb der angewandten Rechenschärfe

$$a = \frac{M_2}{M_1} \frac{\partial B}{\partial b} ; \quad b = \frac{P}{p} \frac{\partial L}{\partial l} \dots \dots \dots (41)$$

Damit ist praktisch

$$a = h \text{ und } b = k$$

Für $\frac{P}{p}$ wurde mit Gleichung (15) bereits der allgemeine Ausdruck gefunden. Bevor diese Beziehung durch Reihenentwicklung auf den Zentralpunkt bezogen wird, soll ein entsprechender Ausdruck für $\frac{M_2}{M_1}$ abgeleitet werden, d. h. es ist M_2 durch M_1 und die Änderungen $\frac{\delta a}{a_1}$, δa und δb auszudrücken.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{V_1^3}{V_2^3}$$

$\frac{c_2}{c_1}$ ist durch (13) und $\frac{V_1}{V_2}$ durch (14'') gegeben. Es ist

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^3 = 1 - 3 \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3 \frac{\cos^2 b}{V_1^2} \delta a + 3 \frac{\eta_{1,0}^2 t_1}{V_1^2} \delta b \dots \dots \dots (14''')$$

Damit folgt:
$$\frac{M_2}{M_1} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cos^2 b \left(-2 + t^2 - \frac{3\eta_{1,0}^2 t^2}{V_1^2}\right) \delta a + \frac{3\eta_{1,0}^2 t}{V_1^2} \delta b, \dots \dots \dots (42)$$

wobei zu setzen ist $\frac{a_1}{b_1} = \sqrt{1 + e_1'^2} = \sqrt{1 + \eta_{1,0}^2 + \eta_{1,0}^2 t_0^2}$

oder
$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{\eta_{1,0}^2}{2} (1 + t_0^2) - \frac{1}{8} \eta_{1,0}^4 (1 + t_0^2)^2 + \frac{1}{16} \eta_{1,0}^6 (1 + t_0^2)^3 + \dots \dots \dots$$

Durch Einsetzen von (15) und (42) in die Beziehungen (41) für a und b ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 + \frac{\delta a}{a_1} + A_1 + 2A_2 \Delta b + A_4 \Delta l^2 + 3A_5 \Delta b^2 + \frac{a_1}{b_1} \cos^2 b \left(-2 + t^2 - \frac{3\eta_{1,0}^2 t^2}{V_1^2}\right) \delta a + \frac{3\eta_{1,0}^2 t}{V_1^2} \delta b \\ b &= 1 + \frac{\delta a}{a_1} + B_1 + B_2 \Delta b + B_3 \Delta b^2 + 3B_4 \Delta l^2 + \frac{a_1}{b_1} \frac{\sin^2 b}{V_1^2} \delta a - \frac{t}{V_1^2} \delta b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

In den Gleichungen (43) sind die Glieder, die Funktionen der Breite b sind, in Taylorsche Reihen für die Breite b_0 des Zentralpunktes zu entwickeln. Die Koeffizienten A_1 bis A_5 und B_1 bis B_4 beziehen sich bereits auf die Breite b_0 . Die Entwicklungen bis zur 2. Ordnung, die keinerlei Schwierigkeiten bieten, werden übergangen und es werden lediglich die Ergebnisse mitgeteilt. Dabei wird in den Gliedern 2. Ordnung η^2 und in den linearen Gliedern η^4 vernachlässigt.

$$\begin{aligned}
\eta_1^2 &= \eta_{1,0}^2 \{ 1 - 2 t_{1,0} \Delta b - (1 - t_{1,0}^2) \Delta b^2 + \dots \} \\
t_1 &= t_0 + (1 + t_0^2) \{ \Delta b + t_0 \Delta b^2 + \dots \} \\
\frac{1}{V_1^2} &= \frac{1}{V_{1,0}^2} + \frac{2 \eta_{1,0}^2 t_0}{V_{1,0}^4} \Delta b + \eta_{1,0}^2 (1 - t_0^2) \Delta b^2 + \dots \\
\cos^2 b &= \cos^2 b_0 \{ 1 - 2 t_0 \Delta b - (1 - t_0^2) \Delta b^2 + \dots \} \\
\sin^2 b &= \cos^2 b_0 \{ t_0^2 + 2 t_0 \Delta b + (1 - t_0^2) \Delta b^2 + \dots \} \\
\eta_1^2 t_1 &= \eta_{1,0}^2 t_0 + \eta_{1,0}^2 (1 - t_0^2) \Delta b - 2 \eta_{1,0}^2 t_0 \Delta b^2 + \dots \\
\frac{t_1}{V_1^2} &= \frac{t_0}{V_{1,0}^2} + (1 + t_0^2 - \eta_{1,0}^2 + \eta_{1,0}^2 t_0^2) \Delta b + t_0 (1 + t_0^2) \Delta b^2 \\
\frac{\eta_1^2 t_1}{V_1^2} &= \frac{\eta_{1,0}^2 t_0}{V_{1,0}^2} + \eta_{1,0}^2 (1 - t_0^2 - \eta_{1,0}^2 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) \Delta b + \eta_{1,0}^2 t_0 (-2 + 5 \eta_{1,0}^2 - 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) + \dots \\
\frac{a_1 \sin^2 b}{b_1 V_1^2} &= \sin^2 b_0 \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right\} + t_0 \cos^2 b_0 (2 - \\
&\quad - \eta^2 + 3 \eta^2 t_0^2) \Delta b + \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \Delta b^2
\end{aligned} \tag{44}$$

Das zur Berechnung von a und b ferner noch benötigte δb erhält man aus Gleichung (18) bzw. (18'). Setzt man die Beziehungen (44) in (43) ein und ordnet nach Potenzen von Δb und Δl , dann folgt:

$$\begin{aligned}
a &= 1 + \frac{\cos^2 b_0}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 \\
b &= 1 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (3 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2
\end{aligned} \tag{45}$$

Streng genommen müßte a oder b zu Eins werden. Die Gleichungen (45) ermöglichen die Berechnung der Verzerrungen des Helmertschen Ellipsoidüberganges innerhalb der angestrebten Genauigkeit. Geht man bei der Berechnung von a und b von den ungenaueren Hristowschen Formeln aus, dann entsteht im Ausdruck für a noch ein Glied mit Δb und mit Δb^2 . Man sieht aus den Ausdrücken für a und b , daß die Verzerrungen selbst für relativ große Δb und Δl sehr geringe Beträge erreichen.

c) Berechnung der größten Winkelverzerrung $2w$

Nach Tissot ist $\sin w = -\frac{a-b}{a+b} \dots \dots \dots \tag{46}$

Durch Einsetzen von a und b folgt:

$$\sin w = -\frac{1}{6} \left[\cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 - \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (3 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \right]$$

Die größte mögliche Winkelverzerrung errechnet sich aus:

$$2w'' = \frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (3 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta b^2}{\rho''} - \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \frac{\Delta l^2}{\rho''} \right] \tag{47}$$

Zur Abschätzung werden $\frac{\delta a}{a}$ und $\delta \alpha$ für den Übergang vom Ellipsoid Plessis zum Ellipsoid Clarke 1880 eingesetzt.

Es ist $\frac{\delta a}{a} = +0,00027$

$\delta \alpha = +0,00017$

Für $\Delta l = 0$

$\Delta b = \pm 10^0$

$b_0 = 50^0$

folgt $2w = 0'',69 = 2^{cc},07$

Es handelt sich demnach in Extremfällen um beachtenswerte Winkelverzerrungen, zu denen noch die Azimutreduktionen, die Beträge derselben Größenordnung erreichen können, hinzukommen.

d) Berechnung der Meridiankonvergenz

Wenn ein streng ausgeglichenes Dreiecksnetz des ersten Ellipsoids auf ein anderes Ellipsoid überführt wird, dann ist vom geodätischen Standpunkt aus die möglichste Erhaltung der Orientierung des Netzes wichtig. Beim Helmertschen Ellipsoidübergang bleiben nur die Azimute im Zentralpunkt streng erhalten. Nun interessiert der Ausdruck für das Azimut beliebiger Meridianbilder des 1. Ellipsoides oder die Meridiankonvergenz. Die erste Gleichung (31) ist der allgemein gültige Ausdruck für die Meridiankonvergenz $A_{2,M}$, die hier mit γ bezeichnet wird.

Es ist
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{P}{M_2} \frac{\frac{\partial L}{\partial B}}{\frac{\partial L}{\partial b}} \dots \dots \dots (31)$$

Dabei ist
$$\frac{P}{M_2} = \frac{N_2 \cos B}{M_2} = V_2^2 \cos B$$

Um die gewünschte Form für V_2^2 zu erhalten, wird von Gleichung (14) ausgegangen und es werden die einzelnen Größen, die sich auf die Veränderliche b beziehen, durch Taylorsche Reihenentwicklungen auf die Breite b_0 des Zentralpunktes bezogen. Die Entwicklungen werden auf Glieder 2. Ordnung beschränkt.

Zunächst ist nach (39):
$$\frac{\frac{\partial L}{\partial B}}{\frac{\partial L}{\partial b}} = \frac{B_2 \Delta l + 2 B_3 \Delta b \Delta l}{1 + A_1 + 2 A_2 \Delta b + A_4 \Delta l^2} \dots \dots \dots (48)$$

Der Zähler von (48) ist homogen in $\frac{\delta \alpha}{a_1}$ und $\delta \alpha$ ohne Absolutglied. Daher kann man, wenn die stets gleichbleibende Entwicklungsschärfe beachtet wird, setzen

$$\frac{\frac{\partial L}{\partial B}}{\frac{\partial L}{\partial b}} = B_2 \Delta l + 2 B_3 \Delta b \Delta l \dots \dots \dots (48')$$

Somit ist $V_2^2 \cos B$ nur für lineare Glieder in Δb zu entwickeln. Es ergibt sich sofort

und
$$\cos B = \cos B_0 - \sin B_0 \Delta B = \cos b_0 - \sin b_0 (1 + A_1) \Delta b$$

$$V_2^2 = V_{1,0}^2 + \cos^2 b_0 (2 + 3 \eta_{1,0}^2 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) \delta \alpha - 2 t_0 \{ \eta_{1,0}^2 + \cos^2 b_0 (2 + 3 \eta_{1,0}^2 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) \delta \alpha + A_1 \eta_{1,0}^2 \} \Delta b$$

Daraus folgt

$$V_2^2 \cos B = V_{1,0}^2 \cos b_0 + \cos^3 b_0 (2 + 3 \eta_{1,0}^2 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) \delta \alpha - \sin b_0 \left\{ (1 + A_1) \cdot (1 + 3 \eta_{1,0}^2) + \cos^2 b_0 (3 + A_1) (2 + 3 \eta_{1,0}^2 + 3 \eta_{1,0}^2 t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b \dots \dots \dots (49)$$

Es genügt, für (49) folgenden Ausdruck anzunehmen:

$$V_2^2 \cos B = V_{1,0}^2 \cos b_0 - \sin b_0 (1 + 3 \eta_{1,0}^2) \Delta b$$

Damit ergibt sich für $\operatorname{tg} \gamma$:

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos b_0 (1 + \eta^2) B_2 \Delta l - \{ \sin b_0 (1 + 3 \eta^2) B_2 - 2 \cos b_0 (1 + \eta^2) B_3 \} \Delta b \Delta l$$

Werden die aus den Gleichungen (19) und (19') folgenden Werte für B_2 und B_3 eingesetzt, dann erhält man

$$\operatorname{tg} \gamma = - \sin b_0 \left\{ \frac{\delta \alpha}{a_1} + \sin^2 b_0 (1 - \frac{1}{2} \eta_{1,0}^2 + \frac{1}{2} \eta_{1,0}^2 t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l - \frac{1}{3} \cos b_0 \cdot \left. \begin{aligned} & \cdot (4 + 3 t_0^2) \left\{ \frac{\delta \alpha}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l \end{aligned} \right\} \dots \dots (50)$$

Damit ist für den Helmertschen Ellipsoidübergang der Ausdruck für das Azimut des Meridianbildes gefunden.

Beispiel: Es seien wieder $\frac{\delta a}{a} = +0,00027$, $\delta \alpha = +0,00017$, $b_0 = 50^\circ$,

dann wird für $\Delta l = +10^\circ = +\Delta b$

$$\gamma = -14'',2 = -46^{cc},1$$

6. Azimuttreuer konformer Ellipsoidübergang \ddot{U}_I

Die großen Beträge der Meridiankonvergenz beim Helmertschen Ellipsoidübergang veranlassen zur Ableitung eines konformen Ellipsoidüberganges, bei dem die Meridiankonvergenz verschwindet, d. h. bei dem Meridiane in Meridiane und Parallelkreise in Parallelkreise übergehen. Es ist sofort einleuchtend, daß ein derartig spezialisierter Ellipsoidübergang andere Nachteile, besonders hinsichtlich der Verzerrungen zur Folge haben wird. Dieser erste der hier abgeleiteten konformen Ellipsoidübergänge ermöglicht einige interessante Untersuchungen und bedeutet eine zweckmäßige Vorbereitung für die nachfolgenden allgemeineren Ableitungen.

a) Geographischer und isometrischer Breitenunterschied

Man bezeichnet mit q die isometrische Breite des ersten Ellipsoides, mit Q die isometrische Breite des zweiten Ellipsoides und mit q_0 und Q_0 die isometrischen Breiten des Zentralpunktes auf dem 1. und 2. Ellipsoid. Die Beziehungen zwischen isometrischem und geographischem Breitenunterschied sind gegeben durch die Differentialgleichung:

$$dq = \frac{M_1}{p} db = \frac{db}{V_1^2 \cos b} \dots \dots \dots (51)$$

Die Integration von (51) ergibt für die Nebenbedingung, daß für $b=0$ auch $q=0$ sein soll:

$$q = \ln \left\{ \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{1 - e \sin b}{1 + e \sin b} \right)^{e/2} \right] \right\}$$

Benutzt man (51) zur Entwicklung von Δq in eine Potenzreihe von Δb , dann folgt¹³⁾

$$q - q_0 = \Delta q = \frac{1}{\cos b_0} \left\{ \frac{\Delta b}{V_1^2} + \frac{t_0}{2V_1^4} (1 + 3\eta_1^2) \Delta b^2 + \frac{1}{6V_1^6} (1 + 2t_0^2 + 4\eta_1^2 + 6\eta_1^2 t_0^2 + 3\eta_1^4 + 12\eta_1^4 t_0^2) \Delta b^3 + \frac{t_0}{24V_1^8} (5 + 6t_0^2 + 19\eta_1^2 + 24\eta_1^2 t_0^2 + 47\eta_1^4 + 30\eta_1^4 t_0^2) \Delta b^4 \right\} \dots (52)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt für das 2. Ellipsoid. Sämtliche Koeffizienten von (52) sind für die konstante Breite b_0 zu berechnen.

Im folgenden wird häufig die umgekehrte Entwicklung benötigt. Es ist allgemein:

$$b - b_0 = \Delta b = \frac{db}{dq} \Delta q + \frac{d^2b}{dq^2} \frac{\Delta q^2}{2} + \frac{d^3b}{dq^3} \frac{\Delta q^3}{6} + \frac{d^4b}{dq^4} \frac{\Delta q^4}{24} + \dots$$

Die einzelnen Differentialquotienten ergaben sich aus (51) und lauten:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dq} &= \cos b \cdot V_1^2 \\ \frac{d^2b}{dq^2} &= -t \cos^2 b \cdot V_1^2 (1 + 3\eta^2) \\ \frac{d^3b}{dq^3} &= -\cos^3 b \cdot V_1^2 \{1 - t^2 + 4\eta^2 - 12\eta^2 t^2 + 3\eta^4 - 15\eta^4 t^2\} \\ \frac{d^4b}{dq^4} &= -t \cos^4 b \cdot V_1^2 \{-5 + t^2 - 51\eta^2 + 39\eta^2 t^2 - 103\eta^4 + 135\eta^4 t^2 - 57\eta^6 + 105\eta^6 t^2\} \end{aligned}$$

¹³⁾ Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, III. Band, 2. Halbband, Stuttgart 1941, Seite 145.

Damit folgt

$$\Delta b = \cos b \cdot V_1^2 \Delta q - \frac{1}{2} t \cos^2 b V_1^2 (1 + 3 \eta_1^2) \Delta q^2 - \frac{1}{6} \cos^3 b V_1^2 \{1 - t^2 + 4 \eta_1^2 - 12 \eta_1^2 t^2 + 3 \eta_1^4 - 15 \eta_1^4 t^2\} \Delta q^3 + \frac{1}{24} t \cos^4 b V_1^2 \{5 - t^2 + 51 \eta_1^2 - 39 \eta_1^2 t^2 + 103 \eta_1^4 - 135 \eta_1^4 t^2 + 57 \eta_1^6 - 105 \eta_1^6 t^2\} \Delta q^4 \quad \dots (53)$$

Die Koeffizienten sind für $b = b_0$ zu berechnen. Eine entsprechende Formel gilt für ΔB als Funktion von ΔQ .

b) Die Abbildungsgleichungen

Die konformen Abbildungen des 1. Ellipsoides auf dem 2. sind gegeben durch die analytische Funktion

$$Q + iL = f(q + il) \dots (54)$$

Wenn, wie vorausgesetzt, die Meridiane sich auf Meridianen und die Parallelkreise sich auf Parallelkreisen abbilden sollen, dann ist Q eine Funktion von q und L eine Funktion von l allein. Also ist

$$Q = Q(q) \\ L = L(l)$$

Die geographischen Längen werden proportional abgebildet, so daß gilt

$$L = a \cdot l$$

Damit lautet zunächst die Abbildungsfunktion

$$Q + iL = \varphi(q) + ia l$$

Damit die Funktion analytisch ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sein.

Es ist
$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial l} = a$$

Daraus ergibt sich

$$Q = aq + d$$

und es wird

$$Q + iL = a(q + il) + d \dots (55)$$

Die, allgemein gesehen, komplexen Größen a und d sind durch die Forderung bestimmt, daß $B_0 = b_0$ und $L_0 = l_0$ ist, und daß im Zentralpunkt das Vergrößerungsverhältnis gleich 1 bzw. $= m_0$ werden muß.

Der allgemeine Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis konformer Abbildungen, ausgedrückt durch isometrische Parameter, lautet z. B.

$$m^2 = \frac{P^2}{p^2} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l} \right)^2 \right\} \dots (56)$$

Damit ergibt sich für den vorliegenden Fall

$$m = a \frac{P}{p} \dots (56')$$

Das Vergrößerungsverhältnis ist nur von der Breite abhängig, also auf Parallelkreisen konstant. Es ist proportional dem Quotienten der Parallelkreishalbmesser in den sich auf beiden Ellipsoiden entsprechenden Punkten.

Für

$$B = B_0 = b = b_0 \text{ ist } m = 1$$

also ist

$$a = \frac{P_0}{P} = \frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} \dots (57)$$

und es folgt

$$m = \frac{P_0}{P} \cdot \frac{P}{p} \dots (56')$$

Vergl. auch Gleichung (26) mit (56').

Nun ist noch d zu bestimmen. Es seien

$$q(b_0) = q_0$$

$$Q(B_0 = b_0) = Q_0$$

Da q für $b = 0$ zu Null wird, ist d die isometrische Breite des Bildes des Äquators.

Es ist

$$Q_0 = a q_0 + a$$

oder

$$d = Q_0 - a q_0 \dots \dots \dots (58)$$

Gleichung (58) in (55) eingesetzt, ergibt

$$Q + iL = a(q + iL) + Q_0 - a q_0$$

oder

$$\Delta Q + iL = a \Delta q + ial \dots \dots \dots (55')$$

Folglich ist die Abbildung gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q &= a \Delta q \\ L &= al \\ a &= \frac{P_0}{P_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

Die durch isometrische Breiten beider Ellipsoide ausgedrückten Abbildungsgleichungen (59) sind demnach äußerst einfach. Die Abbildung entspricht sinngemäß der Merkatorprojektion der Ebene.

Die Gleichungen (59) sind für den praktischen Gebrauch durch die geographischen Breiten und die Änderungen der Ellipsoiddimensionen $\frac{\delta a}{a}$ und δa auszudrücken. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{\delta a}{a}$ und δa vernachlässigt werden können. Bei den Entwicklungen für die Abbildungsgleichungen werden in Absolutgliedern η^6 , in linearen Gliedern η^4 , in Gliedern 2. Ordnung η^2 mitgeführt und in den Gliedern 3. Ordnung wird $\eta_{1,0}^2$, nicht aber $\eta_{2,0}^2$ vernachlässigt.

Die Konstante $a = \frac{P_0}{P_0} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}^2}$ errechnete sich aus den Gleichungen (9''), (10) und (13) und wurde in G. (16) mitgeteilt. Es ergab sich

$$a = 1 - \frac{\delta a}{a_1} - \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_1^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta_1^4 - \frac{3}{4} \eta_1^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta_1^4 t_0^4 \right) \delta a \dots \dots \dots (60)$$

Mit der Konstanten a ist die Abbildungsgleichung der geographischen Längen bestimmt. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \delta l &= L - l = (L - L_0) - (l - l_0) = \Delta L - \Delta l \\ \delta l &= a \Delta l - \Delta l = \Delta l (a - 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

wobei die Längenzählung auf den Meridian des Zentralpunktes $L_0 = l_0$ bezogen wird.

Zur Berechnung von δb als Funktion von Δb wird davon ausgegangen, daß ΔB eine Funktion von ΔQ und dieses gemäß (59) gleich $a \cdot \Delta q$, Δq aber eine Funktion von Δb ist.

Nach Gleichung (53) ist:

$$\Delta B = a \cos b_0 V_2^2 \Delta q - \frac{a^2}{2} t_0 \cos^2 b_0 V_2^2 \left(1 + 3 \eta_2^2 \right) \Delta q^2 - \frac{a^3}{6} \cos^3 b_0 V_2^2 \cdot \left\{ \dots \dots \dots (61) \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ 1 - t_0^2 + 4 \eta_2^2 - 12 \eta_2^2 t_0^2 \right\} \Delta q^3 \right.$$

Dabei ist zu setzen: $\Delta q = \frac{1}{\cos b_0} \left\{ \frac{\Delta b}{V_1^2} + \frac{t_0}{2 V_1^4} (1 + 3 \eta_1^2) \Delta b^2 + \frac{1}{6} (1 + 2 t_0^2) \Delta b^3 \right\}$

Es folgt durch Einsetzen dieser Beziehung in (61) und durch Ordnen nach Potenzen von Δb

$$\Delta B = \frac{M_{1,0}}{M_{2,0}} \Delta b + \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{V_1^4} a t_0 \left\{ (1 + 3 \eta_1^2) - a (1 + 3 \eta_2^2) \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{6} a \frac{V_2^2}{V_1^6} \left\{ 1 + 2 t_0^2 - \dots \dots \dots \right.$$

$$\left. - 3 a t_0^2 (1 + 3 \eta_2^2) - a^2 (1 - t_0^2 + 4 \eta_2^2 - 12 \eta_2^2 t_0^2) \right\} \Delta b^3$$

Nun ist noch d zu bestimmen. Es seien

$$q(b_0) = q_0$$

$$Q(B_0 = b_0) = Q_0$$

Da q für $b = 0$ zu Null wird, ist d die isometrische Breite des Bildes des Äquators.

Es ist $Q_0 = a q_0 + a$
 oder $d = Q_0 - a q_0 \dots \dots \dots (58)$

Gleichung (58) in (55) eingesetzt, ergibt $Q + iL = a(q + iL) + Q_0 - a q_0$
 oder $\Delta Q + iL = a\Delta q + ial \dots \dots \dots (55')$

Folglich ist die Abbildung gegeben durch $\left. \begin{aligned} \Delta Q &= a\Delta q \\ L &= al \\ a &= \frac{P_0}{P_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$

Die durch isometrische Breiten beider Ellipsoide ausgedrückten Abbildungsgleichungen (59) sind demnach äußerst einfach. Die Abbildung entspricht sinngemäß der Merkatorprojektion der Ebene.

Die Gleichungen (59) sind für den praktischen Gebrauch durch die geographischen Breiten und die Änderungen der Ellipsoiddimensionen $\frac{\delta a}{a}$ und δa auszudrücken. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die zweiten und höheren Potenzen von $\frac{\delta a}{a}$ und δa vernachlässigt werden können. Bei den Entwicklungen für die Abbildungsgleichungen werden in Absolutgliedern η^6 , in linearen Gliedern η^4 , in Gliedern 2. Ordnung η^2 mitgeführt und in den Gliedern 3. Ordnung wird $\eta_{1,0}^2$, nicht aber $\eta_{2,0}^2$ vernachlässigt.

