



2. Jahrgang

Heft 7

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Juni 1943

I N H A L T :

- Oberst Dr. Douglas und Dr. L. Gröger: Zur Frage der russischen Ortsnamenverzeichnisse S. 3
- Wachtmeister Dr. Ledersteger: Die absolute astronomische Orientierung der Großraumtriangulationen S. 8
- Obltn. Dr.-Ing. habil. Kneißl: Die Bowie-Methode des U. S. Coast and Geodetic Survey S. 23
- Leutnant E. Gigas: Betrachtungen zur russischen Dienstvorschrift über die Basismessung I u. II. Ordnung (1940) . S. 50
- Dr.-Ing. K. Hubeny: Koordinatenumformungen im rumänischen Küstengebiet S. 56

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin

1424

GAZK
1718

*Kartennachricht in Mapp
Der Vermessungs-
Nr. 123
V. Pöschel*



2. Jahrgang

Heft 7

MITTEILUNGEN

des Chefs des
Kriegs-Karten- und Vermessungswesens

Juni 1943

I N H A L T:

- Oberst Dr. Douglas und Dr. L. Gröger: Zur Frage der russischen Ortsnamenverzeichnisse S. 3
- Wachtmeister Dr. Ledersteger: Die absolute astronomische Orientierung der Großraumtriangulationen S. 8
- Obltn. Dr.-Ing. habil. Kneißl: Die Bowie-Methode des U. S. Coast and Geodetic Survey S. 23
- Leutnant E. Gigas: Betrachtungen zur russischen Dienstvorschrift über die Basismessung I. u. II. Ordnung (1940) . S. 50
- Dr.-Ing. K. Hubeny: Koordinatenumformungen im rumänischen Küstengebiet S. 56

Herausgegeben vom
Oberkommando des Heeres, Generalstab des Heeres
Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens
Berlin

Die Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens erscheinen in zwangloser Folge in jährlich etwa sechs Heften. Sie werden vom Chef des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens übersandt, eine Veröffentlichung im Buchhandel erfolgt vorläufig nicht. Abdruck nur mit Genehmigung des Kr.Kart.Verm.Chefs.

Beiträge sind zu richten an OKH./GenStdH./Kr.Kart.Verm.Chef, Berlin W 35, Lützowstraße 60



Von den Angehörigen der Truppen und Dienststellen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens starben für Führer und Vaterland:

Uffz. Herrmann, Willi, Lithograph, Zeichner in einer Div.-Kart.-Stelle, gestorben an Fleckfieber am 14. 6. 1942 in Rußland.

Kan. Stenchly, Heinz, Holzarbeiter, Signalbauer in einer Verm.- u. Kart.-Abt. (mot), verstorben an schwerer Verwundung am 11. 2. 1943 in Cholmskaja, Rußland.

Zur Frage der russischen Ortsnamenverzeichnisse

Von Oberst Dr. Douglas und Dr. L. Gröger

Die Notwendigkeit von Ortsnamenverzeichnissen für den russischen Raum — die besetzten Ostgebiete, die Kampfzone und das russische Hinterland — ist offensichtlich und ihre Bedeutung für die Kriegführung als auch für die zivilen Belange so groß, daß hierüber nichts gesagt zu werden braucht. Der Grund, weswegen es am Ende des zweiten Kriegsjahres immer noch keine praktisch verwendbaren Ortsverzeichnisse gibt, ist allein in den vielen Schwierigkeiten und in der Größe der Aufgabe zu suchen. Auch von den Sowjets sind bisher noch keine eingehenden Ortsverzeichnisse erbeutet worden, die man der Bearbeitung von Ortsverzeichnissen hätte zugrunde legen können.