Die Konstante $a = \frac{P_0}{P_0} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{V_{2,0}^2}{V_{1,0}}$ errechnete sich aus den Gleichungen (9''), (10) und (13) und wurde in G. (16) mitgeteilt. Es ergab sich

$$a = 1 - \frac{\delta a}{a_1} - \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right) \delta a \dots \dots \dots (60)$$

Mit der Konstanten a ist die Abbildungsgleichung der geographischen Längen bestimmt. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \delta l = L - l &= (L - L_0) - (l - l_0) = \Delta L - \Delta l \\ \delta l &= a\Delta l - \Delta l = \Delta l(a - 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

wobei die Längenzählung auf den Meridian des Zentralpunktes $L_0 = l_0$ bezogen wird.

Zur Berechnung von δb als Funktion von Δb wird davon ausgegangen, daß ΔB eine Funktion von ΔQ und dieses gemäß (59) gleich $a \cdot \Delta q$, Δq aber eine Funktion von Δb ist.

Nach Gleichung (53) ist:

$$\Delta B = a \cos b_0 V_2^2 \Delta q - \frac{a^2}{2} t_0 \cos^2 b_0 V_2^2 \left(1 + 3 \eta_2^2 \right) \Delta q^2 - \frac{a^3}{6} \cos^3 b_0 V_2^2 \cdot \left\{ \dots \dots \dots (61) \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ 1 - t_0^2 + 4\eta_2^2 - 12\eta_2^2 t_0^2 \right\} \Delta q^3 \right.$$

Dabei ist zu setzen: $\Delta q = \frac{1}{\cos b_0} \left\{ \frac{\Delta b}{V_1^2} + \frac{t_0}{2V_1^4} (1 + 3\eta_1^2) \Delta b^2 + \frac{1}{6} (1 + 2t_0^2) \Delta b^3 \right\}$

Es folgt durch Einsetzen dieser Beziehung in (61) und durch Ordnen nach Potenzen von Δb

$$\Delta B = \frac{M_{1,0}}{M_{2,0}} \Delta b + \frac{1}{2} \frac{V_2^2}{V_1^4} a t_0 \left\{ (1 + 3\eta_1^2) - a(1 + 3\eta_2^2) \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{6} a \frac{V_2^2}{V_1^6} \left\{ 1 + 2t_0^2 - \dots \dots \dots \right.$$

$$\left. - 3 a t_0^2 (1 + 3\eta_2^2) - a^2 (1 - t_0^2 + 4\eta_2^2 - 12\eta_2^2 t_0^2) \right\} \Delta b^3$$

$\frac{M_{1,0}}{M_{2,0}}$ ist bereits aus Gleichung (17) bekannt. Die übrigen Ausdrücke entwickelt man mit Hilfe der beiden angegebenen Beziehungen, wobei ein wiederholtes Einsetzen und Zusammenfassen in Frage kommt.

$$\delta b = B - b = (B - B_0) - (b - b_0) = \Delta B - \Delta b$$

Es ist

und es folgen die Abbildungsgleichungen für \ddot{U}_I :

$$\delta b = \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 \left(2 - t_0^2 + \eta_1^2 + \frac{7}{2} \eta_1^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta_1^2 t_0^4 - \frac{\eta_1^4}{4} - \frac{15}{8} \eta_1^4 t_0^2 + \frac{3}{2} \eta_1^4 t_0^4 + \frac{1}{8} \eta_1^4 t_0^6 \right) \delta \alpha \right\} \Delta b + \frac{1}{2} t_0 \left\{ (1 + 2 \eta_1^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 \left(6 - t_0^2 + 3 \eta_1^2 + \frac{15}{2} \eta_1^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta_1^2 t_0^4 \right) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{6} \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 (-8 + 8 t_0^2 + t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b^3 \quad (62)$$

$$\delta l = \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} - \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 t_0^2 + \frac{3}{8} \eta_1^4 - \frac{3}{4} \eta_1^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta_1^4 t_0^4 \right) \right\} \Delta l \quad \dots \quad (63')$$

Der Vergleich der Gleichungen (62) und (63') mit (18) und (19) zeigt, daß die linearen Glieder genau übereinstimmen.

Man kann für die entwickelten Koeffizienten auch schreiben:

$$\delta b = \left(\frac{M_{1,0}}{M_{2,0}} - 1 \right) \Delta b + \text{Glieder höherer Ordnung} \quad \dots \quad (62')$$

$$\delta l = \left(\frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} - 1 \right) \Delta l \quad \dots \quad (63'')$$

Der konforme Ellipsoidübergang \ddot{U}_I zeichnet sich neben der Azimuttreue durch besondere Einfachheit aus.

c) Das Vergrößerungsverhältnis von \ddot{U}_I

Nach den Gleichungen (56) und (57) ist

$$m = a \cdot \frac{P}{p} = \frac{p_0}{P_0} \cdot \frac{P}{p} = \frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} \cdot \frac{P}{p}$$

Der Ausdruck für $\frac{N_{1,0}}{N_{2,0}}$ ist durch (16) und für $\frac{P}{p}$ durch (15) gegeben. Durch Multiplikation ergibt sich

$$m = a \left\{ 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1 \sin^2 b}{b_1 V_1^2} \delta \alpha - \frac{t}{V_1^2} \delta b \right\} \quad \dots \quad (64)$$

Die Entwicklungen für $\frac{a_1 \sin^2 b}{b_1 V_1^2}$ und $\frac{t}{V_1^2}$ sind bei (44) angegeben.

Für δb ist (62) einzusetzen.

Die Ausrechnung von m bis Δb^2 ergibt

$$\frac{m}{m_0} = 1 + t_0 \left(1 - \eta_1^2 \right) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_1^2 t_0^2 \right) \delta \alpha \left\{ \Delta b + \frac{1}{2} \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 - 2 t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \right\} \quad \dots \quad (65)$$

m ist eine Funktion des geographischen Breitenunterschiedes und deshalb auf Parallelkreisen konstant. \ddot{U}_I eignet sich daher hauptsächlich zur Abbildung von Parallelkreiszonen oder von in Ost-West-Richtung weit ausgedehnten Gebieten, die in Äquatornähe liegen.

Durch bestimmte Wahl von m_0 kann das Vergrößerungsverhältnis auf die Hälfte reduziert werden. Man erreicht dies dadurch, daß a so bestimmt wird, daß im Zentralpunkt das Vergrößerungsverhältnis m_0 auftritt.

Trotzdem erreicht die Längenverzerrung bedeutend größere Beträge als bei der Helmertschen Überführung, da im Ausdruck für m noch ein lineares Glied vorkommt.

Zum Beispiel erreicht m für $\Delta b = 5^\circ$, $b_0 = 50^\circ$, $\frac{a}{\delta a} = + 0,00027$, $\delta a = 0,00017$ unter Berücksichtigung von m_0 1 m auf 50 km Seitenlänge, während der Helmertsche Übergang in demselben Falle etwa 1 dm Längenverzerrung hervorruft. Am Schluß der Untersuchungen erfolgt eine Gegenüberstellung der durch die verschiedenen Übergänge bedingten Verzerrungen.

Die Meridiankonvergenz ist bei \ddot{U}_I identisch Null, ebenso wegen der Konformität der Winkelverzerrungen. Es interessieren nun die bei \ddot{U}_I auftretenden Azimutreduktionen.

d) Berechnung der Azimutreduktionen

Die geodätischen Linien des 1. Ellipsoides haben die geodätische Krümmung Null. Sie bilden sich auf dem 2. Ellipsoid im allgemeinen nicht wieder als geodätische Linien, sondern als Kurven mit einer geodätischen Krümmung K ab. Diese Krümmung hängt in jedem Punkt vom Azimut A der geodätischen Linie ab und erreicht ihr Maximum K_m in der Tangentenrichtung der Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses $m = \text{konst.}$ Im Falle von \ddot{U}_I hängt m nur von der Breite ab und ist also auf Parallelkreisen des 2. Ellipsoides konstant. K erreicht daher sein Maximum K_m für $A = \pm \frac{\pi}{2}$. Die geodätische Krümmung des Bildes einer geodätischen Linie, die unter dem Azimut A durch einen beliebigen Punkt verläuft, läßt sich durch K_m und A ausdrücken. Es ist

$$K = K_m \cdot \sin A \quad \dots \dots \dots (66)$$

Nach einem zuerst von Schools bewiesenen Satz ist die Krümmungsänderung einer geodätischen Linie bei einer konformen Abbildung durch folgende Gleichung gegeben:

$$K = \frac{d \ln m}{dn} \quad \dots \dots \dots (67)$$

Die Differentiation ist in der Richtung der positiven Normalen der betrachteten geodätischen Linie auszuführen. Das Maximum erreicht K bei \ddot{U}_I , wenn dn in der Meridianrichtung genommen wird. Dann ist für dn zu setzen

$$dn = P dQ = M_2 dB = a P dq \quad \dots \dots \dots (68)$$

Und es folgt

$$K_m = \frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dn} = \frac{1}{am} \cdot \frac{1}{p} \frac{dm}{dq} \quad \dots \dots \dots (69)$$

Mit

$$m = a \frac{P}{p}$$

ergibt sich zunächst

$$K_m = \frac{p}{a^2 P^2} \frac{dm}{dq}$$

Es ist

$$\frac{dm}{dq} = \frac{dm}{db} \cdot \frac{db}{dq}$$

und

$$\frac{db}{dq} = \frac{p}{M_1} = V_1^2 \cos b \quad \dots \dots \dots (70)$$

Daher folgt:

$$K_m = \frac{p^2}{a^2 P^2 M_1} \frac{dm}{db} \quad \dots \dots \dots (71)$$

Nun muß noch der Differentialquotient $\frac{dm}{db}$ ermittelt werden. Es ist

$$\frac{dm}{db} = \frac{\partial m}{\partial B} \frac{dB}{db} + \frac{\partial m}{\partial b}$$

Aus

$$m = a \frac{N_2 \cos B}{N_1 \cos b}$$

folgt

$$\frac{dm}{db} = a \left\{ \frac{1}{N_1 \cos b} \cdot \frac{d(N_2 \cos B)}{dB} \cdot \frac{dB}{db} - \frac{N_2 \cos B}{N_1^2 \cos^2 b} \frac{d(N_1 \cos b)}{db} \right\}$$

Dabei ist

$$\frac{d(N_2 \cos B)}{dB} = \sin B (M_2 \eta_2^2 - N_2) = -M_2 \sin B$$

und

$$\frac{d(N_1 \cos b)}{db} = \sin b (M_1 \eta_1^2 - N_1) = -M_1 \sin b$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots \dots \dots (72) \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

Somit ergibt sich

$$\frac{dm}{db} = \frac{a}{p^2} \left\{ N_2 M_1 \cos B \sin b - N_1 M_2 \cos b \sin B \frac{dB}{db} \right\} \dots \dots \dots (73)$$

Nun ist noch $\frac{dB}{db}$ zu ermitteln. Es ist

$$\frac{dB}{db} = \frac{dB}{dq} \cdot \frac{dq}{db} = \frac{aP}{M_2} \frac{M_1}{p} \dots \dots \dots (74)$$

Also

$$\frac{dB}{db} = m \frac{M_1}{M_2} \dots \dots \dots (74')$$

Dadurch erhält man

$$\frac{dm}{db} = \frac{aP}{p^2} \frac{M_1}{M_2} \left\{ \sin b - a \sin B \right\} \dots \dots \dots (75)$$

und endlich ergibt sich der geschlossene Ausdruck für K_m zu

$$K_m = \frac{\sin b - a \sin B}{aP} \dots \dots \dots (76)$$

Mit Hilfe der Gleichung (66) kann nun die Änderung der Krümmung einer beliebigen geodätischen Linie beim allgemeinen Übergang \bar{U}_I streng berechnet werden.

Damit ist die Voraussetzung zur Ableitung der Formel für die Azimutreduktionen geschaffen.

Der Ausdruck für die Azimutreduktionen δ wird durch eine Merkatorprojektion des 2. Ellipsoides ermittelt. Es sind dabei folgende Linien zu betrachten:

1. Das Merkatorbild s'' der Bildkurve s' einer geodätischen Linie s des 1. Ellipsoides,
2. das Merkatorbild der geodätischen Linie G. L., die P'_1 und P'_2 verbindet,
3. die geradlinige Verbindung von $P''_1 - P''_2$.

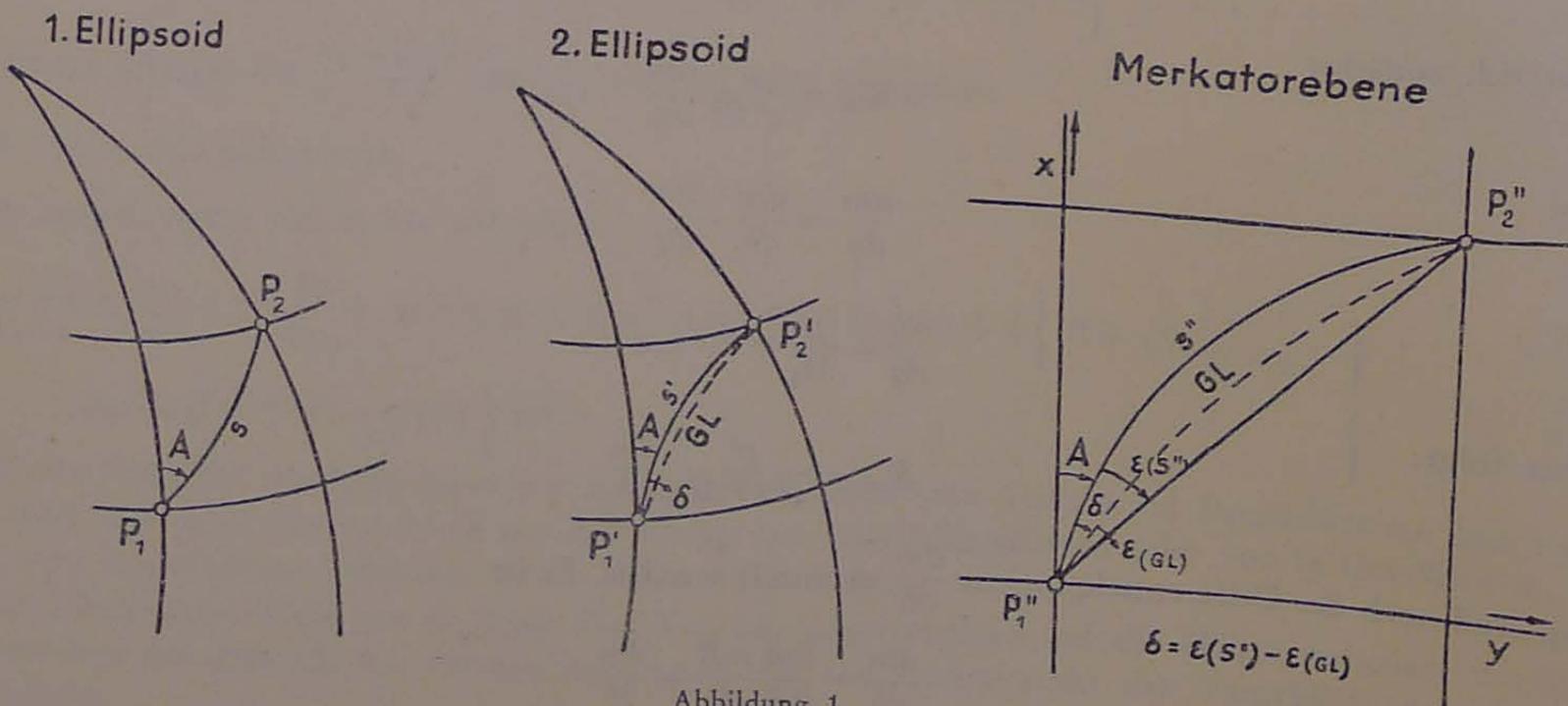


Abbildung 1

Bei beliebiger konformer Abbildung geht nach dem Satz von Schoors eine Kurve von der Krümmung γ in eine Kurve von der Krümmung K über. Dadurch ist hier:

$$K = \frac{\gamma}{m_M} + \frac{d \ln m_M}{dn} \dots \dots \dots (77)$$

Die Merkatorprojektion ist definiert durch die Funktion

$$x + iy = a_2(Q + iL)$$

Damit ist das Vergrößerungsverhältnis m_M gegeben durch

$$m_M = \frac{a_2}{P}, \dots \dots \dots (78)$$

wobei a_2 die große Halbachse des 2. Ellipsoides ist.

Die maximale Krümmung der Bilder geodätischer Linien bei Merkatorprojektionen kann aus den Beziehungen (66) und (67) ermittelt werden.

Es ist

$$K_m = \frac{d \ln m_M}{dx} = \frac{d \ln m_M}{a_2 dQ}$$

oder

$$K_m = \frac{d \ln \left(\frac{a_2}{P} \right)}{a_2 dQ} = \frac{d(\ln a_2 - \ln P)}{a_2 dQ}$$

Daraus folgt

$$K_m = -\frac{1}{a_2} \frac{d \ln P}{dQ} = -\frac{1}{a_2} \frac{dP}{P dQ}$$

Dabei ist

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{d(N_2 \cos B)}{dQ} = \frac{d(N_2 \cos B)}{dB} \cdot \frac{dB}{dQ} = \frac{P}{M_2} \cdot (-M_2 \sin B)$$

oder

$$\frac{dP}{dQ} = -P \sin B$$

Daraus ergibt sich k_m zu:

$$K_m = \frac{\sin B}{a_2} \dots \dots \dots (79)$$

Nun können die Krümmungen der Merkatorbilder s'' und G. L. (Abb. 1) angegeben werden.

Für das Merkatorbild s'' der geodätischen Linie s des 1. Ellipsoides folgt:

$$K_{M(s'')} = \sin A \left\{ \frac{\sin b - a \sin B}{aP} \cdot \frac{P}{a_2} + \frac{\sin B}{a_2} \right\}$$

oder

$$K_{M(s'')} = \frac{\sin A}{a_2} \cdot \frac{\sin b}{a} \dots \dots \dots (80)$$

Das ebene Bild der geodätischen Linie (G.L.), die auf dem 2. Ellipsoid P'_1 mit P'_2 verbindet, hat die Krümmung:

$$K_{M(G.L.)} = \sin(A + \delta) \frac{\sin B}{a_2} \dots \dots \dots (81)$$

Die Berechnung der Azimutreduktionen δ erfolgt nun derart, daß die ebenen Richtungsreduktionen $\epsilon_{s''}$ und $\epsilon_{G.L.}$ berechnet und voneinander subtrahiert werden.

Bedeutet K'_1 die Krümmung einer Kurve im Punkte P_1 und K''_1 deren Ableitung nach der Bogenlänge s , dann lautet nach Driencourt-Laborde¹⁴⁾

$$\epsilon = \frac{1}{2} K_1 s + \frac{1}{6} K'_1 s^2 + \frac{1}{24} K''_1 s^3 \dots \dots \dots (82)$$

¹⁴⁾ Driencourt-Laborde: Traité des Projections, IV. Fascicule, Paris 1932, S. 70, Gl. 54.

Für die Bildkurve der geodätischen Linie des 1. Ellipsoides ergibt sich zunächst aus

$$K_{M(s'')} = \frac{1}{a \cdot a_2} \sin b \sin A$$

durch Ableitung nach s''

$$\frac{d K_{M(s'')}}{d s''} = \frac{1}{a \cdot a_2} \left\{ \sin b \cos A \cdot \frac{d A}{d s''} + \cos b \sin A \frac{d b}{d s''} \right\}$$

Dabei ist

$$\frac{d A}{d s''} = K_{M(s'')} ; \quad \frac{d b}{d s''} = \frac{d b}{d s'} \cdot \frac{d s'}{d s''}$$

Es ist aber

$$\frac{d b}{d s'} = \frac{d b}{d s} \cdot \frac{d s}{d s'}$$

Also ist

$$\frac{d b}{d s''} = \frac{d b}{d s} \cdot \frac{d s}{d s'} \cdot \frac{d s'}{d s''} = \frac{d b}{d s} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m_M}$$

Für die geodätische Linie s des 1. Ellipsoides gilt die Differentialgleichung:

$$\frac{d b}{d s} = \frac{\cos A}{M_1}$$

Damit wird

$$\frac{d b}{d s''} = \frac{\cos A}{M_1} \cdot \frac{p}{a a_2}$$

Es folgt nun für K'_M

$$\frac{d K_{M(s'')}}{d s''} = \frac{\sin A \cos A}{a^2 a_2^2} (1 + \eta_1^2 \cos^2 b)$$

oder

$$K'_{M(s'')} = \frac{\sin A \cos A}{a^2 a_2^2} \cos^2 b (1 + t_1^2 + \eta_1^2) \dots \dots \dots (83)$$

Ebenso ergibt sich für das Merkatorbild der die Punkte P'_1 und P'_2 des 2. Ellipsoides verbindenden geodätischen Linie:

$$K_{M(G.L.)} = \frac{\sin A' \sin B}{a_2}$$

wobei für $A + \delta$ vorübergehend A' gesetzt wurde.

Die Ableitung nach der Bogenlänge lautet:

$$\frac{d K_{M(G.L.)}}{d s''(G.L.)} = \frac{1}{a_2} \left\{ \sin B \cos A' \frac{d A'}{d s''(G.L.)} + \cos B \sin A' \frac{d B}{d s''(G.L.)} \right\}$$

Es ist wieder

$$\frac{d A'}{d s''(G.L.)} = K_{M(G.L.)}$$

und

$$\frac{d B}{d s''(G.L.)} = \frac{d B}{d s'(G.L.)} \cdot \frac{d s'(G.L.)}{d s''(G.L.)} = \frac{\cos A'}{M_2} \cdot \frac{p}{a_2}$$

Damit ergibt sich

$$K'_{M(G.L.)} = \frac{\sin A' \cos A'}{a_2^2} \cos^2 B (1 + t_2^2 + \eta_2^2) \dots \dots \dots (84)$$

Nun wird noch vorausgesetzt, daß die Länge des Merkatorbildes der geodätischen Linie des 2. Ellipsoides praktisch genügend genau gleich s'' ist. Damit errechnet sich nun $\epsilon_{s''}$ und $\epsilon_{G.L.}$ zu:

$$\epsilon_{s''} = \frac{s''}{2 a a_2} \sin b \sin A + \frac{\sin A \cos A}{6 a^2 a_2^2} \cos^2 b (1 + t_1^2 + \eta_1^2) s''^2 + \dots \dots \dots$$

und

$$\epsilon_{G.L.} = \frac{s''}{2 a_2} \sin B \sin A' + \frac{\sin A' \cos A'}{6 a_2^2} \cos^2 B (1 + t_2^2 + \eta_2^2) s''^2 + \dots \dots \dots$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\frac{\delta''}{\rho''} = \frac{s''}{2a_2} \left(\frac{\sin b \sin A}{a} - \sin B \sin A' \right) + \frac{s''^2}{6a_2^2} \left\{ \frac{\sin A \cos A}{a^2} \cos^2 b (1 + t_1^2 + \eta_1^2) - \right. \\ \left. - \sin A' \cos A' \cos^2 B (1 + t_2^2 + \eta_2^2) \right\} \dots \quad (85)$$

Durch Einführung der früher entwickelten Differenzenformeln läßt sich aus obiger Formel ein praktisch brauchbarer Ausdruck entwickeln.

Zur Abschätzung der Größe von δ wird die weitere Entwicklung auf den Fall der größten Azimutreduktion beschränkt. Wir setzen $A = \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\begin{aligned} \cos A &= 0 \\ \sin A' &= 1 \\ \cos A' &= -\delta \\ \sin B &= \sin b + \delta b \cos b \\ \cos B &= \cos b - \delta b \sin b \end{aligned}$$

Es folgt mit $\eta_2^2 = 0$:

$$\delta_{\text{Max.}} = \frac{s''}{2a_2} \left(\frac{\sin b}{a} - \sin b - \delta b \cos b \right) + \frac{s''^2}{6a_2^2} \delta_{\text{Max.}}$$

Daraus ergibt sich nun

$$\delta_{\text{Max.}} = \frac{s'' \cos b}{2a_2} \left(1 + \frac{s''^2}{6a_2^2} \right) \left(t_1 \frac{1-a}{a} - \delta b \right) \dots \dots \dots \quad (86)$$

wobei zur Abschätzung das Glied mit s^2 vernachlässigt werden kann. Ferner ist

$$\frac{1-a}{a} = \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\sin^2 b}{V^2} \delta \alpha$$

und es entsteht die Gebrauchsformel

$$\delta_{\text{Max.}}'' = \rho'' \frac{s'' \cos b}{2a_2} \left(t_1 \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1 t_1}{b_1} \frac{\sin^2 b}{V_1^2} \delta \alpha - \frac{\delta b''}{\rho''} \right) \dots \dots \dots \quad (87)$$

Eine Abschätzung für $b = 50^\circ$, $\frac{\delta a}{a_1} = +0,00027$, $\delta \alpha = 0,00017$ und $s'' = 100 \text{ km}$ ergibt für $\delta b \leq 24'',5 \text{ A. T.}$
 $\delta''_{\text{Max.}} = -0,0046'' \cdot s''_{\text{km}} = 0'',46 \text{ A. T.}$

Der Ellipsoidübergang \ddot{U}_I bedingt somit in Extremfällen Azimutreduktionen, die bei genauen Berechnungen von Bedeutung sind.

7. Konforme Ellipsoidübergänge mit geringsten Längenverzerrungen und Bildkrümmungen

a) Ab bild ungs be ding un gen

Die großen Längenverzerrungen des Ellipsoidüberganges \ddot{U}_I weit vom Äquator entfernt liegender Gebiete veranlassen zur Untersuchung konformer Übergänge mit kleinsten Längenverzerrungen. Es handelt sich wieder um Abbildungen, bei denen die 2. und höheren Potenzen der Änderungen der Ellipsoidkonstanten vernachlässigt werden können. Die Abbildungsfunktion wird in Form einer Potenzreihe angesetzt. Die Anwendung beschränkt sich auf die drei charakteristischen Fälle von Parallelkreiszonen, Meridianstreifen und kreisförmigen Gebieten.

Die mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzende Abbildungsfunktion muß die oben gestellten Bedingungen erfüllen.

Allgemein ist:

$$\Delta Q + i \Delta L = (a + ib) (\Delta q + i \Delta l) + \frac{1}{2} (c + id) (\Delta q + i \Delta l)^2 + \dots \dots \dots \quad (88)$$

$$+ \frac{1}{6} (\varepsilon + if) (\Delta q + i \Delta l)^3 + \dots \dots \dots$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles erhält man

$$\Delta Q = a \Delta q - b \Delta l + \frac{1}{2} \{ c (\Delta q^2 - \Delta l^2) - 2d \Delta q \Delta l \} + \frac{1}{6} \{ \varepsilon (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) - f (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) \} \dots \dots \dots (89)$$

$$\Delta L = b \Delta q + a \Delta l + \frac{1}{2} \{ 2c \Delta q \Delta l + d (\Delta q^2 - \Delta l^2) \} + \frac{1}{6} \{ \varepsilon (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) + f (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) \} \dots \dots \dots (90)$$

Es sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Die unbestimmten Koeffizienten von (89) und (90) müssen so beschaffen sein, daß für $\frac{\delta a}{a_1} = 0$ und für $\delta a = 0$ diese Gleichungen in Identitäten übergehen.

Aus diesem Grunde muß sein

$$a = 1 + \Delta a$$

und $\Delta a, b, c, d, \varepsilon$ und f müssen, soweit sie nicht schon Null sind, mit $\frac{\delta a}{a}$ und δa zu Null werden.

Nach Voraussetzung sind daher alle Produkte und Potenzen dieser Konstanten zu vernachlässigen.

2. Dem Zentralpunkt b_0, l_0 des 1. Ellipsoides entspricht auf dem 2. Ellipsoid der Punkt B_0, L_0 mit denselben geographischen Koordinaten.

Also ist

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0 \\ L_0 &= l_0 \end{aligned} \dots \dots \dots (91)$$

3. Ebenso soll nach Voraussetzung der durch den Zentralpunkt des 1. Ellipsoides verlaufende Meridian in den Meridian durch das Bild des Zentralpunktes übergehen.

Für $\Delta l = 0$ muß $\Delta L = 0$ sein.

Gleichung (90) liefert für $\Delta l = 0$:

$$\Delta L = b \Delta q + \frac{d}{2} \Delta q^2 + \frac{f}{6} \Delta q^3 + \dots \dots \dots$$

Diese Beziehung ist nur identisch erfüllt, wenn

$$b = d = f = 0 \dots \dots \dots (92)$$

ist.

Damit lauten die Abbildungsgleichungen allgemein:

$$\Delta Q = a \Delta q + \frac{c}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2) + \frac{\varepsilon}{6} (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) \dots \dots \dots (89')$$

$$\Delta L = a \Delta l + c \Delta q \Delta l + \frac{\varepsilon}{6} (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) \dots \dots \dots (90')$$

4. Im allgemeinen Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis müssen die linearen Glieder verschwinden.

5. Der Verjüngungsfaktor m_0 wird nachträglich eingeführt. Zunächst wird gefordert, daß im Zentralpunkt das Vergrößerungsverhältnis den Wert 1 annimmt.

b) Ableitung des allgemeinen Ausdrucks für das Vergrößerungsverhältnis

Der Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis einer durch die analytische Funktion $Q + iL = f(q + il)$ vermittelten konformen Abbildung eines Rotationsellipsoides auf einem anderen lautet:

$$m = \frac{P}{p} \cdot \left| \frac{df(q + il)}{d(q + il)} \right|$$

Der absolute Betrag der Ableitung der Abbildungsfunktion ist durch jede der folgenden Beziehungen gegeben

$$\left| \frac{df(q + il)}{d(q + il)} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2}$$

Hier wird der erste Ausdruck angenommen und für m festgesetzt

$$m = \frac{P}{P} \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2} \dots \dots \dots (93)$$

Nach Gleichung (15) ist

$$\frac{P}{P} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \frac{a_1 \sin^2 b}{b_1 V_1^2} \delta a - \frac{t_1}{V_1^2} \delta b \dots \dots \dots (15)$$

Bei den Gleichungen (44) befinden sich die Reihenentwicklungen für $\frac{a_1 \sin^2 b}{b_1 V_1^2}$ und für $\frac{t_1}{V_1^2}$ bis zur 2. Ordnung, mit der wir uns auch hier begnügen, denn die Glieder 2. Ordnung des Vergrößerungsverhältnisses entsprechen den Gliedern 3. Ordnung der Abbildungsfunktion.

Damit ergibt sich für $\frac{P}{P}$:

$$\frac{P}{P} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \left\{ \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_1^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta_1^4 - \frac{3}{4} \eta_1^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta_1^4 t_0^4 \right) + \right. \\ \left. + t_0 \cos^2 b_0 \left(2 - \eta_1^2 + 3 \eta_1^2 t_0^2 \right) \Delta b + \cos^2 b_0 \left(1 - t_0^2 \right) \Delta b^2 \right\} \delta a - \\ - \left\{ t_0 \left(1 - \eta_1^2 + \eta_1^4 \right) + \left(1 + t_0^2 - \eta_1^2 + \eta_1^2 t_0^2 \right) \Delta b + t_0 \left(1 + t_0^2 \right) \Delta b^2 \right\} \delta b \dots \dots \dots (94)$$

Um den Ausdruck für b zu finden, wird davon ausgegangen, daß

$$\delta b = \Delta B - \Delta b$$

ist. ΔB ist eine Funktion von ΔQ und dieses wegen der Abbildungsgleichung (89') eine Funktion von Δq und Δl . Wird auch Δb mit Hilfe der Reihenentwicklungen (53) durch Δq ersetzt, dann ergibt sich δb als Funktion von Δq und Δl .

Es sind:

$$\Delta B = V_{2,0}^2 \cos b_0 \Delta Q - \frac{1}{2} V_{2,0}^2 t_0 \cos^2 b_0 (1 + 3 \eta_{2,0}^2) \Delta Q^2$$

$$\Delta Q = a \Delta q + \frac{c}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2)$$

$$\Delta b = V_{1,0}^2 \cos b_0 \Delta q - \frac{1}{2} V_{1,0}^2 t_0 \cos^2 b_0 (1 + 3 \eta_{1,0}^2) \Delta q^2$$

Durch Einsetzen folgt unter Beachtung der Gleichungen (10)

$$\delta b = \cos b_0 \left\{ V_1^2 (a - 1) + (u) \cos^2 b_0 \delta a \right\} \Delta q + \frac{1}{2} \left\{ V_1^2 \cos b_0 c - t_0 \cos^2 b_0 (a^2 - 1) - \right. \\ \left. - 8 t_0 \cos^4 b_0 a^2 \delta a \right\} \Delta q^2 - \frac{1}{2} c \cos b_0 \Delta l^2 \dots \dots \dots (95)$$

wobei zur Abkürzung geschrieben wurde

$$2 + 3 \eta^2 + 3 \eta^2 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta^4 + \frac{3}{2} \eta^4 t_0^2 + \frac{3}{4} \eta^4 t_0^4 = (u) \dots \dots \dots (95')$$

Setzt man die Beziehung (95) in (94) ein, dann erhält man:

$$\frac{P}{P} = 1 + \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right) \delta a - \\ - \sin b_0 (a - 1) \Delta q + \frac{1}{2} \left\{ -2 (a - 1) + \sin^2 b_0 (a^2 - 1) - c \sin b_0 - \right. \\ \left. - 2 \cos^4 b_0 \delta a \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} c \cdot \sin b_0 \Delta l^2 \dots \dots \dots (96)$$

Zwecks Berechnung des Ausdrucks $\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2}$ bildet man

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = a + c \Delta q + \frac{\varepsilon}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = -c \Delta l - \varepsilon \Delta q \Delta l$$

Innerhalb der Rechenschärfe ergibt sich

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2 = a^2 + 2ac \Delta q + a\varepsilon (\Delta q^2 - \Delta l^2) \text{ und}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l}\right)^2} = a \left\{ 1 + \frac{c}{a} \Delta q + \frac{\varepsilon}{2a} (\Delta q^2 - \Delta l^2) \right\} \dots \dots \dots (97)$$

Durch Multiplikation von (96) mit (97) folgt

$$m = a \cdot (\alpha) - \left\{ (a-1) \sin b_0 - c \right\} \Delta q + \frac{1}{2} \left\{ -2(a-1) \cos^2 b_0 - c \sin b_0 - \right. \\ \left. - 2 \cos^4 b_0 \delta\alpha + \varepsilon \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} \left\{ c \sin b_0 - \varepsilon \right\} \Delta l^2 \dots \dots \dots (98)$$

(98) ist der allgemeine Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis konformer Ellipsoidübergänge. Zur Abkürzung wurde das Absolutglied von (96), das nach Gleichung (16) gleich $\frac{P_0}{P_0}$ ist, mit (α) bezeichnet.

Nun ist über die Konstanten so zu verfügen, daß die Abbildungsbedingungen erfüllt sind.

Nach Forderung 5. soll im Zentralpunkt $m=1$ bzw. m_0 sein. Für $\Delta q = \Delta l = 0$ muß daher $m=m_0$ sein. Daraus folgt:

$$a = \frac{m_0}{(\alpha)}$$

Mit $m_0=1$ ergibt sich für alle konformen Ellipsoidübergänge die Konstante a zu

$$a = \frac{1}{(\alpha)} = \frac{P_0}{P_0} \dots \dots \dots (99)$$

a ist bereits in Gleichung (16) entwickelt.

Die nächste Forderung verlangte das Verschwinden des linearen Gliedes im Ausdruck für m .

Es folgt daher

$$c = (a-1) \sin b_0 \dots \dots \dots (100)$$

Bei allen konformen Ellipsoidübergängen, bei denen der entwickelte Ausdruck des Vergrößerungsverhältnisses keine linearen Glieder enthält und bei denen das Vergrößerungsverhältnis im Zentralpunkt gleich 1 (bzw. m_0) ist, haben die Konstanten a und c dieselben Werte (99) und (100).

Damit lauten die in diesem Sinne noch allgemeinsten Abbildungsgleichungen:

$$\Delta Q = a \Delta q + \frac{(a-1) \sin b_0}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2) + \frac{\varepsilon}{6} (\Delta q^3 - 3\Delta q \Delta l^2) \dots \dots \dots (89'')$$

$$\Delta L = a \Delta l + (a-1) \sin b_0 \Delta q \Delta l + \frac{\varepsilon}{6} (3\Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) \dots \dots \dots (90'')$$

Das Vergrößerungsverhältnis nimmt die Form an:

$$m = 1 + \frac{1}{2} \left\{ -(a-1) \cos^2 b_0 (2 + t^2) - 2 \cos^4 b_0 \delta\alpha + \varepsilon \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} \left\{ (a-1) \sin^2 b_0 - \varepsilon \right\} \Delta l^2 \dots \dots \dots (98')$$

Zur völligen Bestimmung der Abbildung ist lediglich noch die Konstante ε frei.

ε bestimmt die Form der Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses, die Kegelschnitte und in Sonderfällen parallele Gerade sind.

c) Ableitung der Ellipsoidübergänge für Meridianstreifen, Parallelkreiszonen und für kreisförmige Gebiete

Aus Gleichung (98') ist ersichtlich, daß m , in einer Merkatorprojektion betrachtet, auf Kegelschnitten konstant ist. Als für die Praxis besonders wichtige Anwendungsgebiete werden Meridianstreifen, Parallelkreiszonen und kreisförmige Bereiche zur Ab-

leitung von ε betrachtet. Die dabei entstehenden konformen Abbildungen können hinsichtlich ihrer Definition und Eigenschaften mit den Gauß-Krügerschen, Lambertschen und stereographischen Abbildungen der Ebene verglichen werden.

Wie einleitend erwähnt, bedingt eine konforme Abbildung nur dann die kleinstmöglichen Längenverzerrungen eines Bereiches, wenn das Vergrößerungsverhältnis auf dem Rande konstant ist. Dabei erreicht die über den Bereich erstreckte Gesamtkrümmung der Bilder der geodätischen Linien nach dem Satz von Eisenlohr¹⁵⁾ ein Maximum. In den zu betrachtenden drei Grenzfällen der Meridianstreifen, Parallelkreiszonen und kreisförmigen Gebiete sind außerdem die im Abbildungsbereich vorkommenden maximalen Bildkrümmungen ein Minimum¹⁶⁾. Deshalb müssen streng genommen die Abbildungsbereiche von Linien gleichen Vergrößerungsverhältnisses begrenzt sein, wenn die konformen Abbildungen die geforderten kleinsten Längenverzerrungen und Azimutreduktionen hervorrufen sollen. Wie die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, kommt es aber bei der vorliegenden Art der konformen Ellipsoidabbildungen nicht auf die genaue Einhaltung dieser Forderung an, so daß eine strengere Behandlung des Problems nicht angebracht ist.

a) Ellipsoidübergang für Meridianstreifen \ddot{U}_M

Der Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis darf nur von der geographischen Länge Δl abhängen. ε ist also so zu bestimmen, daß in der Gleichung (98') das Glied mit Δq^2 verschwindet. Es ist daher

$$\varepsilon = + (a - 1) \cos^2 b_0 (2 + t_0^2) + 2 \cos^4 b_0 \delta \alpha$$

oder

$$\varepsilon = (a - 1) (1 + \cos^2 b_0) + 2 \cos^4 b_0 \delta \alpha$$

Damit folgt für \ddot{U}_M

$$m = 1 - \cos^2 b_0 \{ (a - 1) + \cos^2 b_0 \delta \alpha \} \Delta l^2 \dots \dots \dots (101)$$

Ausführlich ergibt sich

$$m = 1 + \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\partial a}{\partial a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 \dots \dots \dots (101')$$

Die Abbildungsgleichungen erhält man ohne weiteres durch Einsetzen von ε in (89'') und (90'').

Die Meridiankonvergenz γ folgt aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} A_2 = \frac{dL}{dQ} = \frac{\frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial l} dl}{\frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial l} dl}, \text{ wobei } dl = 0 \text{ zu setzen ist.}$$

Es ergibt sich

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial L}{\partial q}}{\frac{\partial Q}{\partial q}} \dots \dots \dots (102)$$

Nun erhält man folgenden allgemeinen Ausdruck

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c \Delta l + \varepsilon \Delta q \Delta l}{a + c \Delta q + \frac{\varepsilon}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2)} \dots \dots \dots (103)$$

Diese Beziehung läßt sich, ohne an Rechenschärfe einzubüßen, noch vereinfachen, da Δa , c und ε in $\frac{\partial a}{\partial a_1}$ und δa homogen sind. Es folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = c \Delta l + \varepsilon \Delta q \Delta l \dots \dots \dots (103')$$

¹⁵⁾ Eisenlohr: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 72. Band, Berlin 1870, S. 143 u. ff. über Flächenabbildung.

¹⁶⁾ Bočemüller: Über die konforme Abbildung der Erdoberfläche mit günstigster Richtungs- und Längenreduktion usw., Bad Liebenwerda 1935.

Somit wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = & -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \cos^2 b_0 \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \right. \\ & \left. - \cos^2 b_0 (2 - 2t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta q \Delta l \quad \dots \dots \dots (104) \end{aligned}$$

Zur Berechnung von γ genügt es, für

$$\Delta q = \frac{\Delta b}{\cos b_0} \text{ zu setzen.}$$

β) Ellipsoidübergang für Parallelkreiszonen \ddot{U}_P

ε ist aus Gleichung (98') so zu bestimmen, daß das Vergrößerungsverhältnis nur von Δq abhängt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (a - 1) \sin^2 b_0 \quad \text{Damit folgt} \\ m &= 1 - \cos^2 b \left\{ (a - 1) + \cos^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta q^2 \quad \dots \dots \dots (105) \\ \text{oder } m &= 1 - \left\{ (a - 1) + \cos^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks für $(a - 1)$ erhält man das Vergrößerungsverhältnis von \ddot{U}_P :

$$m = 1 + \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \quad \dots \dots \dots (105')$$

Die Meridiankonvergenz errechnet man mit Hilfe der Gleichung (103') und erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma = & -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \left. \right. \\ & \left. - \sin^2 b_0 \left(\frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right) \Delta q \Delta l \right\} \quad \dots \dots \dots (106) \end{aligned}$$

γ) Ellipsoidübergang für kreisförmige Gebiete \ddot{U}_K

Da $m = \text{konst.}$ in Gleichung (98') eine Schar konzentrischer Kreise darstellt, muß ε so bestimmt werden, daß die Koeffizienten von Δq^2 und Δl^2 gleich sind. Es genügt dabei, die Kreise als in der Merkatorebene gelegen anzunehmen, obwohl dadurch auf dem Ellipsoid keine strengen geodätischen Kreise erfaßt werden.

Es ist also

$$\varepsilon = (a - 1) + \cos^4 b_0 \delta \alpha$$

Damit folgt

$$m = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ (a - 1) + \cos^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta q^2 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ (a - 1) + \cos^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta l^2 \quad \dots \dots (107)$$

Die weitere Ausführung ergibt

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 \quad \text{oder} \\ m &= 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 \quad \dots \dots (107') \end{aligned}$$

Die Meridiankonvergenz errechnet man nach Gleichung (103') und erhält

$$\operatorname{tg} \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{\eta_1^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta q \Delta l \quad (108)$$

Die vorhergehenden Entwicklungen werden im Abschnitt 9 näher untersucht und mit den anderen Ellipsoidübergängen verglichen.

8. Die allgemein gültige konforme Übertragung \ddot{U}_{II}

a) Das Vergrößerungsverhältnis

Die Tatsache, daß die Abbildungsfunktionen der konformen Ellipsoidübergänge \ddot{U}_M , \ddot{U}_P und \ddot{U}_K einschließlich der Glieder 2. Ordnung vollkommen übereinstimmen, veranlaßte die Untersuchung einer Abbildung, die nur aus diesen gemeinsamen Gliedern 1. und 2. Ordnung gebildet wird. Dieser Ellipsoidübergang \ddot{U}_{II} ist damit sowohl als selbständiger Ellipsoidübergang, als auch als Hauptentwicklung für die übrigen konformen Übergänge zu betrachten. Es folgt nun die vollständige, gebrauchsfertige Entwicklung des Ellipsoidüberganges \ddot{U}_{II} und aus praktischen Gründen die Angabe der Zusatzglieder 3. Ordnung, welche \ddot{U}_{II} leicht in den Ellipsoidübergang \ddot{U}_K überzuführen ermöglichen.

\ddot{U}_{II} ist durch seine Definition vollständig bestimmt, so daß keine Anpassung an den Abbildungsbereich mehr möglich ist.

Wird $\varepsilon = 0$ gesetzt, dann erhält man die Abbildungsgleichungen, die allen konformen Übergängen mit günstigen Verzerrungseigenschaften gemeinsam sind.

Die Abbildungsgleichungen von \ddot{U}_{II} lauten allgemein

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q + i\Delta L &= a(\Delta q + i\Delta l) + \frac{c}{2}(\Delta q + i\Delta l)^2 \\ \Delta Q &= a\Delta q + \frac{c}{2}(\Delta q^2 - \Delta l^2) \\ \Delta L &= a\Delta l + c\Delta q\Delta l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (109)$$

Das Vergrößerungsverhältnis erhält nach Gleichung (98') die Form:

$$m = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ (a-1)(2+t_0^2) + 2 \cos^2 b_0 \delta\alpha \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} (a-1) \sin^2 b_0 \Delta l^2$$

Nach Einführung von a ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ (2+t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2-2t_0^2-t_0^4) \delta\alpha \right\} \Delta q^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta\alpha \right\} \Delta l^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

m ist nach Gleichung (110) ebenfalls auf Kegelschnitten konstant, wobei je nach Vorzeichen und Größe von $\frac{\delta a}{a_1}$ und $\delta\alpha$ und je nach der Breite b_0 auch Hyperbeln auftreten können. Die Verzerrungseigenschaften von \ddot{U}_{II} sind nicht nennenswert ungünstiger als bei den Ellipsoidabbildungen \ddot{U}_M , \ddot{U}_P und \ddot{U}_K .

b) Die entwickelten Abbildungsgleichungen von \ddot{U}_{II}

Aus den Gleichungen (109) werden nun die Abbildungsgleichungen für geographische Breitenunterschiede Δb und ΔB als Veränderliche entwickelt. Bezüglich der Gleichung für ΔL stößt dieses Vorhaben auf keine Schwierigkeiten, dagegen ist die Berechnung von δb etwas umständlicher.

Durch Gleichung (53) ist ΔB als Funktion von ΔQ gegeben, und dieses ist nach der 1. Gleichung (109) eine Funktion von Δq und Δl , wobei Δq nach Gleichung (52) durch Δb zu ersetzen ist.

Die etwas langwierige Rechnung, die keinerlei wesentliche Gesichtspunkte aufweist und mit den bisher angegebenen Formeln durchgerechnet werden kann, führt zu folgendem Ergebnis für \ddot{U}_{II} :

$$\delta b = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 (2 - t_0^2 + \eta^2 + \frac{7}{2} \eta^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta^2 t_0^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \frac{15}{8} \eta^4 t_0^2 + \\ & + \frac{3}{2} \eta^4 t_0^4 + \frac{1}{8} \eta^4 t_0^6) \delta \alpha \} \Delta b + \frac{3}{2} t_0 \left\{ \eta^2 \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 + \eta^2 + 2 \eta^2 t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 + \\ & + \frac{1}{2} t_0 \cos^2 b_0 \left\{ (1 + \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l^2 - \\ & - \frac{1}{2} \sin^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l^2 + \frac{1}{6} \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - 8 \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - \right. \\ & \left. - \frac{t_0^4}{8}) \delta \alpha \right\} \Delta b^3 \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

$$\delta l = - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right) \delta \alpha \} \Delta l - \\ & - t_0 \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 \right) \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l - \frac{1}{2} t_0^2 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \right. \\ & \left. + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b^2 \Delta l \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

c) Die Meridiankonvergenz

Die Meridiankonvergenz des allgemein gültigen konformen Überganges \ddot{U}_{II} errechnet sich aus der einfachen Beziehung

$$\operatorname{tg} \gamma = c \Delta l$$

Also ist
$$\operatorname{tg} \gamma = - \sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l \quad (113)$$

Der Ausdruck für $\operatorname{tg} \gamma$ besteht demnach nur aus dem linearen Glied der Formeln für die Meridiankonvergenz der konformen Ellipsoidübergänge \ddot{U}_M , \ddot{U}_P und \ddot{U}_K .

d) Ableitung der entwickelten Abbildungsgleichungen für die günstigste Abbildung kreisförmiger Bereiche \ddot{U}_K

Die Abbildungsgleichungen lauten für diesen Ellipsoidübergang allgemein

$$\Delta Q = a \Delta q + \frac{c}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2) + \frac{\varepsilon}{6} (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2)$$

$$\Delta L = a \Delta l + c \Delta q \Delta l + \frac{\varepsilon}{6} (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3)$$

Die linearen und quadratischen Glieder wurden bereits entwickelt und als Gleichungen (111) und (112) mitgeteilt. Hier interessiert nun die Auswirkung der Glieder 3. Ordnung auf die Gleichungen (111) und (112). Es wird für \ddot{U}_K

$$\varepsilon = -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \quad \text{mit} \quad \Delta q = \frac{\Delta b}{\cos b_0} \quad \text{folgt:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{6} (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) &= \frac{1}{6} \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \left\{ \frac{\Delta b^3}{\cos^3 b_0} - \right. \\ & - \frac{3 \Delta b \Delta l^2}{\cos b_0} \left. \right\} = \frac{\Delta b^3}{6 \cos b_0} \left\{ - (1 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} - \\ & - \frac{\Delta b \Delta l^2}{2 \cos b_0} \left\{ -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \end{aligned}$$

Die additiven Glieder 3. Ordnung erhält man durch Multiplikation der letzten Beziehung mit $V_{2,0}^2$
 $\cos b_0 \approx \cos b_0$. Es ergibt sich:

$$\frac{\Delta b^3}{6} \left\{ - (1 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} - \frac{\Delta b \Delta l^2}{2} \left\{ - \frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\}$$

Zur Berechnung der Zusatzglieder für δl hat man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{6} (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) &= \frac{1}{6} \left\{ - \frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \left\{ 3 \frac{\Delta b^2 \Delta l}{\cos^2 b_0} - \Delta l^3 \right\} = \\ &= \frac{\Delta b^2 \Delta l}{2} (1 + t_0^2) \left\{ - \frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} - \\ &\quad - \frac{\Delta l^3}{6} \left\{ - \frac{\delta a}{a_1} + \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \end{aligned}$$

Die Gebrauchsformeln für kreisförmige Gebiete (\dot{U}_K) erhält man, indem man in den Gleichungen (111) und (112) an Stelle der dort angegebenen die folgenden Glieder 3. Ordnung benutzt:

$$\text{Für } \delta b: + \frac{\Delta b \Delta l^2}{2} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} + \frac{\Delta b^3}{6} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - 7 \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \dots \quad (114)$$

$$\text{Für } \delta l: - \frac{\Delta b^2 \Delta l}{2} \left\{ (1 + 2 t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - 2 t_0^4) \delta \alpha \right\} + \frac{\Delta l^3}{6} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \quad (115)$$

9. Zusammenfassung der Ergebnisse

a) Vergleich mit den Hristowschen Formeln (c)

Die Hristowschen Reihenentwicklungen für den Helmertschen Ellipsoidübergang sind durch die etwas schärferen Formeln (18) und (19) zu ersetzen.