Das größte Hindernis liegt darin, daß die russischen Kartenwerke der verschiedenen Maßstäbe nicht aufeinander abgestimmt sind. Die Ortsnamen sind nicht buchstabenmäßig festgelegt, sondern je nach dem Sprachgefühl des betreffenden Bearbeiters mehr oder weniger großen Abweichungen unterworfen, die für den russischen Kartenbenutzer meist belanglos sind, für die Herstellung von Ortsverzeichnissen und für den deutschen Kartenbenutzer aber eine große Erschwerung bedeuten. Die sich hieraus ergebende Notwendigkeit, den Ortsnamen eine endgültige Fassung zu geben, bevor die Herstellung von Ortsverzeichnissen ernstlich in Erwägung gezogen werden kann, ist die größte Schwierigkeit, die bei der Aufstellung von russischen Ortsverzeichnissen zu überwinden ist.

Hinzu kommt noch, daß sich die deutschen Heereskarten auf den russischen Beutekarten aufbauen und durch die kriegsmäßige Kartenherstellung unvermeidbare Umschriftungs-, Schreib- und Druckfehler aufweisen, die die zu überwältigenden Schwierigkeiten nur noch erhöhen, denn trotz der verschiedensten Bemühungen ist bisher immer noch keine völlig einwandfreie Übereinstimmung in den verschiedenen Kartenwerken erreicht worden.

Im nachfolgenden wird versucht nachzuweisen, daß dennoch eine Aufstellung von russischen Ortsverzeichnissen durchführbar ist und daß diese eine sehr wesentliche Hilfe, ja vielleicht sogar die notwendige Voraussetzung für die Ausrichtung und Verbesserung unserer gesamten russischen Heereskarten sein könnten.

Eine so große Arbeit, wie es die vorgeschlagene Herstellung der Ortsnamenverzeichnisse ist, kann nur durch Zusammenarbeit vieler befriedigend gelöst werden. Dazu bedarf es aber einer eingehenden und ausführlichen Planung. Die Verfasser sind für Hinweise und jede weitere Anregung dankbar und bitten um dementsprechende Angaben.

Warschau C 1, Fach 210.

I.

Die Anforderungen, die an ein tatsächlich praktisch verwendbares Ortsnamenverzeichnis des russischen Raumes zu stellen sind, ergeben sich aus nachstehenden Ausführungen.

1. Das Ortsnamenverzeichnis müßte alle Ortsnamen der Grundkarte, d. h. des für den Bereich bestehenden größtmaßstäblichen Kartenwerkes, somit sämtliche Ortschaften und die auf der Karte angegebenen Einzelhöfe enthalten. Für den russi-

schen Raum wäre als Grundlage für die Ortsnamenverzeichnisse die Originalkarte 1:100000 zu wählen.

2. Ein so gewaltiger Raum, wie es der russische ist, muß für die Herstellung von übersichtlichen und praktischen Ortsnamenverzeichnissen in Teilgebiete zerlegt werden. Da mit feststehenden Grenzen nicht gerechnet werden kann, erscheint es am zweckmäßigsten weder Landes- noch Verwaltungsgrenzen zu nehmen sondern nur rein kartenmäßige Begrenzungen zu verwenden. Am besten eignet

sich hierfür der Blattschnitt der Internationalen Weltkarte 1 : 1 Million, auf dem ja auch die Blatteinteilung sämtlicher moderner russischer Kartenwerke beruht.

3. Da die Gewässer-, Berg- und Flurnamen in Rußland, namentlich in den schwächer besiedelten Gebieten von großer Bedeutung sind, erscheint es angebracht, die Ortsverzeichnisse auch auf diese Namen nach der Karte 1 : 100 000 auszudehnen. Bei einer Vermischung mit den reinen Ortsnamen würde dieses Namenverzeichnis an Übersichtlichkeit verlieren, daher wäre es zweckmäßiger diese Namen als Anhang dem Ortsnamenverzeichnis anzugliedern.

Ein diesen Forderungen Rechnung tragendes Ortsverzeichnis würde es ermöglichen, jeden gewünschten Namen, dessen Lage auf einem oder dem anderen Millionenblatt vermutet werden kann, sofort auf der Karte 1 : 100 000, wie auch auf Karten anderer Maßstäbe aufzufinden.