Die Abweichungen in den Gliedern 2. und 3. Ordnung haben einen ungenaueren Ansatz Hristows für die Ausgangsformeln (3) und (4) zur Ursache.

Die Vernachlässigung von η_2^4 in den Gliedern mit s^2 und von η_2^2 in den Gliedern mit s^3 führt dazu, daß in Hristows Ergebnis einige Glieder mit $\frac{\delta a}{a_1}$ und $\delta \alpha$ unscharf werden.

Nach Gleichung (10') ist nämlich

$$\eta_2^2 = \eta_1^2 + 2 \cos^2 b_0 \delta \alpha \left(1 + \frac{3}{2} \eta_1^2 + \frac{3}{2} \eta_1^2 t_0^2 + \dots \right)$$

Will man in einem Glied η_1^2 vernachlässigen, dann ist ohne Rücksicht auf die Größenordnung von δa , $\eta_2^2 \neq 0$, sondern es ist für $\eta_2^2 = 2 \cos^2 b_0 \delta \alpha$ zu setzen.

Dasselbe gilt für η_2^4 , das dann, wenn $\eta_1^4 = 0$ ist, mit $\eta_2^4 = 4 \eta_1^2 \cos^2 b_0 \delta \alpha$ in Rechnung zu stellen ist.

Das in den Gleichungen (18) und (19) mitgeteilte Ergebnis entspricht also dem Vorgehen, daß in den Gliedern mit s^2, η_1^4 und mit s^3, η_1^2 bis zum Schluß mitgeführt und erst nachträglich η_1^4 bzw. η_1^2 vernachlässigt werden.

b) Begründung des Überganges \dot{U}_K und Zusammenstellung der Rechenformeln

Die einleitenden Erörterungen und die Verzerrungsuntersuchungen haben ergeben, daß die Helmertsche mittabstandstreue Azimutalprojektion durch eine entsprechende konforme Ellipsoidabbildung zu ersetzen ist.

Nun hat sich gezeigt, daß, abgesehen von der azimuttreuen konformen Überführung, die Abbildungsgleichungen aller betrachteten konformen Übergänge dieselben linearen und quadratischen Glieder besitzen wie der Helmertsche Über-

g a n g. Lediglich die Glieder 3. Ordnung weichen untereinander und gegenüber dem Helmertschen Übergang ab. Es muß nun entschieden werden, welcher konforme Übergang für die praktische Anwendung am geeignetsten ist.

Es war zunächst naheliegend, die Abbildungsgleichungen, die allen konformen Ellipsoidübergängen mit verschwindenden linearen Gliedern des Vergrößerungsverhältnisses und mit dem Helmertschen Übergang gemeinsam sind, für einen allgemein gültigen Ellipsoidübergang in Erwägung zu ziehen. Da man aber nicht mit isometrischen Koordinatenunterschieden rechnen kann, war die Entwicklung des konformen Überganges \ddot{U}_{II} bis zu Gliedern 3. Ordnung der geographischen Koordinatenunterschiede erforderlich. Wenn aber schon mit Gliedern 3. Ordnung gerechnet werden muß, dann kann auch einer der drei für Meridianstreifen, Parallelkreiszone und kreisförmige Bereiche günstigsten Übergänge \ddot{U}_M , \ddot{U}_P , \ddot{U}_K angewandt werden.

Man geht im Hinblick auf die praktisch auftretenden Fälle nicht fehl, wenn man dabei den Ellipsoidübergang für Kreisgebiete bevorzugt behandelt. Er ist als der dem Helmertschen Übergang abbildungstheoretisch entsprechende konforme Ellipsoidübergang zu betrachten. Seine Abbildungsgleichungen wurden rechenbrauchbar entwickelt. Ebenso wurden die Ausdrücke für Vergrößerungsverhältnis und Meridiankonvergenz abgeleitet.

Die nachfolgende Untersuchung der Anfängerformeln begünstigt die Wahl des Ellipsoidüberganges \ddot{U}_K für die allgemeinen Zwecke der Heeresvermessung.

Trotzdem ist es durchaus möglich, daß einseitig sehr ausgedehnte Triangulationen, die im allgemeinen in der Richtung von Meridianen oder Parallelkreisen verlaufen werden, die Verwendung der Übergänge \ddot{U}_M und \ddot{U}_P erfordern, oder daß für Spezialaufgaben \ddot{U}_I angewandt werden muß.

Der Ellipsoidübergang \ddot{U}_K erfolgt mit den Abbildungsgleichungen:

$$\delta b = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 \left(2 - t_0^2 + \eta^2 + \frac{7}{2} \eta^2 t_0^2 - \frac{1}{2} \eta^2 t_0^4 - \frac{1}{4} \eta^4 - \frac{15}{8} \eta^4 t_0^2 + \frac{3}{2} \eta^4 t_0^4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \eta^4 t_0^6 \right) \delta a \} \Delta b + \frac{3}{2} t_0 \left\{ \eta^2 \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 + \eta^2 + 2 \eta^2 t_0^2) \delta a \right\} \Delta b^2 + \\ & + \frac{t_0 \cos^2 b_0}{2} \left\{ (1 + \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta a \right\} \Delta l^2 + \frac{\cos^2 b_0}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \right. \\ & \left. - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta a \right\} \Delta b \Delta l^2 + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - 7 \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta a \right\} \Delta b^3 \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

$$\delta l = \left\{ \begin{aligned} & -\left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{3}{4} \eta^4 t_0^2 - \frac{1}{8} \eta^4 t_0^4 \right) \delta a \right\} \Delta l - \\ & - t_0 \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 \right) \delta a \right\} \Delta b \Delta l - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ (1 + 2 t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - 2 t_0^4) \delta a \right\} \Delta b^2 \Delta l + \frac{1}{6} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \right. \\ & \left. - \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta a \right\} \Delta l^3 \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Das Vergrößerungsverhältnis für den Ellipsoidübergang \ddot{U}_K lautet:

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta a \right\} \Delta b^2 + \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta a \right\} \Delta l^2 \quad \dots (107')$$

und der Ausdruck für die Meridiankonvergenz

$$tg \gamma = \left\{ \begin{aligned} & -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta a \right\} \Delta l - \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \right. \\ & \left. - \cos^4 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta a \right\} \Delta q \Delta l \end{aligned} \right\} \quad \dots (108)$$

In den Gleichungen (116), (117), (107') und (108) beziehen sich sämtliche Koeffizienten auf die konstante Breite b_0 und die Konstanten des 1. Ellipsoides.

m_0 ist gegebenenfalls so zu bestimmen, daß m im Zentralpunkt um denselben Betrag kleiner ist als 1, wie es auf dem Rande größer als 1 wird. Bei Einführung von m_0 ist in den Gleichungen (89'') und (90'') in den linearen Gliedern an Stelle von $a = \frac{1}{(a)}$: $a = \frac{m_0}{(a)}$ zu setzen.

c) Gegenüberstellung und Abschätzung der Vergrößerungsverhältnisse

Am besten geben die Ausdrücke für das Vergrößerungsverhältnis über die bei Ellipsoidübergängen auftretenden Verzerrungen Aufschluß, da auch die Bildkrümmungen und damit die Azimutreduktionen bei konformen Abbildungen vom Vergrößerungsverhältnis abhängig sind.

Es folgt nun eine Zusammenstellung der bei den betrachteten Abbildungen auftretenden Vergrößerungsverhältnisse. Dabei werden betrachtet:

- Der Helmertsche Ellipsoidübergang nach den neu entwickelten Formeln (18), (19) und (45),
- der Helmertsche Übergang nach den Formeln (c) von Hristow, (die Ausdrücke für a und b werden nur des Interesses halber eingesetzt),
- der Ellipsoidübergang \ddot{U}_I nach den Gleichungen (62), (63) und (65),
- der konforme Übergang \ddot{U}_{II} der auf Glieder 2. Ordnung der analytischen Abbildungsfunktion beschränkten Gleichungen (109) und 110),
- der günstigste konforme Ellipsoidübergang für Meridianstreifen \ddot{U}_M nach Gleichung (101'),
- der günstigste Ellipsoidübergang für Parallelkreiszonen \ddot{U}_P nach Gleichung (105'),
- der günstigste Ellipsoidübergang für kreisförmige Gebiete \ddot{U}_K nach den Gleichungen (116), (117) und (107').

Es ist:

$$a) \ddot{U}_H: a = 1 + \frac{\cos^2 b_0}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2$$

$$b = 1 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (3 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2$$

$$b) \ddot{U}_H: a = 1 + 12\eta^2 t_0 \cos^2 b_0 \delta \alpha \Delta b + 3 \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \Delta b^2 + \frac{\cos^2 b_0}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \cos^2 b_0 (1 - 5t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2$$

$$b = 1 + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (3 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2$$

$$c) \ddot{U}_I: m = 1 + t_0 \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta^2 t_0^2 \right) \delta \alpha \right\} \Delta b + \frac{1}{2} \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 - 2t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b^2$$

$$d) \ddot{U}_{II}: m = 1 + \frac{1}{2} \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 - 2t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 - \frac{\sin^2 b_0}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta l^2$$

$$e) \ddot{U}_M: m = 1 + \cos^2 b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2$$

$$f) \ddot{U}_P: m = 1 + \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2$$

$$g) \ddot{U}_K: m = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta b^2 + \frac{\cos^2 b_0}{2} \left\{ \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2) \delta \alpha \right\} \Delta l^2$$

Man sieht, daß der Ellipsoidübergang b) im Vergleich zu a) ungünstiger ist, was auf die wiederholt erwähnten Vernachlässigungen zurückzuführen ist; b) bleibt daher außer Betracht. Ferner ist ersichtlich, daß der Ellipsoidübergang c) wegen seines linearen Gliedes sehr große Längenverzerrungen hervorrufen kann. Wenn nicht die Azimuttreue als maßgebende Eigenschaft angesehen wird, oder wenn es sich um größere Dreiecksnetze handelt oder die Netze nicht in der Nähe des Äquators liegen, muß \ddot{U}_I als allgemeiner Übergang ausscheiden.

Der Ellipsoidübergang d) steht hinsichtlich der Längenverzerrungen zwischen c) einerseits und e) bis g) andererseits. Die letzteren drei Übergänge sind verzerrungsmäßig gleichwertig, da jeder für seinen Anwendungsbereich im definierten Sinne am günstigsten ist. Im Äquator $b_0 = 0$ sind die Übergänge \ddot{U}_I , \ddot{U}_{II} und \ddot{U}_P identisch.

Bei allen konformen Ellipsoidübergängen wird durch Einführung von m_0 das Vergrößerungsverhältnis auf die Hälfte reduziert. Das Vergrößerungsverhältnis von \ddot{U}_H ist kleiner, als bei den konformen Übergängen.

Das Vergrößerungsverhältnis hängt stark von der geographischen Breite des Zentralpunktes ab. Es wird für $b_0 = 0^\circ, 45^\circ, 55^\circ, 65^\circ$ und 90° sowie für den extremsten Übergang vom Ellipsoid Plessis nach Clarke 1880 mit $\frac{\delta a}{a} = +0,00027, \delta a = +0,00017$ abgeschätzt. Ferner wird grundsätzlich $\Delta b = 10^\circ, \Delta l \cos b = 10^\circ$ und die Strecke $s = 100$ km angenommen. Es handelt sich also um Extremwerte für Streifen, Zonen und Kreise mit etwa 2200 km Durchmesser.

$b_0 =$	0°	45°	55°	65°	90°	Bemerkungen
Ellipsoid-Übergang	Längenverzerrungen auf 100 km					
	m	m	m	m	m	
a) $\ddot{U}-H$	$a = 0,10$ $b = -0,24$	$a = 0,27$ $b = 0,10$	$a = 0,33$ $b = 0,22$	$a = 0,38$ $b = 0,32$	$a = 0$ $b = 0,45$	*) Diese Werte werden durch Einführung von m_0 auf die Hälfte reduziert.
c) $\ddot{U}-I$	0,30*)	7,54*)	11,70*)	19,32*)	∞	
d) $\ddot{U}-II$	0,30*)	0,82*)	1,02*)	1,16*)	∞	
e) $\ddot{U}-M$	0,30*)	0,82*)	1,00*)	1,15*)	nicht definiert	
f) $\ddot{U}-P$	0,30*)	0,82*)	1,00*)	1,15*)	nicht definiert	
g) $\ddot{U}-K$	0,30*)	0,82*)	1,00*)	1,15*)	0,67*)	

Die Tabelle zeigt, daß die Längenverzerrungen des Helmertschen Ellipsoidüberganges die geringsten sind. Dieser Vorteil fällt gegenüber den Vorzügen der konformen Abbildungen nicht maßgebend ins Gewicht. Denn nach Voraussetzung kommt es nicht in erster Linie auf die Größe der Längenverzerrungen, sondern auf die Konformität, also auf die Unabhängigkeit des Vergrößerungsverhältnisses von der Fortschrittsrichtung und auf die Größe der Winkelverzerrungen und der Azimutreduktionen an. Diese Forderungen sind aber von den Übergängen \ddot{U}_M, \ddot{U}_K und \ddot{U}_P auf überhaupt günstigste Weise erfüllt.

d) Gegenüberstellung und Abschätzung der Meridiankonvergenzen

Die Meridiankonvergenz gibt Aufschluß darüber, in welchem Maße die Forderung nach möglicher Erhaltung der Azimute von den einzelnen Übergängen erfüllt wird. Der Ellipsoidübergang \ddot{U}_I gibt sämtliche Azimute unverändert wieder, allerdings auf Kosten der Längenverzerrungen und damit auch der Bildkrümmungen. Im Ausdruck für die Meridiankonvergenz tritt bei den Ellipsoidübergängen $\ddot{U}_{II}, \ddot{U}_M, \ddot{U}_P, \ddot{U}_K$ und \ddot{U}_H dasselbe lineare Glied auf. Lediglich die Glieder 2. Ordnung begründen die Unterschiede in der Größe der Meridiankonvergenz der einzelnen Übergänge.

Die Ausdrücke für die Meridiankonvergenz lauten bei den verschiedenen Ellipsoidübergängen:

$$\ddot{U}_I: \gamma \equiv 0$$

$$\ddot{U}_{II}: \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l$$

$$\ddot{U}_M: \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \cos^2 b_0 \left\{ (2 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (2 - 2t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l$$

$$\ddot{U}_P: \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - t_0 \sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l$$

$$\ddot{U}_K: \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \cos b_0 \left\{ (1 + t_0^2) \frac{\delta a}{a_1} - \cos^2 b_0 (1 - t_0^2 - t_0^4) \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l$$

$$\ddot{U}_H: \gamma = -\sin b_0 \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \left(1 - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^2 t_0^2}{2} \right) \delta \alpha \right\} \Delta l - \frac{1}{3} \cos b_0 (4 + 3t_0^2) \left\{ \frac{\delta a}{a_1} + \sin^2 b_0 \delta \alpha \right\} \Delta b \Delta l$$

Bei der Abschätzung von γ werden dieselben Verhältnisse wie bei der Abschätzung des Vergrößerungsverhältnisses angenommen. Es ist $\frac{\delta a}{a_1} = +0,00027$, $\delta \alpha = 0,00017$, $\Delta b = \Delta l \cos b_0 = 10^0$ und es werden $b_0 = 0^0, 45^0, 55^0$ und 65^0 gewählt. Damit ergeben sich:

$b_0 =$	0^0	45^0	55^0	65^0
Ellipsoid-Übergang	Meridiankonvergenz γ'' (Sek. A. T.)			
\ddot{U}_I	0	0	0	0
\ddot{U}_{II}	0	-12",8	-20",1	-32",1
\ddot{U}_M	-1",25	-18",4	-29",1	-48",9
\ddot{U}_P	0	-15",0	-25",0	-43",8
\ddot{U}_K	-0",62	-16",7	-27",1	-46",3
\ddot{U}_H	-2",25	-18",0	-29",3	-47",3

Bezüglich der Meridiankonvergenz sind die Abbildungen \ddot{U}_I und \ddot{U}_{II} mit Abstand die günstigsten, darauf folgen \ddot{U}_P und \ddot{U}_K . Obwohl in der Praxis die Extremwerte für $\frac{\delta a}{a_1}$ und $\delta \alpha$ im allgemeinen nicht annähernd erreicht werden und die übrigen extremen Annahmen kaum vorkommen, läßt die obige Tabelle doch erkennen, welche große Bedeutung der Meridiankonvergenz bei Ellipsoidübergängen zukommt. Das auf ein anderes Ellipsoid umgerechnete große Dreiecksnetz erleidet erhebliche Verzerrungen und vor allem Verdrehungen, die dazu führen können, daß die astronomisch-geodätischen Eigenschaften des Netzes gründlich gestört werden.

e) Wahl des Zentralpunktes des Ellipsoidüberganges mit Beispiel

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß die Verzerrungen der verschiedenen Ellipsoidübergänge beachtliche Beträge erreichen können. Der Ellipsoidübergang, als Ersatz für eine völlige Neuberechnung gedacht, ist theoretisch nur richtig, wenn der Triangulationsnullpunkt als Zentralpunkt eingeführt wird. Seine geographischen Koordinaten bleiben dabei im allgemeinen unverändert, bzw. können sie auch eine Parallelverschiebung erfahren, deren Auswirkung im Abschnitt 10 untersucht wird.

Dabei ergeben jene Ableitungen die Möglichkeit, die Formeln für Ellipsoidübergänge und Anfelderung zu kombinieren und damit die Parallelverschiebung in den Ellipsoidübergang einzugliedern. Die Verzerrungen hängen bei gegebenen Ellipsoiden von den Koordinatenunterschieden der umzuformenden Punkte gegenüber dem Zentralpunkt und außerdem von dessen Breite ab.

Wird nun ein beliebiger Punkt als Zentralpunkt eines Ellipsoidüberganges gewählt, dann bleiben seine geographischen Koordinaten unverändert, während der wirkliche Zentralpunkt eine Verschiebung erfährt; außerdem erhält der wirkliche Zentralpunkt eine Meridiankonvergenz. Dadurch wird ein auf ein anderes Ellipsoid überführtes Dreiecksnetz willkürlich parallel verschoben, gedreht und leicht deformiert. Wenn nun dem Ellipsoidübergang eine Anfelderung folgt, dann wird diese im wesentlichen als Parallelverschiebung, Drehung und Maßstabsänderung zu erklärende willkürliche Netzverschiebung größtenteils wieder aufgehoben. Völlig unschädlich wird unter dieser Voraussetzung eine willkürliche Zentralpunktwahl nur im engeren Rahmen, da die Verzerrungen der Ellipsoidübergänge von der Lage des Zentralpunktes abhängen. Für relativ kleine Gebiete bestehen daher bei nachfolgender Helmertscher Anfelderung gegen die willkürliche Zentralpunktauswahl keine praktischen Bedenken. Bei ausgedehnten Dreiecksnetzen, langen Anfelderungsnähten und bei weit vom Triangulationshauptpunkt entfernt gelegenen Netzteilen, wirken sich bereits die Verzerrungen aus, so daß hier im allgemeinen die wirklichen Triangulationshauptpunkte als Zentralpunkte der Ellipsoidübergänge eingeführt werden müssen.

Beispiel:

Folgendes im Rahmen eines Einsatzes durchgerechnete Beispiel ist geeignet, die Abhängigkeit des Ellipsoidüberganges von der Wahl des Zentralpunktes praktisch nachzuweisen und die obigen Behauptungen zu bestätigen.

In einem Gebiet von etwa 200 km Nord-Süd- und rund 80 km Ost-Westausdehnung waren in zwei benachbarten Dreiecksnetzen 19 gemeinsame trigonometrische Punkte auf zwei verschiedenen Ellipsoiden gegeben. Das eine Netz war auf das Bezugsellipsoid des anderen Dreiecksnetzes zu überführen und anschließend nach dem Helmertschen Verfahren über geographische Koordinaten an das als fest zu betrachtende Netz anzuschließen. Es handelt sich dabei um eine Aufgabe örtlichen Charakters zur Schaffung einer Überlappung.

Als Zentralpunkt des Ellipsoidüberganges wurde ein etwa im Schwerpunkt der identischen Punkte gelegener willkürlicher Punkt A gewählt. Der Ellipsoidübergang A wurde nach den Hristowschen Formeln gerechnet, und anschließend erfolgte die Helmertsche Anfelderung. Dabei ergaben sich folgende Konstanten:

Parallelverschiebung	$\delta b_0 = -1'',7690$	$\pm 0,0061$
	$\delta l_0 = +0'',4899$	$\pm 0,0086$
Drehung	$\delta A_0 = -3'',3850$	$\pm 0,5627$
Maßstabsänderung	$\frac{\delta s}{s} = -0,00000239$	$\pm 2,7 \cdot 10^{-6}$
	$[prr] = 0,04694$	

Nach Abschluß des Einsatzes wurden die Berechnungen mit dem wirklichen Triangulationshauptpunkt B als Zentralpunkt wiederholt. Der neue Zentralpunkt B für den Ellipsoidübergang liegt $3^{\circ} 04' 35'',60$ weiter südlich und $5^{\circ} 27' 12'',00$ weiter ostwärts als A . Der Neuberechnete Ellipsoidübergang B erbrachte für den willkürlichen Zentralpunkt A die Parallelverschiebung

$$\delta b_A = +0'',9809$$

$$\delta l_A = -3'',3546,$$

während der Triangulationshauptpunkt B beim Ellipsoidübergang A die Verschiebungen erhielt

$$\delta b_B = -1'',137$$

$$\delta l_B = +3'',097.$$

Die Anfelderung mit dem wirklichen Triangulationshauptpunkt *B* als Zentralpunkt ergab

Parallelverschiebung

$$\delta b_0 = -2'',6457 \quad \pm 0,0488$$

Drehung

$$\delta l_0 = +3'',6463 \quad \pm 0,0656$$

Maßstabsänderung

$$\delta A_0 = -1'',3312 \quad \pm 0,5309$$

$$\frac{\delta s}{s} = -0,00000217 \quad \pm 2,7 \cdot 10^{-6}$$

$$[p_{VV}] = 0,04683$$

Das Beispiel bietet folgende Vergleichsmöglichkeiten:

1. Vergleichung der Ellipsoidübergänge

Die Helmertschen Ellipsoidübergänge (*A*) mit dem willkürlichen Zentralpunkt und (*B*) mit dem Triangulationshauptpunkt als Zentralpunkt erbrachten folgende in Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnisse und Unterschiede:

Ergebnisse der Ellipsoidübergänge

Punkt Nr.	A*		B		$\Delta \delta b''$	$\Delta \delta l''$	$\Delta \delta b$ m	$\Delta \delta l$ m	$S = \sqrt{(\Delta \delta b_m)^2 + (\Delta \delta l_m)^2}$ m
	$\delta b'' - 0'',981$	$\delta l'' + 3'',355$	$\delta b''$	$\delta l''$					
1	-2,774	+3,898	-2,781	+3,838	-0,007	-0,060	-0,22	-1,34	1,36
2	-2,771	+3,930	-2,771	+3,881	$\pm 0,000$	-0,049	-	-1,09	1,09
3	-2,767	+3,913	-2,775	+3,864	-0,008	-0,049	-0,25	-1,09	1,12
4	-2,759	+3,906	-2,757	+3,871	+0,002	-0,035	+0,06	-0,78	0,78
5	-2,747	+3,909	-2,754	+3,869	-0,007	-0,040	-0,22	-0,89	0,92
6	-2,720	+3,916	-2,734	+3,881	-0,014	-0,035	-0,43	-0,78	0,89
7	-2,737	+3,879	-2,736	+3,857	+0,001	-0,022	+0,03	-0,48	0,48
8	-2,703	+3,859	-2,705	+3,849	-0,002	-0,010	-0,06	-0,22	0,23
9	-2,707	+3,840	-2,700	+3,842	+0,007	+0,002	+0,22	+0,04	0,22
10	-2,695	+3,792	-2,708	+3,791	-0,013	-0,001	-0,40	-0,02	0,40
11	-2,711	+3,839	-2,699	+3,853	+0,012	+0,014	+0,37	+0,31	0,48
12	-2,708	+3,827	-2,710	+3,837	-0,002	+0,010	-0,06	+0,22	0,23
13	-2,730	+3,756	-2,744	+3,768	-0,014	+0,012	-0,43	+0,26	0,50
14	-2,747	+3,797	-2,751	+3,819	-0,004	+0,022	-0,01	+0,48	0,48
15	-2,759	+3,745	-2,773	+3,773	-0,014	+0,028	-0,43	+0,61	0,75
16	-2,777	+3,782	-2,780	+3,818	-0,003	+0,036	-0,09	+0,78	0,78
17	-2,783	+3,848	-2,774	+3,897	+0,009	+0,049	+0,27	+1,06	1,09
18	-2,778	+3,777	-2,779	+3,825	-0,001	+0,048	-0,03	+1,03	1,03
19	-2,774	+3,740	-2,784	+3,781	-0,010	+0,041	-0,31	+0,88	0,93

Die bei *A* errechneten Werte wurden um $\delta b_A = -0'',981$ und $\delta l_A = +3'',355$ verschoben, um sie mit den Werten von *B* vergleichbar zu machen.