Aus Vorstehendem ergeben sich die für die Herstellung der Ortsverzeichnisse notwendigen Voraussetzungen, nämlich das Vorhandensein von Beutekarten 1 : 100 000 und die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Kartenwerken.

Es erscheint nicht zweckmäßig, für das Ortsverzeichnis allein die Namen eines bestehenden Kartenwerkes, z. B. der Truppenkarte 1 : 100 000, zu verwenden. Unsere kriegsbedingten Truppenausgaben sind noch mit mancherlei Unzulänglichkeiten behaftet und bedürfen, da sie von vielen Stellen bearbeitet worden sind, dringend der Ausrichtung. So sind beispielsweise die bei russischen Ortsnamen häufig auftretenden russischen Abkürzungen für Groß-, Klein-, Alt-, Neu- usw. in manchen Blättern vorschriftsmäßig mit Bolschoi-, Malo-, Staro-, Nowo- usw. umschrieben, in anderen ist nur Bol., Mal., Star., Now. gebracht und wiederum andere Stellen schreiben Groß-Petrowka, Klein-Shuchowtschi, Alt-Dmitrijewka, Neu-Afanassjewo, usw. Wenn auch die Namen mit der Leitnamenkarte verglichen werden, so ist das nur ein geringer Teil der Ortsnamen und die Ausrichtung und Vereinheitlichung der übrigen hätte trotzdem noch zusätzlich zu erfolgen.

Ein Blick auf die Übersichtskarte für die vorhandenen Beutekarten 1 : 100 000 (Abb. 1) zeigt, daß man z. Z. bereits 12 Ortsnamenverzeichnisse für die Blattbereiche O—35, 36, N—35, 36, 37, M—35, 36, 37, L—36, 37, P—36 und Q—36 herausgeben kann. Was die Blattbereiche O—37, L—38 und R—36 betrifft, ist erst der Eingang weiteren Beutematerials 1 : 100 000 abzuwarten. Dagegen ist es einstweilen unwesentlich, daß bei

den Bereichen P—36, O—36, N—37 und M—37 vereinzelte Kartenblätter 1 : 100 000 noch fehlen, die erst nach Eingang als Nachträge zu den Ortsverzeichnissen ausgewertet werden könnten.

Aus praktischen Gründen wird man das Einteilungsprinzip nach den Blattbereichen der WK 1000 nicht ganz streng einhalten und in den Bereichen O—35, N—35, M—35 und L—36 die westlich in den Blättern O—34, N—34 und M—34 angrenzenden, nicht allzu großen ehemals russischen Gebiete mit hinzunehmen. Einem jeden Ortsnamenverzeichnis beigefügtes Übersichtsblatt, und ein entsprechender Hinweis im Titelblatt, dürften zur Kenntnisnahme des erweiterten Blattbereiches genügen. Beim Blatt M—35 ist zu überlegen, ob die kleinen rumänischen und ungarischen Gebietsanteile nicht aus dem Verzeichnis ausgelassen werden sollen.

II.

Die Aufstellung der Ortsnamenverzeichnisse erfolgt, wie schon erwähnt, am zweckmäßigsten nach den Kartenblättern 1 : 100 000. Alle Namen, die diese Kartenblätter enthalten, werden in das Ortsnamenverzeichnis übernommen, ebenso auch die einzelnen erläuternden Zusätze wie z. B. Klch., Swch., Arbeitersiedlung, Gut usw. Bei allen Ortsnamen, bis auf die Städte und einige wenige Ausnahmen, wo die Häuserzahl in der Karte nicht angegeben ist, wird diese gleichfalls in Klammern neben den Ortsnamen in das Ortsnamenverzeichnis eingetragen. Bei Städten tritt an Stelle der Häuserzahl die Einwohnerzahl in Tausenden, die aus der Karte 1 : 500 000 oder aus russischen Statistiken entnommen werden kann. Die Städte selbst werden am besten fett gedruckt, damit sie als solche im Verzeichnis leichter erkennbar sind.