Die Unterschiede zwischen den beiden Ellipsoidübergängen wurden in Abbildung 2 als Vektoren aufgetragen.

Nach Abbildung 2 deuten die Verschiebungsvektoren in der Hauptsache auf eine kleine Verdrehung um den willkürlichen Zentralpunkt *Z* hin; als Ursache für diese Verdrehung ist hauptsächlich die Meridiankonvergenz des Helmertschen Ellipsoidüberganges zwischen den Zentralpunkten der beiden Übergänge anzusehen. Berechnet man diese Meridiankonvergenz γ , dann ergibt sich

$$\gamma = -2'',40$$

Die überschlägige Ermittlung der Verdrehung aus den Verschiebungen (Abb. 2) ergibt etwa denselben Betrag für γ .

2. Vergleich der ausgeglichenen Anfelderungskonstanten

Durch Subtraktion der Ergebnisse der beiden Anfelderungen erhält man

$$\Delta b_0 = \delta b_{0(B)} - \delta b_{0(A)} = -0'',8767$$

$$\Delta l_0 = \delta l_{0(B)} - \delta l_{0(A)} = +3'',1564$$

$$\Delta A_0 = \delta A_{0(B)} - \delta A_{0(A)} = +2'',0538$$

$$\Delta s = \frac{\delta s}{s(B)} - \frac{\delta s}{s(A)} = -2,17 \cdot 10^{-7}$$

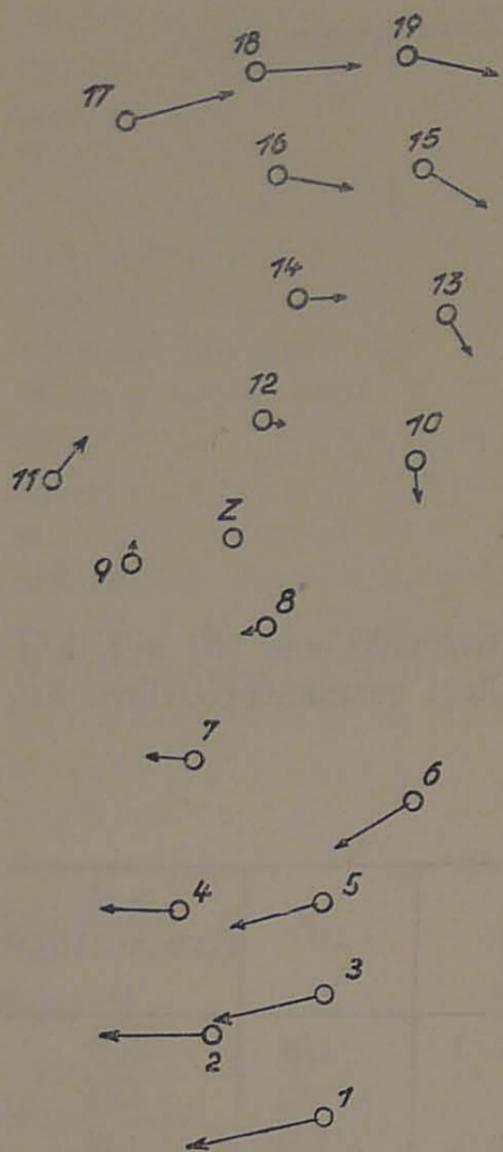
Δb_0 und Δl_0 stimmen annähernd und innerhalb der mittleren Fehler mit den Werten δb_A und δl_A , δA_0 mit γ überein, während die Änderung der beiden Maßstabsänderungen gering ist. Demnach unterscheiden sich die Anfelderungskonstanten im wesentlichen durch eine Parallelverschiebung und Drehung, welche von der Art des Ellipsoidüberganges abhängen.

3. Vergleich der Restklaffungen der Anfelderungen

Die Restklaffungen geben eindeutig Auskunft über die Auswirkung der unterschiedlichen Verzerrungen der Ellipsoidübergänge auf die Anfelderungsergebnisse. Tabelle 2 enthält die Restklaffungen der beiden Anfelderungen.

Die Unterschiede der Restklaffungen der beiden Anfelderungen sind gering.

Die Vergleiche 1. bis 3. bestätigen die Überlegungen bezüglich der Auswahl der Zentralpunkte der Ellipsoidübergänge.



Maßstab 1 : 2 000 000

Maßstab der Verschiebungen 1 : 100

Abbildung 2

Restliche Klaffungen nach der Anfelderung

Punkt Nr.	A					B				
	Breite U		Länge V		S= $\sqrt{U^2 + V^2}$	Breite U		Länge V		S= $\sqrt{U^2 + V^2}$
	"	m	"	m		m	"	m	"	
1	+0,0420	+1,30	+0,0188	+0,41	1,36	+0,0414	+1,28	+0,0184	+0,41	1,34
2	+0,0269	+0,83	-0,0144	-0,31	0,89	+0,0270	+0,83	-0,0139	-0,31	0,89
3	+0,0342	+1,06	-0,0142	-0,31	1,10	+0,0341	+1,05	-0,0140	-0,31	1,10
4	+0,0096	+0,30	-0,0044	-0,10	0,32	+0,0104	+0,32	-0,0045	-0,10	0,33
5	+0,0121	+0,37	-0,0218	-0,48	0,61	+0,0117	+0,36	-0,0217	-0,48	0,60
6	-0,0073	-0,22	-0,0503	-1,10	1,12	-0,0067	-0,21	-0,0494	-1,09	1,10
7	-0,0119	-0,37	-0,0006	-0,01	0,37	-0,0117	-0,36	-0,0000	0	0,36
8	-0,0418	-1,29	-0,0052	-0,11	1,29	-0,0426	-1,31	-0,0056	-0,12	1,31
9	-0,0531	-1,64	+0,0177	+0,39	1,69	-0,0527	-1,63	+0,0174	+0,38	1,67
10	-0,0368	-1,13	+0,0255	+0,56	1,26	-0,0369	-1,14	+0,0255	+0,56	1,24
11	-0,0581	-1,79	+0,0136	+0,30	1,81	-0,0571	-1,76	+0,0132	+0,28	1,78
12	-0,0404	-1,25	-0,0022	-0,05	1,25	-0,0404	-1,25	-0,0017	-0,03	1,25
13	-0,0007	-0,02	+0,0366	+0,80	0,80	-0,0018	-0,06	+0,0375	+0,82	0,82
14	+0,0004	+0,01	+0,0066	+0,14	0,14	+0,0002	+0,01	+0,0062	+0,13	0,13
15	+0,0240	+0,74	+0,0285	+0,62	0,97	+0,0247	+0,76	+0,0291	+0,63	0,99
16	+0,0263	+0,81	+0,0054	+0,12	0,82	+0,0269	+0,83	+0,0047	+0,10	0,83
17	+0,0155	+0,48	-0,0543	-1,19	1,28	+0,0154	+0,47	-0,0558	-1,21	1,29
18	+0,0239	+0,74	-0,0036	-0,08	0,74	+0,0240	+0,74	-0,0045	-0,10	0,75
19	+0,0349	+1,08	+0,0182	+0,40	1,15	+0,0335	+1,03	+0,0188	+0,41	1,10

10. Ableitung der konformen Anfelderungsformeln

a) Problemstellung

Ein flächenhaft auf einem Teil eines Rotationsellipsoides angelegtes Dreiecksnetz kann auf demselben Ellipsoid nicht ohne Verzerrungen parallel verschoben, gedreht und in seinem Maßstab geändert werden, wenn es sich nicht um eine Parallelverschiebung in Ost-West-Richtung handelt. M. a. W. kann eine Ellipsoidkalotte im allgemeinen nicht spannungsfrei an anderer Stelle desselben Ellipsoides wieder ausgebreitet werden. So gering diese Verzerrungen in Anbetracht der langsamen Krümmungsänderung des Erdellipsoides in der Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden Fälle auch sein mögen, so ist dieses Problem doch nicht ohne theoretisches und praktisches Interesse.

Es handelt sich nun darum, eine Abbildung eines Ellipsoides auf sich selbst zu finden, bei der die für geodätische Zwecke günstigsten Verzerrungen auftreten. Es ist naheliegend, auch hier wieder konforme Abbildungen zu betrachten und in zweiter Linie zu fordern, daß das Vergrößerungsverhältnis auf dem Rande des Abbildungsbereiches konstant ist.

Helmert hat in seiner Arbeit über Lotabweichungen¹⁷⁾ die Aufgabe gelöst, die Änderungen der geographischen Koordinaten δb δl des Endpunktes einer von einem Zentralpunkt unter dem Azimut A ausgehenden geodätischen Strecke s durch die Änderungen der Koordinaten des Zentralpunktes δb_0 , δl_0 , Azimutänderungen δA_0 und Maßstabsänderung $\frac{\delta s}{s}$ auszudrücken. Bei seinen Entwicklungen werden, wie beim Ellipsoidübergang, s und A als Konstanten behandelt. Dadurch entsteht eine Abbildung eines Ellipsoides auf sich selbst, bei der die geodätischen Abstände vom Zentralpunkt proportional geändert werden und das System um δA_0 verdreht und parallel verschoben wird. Es handelt sich bei dieser Lösung des Problems also um eine *mittabstandsproportionale Azimutalprojektion*, der die als bekannt vorauszusetzenden Verzerrungen anhaften.

Hier wird die konforme Abbildung abgeleitet, welche für kreisförmige Bereiche die geringsten Bildkrümmungen hervorruft. Dabei wird wieder in Reihen bis zur 3. Ordnung der Koordinatenunterschied entwickelt, und es werden dieselben Vernachlässigungen zugelassen, wie bei den Ellipsoidübergängen. Insbesondere werden die Änderungen der geodätischen Grundlagen als so klein vorausgesetzt, daß ihre 2. Potenzen vernachlässigt werden können.

b) Ableitung der allgemeinen Formeln für das Vergrößerungsverhältnis

Das zu verändernde Netz hat die Koordinaten b, q, l . Es soll durch konforme Abbildung in das Netz mit den Koordinaten B, Q, L übergehen.

Die Koordinaten werden in jedem System auf einen Zentralpunkt mit den Koordinaten q_0, l_0 bzw. Q_0, L_0 bezogen.

Allgemein gesehen vollzieht sich die konforme Abbildung des isometrischen Systems q, l auf das System Q, L durch eine analytische Funktion.

$$Q + iL = f(q + il) \dots \dots \dots (118)$$

oder

$$Z = f(z)$$

$f(z)$ wird nun an der Stelle $z_0 = q_0 + il_0$ in eine Reihe entwickelt. Es folgt:

$$Z = f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \Delta z + f''(z_0) \frac{\Delta z^2}{2} + f'''(z_0) \frac{\Delta z^3}{6} + \dots$$

Der Zentralpunkt $z = z_0 = z = O$ bildet sich als Punkt $Z = Z_0 = Q_0 + iL_0$ ab.

Man erhält daher

$$\Delta Z = f'(z_0) \Delta z + f''(z_0) \frac{\Delta z^2}{2} + f'''(z_0) \frac{\Delta z^3}{6} + \dots \dots \dots (119)$$

¹⁷⁾ Helmert: Veröff. des Kgl. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1886, Heft I, Lotabweichungen.

Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} f'(z_0) &= w_1 = u_1 + i v_1 \\ f''(z_0) &= w_2 = u_2 + i v_2 \\ f'''(z_0) &= w_3 = u_3 + i v_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (120)$$

Ferner wird festgesetzt:

$$\left. \begin{aligned} Q &= q + \delta q; & Q_0 &= q_0 + \delta q_0 \\ L &= l + \delta l; & L_0 &= l_0 + \delta l_0 \\ B &= b + \delta b; & B_0 &= b_0 + \delta b_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (121)$$

Aus den Gleichungen (119) und (120) ergibt sich durch Trennung des reellen vom imaginären Teil entsprechend den Gleichungen (89) und (90) mit u und v als vorerst noch unbestimmten Koeffizienten:

$$\Delta Q = u_1 \Delta q - v_1 \Delta l + \frac{1}{2} \{ u_2 (\Delta q^2 - \Delta l^2) - 2 v_2 \Delta q \Delta l \} + \frac{1}{6} \{ u_3 (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) - v_3 (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) \} \dots \dots (122)$$

$$\Delta L = v_1 \Delta q + u_1 \Delta l + \frac{1}{2} \{ 2 u_2 \Delta q \Delta l + v_2 (\Delta q^2 - \Delta l^2) \} + \frac{1}{6} \{ u_3 (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) + v_3 (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) \} \dots \dots (123)$$

Die Gleichungen (122) und (123) erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial l}; \quad \frac{\partial Q}{\partial l} = - \frac{\partial L}{\partial q}$$

Es sind nun folgende Bedingungen zu stellen:

1. Das Vergrößerungsverhältnis m sei in einer Merkatorprojektion auf konzentrischen Kreisen mit dem Zentralpunkt als Mittelpunkt konstant. Im Ausdruck für m müssen also die linearen Glieder verschwinden und die Koeffizienten der quadratischen Glieder gleich sein.
2. Das Bild des Nullmeridians habe für $\Delta q = 0$ das Azimut δA_0 , im Uhrzeigersinn positiv gezählt.
3. Für $\Delta Q = 0, \Delta L = 0$ d. h. für $\Delta q = \delta q_0, \Delta l = \delta l_0$ ist das Vergrößerungsverhältnis gleich m_0 .
4. Wenn $\delta q_0, \delta l_0, \delta A_0, \frac{\delta s}{s}$ zu Null werden, müssen die Gleichungen (122) und (123) identisch erfüllt sein.

Daraus folgt, daß v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 mit diesen Verbesserungen verschwinden müssen und daß $u_1 = 1 + \Delta u$ ist, wobei Δu ebenfalls in den Verbesserungen homogen ist.

Für die Koeffizienten ergeben sich aus der Definition sofort folgende Beziehungen.

Das Azimut im System L, Q errechnet sich aus

$$tg A = \frac{dL}{dQ} = \frac{\frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial l} dl}{\frac{\partial Q}{\partial q} dq + \frac{\partial Q}{\partial l} dl}$$

Nach der 2. Bedingung hat A für $l = \text{konst.}$ ($\delta l = 0$) im Bildpunkte von $\Delta q = 0, \Delta l = 0$ das Azimut A . Damit folgt sofort

$$tg \delta A_0 = \frac{V_1}{u_1} \dots \dots \dots (124)$$

Das Vergrößerungsverhältnis hat wieder folgende Form:

$$m^2 = \frac{P^2}{P^2} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (125)$$

Dabei ist für dasselbe Ellipsoid

$$\left. \begin{aligned} P &= N_2 \cos B \\ p &= N_1 \cos b \\ N_1 &= \frac{c}{V_1} \\ N_2 &= \frac{c}{V_2} \\ c &= \frac{a^2}{b} \\ V_1^2 &= 1 + e'^2 \cos^2 b = 1 + \eta_1^2 \\ V_2^2 &= 1 + e'^2 \cos^2 B = 1 + \eta_2^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (126)$$

Durch Reihenentwicklung ergibt sich aus der Beziehung für V_1^2 für eine Änderung von b um δb

$$V_2^2 = V_1^2 - 2\eta_1^2 t_1 \delta b - \eta_1^2 (1 - t_1^2) \delta b^2 + \frac{4}{3} \eta_1^2 t_1 \delta b^3 \dots \dots \dots (127)$$

Um den Ausdruck für das Vergrößerungsverhältnis zu finden, ist $\frac{P}{P^2}$ in eine Reihe zu entwickeln. Es ist zweckmäßig, zunächst $\frac{P^2}{P^2}$ zu entwickeln.

$$\frac{P^2}{P^2} = \frac{V_2^2 \cos^2 b}{V_1^2 \cos^2 B} \text{ Dabei ist}$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = 1 - \frac{2\eta_1^2 t_1}{V_1^2} \delta b - \frac{\eta_1^2 (1 - t_1^2)}{V_1^2} \delta b^2 \text{ und}$$

$$\frac{\cos^2 b}{\cos^2 B} = \frac{\cos^2 b}{\cos^2 b - 2 \sin b \cos b \delta b - (\cos^2 b - \sin^2 b) \delta b^2} \text{ oder}$$

$$\frac{\cos^2 b}{\cos^2 B} = \frac{1}{1 - 2t_1 \delta b - (1 - t_1^2) \delta b^2} = 1 + 2t_1 \delta b + (1 + 3t_1^2) \delta b^2$$

Damit wird

$$\frac{P^2}{P^2} = 1 + \frac{2t_1}{V_1^2} \delta b + \frac{(1 + 3t_1^2)}{V_1^2} \delta b^2 \text{ und } \frac{P}{P} = 1 + \frac{t_1}{V_1^2} \delta b + (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2 + 3\eta_1^2 t_1^2) \frac{\delta b^2}{2V_1^4} \quad (128)$$

Ebenso folgt

$$\frac{P}{P} = 1 - \frac{t_1}{V_1^2} \delta b - (1 + \eta_1^2 + 3\eta_1^2 t_1^2) \frac{\delta b^2}{2V_1^4} \dots \dots \dots (129)$$

Nach Voraussetzung ist das Glied mit δb^2 , das nur aus allgemeinem Interesse hier entwickelt wurde, zu vernachlässigen. Nun ist $\frac{t_1}{V_1^2}$ in eine Reihe für Δb zu entwickeln. Nach (44) ist

$$\frac{t_1}{V_1^2} = \frac{t_{1,0}}{V_{1,0}^2} + (1 + t_{1,0}^2 - \eta_{1,0}^2 + \eta_{1,0}^2 t_{1,0}^2) \Delta b + t_{1,0} (1 + t_{1,0}^2) \Delta b^2$$

Der Einfachheit halber werden nur die Indices mitgeführt, die zur Vermeidung von Verwechslungen benötigt werden. Wird noch mit Hilfe der Gleichung (52) δq eingeführt, dann folgt

$$\frac{t_1}{V_1^2} = \frac{t_{1,0}}{V_{1,0}^2} + \cos b_0 (1 + t_{1,0}^2 + 2\eta_{1,0}^2 t_{1,0}^2) \Delta q + \frac{1}{2} t_{1,0} \Delta q^2 \dots \dots \dots (130)$$

Nun ist noch δb zu entwickeln. Nach (121) ist

$$\left. \begin{aligned} \delta b &= \Delta B - \Delta b + \delta b_0 \\ \delta q &= \Delta Q - \Delta q + \delta q_0 \\ \delta l &= \Delta L - \Delta l + \delta l_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (131)$$

Ferner ist nach Gleichung (53)

$$\Delta B = V_{2,0}^2 \cos B_0 \Delta Q - \frac{1}{2} V_{2,0}^2 \cos^2 B_0 T_0 (1 + 3\eta_{2,0}^2) \Delta Q^2 + \dots$$

$$\Delta b = V_{1,0}^2 \cos b_0 \Delta q - \frac{1}{2} V_{1,0}^2 \cos^2 b_0 t_0 (1 + 3\eta_{1,0}^2) \Delta q^2 + \dots$$

Die sich auf das 2. Ellipsoid beziehenden Größen sind nun durch die des 1. Systems auszudrücken. Es ist

$$V_{2,0}^2 = V_{1,0}^2 - 2\eta_{1,0}^2 t_0 \delta b_0$$

$$\cos B_0 = \cos b_0 - \sin b_0 \delta b_0 = \cos b_0 (1 - t_0 \delta b_0)$$

$$\cos_2 B_0 = \cos^2 b_0 (1 - 2t_0 \delta b_0)$$

$$T_0 = t_0 + \frac{1}{\cos^2 b_0} \delta b_0$$

$$V_{2,0}^2 \cos B_0 = V_{1,0}^2 \cos b_0 - \sin b_0 (1 + 3 \eta_{1,0}^2) \delta b_0$$

$$V_{2,0}^2 \cos^2 B_0 = V_{1,0}^2 \cos^2 b_0 - 2 t_0 (1 + 2 \eta_{1,0}^2) \cos^2 b_0 \delta b_0$$

$$V_{2,0}^2 \cos^2 B_0 T_0 (1 + 3 \eta_{2,0}^2) = \cos^2 b_0 \{ t_0 + 4 \eta^2 t_0 - 3 \eta^4 t_1 - \delta b_0 (-1 + t_0^2 - 4 \eta^2 + 12 \eta^2 t_0^2 - 3 \eta^4 + 15 \eta^4 t_0^2) \}$$

Setzt man diese Beziehungen oben ein und berücksichtigt die Gleichung (122), dann folgt

$$\Delta B = u_1 \{ \cos b_0 V_1^2 - \sin b_0 (1 + 3 \eta^2) \delta b_0 \} \Delta q - r_1 \cos b_0 V_1^2 \Delta l + \frac{1}{2} \{ u_2 \cos b_0 V_1^2 -$$

$$- u_1^2 \cos^2 b_0 [t_0 + 4 \eta^2 t_0 + 3 \eta^4 t_0 + (1 - t_0^2 + 4 \eta^2 - 12 \eta^2 t_0^2 + 3 \eta^4 - 15 \eta^4 t_0^2) \delta b_0] \} \Delta q^2 -$$

$$- \{ r_2 \cos b_0 V_1^2 - u_1 r_1 \cos^2 b_0 (t_0 + 4 \eta^2 t_0 + 3 \eta^4 t_0) \} \Delta q \Delta l - \frac{1}{2} u_2 \cos b_0 V_1^2 \Delta l^2$$

Nun ist

$$\delta b = \Delta B - \Delta b + \delta b_0 = \delta b_0 + \left\{ \begin{aligned} & \Delta u_1 \cos b_0 V_1^2 - \sin b_0 (1 + 3 \eta^2) \delta b_0 \} \Delta q - \\ & - r_1 \cos b_0 V_1^2 \Delta l + \frac{1}{2} \cos b_0 \left\{ u_2 - 2 \sin b_0 \Delta u - \cos b_0 (1 - t_0^2) \delta b_0 \right\} \Delta q^2 - \\ & - \frac{1}{2} u_2 \cos b_0 \Delta l^2 + \cos b_0 \left\{ r_1 \sin b_0 - r_2 \right\} \Delta q \Delta l \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Setzt man (132) und (130) in (129) ein, dann folgt:

$$\frac{P}{p} = 1 - \frac{t_0}{V_1^2} \delta b_0 - \cos b_0 (\delta b_0 + \Delta u t_0) \Delta q + r_1 \sin b_0 \Delta l - \frac{1}{2} \cos b_0 \left\{ 2 \cos b_0 \Delta u - \right.$$

$$\left. - 2 \sin b_0 \delta b_0 + u_2 t_0 \right\} \Delta q^2 + \frac{1}{2} u_2 \sin b_0 \Delta l^2 + \cos b_0 (r_1 \cos b_0 + r_2 t_0) \Delta q \Delta l \quad (133)$$

Um den Ausdruck für m zu erhalten, werden die partiellen Ableitungen von (122) und (123) gebildet.

Es ist

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = u_1 + u_2 \Delta q - r_2 \Delta l + \frac{u_3}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2) - r_3 \Delta q \Delta l$$

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = -r_1 - u_2 \Delta l - r_2 \Delta q - u_3 \Delta q \Delta l - \frac{r_3}{2} (\Delta q^2 - \Delta l^2)$$

Innerhalb der angewandten Rechenschärfe ist

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 = u_1^2 + 2 u_1 u_2 \Delta q - 2 u_1 r_2 \Delta l + u_1 u_3 (\Delta q^2 - \Delta l^2) - 2 u_1 r_3 \Delta q \Delta l$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial l} \right)^2 = r_1^2 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l} \right)^2 = (u_1^2 + r_1^2) \left\{ 1 + \frac{2 u_1 u_2}{u_1^2 + r_1^2} \Delta q - \frac{2 u_1 r_2}{u_1^2 + r_1^2} \Delta l + \frac{u_1 u_3}{u_1^2 + r_1^2} (\Delta q^2 - \Delta l^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2 u_1 r_3}{u_1^2 + r_1^2} \Delta q \Delta l \right\}$$

und

$$\sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial l} \right)^2} = \sqrt{u_1^2 + r_1^2} \left\{ 1 + \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + r_1^2} \Delta q - \frac{u_1 r_2}{u_1^2 + r_1^2} \Delta l + \frac{u_1 u_3}{u_1^2 + r_1^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\Delta q^2 - \Delta l^2}{2} - \frac{u_1 r_3}{u_1^2 + r_1^2} \Delta q \Delta l \right\} \quad (134)$$

Mit den Gleichungen (133) und (134) läßt sich nun der Ausdruck für m bilden.

$$m = \sqrt{u_1^2 + r_1^2} \left[1 - \frac{t_0}{V_{1,0}^2} \delta b_0 - \left\{ \cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 \Delta u - \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + r_1^2} \right\} \Delta q + \left\{ r_1 \sin b_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{u_1 r_2}{u_1^2 + r_1^2} \right\} \Delta l - \frac{1}{2} \left\{ 2 \cos^2 b_0 \Delta u - 2 \sin b_0 \cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 u_2 - \frac{u_1 u_3}{u_1^2 + r_1^2} \right\} \Delta q^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_1 u_3}{u_1^2 + r_1^2} - \sin b_0 u_2 \right\} \Delta l^2 + \left\{ \cos^2 b_0 r_1 + \sin b_0 r_2 - \frac{u_1 r_3}{u_1^2 + r_1^2} \right\} \Delta q \Delta l \right] \quad (135)$$

c) Bestimmung der Konstanten

Die noch unbestimmten Konstanten u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 und v_3 des allgemeinen Ausdrucks für das Vergrößerungsverhältnis (135) sind so zu bestimmen, daß die Abbildungsbedingungen erfüllt sind. Nach Gleichung (124) besteht bereits die Beziehung

$$\operatorname{tg} \delta A_0 = \frac{v_1}{u_1} \quad \text{oder} \quad \delta A_0 = \frac{v_1}{u_1} = v_1 (1 - \Delta u) = v_1 \dots \dots \dots (124')$$

Damit für $\Delta q = 0$ und $\Delta l = 0$ $m = m_0$ wird, muß die Beziehung erfüllt sein

$$m_0 = \frac{u_1}{\cos \delta A_0} \left(1 - \frac{t_0}{V_{1,0}^2} \delta b_0 \right) \quad \text{oder} \quad u_1 = m_0 \left(1 + \frac{t_0}{V_{1,0}^2} \delta b_0 \right) \dots \dots \dots (136)$$

m_0 ist das Vergrößerungsverhältnis der konformen Abbildung im Bild des Projektionsnullpunktes. Wir setzen

$$m_0 = 1 + \delta m_0$$

und betrachten δm_0 als Maßstabsänderung im Nullpunkt. Es entspricht dem Helmertschen $\frac{\delta s}{s}$, ist aber schärfer definiert.

$$u_1 = (1 + \delta m_0) \left(1 + \frac{t_0}{V_{1,0}^2} \delta b_0 \right) = 1 + \Delta u \quad \text{oder} \quad \Delta u = \delta m_0 + \frac{t_0}{V_{1,0}^2} \delta b_0 \dots \dots (136')$$

Nach der 1. Bedingung müssen nun im Ausdruck für m die linearen Glieder verschwinden.

Es folgt, wenn $v_1^2 = 0$ gesetzt wird

$$\delta b_0 \cos b_0 + \Delta u \sin b_0 - \frac{u_2}{u_1} = 0 \quad \text{oder} \quad u_2 = \cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 \Delta u \dots \dots (137)$$

Daraus folgt

$$u_2 = \frac{\delta b_0}{\cos b_0} + \sin b_0 \delta m_0 \dots \dots \dots (137')$$

Ferner ist $v_1 \sin b_0 = \frac{u_1 v_2}{u_1^2 + v_1^2}$. Daraus erhält man mit zulässigen Vernachlässigungen

$$v_2 = \sin b_0 \delta A_0 \dots \dots \dots (138)$$

Die Kurven gleichen Vergrößerungsverhältnisses sollen nach Definition in einer Merkatorprojektion konzentrische Kreise in Mittelpunktsform sein. Aus diesem Grunde muß das Glied mit $\Delta q \Delta l$ verschwinden und müssen die Koeffizienten der Glieder Δq^2 und Δl^2 gleich sein. Mit diesen Bedingungen lassen sich nun die letzten unbekanntenen Koeffizienten u_3 und v_3 ermitteln.

Es ergeben sich folgende Beziehungen:

$$v_3 = \cos^2 b_0 \delta A_0 + \sin^2 b_0 \delta A_0 \quad \text{oder} \quad v_3 = v_1 = \delta A_0 \dots \dots \dots (139)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 b_0 \Delta u - 2 \sin b_0 \cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 u_2 - \frac{u_3}{u_1} &= \frac{u_3}{u_1} - \sin b_0 u_2 \quad \text{oder} \\ u_3 &= \cos^2 b_0 \Delta u - \sin b_0 \cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 u_2 \\ \text{oder mit Gleichung (137)} \quad u_3 &= \cos^2 b_0 \Delta u + \sin^2 b_0 \Delta u \\ \text{und endlich} \quad u_3 &= \Delta u \dots \dots \dots (140) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Vergrößerungsverhältnis

$$m = m_0 - \delta m_0 \cos^2 b_0 \frac{\Delta q^2}{2} - \delta m_0 \cos^2 b_0 \frac{\Delta l^2}{2} \dots \dots \dots (141)$$

d) Übertragungsgleichungen

Die Übertragungsgleichungen nehmen zunächst die Form an:

$$\Delta Q = u_1 \left\{ \Delta q - \delta A_0 \Delta l + \frac{1}{2} (\cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 \Delta u) (\Delta q^2 - \Delta l^2) - \sin b_0 \delta A_0 \Delta q \Delta l + \right. \dots \dots (142)$$

$$\left. + \frac{\Delta u}{6} (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) - \frac{\delta A_0}{6} (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) \right\}$$

$$\Delta L = u_1 \left\{ \delta A_0 \Delta q + \Delta l + (\cos b_0 \delta b_0 + \sin b_0 \Delta u) \Delta q \Delta l + \frac{1}{2} \sin b_0 \delta A_0 (\Delta q^2 - \Delta l^2) + \frac{\Delta u}{6} (3 \Delta q^2 \Delta l - \Delta l^3) + \frac{\delta A_0}{6} (\Delta q^3 - 3 \Delta q \Delta l^2) \right\} \quad (143)$$

wobei für $u_1 = 1 + \Delta u$ wird und für Δu die Beziehung (136') einzusetzen ist.

In den Gleichungen (142) und (143) sind nun die isometrischen Breitenunterschiede ΔQ und Δq durch die geographischen Unterschiede ΔB und Δb auszudrücken.

Die Berechnung von δl ist ohne weiteres möglich, dagegen erfordert die Berechnung von δb einen kleinen Umweg.

Es ist zunächst zu beachten, daß nach (131)

$$\begin{aligned} \delta q &= \Delta Q - \Delta q + \delta q_0 \\ \delta b &= \Delta B - \Delta b + \delta b_0 \\ \delta l &= \Delta L - \Delta l + \delta l_0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich zunächst für δl unter Berücksichtigung der Gleichung (52)

$$\begin{aligned} \delta l &= \delta l_0 + \frac{\delta A_0}{\cos b_0 V_1^2} \Delta b + \left(\delta m_0 + \frac{t_0}{V_1^2} \delta b_0 \right) \Delta l + \frac{t_0}{2 \cos b_0} \delta A_0 (2 - \eta^2) \Delta b^2 - \frac{1}{2} \sin b_0 \delta A_0 \Delta l^2 + \\ &+ \left\{ t_0 (1 - \eta^2) \delta m_0 + (1 + t_0^2 - \eta^2 - 2 \eta^2 t_0^2) \delta b_0 \right\} \Delta b \Delta l + \frac{\delta A_0}{3 \cos b_0} (1 + 3 t_0^2) \Delta b^3 + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ (1 + 2 t_0^2) \delta m_0 + 2 t_0 (1 + t_0^2) \delta b_0 \right\} \Delta b^2 \Delta l - \frac{\delta A_0}{2 \cos b_0} \Delta b \Delta l^2 - \frac{1}{6} (\delta m_0 + t_0 \delta b_0) \Delta l^3 \end{aligned} \quad (144)$$

Um den Ausdruck für δb zu finden, wird in Gleichung (142) an Stelle von Δq , Δb eingeführt. Man findet als Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} \delta q &= \delta q_0 + \frac{1}{V_1^2 \cos b_0} \left(\delta m_0 + \frac{t_0}{V_1^2} \delta b_0 \right) \Delta b - \delta A_0 \Delta l + \frac{1}{2 V_1^4 \cos^2 b_0} \left\{ \sin b_0 (2 + 3 \eta_1^2) \delta m_0 + \right. \\ &+ \left. \cos b_0 \left[1 + \frac{t_0^2}{V_1^2} (2 + 3 \eta_1^2) \right] \delta b_0 \right\} \Delta b^2 - \frac{\cos b_0}{2} \left\{ \left(1 + \frac{t_0^2}{V_1^2} \right) \delta b_0 + t_0 \delta m_0 \right\} \Delta l^2 - \\ &- \frac{t_0 \delta A_0}{V_1^2} \Delta b \Delta l + \frac{1}{6 \cos b_0} \left\{ 2 (1 + 3 t_0^2) \delta m_0 + t_0 (5 + 6 t_0^2) \delta b_0 \right\} \Delta b^3 - \\ &- \frac{1 + 2 t_0^2}{2} \delta A_0 \Delta b^2 \Delta l - \frac{1}{2 \cos b_0} (\delta m_0 + t_0 \delta b_0) \Delta b \Delta l^2 + \frac{\delta A_0}{6} \Delta l^3 \end{aligned} \quad (145)$$

Nun sind noch δq und δq_0 durch δb und δb_0 zu ersetzen. Die isometrische Breite ist durch folgende Differentialgleichung definiert

$$dq = \frac{M_1}{P} db = \frac{db}{V_1^2 \cos b}$$

Daraus ergibt sich durch Reihenentwicklung, wenn δq und δb kleine endliche Größen sind

$$\delta q = \frac{\delta b}{V_1^2 \cos b} + \frac{t (1 + 3 \eta^2)}{2 V_1^4 \cos b} \delta b^2 + \dots \quad (146)$$

Bei Vernachlässigung von δb^2 erhält man $\delta q_0 = \frac{\delta b_0}{V_{1,0}^2 \cos b_0} \dots \quad (147)$

δq hängt von der Breite ab und ist für den vorliegenden Zweck in einer Reihe von Δb auszudrücken. Die rechte Seite von (145) ist mit $V_1^2 \cos b$ zu multiplizieren, um δb an Stelle von δq zu erhalten. Ebenso ist δq_0 nach (147) durch δb_0 zu ersetzen.

$$\cos b = \cos b_0 - \sin b_0 \Delta b - \cos b_0 \frac{\Delta b^2}{2} + \sin b_0 \frac{\Delta b^3}{6} + \dots \quad \text{oder}$$

$$\cos b = \cos b_0 \left(1 - t_0 \Delta b - \frac{\Delta b^2}{2} + t_0 \frac{\Delta b^3}{6} \right)$$

Ferner ist
$$V_1^2 = V_{1,0}^2 - \gamma_{1,0}^2 \left\{ 2 t_0 \Delta b + (1 - t_0^2) \Delta b^2 - \frac{4}{3} t_0 \Delta b^3 + \dots \right\}$$

Daraus folgt

$$V_1^2 \cos b = V_{1,0}^2 \cos b_0 - \sin b_0 (1 + 3 \gamma_{1,0}^2) \Delta b - \cos b_0 (1 + 3 \gamma_{1,0}^2 - 6 \gamma_{1,0}^2 t_0^2) \frac{\Delta b^2}{2} + \sin b_0 \frac{\Delta b^3}{6} \quad (148)$$

Die Ausrechnung führt zu folgendem Ergebnis

$$\begin{aligned} \delta b = \delta b_0 + \left\{ \delta m_0 - 3 \gamma_1^2 t_0 (1 - \gamma_1^2) \delta b_0 \right\} \Delta b - \cos b_0 (1 + \gamma_1^2) \delta A_0 \Delta l - \frac{3}{2} \gamma_1^2 \left\{ t_0 \delta m_0 + \right. \\ \left. + (1 - t_0^2) \delta b_0 \right\} \Delta b^2 - \frac{\cos^2 b_0}{2} \left\{ (1 + t_0^2 + \gamma_1^2) \delta b_0 + t_0 (1 + \gamma_1^2) \delta m_0 \right\} \Delta l^2 + \\ \left. + 3 \sin b_0 \gamma_1^2 \delta A_0 \Delta b \Delta l - \frac{\delta m_0}{6} \Delta b^3 - \frac{\cos^2 b_0}{2} \delta m_0 \Delta b \Delta l^2 + \frac{\cos b_0}{6} \delta A_0 \Delta l^3 \right\} \quad (149) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (144) und (149) sind die gewünschten Formeln für die beste konforme Transformation kreisförmiger Bereiche.

Ein Vergleich der neu gefundenen konformen Anfelderungsformeln mit den Hristowschen zeigt völlige Übereinstimmung der Glieder bis einschließlich der 2. Ordnung. Auch die Glieder 3. Ordnung zeigen nur geringe Abweichungen. So fehlt bei Hristow das Glied mit Δb^3 im Ausdruck für δb , und im Glied $\Delta b \Delta l^2$ steht bei Hristow im Nenner 3 an Stelle von 2.

Im Ausdruck für δl stimmen die Glieder mit Δb^3 und $\Delta b \Delta l^2$ vollkommen mit dem Hristowschen Ergebnis überein, während in den Gliedern mit $\Delta b^2 \Delta l$ und Δl^3 kleinere Abweichungen auftreten.

In den Gleichungen (116) und (117) einerseits und (144) und (149) andererseits treten $\frac{\delta a}{a}$ und δm_0 mit entgegengesetzten Vorzeichen, sonst aber mit gleichen Koeffizienten auf.

Das heißt, daß sich die Änderung der großen Halbachse bei einem Ellipsoidübergang völlig wie eine Änderung des Maßstabs im Zentralpunkt des Ellipsoidübergangs auswirkt.

Mit den Gleichungen (116), (117), (144) und (149) sind die Beziehungen gefunden, welche für kreisförmige Gebiete den konformen Ellipsoidübergang und die konforme Transformation mit geringsten Verzerrungen der Winkel und Seiten vermitteln.

(116) zu (144) und (117) zu (149) addiert, ergibt diese Gesamttransformation mit $\delta m_0, \frac{\delta a}{a_1}, \delta \alpha, \delta b_0, \delta l_0$ und δA_0 als Parametern.

11. Schlußbetrachtungen.

Wenn man einen konformen Ellipsoidübergang für die praktische Anwendung bevorzugen will, dann verdient in erster Linie der günstigste Übergang für kreisförmige Gebiete \bar{U}_K diese Hervorhebung. Bei kleinen Umformungsgebieten spielt die Art des Ellipsoidüberganges eine untergeordnete Rolle, wenn nur die wichtigsten Forderungen erfüllt sind. In diesem Falle sind die Übergänge $\bar{U}_{II}, \bar{U}_M, \bar{U}_P, \bar{U}_K$ und \bar{U}_H als nahezu gleichwertig zu betrachten. Der Helmertsche Übergang scheidet auf Grund der hier angestellten Überlegungen und Untersuchungen bei großen und größten Netzen aus. Da er nicht einfacher anwendbar ist als die konformen Übergänge, wird er auch zur Anwendung in Gebieten, wo die Verzerrungen klein bleiben, grundsätzlich abgelehnt.

In der Mehrzahl der denkbaren und bekannten Fälle kann das Umformungsgebiet besser und vollständiger von einem Kreis als von Meridianstreifen und Parallelkreiszonon erfaßt werden. Darin liegt die Bevorzugung des Ellipsoidüberganges \ddot{U}_K gegenüber den anderen konformen Übergängen begründet. \ddot{U}_K dürfte also der Ellipsoidübergang sein, der den Bedürfnissen der Heeresvermessung am besten gerecht wird. Abbildungstheoretisch steht \ddot{U}_K zum Helmertschen Ellipsoidübergang in demselben Verhältnis, wie die stereographische Projektion zur Hattaschen Azimutalprojektion. Es sind daher hauptsächlich die mit der Konformität verbundenen Eigenschaften, welche die Vorzüge von \ddot{U}_K gegenüber \ddot{U}_H bedingen.

In den seltener vorkommenden Fällen einzelner einseitig entlang von Meridianen und Parallelkreisen verlaufender, sehr ausgedehnter Dreiecksketten, Netzketten oder Netze, die auf ein anderes Ellipsoid überführt werden sollen, sind die konformen Ellipsoidübergänge \ddot{U}_M bzw. \ddot{U}_P anzuwenden, wenn es auf höchste Genauigkeit ankommt.

\ddot{U}_{II} hat eine günstige Meridiankonvergenz zur Folge. Er hat nur den einen Nachteil, daß er sich nicht mehr an den Bereich anpassen läßt. Seine Verzerrungen sind praktisch dieselben, wie bei \ddot{U}_M , \ddot{U}_P und \ddot{U}_K . Dieser allgemein gültige Ellipsoidübergang besitzt bei isometrischen Koordinaten als Veränderlichen sehr einfache Übertragungsgleichungen. Bei Einführung geographischer Koordinaten geht dieser Vorzug allerdings größtenteils wieder verloren.

Der azimuttreue konforme Ellipsoidübergang \ddot{U}_I hat die bemerkenswerten Eigenschaften, alle Azimute unverzerrt auf das andere Ellipsoid abzubilden und Meridiane in Meridiane, Parallelkreise in Parallelkreise überzuführen. Seine Abbildungsfunktion ergibt die überhaupt einfachste konforme Übertragung eines Ellipsoides auf ein anderes. Seine Längenverzerrungen nehmen mit zunehmender geographischer Breite des Zentralpunktes und mit dem Abstand des Punktes vom Zentralpunkt rasch zu. Für kleinere Abbildungsbereiche von 100—200 km Breitenausdehnung mit zentraler Lage des Zentralpunktes ist \ddot{U}_I in manchen Fällen ausreichend und zweckmäßig. Vor der Anwendung von \ddot{U}_I ist jedoch eine Überschlagung seiner Verzerrungen am Platze.

Bei der praktischen Anwendung von \ddot{U}_K sind zunächst die Koeffizienten der Übertragungsgleichungen (116) und (117) mit den Konstanten des 1. (zu verändernden) Ellipsoides zu berechnen. Nach dieser Vorarbeit wird sofort entschieden, welche Koeffizienten vernachlässigt werden können, um in jedem Falle die dem Bereich entsprechenden einfachsten Formeln verwenden zu können. Damit ist die Übertragung der Punkte vom 1. auf das 2. Ellipsoid ohne Schwierigkeiten möglich. Bei Massenumformungen können die Glieder 3. Ordnung und teilweise auch die der 2. Ordnung in graphischen oder numerischen Tafeln zusammengefaßt werden, falls die Art der Aufgabe diese Vorarbeit als lohnend erscheinen läßt.

Die Ellipsoidübergänge gehören im allgemeinen zu den für die nachfolgenden Anfelderungen notwendigen Vorarbeiten. Für die auf dem 2. Ellipsoid auszuführende Netztransformation, bei der das Dreiecksnetz in seiner Gestalt möglichst wenig geändert werden soll, wurden die Formeln (144) und (149) abgeleitet. In (144) und (149) sind die Verschiebungen δb_0 , δl_0 , δA_0 und δm_0 zunächst noch unbekannt. Sie werden nach der Methode der kleinsten Quadrate so bestimmt, daß die Quadratsumme der übrigbleibenden Abstände zwischen den identischen Punkten ein Minimum wird. Diese Anfelderung ist auf dem 2. Ellipsoid zu rechnen.

Bezeichnet man

die auf dem 1. Ellipsoid gegebenen veränderlichen Koordinaten mit b_v, l_v ,

die Verbesserungen infolge des Ellipsoidüberganges mit $\delta b_u, \delta l_u$,

die auf dem 2. Ellipsoid gegebenen festen Koordinaten mit B_f, L_f ,

die auf das 2. Ellipsoid übertragenen Koordinaten mit B_v, L_v ,

die Verbesserungen der Ausgleichung mit v_B, v_L ,

die Verbesserungen infolge der Anfelderung mit $\delta b_A, \delta l_A$

dann bestehen folgende Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{aligned} B_f + v_B &= b_v + \delta b_u + \delta b_A = B_v + \delta b_A \\ L_f + v_L &= l_v + \delta l_u + \delta l_A = L_v + \delta l_A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (150)$$

Die ausführlichen Fehlergleichungen erhält man aus (144) und (149) durch Umordnung nach δb_0 , δA_0 und δm_0 . Es folgen:

$$\begin{aligned}
 \delta B + \nu_B &= B_v + \left\{ 1 - 3\eta_0^2 t_0 (1 - \eta_0^2) \Delta B - \frac{3}{2} \eta_0^2 (1 - t_0^2) \Delta B^2 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 (1 + t_0^2 + \right. \\
 &+ \eta_0^2) \Delta L^2 \left. \right\} \delta b_0 + \left\{ \Delta B - \frac{3}{2} \eta_0^2 t_0 \Delta B^2 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 t_0 (1 + \eta_0^2) \Delta L^2 - \frac{1}{2} \cos^2 b_0 \Delta B \Delta L^2 - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{6} \Delta B^3 \right\} \delta m_0 - \left\{ \cos b_0 (1 + \eta_0^2) \Delta L - 3 \sin b_0 \eta_0^2 \Delta B \Delta L - \frac{1}{6} \cos b_0 \Delta L^3 \right\} \delta A_0 \\
 \delta L + \nu_L &= L_v + \delta l_0 + \left\{ t_0 (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta L + (1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 2\eta_0^2 t_0^2) \Delta B \Delta L + \right. \\
 &+ t_0 (1 + t_0^2) \Delta B^2 \Delta L - \frac{1}{6} t_0 \Delta L^3 \left. \right\} \delta b_0 + \left\{ \Delta L + t_0 (1 - \eta_0^2) \Delta B \Delta L + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} (1 + 2t_0^2) \Delta B^2 \Delta L - \frac{1}{6} \Delta L^3 \right\} \delta m_0 + \left\{ \frac{1}{\cos b_0} (1 - \eta_0^2 + \eta_0^4) \Delta B + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \frac{t_0}{\cos b_0} (2 - \eta_0^2) \Delta B^2 - \frac{1}{2} \sin b_0 \Delta L^2 + \frac{1}{3} \frac{1 + 3t_0^2}{\cos b_0} \Delta B^3 - \frac{1}{2} \frac{1}{\cos b_0} \Delta B \Delta L^2 \right\} \delta A_0
 \end{aligned}
 \tag{150'}$$

In den Gleichungen (150) bedeuten ΔB und ΔL die Koordinatenunterschiede zwischen Zentralpunkt und den auf das 2. Ellipsoid überführten geographischen Koordinaten B_v, L_v der Vergleichspunkte. Es sind also

$$\begin{aligned}
 \Delta B &= B_v - B_0 = b_v + \delta b_u - B_0 \\
 \Delta L &= L_v - L_0 = l_v + \delta l_u - l_0
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von (150') sind streng genommen für die Breite $B_0 = b_0$ und mit den Konstanten des 2. Ellipsoides zu berechnen.

Bei diesem strengen Vorgehen entstehen die praktischen Unannehmlichkeiten, daß sämtliche Hilfsgrößen nochmals für das 2. Ellipsoid berechnet werden müssen, und daß die Formeln für Ellipsoidübergang und Anfelderung nicht ohne nochmalige Umformung und Hilfsberechnungen zusammengezogen werden können.

Aus diesem Grunde werden in der Praxis die Vergleichspunkte vom 2. auf das 1. Ellipsoid übertragen, und die Anfelderung wird auf dem 1. Ellipsoid durchgerechnet. Dazu müssen an den Koordinaten B_f, L_f der zur Anfelderung zu verwendenden Punkte des 2. Ellipsoides die Größen $\delta b_u, \delta l_u$ mit entgegengesetzten Vorzeichen angebracht werden. Die Fehlergleichungen (150') bleiben dabei richtig, nur beziehen sich jetzt sämtliche Koeffizienten auf das 1. Ellipsoid, und es ist mit $\Delta b = b_v - b_0, \Delta l = l_v - l_0$ zu rechnen.