Die Ortslage ist durch die Nummer der Blätter 1 : 100 000 gegeben, wobei die zusätzlichen Buchstaben A—D die einzelnen Blattviertel anzeigen.

Um die Auffindung des Ortes auf dem Kartenblatt noch mehr zu erleichtern, wird in je 2 Ziffern die Kilometerzahl der Rechts- und Hochwerte des DHG angegeben. Diese Zahlenangaben ermöglichen ein sofortiges Auffinden des Ortes.

Um eine noch handliche Form des Ortsnamenverzeichnisses zu erhalten, ist es ratsam, das Format Din A 4 zu wählen. Die Ortsnamen können in 2 Spalten zu je 50—60 Namen gesetzt werden. Somit würde ein Ortsnamenverzeichnis in den dichtbesiedelten Westgebieten Rußlands in dieser Form 300—350 Seiten umfassen.

Als Muster für ein russisches Ortsnamenverzeichnis sind Namen aus dem SW-Viertel des Kartenblattes N—35—32 gebracht (s. Anhang).



Abb. 1

III.

Bei der Aufstellung der Ortsnamenverzeichnisse ist es zweckmäßig, von den russischen Beuteoriginalen 1:100 000 auszugehen. Die nochmalige deutsche Umschriftung dauert bei einem geübten Sprachmittler nicht viel länger als das gewöhnliche Schreiben der Namen. Gleichzeitig wird die Häuserzahl, bzw. auch die Erläuterung zum Ortsnamen und die Lage des Ortes nach dem Viertelblatt 1:100 000, wie auch nach den DHG-Koordinaten ermittelt und eingetragen.

Der weitere Arbeitsgang besteht darin, daß die so erhaltenen Namenslisten mit der Truppenausgabe 1:100 000 verglichen werden, was keine Schwierigkeiten macht, da die Ortsnamen der Reihe nach gegeben sind. Mit diesem Arbeitsgang wird gleichzeitig die Truppenausgabe systematisch durchkontrolliert und auch ein Verzeichnis der Fehler der Truppenkarte (das vervielfältigt allen in Frage kommenden kartenbearbeitenden Stellen zugeleitet werden könnte) als Berichtigungsunterlage für die eventuelle spätere Neuausgabe derselben gewonnen. Bei Abweichungen, die keine bloßen Umschriftungs- oder Schreibfehler sind, wird man der Ursache nachgehen können und gegebenenfalls das Verzeichnis oder die Quelle berichtigen, aus der die abweichenden Angaben stammen.

Weiter kann festgestellt werden, ob die in der Leitnamenkarte gebrachten Namensformen eingehalten sind. Gleichzeitig lassen sich auch die im Maßstab 1:500 000 vorkommenden Ortsnamen im Verzeichnis gesondert hervorheben, z. B. durch einen Stern oder ein anderes Zeichen. Beim Vorliegen von Unterschieden wird die Frage nach einer jeden einzelnen Abweichung endgültig zu klären und zu entscheiden sein.

Schließlich kann der Vergleich auch beim Maßstab 1:1 Million durchgeführt werden, wobei die dort vorkommenden wenigen Namen gegebenenfalls durch 2 Sterne bezeichnet werden könnten usw.

Als Ergebnis wird man nicht nur ein für den praktischen Gebrauch fehlerfreies Ortsverzeichnis erhalten, sondern, was vielleicht ebenso wichtig ist, endgültige Klarheit und Übereinstimmung in die verschiedenen Kartenwerke hineingebracht haben, wenn auch nicht gleich in Gestalt einer Neuauflage (denn dazu müßte man die gesamte russische Kartenausstattung neu drucken), so doch in einwandfreien Berichtigungsunterlagen für sämtliche Maßstäbe. Die tatsächliche Übereinstimmung der Karten ist dann, eine gründliche und sachverständige Vorarbeit vorausgesetzt, nur noch eine Frage der Zeit und des Bedarfs nach einer neuen Auflage des betreffenden Kartenblattes.

Nun folgt die alphabetische Ordnung der Ortsnamen (am zweckmäßigsten ist wohl das Zerschneiden der Listen und das Aufkleben der geordneten Namen) und, falls erforderlich, die Herstellung der zusätzlichen Verzeichnisse sowohl für die Gewässer-, Berg- und Flurnamen als auch für die in manchen Gebieten sehr wesentlichen anderssprachigen Namensformen, da ja diese in der Karte 1:100 000 nicht vorhanden sind.

Beim Blattbereich N—35 wäre es z. B. erwünscht und zweckmäßig, dem Ortsnamenverzeichnis noch 2 weitere kleine Verzeichnisse anzugliedern, in denen die bekannten abweichenden weißruthenischen und polnischen Namensformen für die Städte und größeren Dörfer gegeben sind, bezogen auf die russischen Namensformen des Ortsverzeichnisses. Man kann bei einem weißruthenischen bzw. polnischen Ortsnamen aus diesem Blattbereich dann feststellen, welcher russische Name gemeint ist und wo der betreffende Ort sich befindet.

Was die abweichenden deutschen Namensformen betrifft, die für vereinzelte Städte usw. eingeführt sind, wird es, da diese Namen ja auf der Karte vorhanden sind, zweckmäßig sein, sie in das allgemeine Ortsnamenverzeichnis einzuordnen. Die betreffenden Ortschaften können dann im Verzeichnis zweimal gesetzt werden, einmal in der deutschen Form mit der in Klammern hinzugefügten russischen Namensform (so wie sie auch in der Karte tatsächlich eingetragen sind), das andere Mal nach der in Klammern gegebenen russischen Namensform mit hinzugefügtem deutschen Namen.

IV.

So ein Ortsnamenverzeichnis ließe sich auch noch weiter ergänzen und ausbauen. So wäre es vielleicht ratsam im Verzeichnis die richtige Betonung durch Fettdruck des betonten Vokals anzugeben, eine Verbesserung, die fast keine Mehrarbeit verursacht, jedoch wertvoll sein kann.

Des weiteren lassen sich ins Ortsnamenverzeichnis auch leicht Angaben einflechten über gänzlich oder teilweise zerstörte Ortschaften usw.

Ihre größte Bedeutung werden die Ortsnamenverzeichnisse erst in Zukunft erlangen, wenn die früher oder später unausbleibliche Ausmerzungen der bolschewistischen Namen und auch andere Umbenennungen z. B. beim Übergang auf ukrainische Namen an Stelle der russischen zur Durchführung kommen.

V.

Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob der in Abschnitt III skizzierte Weg nicht zu umständlich ist. Wo jetzt im Kriege mit dem Einsatz von

Arbeitskräften sparsam vorgegangen werden muß und wo entsprechend gut geschultes Personal überhaupt schwer zu erlangen ist, wäre es denkbar, die Herstellung der Ortsnamenverzeichnisse zu vereinfachen, z. B. durch alleinige Benutzung der Truppenausgaben auch mit Hilfe ungeschulten Personals.

Vor einer derartigen Lösung ist aber zu warnen, denn ein Ortsnamenverzeichnis ist nur dann wirklich brauchbar, wenn es auch genau und zuverlässig ist. Diese Einsparung der Arbeit würde aber den Verzicht auf die sonst mögliche Vereinheitlichung und Verbesserung der Kartenwerke bedeuten.

Ortsnamenverzeichnis

N—35

Anhang

Die eingeklammerten Zahlen neben den Ortsnamen geben die Anzahl der Häuser an. Bei Städten ist an Stelle der Häuserzahl die Einwohnerzahl nach Tausenden gebracht, z. B. Glemboke (Glubokoje) E 8. Die Mittelspalte nennt das Kartenblatt 1:100 000, wobei die Buchstaben A—D das entsprechende Viertel bezeichnen. Die letzte Spalte enthält in je zwei Ziffern die km-Zahlen der Rechts- und Hochwerte des DHG-Planquadrats. Bei den Ortsnamen sind die betonten Vokale durch Fettdruck hervorgehoben.