Die in diesem Verfahren liegende Näherung ist in den meisten Fällen belanglos, da es sich im allgemeinen um die Ableitung kleiner Größen handelt. In diesem Sinne betrachten auch Helmert, Jordan und Hristow das Problem. In besonders gelagerten Fällen sollte man aber auf das beschriebene strenge Vorgehen nicht verzichten.

Sind die Anfelderungskonstanten bekannt, dann können in den Gleichungen (144) und (149) sämtliche Koeffizienten zahlenmäßig berechnet werden. Die dabei entstehenden Gleichungen werden gliedweise zu den Ellipsoidübergangsformeln (116) und (117), deren Koeffizienten ebenfalls numerisch berechnet vorliegen, addiert, wodurch die gesamte Angleichung der beiden selbständigen Netze in ein Formelpaar zusammengefaßt ist.

Das entzerrte Einzelluftbild mit Kartengitter

Von Leutnant d. R. L. Jäger

1.

Das Luftbild gewinnt in diesem Kriege immer größere Bedeutung und es wird nach wie vor eine der vornehmsten Aufgaben der Bildmeßzüge der Vermessungs- und Kartenabteilungen (mot) sein, Ergebnisse der Luftbildausmessung rechtzeitig und in geeigneter Form der fechtenden Truppe zur Verfügung zu stellen. Alle Hilfsmittel und Verfahren sind diesem Zwecke unterzuordnen und anzupassen. In dieser Hinsicht verdient neuerdings die Verwendung des Luftbildes als entzerrtes Einzelbild mit eingezeichnetem oder einkopiertem Kartengitter besondere Beachtung.

Schon zu Beginn des Krieges zeigte sich der Wert des Einzelbildes besonders für artilleristische Zwecke. So bringt z. B. Heft 7 der Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens¹⁾ einige Fälle von Einzelbildmeldungen mit Koordinatenangaben zum Zwecke der Bekämpfung feindlicher Eisenbahngeschütze an der Oberrheinfrent und es wird hier schon auf die Bedeutung des entzerrten Einzelbildes mit Kartengitter hingewiesen. Die in Abschn. 8, S. 362 dieser Veröffentlichung gemachten Einschränkungen²⁾ bezüglich der Nachteile des projektiv in das Bild übertragenen Kartengitters und der Unzweckmäßigkeit konvergierender Netze sind jedoch inzwischen durch die Ausrüstung der Bildmeßzüge mit leistungsfähigen Entzerrungsgeräten überholt.

Die Entwicklung des Feldzuges im Osten brachte in zunehmendem Maße Forderungen der fechtenden Truppe auf Bereitstellung von Luftbildern sowohl

¹⁾ Hptm. Prof. Dr. Merkel: „Erfahrungsbericht über die Verwendung des Luftbildes beim Einsatz im Westen“. Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens, Berlin 1942, 1. Jahrgang, Heft 7, Anlagen 1 bis 4.

²⁾ „Die projektive Übertragung des Kartengitternetzes in Filmkopien, wodurch an sich ein schneller Kartenersatz für artilleristische Zwecke gegeben wäre, hat sich nach den angestellten Versuchen nicht bewährt. So sind z. B. konvergierende Netze dem Soldaten nicht nur ungewohnt, sondern auch zu umständlich zur Koordinatenentnahme. Der naheliegende Weg des Einzeichnens oder Aufkopierens des Kartengitternetzes auf eine entzerrte Kopie kam nicht in Frage, da kein Entzerrungsgerät zur Verfügung stand.“

als Ersatz für fehlende oder mangelhafte Karten, wie auch als wertvolle und oft unentbehrliche Ergänzung aller Kartenunterlagen überhaupt. Insbesondere ist es die Artillerie, die ein mit einfachen Hilfsmitteln ausmeßbares entzerrtes Luftbild als Melde- und Schießgrundlage verlangt. Erst in jüngster Zeit wieder wurde in der Artilleristischen Rundschau³⁾ auf die hervorragende Bedeutung des Luftbildes für die Artillerie mit eingehender Begründung hingewiesen. Aber auch andere Waffengattungen veröffentlichten gute Erfahrungsergebnisse mit dem Luftbild. So erschienen, um nur ein Beispiel herauszugreifen, im Frühjahr 1943 in der Tagespresse Berichte über die Unentbehrlichkeit des Luftbildes zur Bandenbekämpfung in den unübersichtlichen Waldgebieten gewisser Abschnitte der Ostfront.

2.

Zur Vorbereitung und Durchführung von Kampfhandlungen ist das Luftbild wichtig sowohl für die Orientierung im Gelände wie zur Geländebewertung.

Es enthält zahlreiche Einzelheiten der Bodenbedeckung, wie z. B. einzelne Bäume, Heuhaufen, Strohmieten, die Feldergrenzen, Unterschiede im Fruchtbestand der Felder, Unterschiede im Baumbestand der Wälder nach Art, Dichte und Alter, die wegen ihrer zeitlichen Bedingtheit die Karte nicht enthalten kann.

Auch den zahlreichen Veränderungen, denen das Wegenetz gerade im Osten und insbesondere in der Kampfzone unterworfen ist, den Änderungen der Flußläufe usw. vermag die Karte nur in den für die Fortführung nötigen größeren Zeiträumen zu folgen, während das Luftbild den Zustand zum Zeitpunkt des Einsatzes zu erfassen vermag.

Insbesondere können aber die jahreszeitlich bedingten Änderungen im Gelände z. B. Überschwemmungen und Versumpfungen zur Zeit der Schlammperiode, Hochwasser der Flüsse, Ver-

³⁾ Oberst Kruse: „Das Luftbild“. Artilleristische Rundschau 15. Jahrgang Nr. 9 vom September 1943.

Veränderungen und Schneeverwehungen im Winter, Benutzung des Wegenetzes im Winter durch Änderungen im Laubbestand der Wälder (Bedeutung für die Tarnung gegen Fliegersicht) niemals in Kartenwerken Berücksichtigung finden.

Für die Truppe sind aber alle diese Einzelheiten wesentliche Hilfsmittel für die Orientierung. Wenn man gelegentlich Klagen der Truppe über mangelnde Genauigkeit von Karten und selten solche bezüglich des Luftbildes hört, so mag das neben dem Vertrauen, das der Soldat an sich zur photographischen Abbildung des Geländes hat, gerade darin liegen, daß die vielen Anhaltspunkte, die das Luftbild für die Orientierung bringt, ihn zum Teil unbewußt viel mehr vor Irrtümern bei der Ermittlung seines Standpunktes bewahrt haben als die Karte.

Das mit Kartengitter versehene entzerrte Luftbild erleichtert besonders die *a r t i l l e r i s t i s c h e* *V e r m e s s u n g*. Da für alle Punkte eines solchen Bildes Koordinaten entnommen werden können, ist es mit Hilfe der zahlreichen Anhaltspunkte leicht möglich, die Lage von Beobachtungs- und Feuerstellungen in kurzer Frist und mit großer Sicherheit zu bestimmen.

Aber auch zu *p i o n i e r t e c h n i s c h e n* Vermessungen, wie für die Bestimmung von Flußbreiten, Wahl der günstigsten Übergangsstellen, Untersuchung der Verhältnisse an den Ufern, z. B. der Größe von Versumpfungen, Sandbänken, Uferabbrüchen, der Art und Höhe von Steilufern, der Planung von Zu- und Abfahrtsstraßen, Abstell- und Ausweichräumen ist das ausmeßbare, entzerrte Luftbild, besonders wenn es noch durch Raumbilder zur Geländebeurteilung ergänzt wird, wichtig.

Besondere Bedeutung aber erhält das entzerrte mit Kartengitter versehene Luftbild als *S c h i e ß g r u n d l a g e*. Das Luftbild erlaubt die Festlegung der vorderen Linie, z. B. für die Lage von Sperrfeuer, vor allem in einförmigem Gelände nach Anhaltspunkten, die in der Karte nicht vorhanden sind. Bewirtschaftungsgrenzen, zerschossene Fahrzeuge und Kampfwagen, verlassene oder zerstörte Stellungssysteme, können z. B. zu guten Hilfspunkten werden.

Die Bestimmung, Überwachung und Bekämpfung von Räumen, die wegen zahlreicher neuer Stellungsbauten, neuer Nachschubwege, vorbereiteter Panzergrabenübergänge, Bereitstellungen usw. sich zur Abgabe von Störungsfeuer eignen, wird durch Bildmeldung mit Kartengitter erleichtert.

Weiterhin unterstützt das Luftbild mit Kartengitter die Zielanweisung, z. B. von den Abteilungen

an die Batterien, die Meldung von Zielen durch die Beobachtungsstellen, die Bestimmung von Zielpunkten, die Überprüfung und Bestätigung von Aufklärungsergebnissen der Beobachtungsabteilungen und von Bekämpfungserfolgen.

Zur Ergänzung des Inhaltes der Stellungskarte sind großmaßstäbliche Luftbilder notwendig zur Beurteilung und Bekämpfung dicht gegliederter Stellungssysteme, die nicht immer im Maßstab der Stellungskarte genügend klar zur Darstellung gebracht werden können, besonders aber zur Meldung von Veränderungen in Art und Belegung der Kampfanlagen während der Zeit zwischen den einzelnen Ausgaben der Stellungskarten.

3.

Die angeführten Gründe für die Bedeutung des Luftbildes für die fechtende Truppe hat das entzerrte, mit Kartengitter versehene Einzelbild im allgemeinen mit dem Bildplan im Kartenschnitt gemeinsam. Beide Arten der Bearbeitung schließen sich keineswegs gegenseitig aus, sondern ergänzen sich. Für den Bildplan spricht die größere Übersichtlichkeit. Die Vorteile des entzerrten, mit Kartengitter versehenen Einzelbildes sind jedoch folgende:

1. Die Herstellung von Einzelbildern ist nicht an die Durchführung eines größeren Flächenfluges gebunden. Jeder den zu bearbeitenden Geländeabschnitt deckende Erkundungs- oder Überwachungsflug kann verwendet werden. So genügt z. B. für beabsichtigte Flußübergänge die Befliegung des Flußtales.
2. Verschiedene Bildmaßstäbe können gleichzeitig zur Anwendung gelangen. So eignen sich Weitwinkelaufnahmen mit der 20 cm-Kammer im Bildmaßstab 1 : 30 000 bis 1 : 40 000 gut für Übersichtsbilder im Maßstab 1 : 25 000. Sie können vorteilhaft durch Aufnahmen mit langbrennweitigen (50 cm, 75 cm usw.) Kammern im Auswertemaßstab 1 : 10 000 ergänzt werden.
3. Die Einfachheit und Schnelligkeit der Herstellung gewährleisten die rasche und rechtzeitige Versorgung der Truppe auch bei beweglichen Fronten. Der beim Bildplan unvermeidliche Arbeitsgang über die Kartenreproduktionskammer 70×70 ist in der Regel nicht notwendig.

4. Die Auswahl der Bilder und die Art der Bearbeitung kann dem Bedürfnis der Truppe bei Sonderaufgaben angepaßt werden. Die in Anlage 1 und 2 als Beispiel gebrachte Normalausführung ist, in Zusammenarbeit mit den Stabsbildabteilungen der Luftwaffe durch Eintragung der taktischen Auswertung ergänzt, als laufende Bildmeldung zu verwenden. Die für die Artillerie bestimmten Ausgaben können bei Bedarf mit Melde-(Buchstaben)-Bezifferung und Höhenangaben für einzelne Punkte versehen und auf Anforderung als Raumbilder aufgemacht werden⁴⁾. Gegenüber dem Bildplan ist die Fortführung beim Einzelbild stets auf den zu behandelnden Sonderfall beschränkt.

5. Das Einzelbild ist für die fechtende Truppe handlicher als der Bildplan.

Ein Einzelbild 30×30 cm deckt im Maßstab 1:10 000 9 km^2 , im Maßstab 1:25 000 56 km^2 , im Maßstab 1:50 000 225 km^2 . Dies reicht im allgemeinen für die von der fechtenden Truppe gestellten Anforderungen. Der Nachteil, daß Einzelbilder für größere Abschnitte unübersichtlicher sind als Bildpläne, kann durch Beigabe von Übersichtskarten, in denen die in Einzelbildern bearbeiteten Geländeabschnitte dargestellt sind, oder durch Anbringung einer schematischen Übersicht am Rande des Einzelbildes selbst, verringert werden.

4.

Für die Versorgung der Truppe mit entzerrten Einzelbildern hat sich die Gitternetzplatte der Fa. Zeiß bewährt. Sie dient beim Entzerren zum unmittelbaren Einkopieren des Kartengitters in das entzerrte Luftbild.

Die in Anlage 3 dargestellte Gitternetz-Kopiereinrichtung besteht aus einem Rahmen 30×30 cm und zwei Spiegelglasplatten mit ausgespartem Gitterliniensystem. Die beiden Spiegelglasscheiben unterscheiden sich durch die Maschenweite des

⁴⁾ Vergl.: Oberst Kruse, a. a. O.: „Bei den meisten Verwendungsmöglichkeiten sind Raumbilder zu empfehlen, da sie das Gelände plastisch und vorstellungsdeutlicher wiedergeben.“ „Das Raumbild soll herangezogen werden, wenn das Erkennen von Höhenverhältnissen wichtig ist (z. B. zur Geländeerkundung, Zielaufklärung, Feststellung der Feuerwirkung auf ein Ziel) oder wenn Einzelheiten aus dem Einzelbild nicht hinreichend sicher gedeutet werden können (z. B. bei kleinen Gegenständen und wenn ausgeprägte Schatten fehlen).“

Gittersystems (4 cm und 10 cm). Sie gestatten ein Arbeiten in den Maßstäben 1:25 000 und 1:50 000 bzw. 1:10 000, 1:20 000 und 1:40 000.

Am Rande des aufklappbaren Rahmens sind keilförmige Marken angebracht, in welche die Gitterlinien der Spiegelglasplatte verlaufen. Beim Einlegen der Gitterplatte ist darauf zu achten, daß die Kreuzmarkierungen auf Rahmen und Platte gegenüber zu liegen kommen.

Zum Entzerren wird die Entzerrungsunterlage (Karte oder Paßpunktfolie mit Kartengitter) so in den Rahmen eingelegt, daß deren Gitterlinien gegenüber den Keilmarken des Rahmens zu liegen kommen. Damit wird erreicht, daß die Gitterlinien der Entzerrungsunterlage dieselbe Lage erhalten, wie die Linien der Gitterplatte beim nachfolgenden Einkopieren des Gitters⁵⁾.

Die Entzerrungsunterlage wird nun im Kopierahmen festgeklemmt und die Entzerrung durchgeführt. Nach erfolgter Entzerrung darf der Kopierahmen auf dem Projektionstisch des Entzerrungsgerätes nicht mehr verschoben werden. Darauf wird in den Kopierahmen lichtempfindliches Material (Film oder Papier je nach der späteren Weiterverarbeitung) eingelegt und das Bild kopiert. Das Einkopieren des Kartengitters erfolgt durch Einlegen der Gitterplatte in den Rahmen und Nachbelichtung. Die Nachbelichtung geschieht am besten mit dem Entzerrungsgerät selbst, der Film wird dabei nicht aus dem Gerät genommen. Belichtungszeit je nach Dichte des Negativs bis zu 5 Minuten. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß das Negativ selbst als Filter wirkt und z. B. an den im Positiv hell erscheinenden, im Negativ dunklen Partien das Licht zurückhält. Damit wird das einkopierte Gitter dem Tonwert des Bildes angepaßt und Überstrahlungen vermieden. Ein Belichten der Gitterplatte mit Taschenlampen usw. hat sich nicht bewährt.

⁵⁾ Besteht die Entzerrungsunterlage aus einer Karte, so wird durch den unvermeidlichen Papiereingang meist der Abstand der Gitterlinien nicht genau mit dem Sollbetrag der Gitterplatte übereinstimmen. Ist die Maßstabsdifferenz gleichmäßig in jeder Richtung des Gitters, so läßt sich ein Korrekturfaktor c bestimmen, der sich aus: Sollwert des Abstandes mehrerer Gitterlinien auf der Gitterplatte durch Istwert des Abstandes mehrerer Gitterlinien auf der Karte ergibt. Es wird auf der Karte entzerrt und dann der Faktor c durch Änderung des eingestellten Maßstabs angebracht.

Ist die Maßstabsdifferenz ungleichmäßig, so müssen der Karte Paßpunkte nach Koordinaten entnommen und dieselben in eine Gitterfolie, die durch Kopieren des Gitters der Spiegelglasplatte auf Film entsteht, kartiert werden. Die Gitterfolie kann wiederholt verwendet werden.

Entzerrtes Luftbild

Als Schießgrundlage geeignet



Maßstab 1 : 10000

Entzerrtes Luftbild

Als Schießgrundlage geeignet

6001

02

6003



622

21

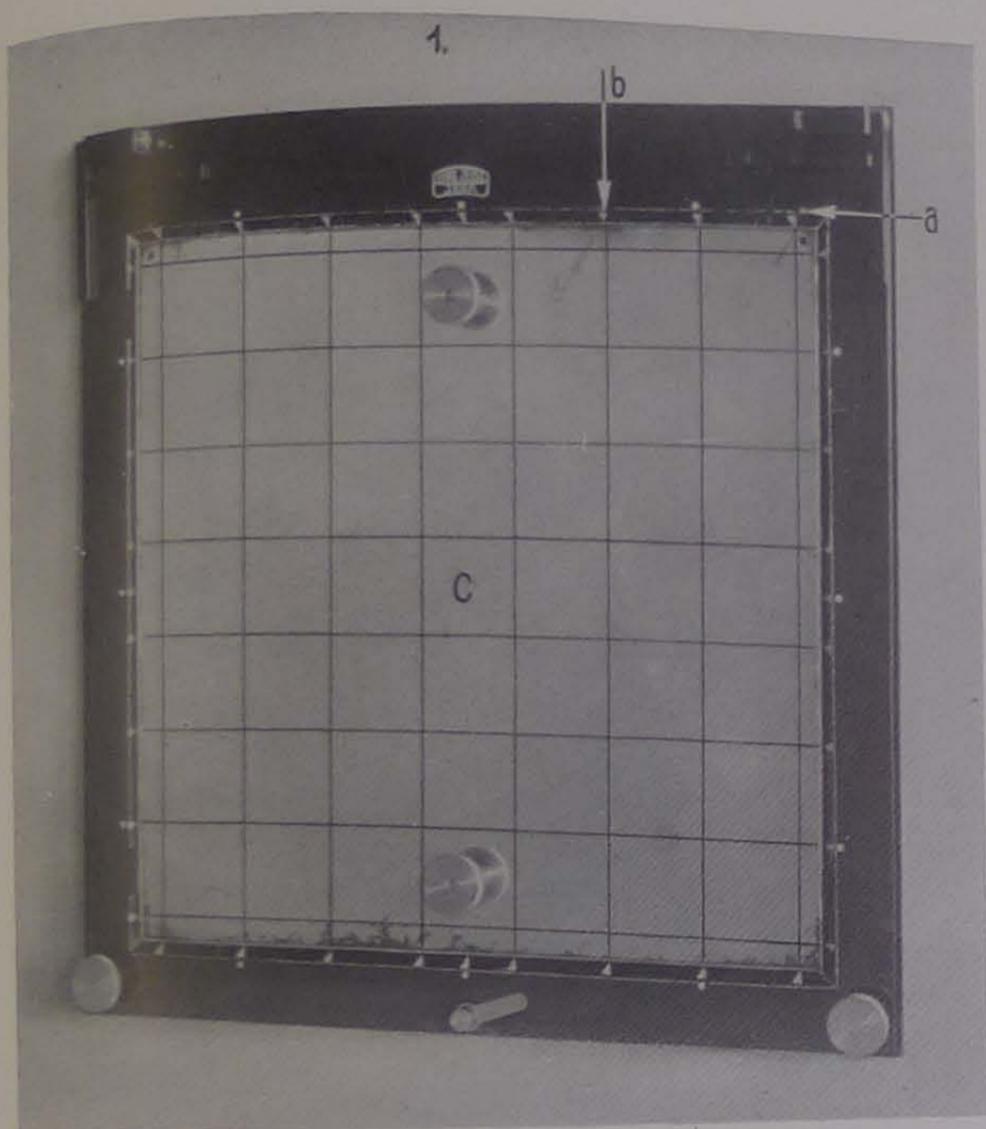
620

6001

02

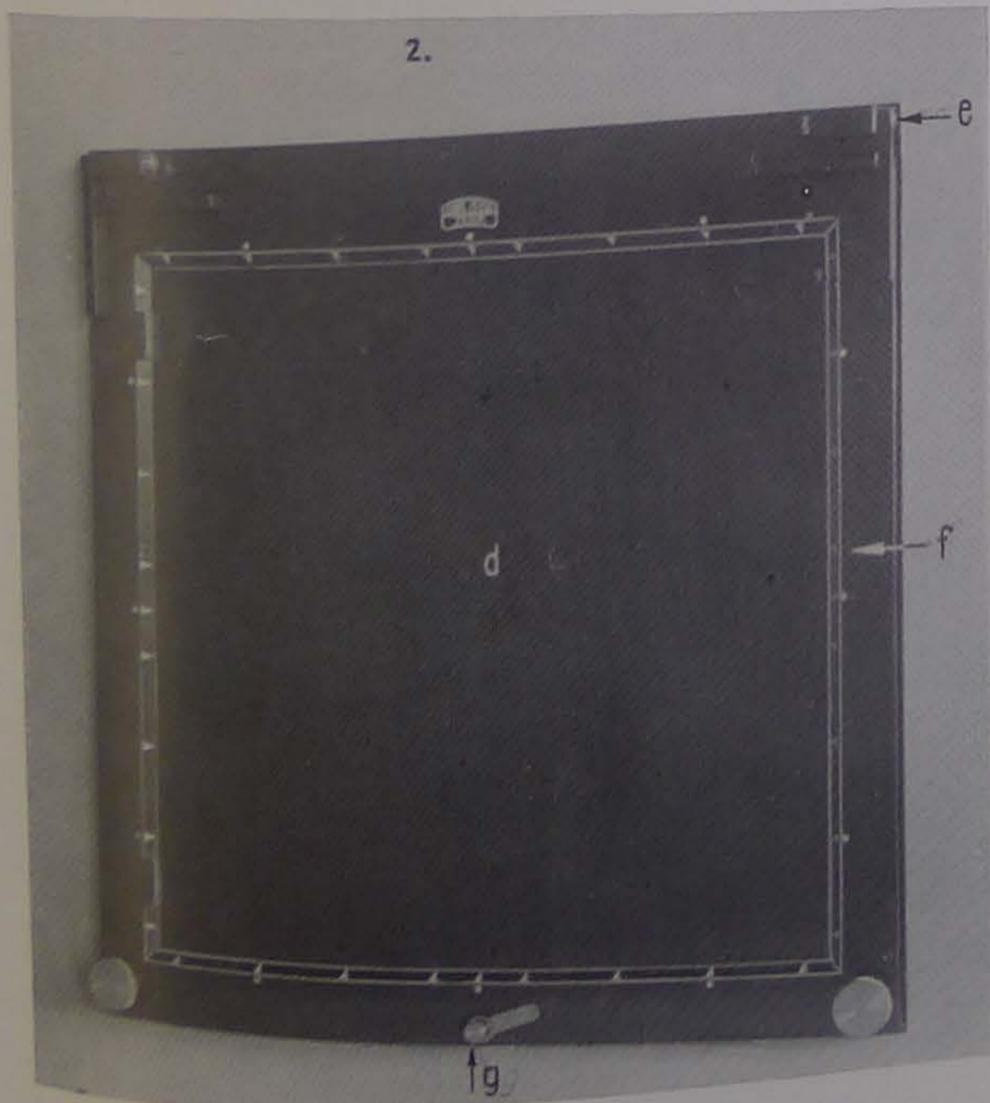
6003

Die Gitternetz-Kopiereinrichtung



1. Rahmen mit eingelegter Gitterplatte

- a) Kreuzmarken
- b) Keilmarken
- c) Spiegelglasscheibe aus ausgespartem 4 cm-Gitter



2. Rahmen

- d) Grundplatte
- e) Gelenke
- f) Rahmen
- g) Verriegelung

- Ob auf Film oder Photopapier kopiert werden soll hängt
1. vom Ausgangsmaterial (Original-Negativ- oder Diapositivfilm),
 2. von der Höhe der Auflage,
 3. von dem dadurch bedingten Vervielfältigungsverfahren ab.

Auf Photopapier wird man im allgemeinen nur entzerren, wenn entweder nur eine geringe Anzahl von Bildern oder eine so hohe Auflage gefordert wird, daß die Vervielfältigung durch Druck erfolgen muß. Im ersteren Falle wird man die Zahl der benötigten Bilder sofort anschließend an den Entzerrungsvorgang kopieren und die Randbearbeitung auf jedem der Bilder von Hand oder durch Aufkopieren einer geeignet vorbereiteten Randfolie einzeln durchführen.

Im zweiten Falle muß ohnehin ein Rasternegativ hergestellt werden; eine Einsparung des Reproduktionsvorganges ist hier nicht möglich. Da aber das Einzelbild meist immer nur für die schnelle Versorgung einzelner Abschnitte gedacht ist, dürften Großauflagen dem Bildplan im Kartenschnitt und vor allem der Bildplankarte wegen ihrer allgemeineren Bedeutung vorbehalten bleiben.

Für den vorgesehenen Verwendungszweck des entzerrten, mit Kartengitter versehenen Einzelbildes kommen mittlere Auflagen von 100—200 Stück und damit die Vervielfältigung durch das Halbtonlichtpausverfahren in Frage. Der kürzeste Arbeitsgang ergibt sich, wenn der Duplikatfilm (Diapositivfilm) von der Luftwaffe zur Verfügung gestellt werden kann. Die Entzerrung und Einkopieren des Kartengitters erfolgt auf phototechnischem Film B (Negativ). Der weiße Rand des Negativs wird abgedeckt und eine Kopie auf „Lichtpausnegativfolie für Wasserentwicklung“ hergestellt (Positiv). Auf diesem Positiv erfolgt mit Abdeckfarbe die Randbearbeitung und die Beschriftung des Bildes selbst mit Ortsnamen, Höhenzahlen usw. Die Randbearbeitung kann durch Vorbereiten eines Einheitsrandes (Negativ) und Montage an das im Entzerrungsvorgang entstehende Negativ erleichtert werden. Es empfiehlt sich dies vor allem, wenn die Randbearbeitung zusätzliche Angaben über die Lage der Bilder (Übersichtskärtchen), die Nadelabweichung, Zeichen-erklärungen usw. enthalten soll.

Wird vom Originalnegativfilm ausgegangen, so ist ein Umkehrprozeß in den Arbeitsgang einzuschalten. Die Umkehrung kann mit phototechnischem Film B oder mit der „Lichtpausnegativ-

folie für Wasserentwicklung“ erfolgen. Im nachfolgenden sind die Arbeitsgänge nochmals schematisch dargestellt.

A. Ausgangsmaterial: Duplikatfilm (Diapositiv)

a) Entzerrung auf phototechnischem Film B (Negativ), Einkopieren des Kartengitters, Anbringung aller Schriften, die im Bild weiß erscheinen sollen, Retusche, (Randmontage [Negativ] oder Abdecken des Randes),

b) Kopie auf Lichtpausnegativfolie für Wasserentwicklung (Positiv), Anbringung aller Schriften, die im Bild schwarz erscheinen sollen, Retusche, Randbearbeitung,

c) Auflage: Lichtpausen 100—200 Stück aus Halbtonlichtpauspapier Ha.

B. Ausgangsmaterial: Originalfilm (Negativ) wie A. a), b), c),

oder Umkehrung entweder zwischen a) und b) oder b) und c).

Das Endprodukt vor der Vervielfältigung durch die Lichtpausmaschine muß ein Positiv sein, das möglichst keine Montage enthalten soll, damit keine Verschiebungen beim Durchlaufen durch die Maschine (Folge z. B. verschwommene Gitterwerte usw.) auftreten.

5.

Bei der Anwendung der Gitternetzkopiereinrichtung von Zeiß ist es wünschenswert, daß der Bildmaßstab des Fluges kleiner ist als der Auswertemaßstab in dem das entzerrte Einzelbild zur Verwendung gelangen soll. Da durch die Entzerrung das ursprüngliche Aufnahmeformat 30×30 cm zum unregelmäßigen Viereck umgebildet wird, kann nur bei Vergrößerung des Bildmaßstabs das quadratische Format der Gitterplatte voll ausgenutzt werden. Für die Entzerrung ist der Wegfall der Randpartien nur von Vorteil; doch ist es möglich, daß bei Entzerrung von Bildern auf Koordinaten, die aus Bildtriangulationen gewonnen wurden oder bei Kartenunterlagen, die nur wenige Paßpunkte enthalten, mehrere Paßpunkte außerhalb des durch das Format der Gitterplatte bestimmten Bildausschnitts fallen (s. Abb. 1). Es erweist sich dann als notwendig, zusätzliche Paßpunkte durch die Triangulation oder mit einer Hilfsentzerrung auf die vorhandenen Paßpunkte auf dem Projektionsschirm des Entzerrungsgerätes möglichst in den Ecken (a, b, c, d der Abb. 1) zu bestimmen.

Wird ein größerer Geländeausschnitt in Einzelbildern dargestellt, so empfiehlt sich eine gegenseitig-

ge Überlappung der Bilder in Größe des in Abb. 1 schraffierten Streifens, um zu erreichen, daß die Koordinatenentnahme für irgend einen Punkt stets in den mittleren Gitterquadraten eines Bildes möglich ist.

6.

Die Herstellung von Einzelbildern mit Kartengitter ist nicht unbedingt von dem Vorhandensein der Gitternetzkopiereinrichtung abhängig, ein so zweckmäßiges und wirtschaftliches Hilfsmittel dieselbe auch darstellt. Dieser Hinweis kann unter Umständen für den Einsatz von Bedeutung sein.

Fehlt die Einrichtung, so kann das Gitter mit Abdeckfarbe auf die Lichtpausnegativfolie für Wasserentwicklung (siehe Übersicht Arbeitsgänge, b) eingezeichnet werden. Der beabsichtigte Ausschnitt wird am besten durch eine Maske bereits

in den Randpartien beeinträchtigen. Bei Verwendung der Metallplatte werden nur die die Eckpunkte des Gitters bestimmenden Bohrungen kopiert. Der dem Verfahren mit der Glasplatte anhaftende Nachteil läßt sich vermeiden, wenn durch Photographie eines Kartengitters auf eine Diapositivplatte ein Netznegativ gewonnen und mit diesem das Kartengitter (Schicht gegen Schicht) nachbelichtet wird.

7.

Von verschiedenen Seiten wurden Bedenken geäußert, ob die mit Kartengitter versehenen Einzelbilder auch zu Bildplänen zusammengefügt werden können und das Gesamtnetz des Bildplanes nicht untragbare Verkrümmungen erleidet. Truppenversuche, die eine Verm.- und Kartenabteilung mit Hilfe der Gitternetzkopiereinrichtung von Zeiß an mehreren Blättern des Dongebietes durchgeführt

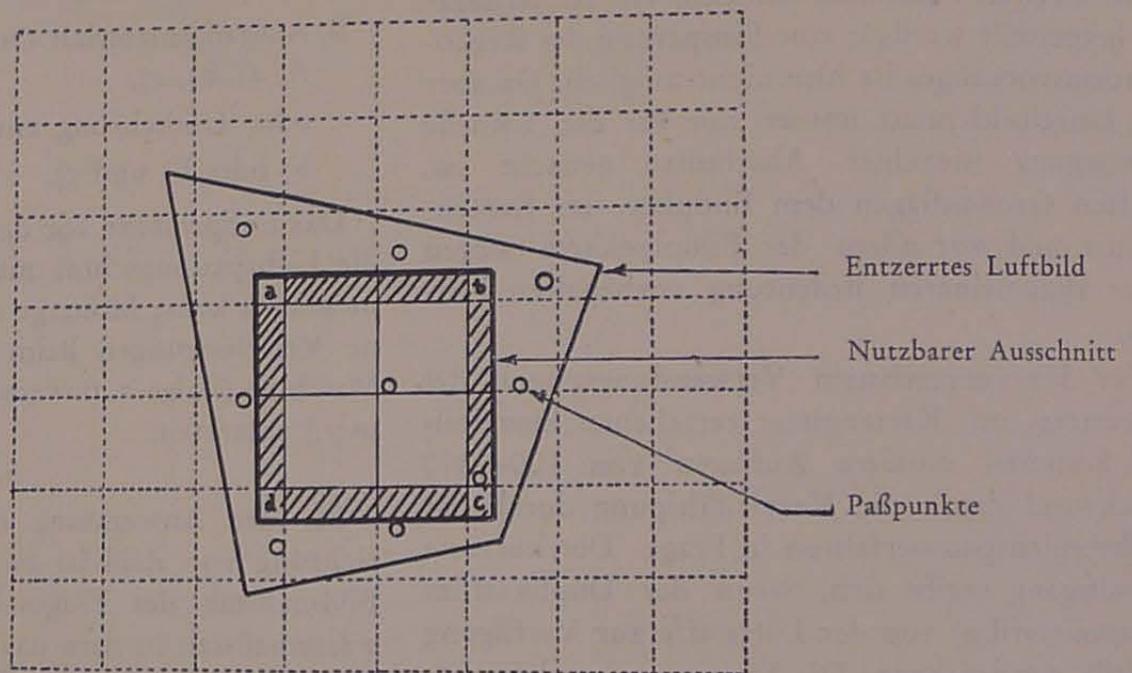


Abb. 1

beim Entzerrungsvorgang festgelegt. Besteht die Möglichkeit, eine Maske aus Metall herzustellen, so können kleine Bohrungen am Rande oder Kerben, die bei der Entzerrung mit kopiert werden, das Ziehen der Gitterlinien erleichtern.

Im Ungarischen Kartographischen Institut in Budapest werden z. B. Glasplatten mit 2 cm Quadratnetz und Metallplatten, in denen die Eckpunkte der Gitterquadrate durch Bohrungen von 0,5 mm festgelegt sind, verwendet⁶⁾.

Im ersten Falle wird durch die Glasplatte entzerrt und das Gitter mitkopiert. Als Nachteil wird angegeben, daß die Lichtstrahlen durch die Glasplatte Brechungen erfahren, die die Entzerrungen

hat, ergaben, daß die Zusammenfügung der einzelnen Bilder zu Bildplänen an sich möglich ist.

Auf eine mit Papier bezogene Sperrholz- oder Zinkplatte wird ein Quadratnetz aufgetragen. Die Einzelbilder müssen in die Gitterquadrate oder in Gruppen von Gitterquadraten zerschnitten (Schnittlinie 1—2 mm seitlich der Gitterlinie) und so genau als möglich auf die vorbereitete Montageplatte aufgeklebt werden. Sprünge im Gitter sind dadurch nicht zu erwarten, dagegen können Sprünge in der Situation auftreten. Sie sind auf Ungenauigkeiten in der Entzerrung oder auf den Einfluß von Höhenunterschieden zurückzuführen. Sofern dieselben unter 1 mm bleiben, sind sie für die Güte des Bildplanes als Schießgrundlage unwesentlich; sie bilden im übrigen eine willkommene Kontrolle für die Entzerrung. Bildpläne jedoch grundsätzlich auf dem

⁶⁾ A. Csiszar, Oberstlt.: „Aus der Entzerrungspraxis des Kartographischen Instituts in Budapest“ Zeitschrift für Vermessungswesen 72. Jahrgang, Heft 10 v. 15. Oktober 1943.

Weg über das Einzelbild mit einkopiertem Gitter herzustellen, erscheint nicht begründet und zweckmäßig.

8.

Sollen die Bilder nur zur besseren Übersicht zusammengefügt werden, empfiehlt sich die Montage mit Fugen (s. Abb. 2). Die Bilder werden nach Gitterquadraten oder Gruppen von

9.

Die Bereitstellung von Ergebnissen der Luftbildauswertung bzw. -ausmessung durch das entzerrte Einzelbild, dürfte wohl in vielen Fällen das zweckmäßigste Verfahren darstellen, um dringende Bedürfnisse der fechtenden Truppe schnell zu befriedigen. Insbesondere sollte jede Bildmeldung, die sich auf topographische Änderungen oder feindliche

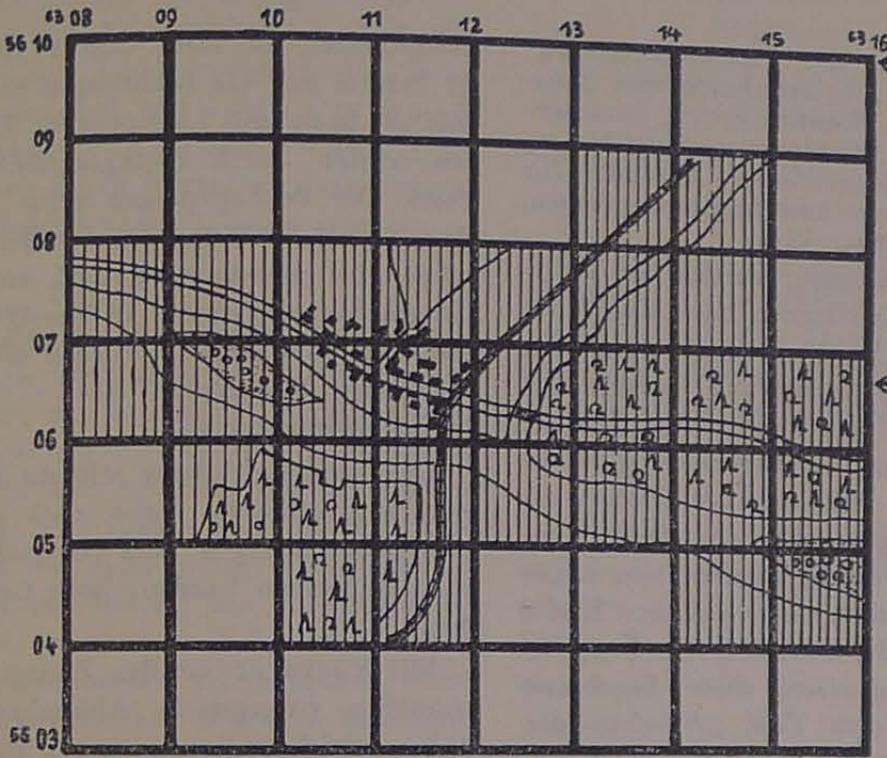


Abb. 2

Gitterquadraten so zerschnitten, daß die Schnittlinie scharf an der Gitterlinie verläuft ohne sie zu verletzen. Die Gitterquadrate werden auf Papier aufgeklebt, zwischen den Quadraten bleibt eine Fuge von 1—2 mm. Die Möglichkeit der Koordinatenentnahme wird hierdurch nicht gestört, doch lassen sich Veränderungen, denen die Kopien durch Feuchtigkeit, Temperaturunterschiede, unterworfen sind, leichter ausgleichen.

Befestigungsanlagen bezieht, in dieser Form den Einheiten zugeleitet werden. Die Sicherheit, Luftbilder zu lesen und zu verwerten, wird bei der fechtenden Truppe um so größer werden, je mehr Bildmaterial auch an kleinere Einheiten gelangt. Dadurch ist der Soldat auch in der Lage, durch Vergleich zwischen Luftbild und Gelände selbst Erfahrungen zu sammeln. Erst dann wird sich der wertvolle Inhalt des Luftbildes voll auswirken.

Buchbesprechung

Von Oberst Grobler, OKH/GenStdH, Abt. f. KrKartVermWes

„Arbeiten der Heeresvermessung“
Heft Nr. 1, Triangulation und Basis-
messung in Westfrankreich, herausge-
geben vom Oberkommando des Heeres,
Generalstab des Heeres, Abteilung für
Kriegs-Karten- und Vermessungswesen,
Berlin, Februar 1944.

Die Ergebnisse der Heeresvermessung werden der Truppenvermessung in Form von Karteikarten oder Koordinatenverzeichnissen mit Festpunktbeschreibungen mitgeteilt, denen meist nur eine ganz kurze Erläuterung vorangestellt ist und die nur der Truppe und den militärischen Dienststellen zugänglich sind. Um nun die Beobachtungs- und Rechenergebnisse bedeutenderer Arbeiten der Heeresvermessung, die nicht nur den augenblicklichen oder zu erwartenden Truppenbedarf entsprechen, sondern von allgemeinerem und bleibendem Wert sind, einem größeren Kreise nutzbar zu machen, stellt das OKH, GenStdH, Abteilung für Kriegs-Karten- und Vermessungswesen, diese Ergebnisse in Buch- oder Heftform mit dem Titel „Arbeiten der Heeresvermessung“ zusammen und allen interessierten Einheiten und Dienststellen zur Verfügung. Hierbei kommen als Interessenten neben den Einheiten und Dienststellen der Kriegsvermessung auch die wissenschaftlichen Institute und Hochschulen und andere an den Arbeiten unmittelbar interessierte oder beteiligte Dienststellen in Betracht. Mit Rücksicht hierauf enthalten die „Arbeiten der Heeresvermessung“ neben den rechtwinklig ebenen Gebrauchskoordinaten und Festpunktbeschreibungen meist auch geographische Koordinaten, Auszüge aus den wichtigsten Berechnungsabschnitten, die Beobachtungsergebnisse sowie eine ausführliche Erläuterung der Beobachtungen und Berechnungen. Die Arbeiten der Heeresvermessung können für den Dienstgebrauch unmittelbar beim OKH, Abt. f. KrKartVermWes, angefordert werden.

Heft Nr. 1 enthält die „Triangulation I. Ordnung in Westfrankreich Kette Parallel Paris (westl. Teil) — Kette Meridian Bayeux — Kette Parallel Rochefort bearbeitet im Auftrag des OKH, Abt. f. KrKartVermWes, von Baurat d. R. Maly beim Kr.-Kart.- und Verm.-Amt Paris“, und „Deutsche Basismessungen in Frankreich, bearbeitet im Auftrag des OKH, Abt. f. KrKartVermWes, von Leutnant Gigas“. Weiter ist dem Heft noch ein Vorwort von Oberst Grobler vorangestellt.

1.

Die Arbeit von Maly beschreibt die Netzausgleichung der Triangulation I. O. in Frankreich, die die Ketten Parallel Paris (westl. Teil), Meridian Bayeux und Parallel Rochefort umfaßt. In den, den Ergebnissen vorangestellten Erläuterungen gibt Maly zunächst einen Überblick über das französische Hauptnetz, über die Berechnungsgrundlagen und die Anschlußpunkte des Meridians von Paris, von denen die Triangulation der deutschen Heeresvermessung ausgeht. Dann folgt eine Beschreibung des zu berechnenden Netzes. Hiernach umfassen die 3 neu zu berechnenden

Hauptketten 83 Neu- und 9 Altpunkte, also insgesamt 92 Punkte mit 432 Richtungen und 3 Grundlinien (Mt. St. Michel, Brest und La Rochelle). Die Orientierung der Ketten erfolgte durch Zwangsanschluß an den Meridian von Paris. Die Beobachtungen selbst wurden für den Parallel Paris (westl. Teil) und den Parallel Rochefort von der deutschen Heeresvermessung und vom französischen Institut Géographique National 1939 — 1942 durchgeführt. Für den Meridian von Bayeux wurden die alten vom „Corps des Ingenieurs - Géographes“ 1818 — 1819 durchgeführten Messungen übernommen.

Die Netzausgleichung erfolgte nach dem Boltzschen Entwicklungsverfahren, wobei nach der Reduktion der Richtungsbeobachtungen und Grundlinien alle Berechnungen eben im System Lambert Zone Centrale durchgeführt wurden.

Mit Rücksicht auf den Zwangsanschluß an 9 koordinatenmäßig vorgegebene Altpunkte ergaben sich für die Netzausgleichung insgesamt 177 Bedingungsgleichungen, und zwar

- 125 Dreieckswinkelgleichungen,
- 35 Seitengleichungen,
- 8 Anschlußwinkelgleichungen,
- 6 Basisgleichungen,
- 3 Polygonegleichungen.

Maly ergänzt seine Ausführungen über die Netzausgleichung und Netzberechnung noch durch eine kurze Beurteilung der Beobachtungs- und Rechengenauigkeit, die einen bemerkenswerten Einblick in die unterschiedliche Genauigkeit gibt, die auftritt, wenn ältere und neuere Beobachtungen und Beobachtungen verschiedener Institute verknüpft werden müssen. Mit solchen Verhältnissen hat sich die Kriegsvermessung in der Regel zu befassen, weil die Kürze der Termine Nachmessungen zur Verbesserung von Schönheitsfehlern kaum zuläßt. Mit Rücksicht hierauf werden in der Kriegsvermessung auch bei Arbeiten I. O. von vornherein ganz mit Recht die Fehlergrenzen gegenüber unseren zivilen Anforderungen vielfach erweitert. Der offene Hinweis Malys auf die Mängel in der Beobachtung und sein Versuch, durch eine geschickte Anordnung der Ausgleichung diesem zu begegnen, macht die vorliegende Arbeit für jeden Fachmann besonders lesenswert. Dies gilt in gleicher Weise für die im Schlußwort zusammengefaßten Angaben über den Aufwand an Zeit und Rechenkräften.

Im Hauptteil der Arbeit sind in Anlage 1 die geographischen und die rechtwinklig ebenen Koordinaten im System Lambert I (Zone Nord) und im System Lambert II (Zone Centrale) der Neupunkte zusammengestellt. Anlage 2 enthält für sämtliche Stationen die beobachteten sphäroidischen Richtungen, dann die Reduktionen wegen der Höhe der Zielpunkte und zum Übergang von den Normalschnitten zu den geodätischen Linien sowie die verebneten Rich-

tungen und die endgültig ausgeglichenen Richtungen mit den zugehörigen Reduktionen und Verbesserungen. Anlage 3 enthält die Widersprüche der Bedingungsgleichungen vor und nach der Ausgleichung. In Anlage 4 sind dieselben Angaben wie in Anlage 2 und 3 für die 3 Basisnetze Brest, Mt. St. Michel und La Rochelle zusammengestellt. Anlage 5 bringt eine Netzübersicht über die 3 beobachteten Dreiecksketten mit den Namen der Alt- und Neupunkte. Anlage 6 enthält dieselben Angaben und die Numerierung der in die Ausgleichung einbezogenen Richtungen. Die Basisnetze sind in Anlage 7 dargestellt. Die Anlagen 8 und 9 enthalten Formblätter für die Azimutreduktion und für die Umformung rechtwinkliger Lambertscher Koordinaten in geographische Koordinaten und umgekehrt. Den Schluß der Arbeiten bilden Festpunktbeschreibungen in der truppenüblichen Form, die noch durch besondere Ergänzungen zu den Festpunktbeschreibungen vervollständigt werden.

2.

Die mit sehr guten Bildern ausgestattete Arbeit von Leutnant Gigas über die deutschen Basismessungen in Frankreich bringt einleitend das Basismessprogramm. Dieses umfaßt neben 2 Messungen zur Eichung der Invardrähte in Potsdam, die zu Beginn und am Ende der Messungen durchgeführt wurden, die mehrmalige Messung der Vergleichsstrecke Brest, dann die Basismessung Brest und La Rochelle und die gemeinsame Messung des Vergleichskilometers Dax. Die Messungen wurden mit je 3 bis 6 Drähten des Reichsamts für Landesaufnahme durchgeführt. Anschließend gibt Gigas einen Überblick über die Besonderheiten der Basismessung in Frankreich und die bei Drahtmessungen zu beachtenden Korrekturen. Auf diese allgemeinen Ausführungen folgt dann eine eingehende Beschreibung der Durchführung der praktischen Messungen und die Mitteilung aller Zwischen- und Endergebnisse mit sämtlichen Verbesserungen und Reduktionen. Im einzelnen enthalten:

- Tabelle 1 alle Angaben für die 1. Eichung der Drähte auf der Vergleichsbasis in Potsdam,
- Tabelle 2 die erste Bestimmung der Länge der Vergleichsbasis bei Brest,
- Tabelle 3 die 2. Eichung der Drähte in Potsdam,
- Tabelle 4 die abschließenden Messungen auf der Vergleichsstrecke bei Brest,
- die Tabellen 5 — 7 die Eichung der Drähte auf der Vergleichsstrecke in Brest und die Messung der Basis Brest,
- die Tabellen 9 — 11 die Messung der Basis La Rochelle und endlich
- Tabelle 12 das Ergebnis der Messungen auf dem Vergleichskilometer der Basis bei Dax.

Ein Vergleich der französischen und deutschen Messungsergebnisse in Dax schließt die Arbeit von Gigas, die durch die Mitteilung aller Einzelergebnisse allen Geodäten einen besonders lehrreichen Einblick in die Technik und die Genauigkeit moderner Basismessungen vermittelt.

Beachtet man bei der Gesamtbeurteilung des Heftes 1, daß die Triangulation in Westfrankreich das Rückgrat der gesamten deutschen Kriegsvermessung und -kartographie in Frankreich bildet und daher in bezug auf die zur Verfügung stehenden Mittel und vor allem aber in bezug auf die Einhaltung der vorgeschriebenen Termine fast ausschließlich auf die Erfordernisse der Truppenvermessung ausgerichtet werden mußte, so darf man wohl ruhig feststellen, daß die in Heft 1 niedergelegten Ergebnisse zeigen, daß die deutsche Kriegsvermessung bei dieser gewaltigen Arbeit sowohl in der Planung als auch in der Art der Durchführung und Fertigstellung allen praktischen und technischen Anforderungen vollauf gerecht wurde.