Bereswetsch (9)	32—C	4214	Naddatki (5)	32—C	4406
Blishne (2)	32—C	3804	Nedswjadki (13)	32—C	4408
Blyshki (4)	32—C	4008	Nowossjulki (27)	32—C	4402
Boryskowschtschisna (14)	32—C	3802	Nowossjulki (49)	32—C	3212
Chmelno (9)	32—C	4004	Olchowiki (25)	32—C	3206
Choroschki (44)	32—C	4408	Patschki (13)	32—C	3614
Chutor-, s. den Eigennamen			Petruwka (4)	32—C	4406
Dobranowo (4) Gut	32—C	3298	Pjaski (3)	32—C	4604
Dsemidsenki (9)	32—C	4400	Podgaie (34)	32—C	4608
Dsemidy (10)	32—C	3414	Pryperno (66)	32—C	4206
Dserkowschtschisna (50)	32—C	3604	Pschechody (28)	32—C	3200
Dserkowschtschisna 22) Klch.	32—C	3204	Pusetschyno (3)	32—C	4604
Dubno (2)	32—C	4600	Ralowze (17)	32—C	3406
Dubruwka (2)	32—C	4298	Ramshyno (15)	32—C	4602
Girstuny (22)	32—C	3612	Repitschtsche (4)	32—C	4498
Glemboke, Klch.	32—C	4410	Rossino (3)	32—C	4698
Glemboke (Glubokoje) E 8	32—C	4412	Saikowschtschisna (16)	32—C	4402
(Glubokoje) Glemboke E 8	32—C	4412	Sajeseshe (63)	32—C	3602
Grabutsche (65)	32—C	3896			
Iwanuwka (5)	32—C	4000			
Jablönka (7)	32—C	4200			
Jalowkowschtschisna (6)	32—C	3606			
Kissele (9)	32—C	4002			
Konstantinuw, Gut	32—C	3210			
Koroby (16)	32—C	3410			
Korolewo (7)	32—C	3408			
Kosakowschtschisna (17)	32—C	4608			
Kosly (78)	32—C	4498			
Kowalewschtschisna (12)	32—C	4208			
Kuchzinschtschisna (7)	32—C	4604			
Kwatsche (58)	32—C	3206			
Laplino (67)	32—C	4402			
Latygot (40)	32—C	3200			
Lichoboloz (22)	32—C	3612			
Lopatowschtschisna (10)	32—C	4014			
Lowze (72)	32—C	4008			
Malinowschtschisna (14)	32—C	4004			
Michailuwka (30)	32—C	4414			
Murawjuwka (15)	32—C	4412			

Verzeichnis der Gewässer-, Berg- und Flurnamen

Die im Verzeichnis auftretenden geographischen Namen sind durch Abkürzungen erläutert, wie Fl., B., S. usw.

Die Mittelspalte nennt das Kartenblatt 1:100 000, wobei die Buchstaben A—D das entsprechende Viertel bezeichnen. Die letzte Spalte enthält in je 2 Ziffern die km-Zahl der Rechts- und Hochwerte des DHG, die sich auf das Objekt oder im Falle einer großen Ausdehnung desselben auf die Lage seines Namens beziehen. Bei mehrfach beschrifteten Flüssen und Kanälen entsprechen die Zahlenangaben der Lage des mittleren Namens. Bei Strömen und Küsten, welche sich über eine Anzahl von Blättern 1:100 000 erstrecken, entfallen die Zahlenangaben

Welke S.	32—C	4214
Sserwetsch S.	32—C	3600
Arshaniza Fl.	32—C	4010
Margwa Fl.	32—C	3408

Die absolute astronomische Orientierung der Großraumtriangulationen

Von Wachtmeister Dr. Karl Ledersteger

§ 1. Problemstellung

Im Zuge der Entwicklung des gegenwärtigen Krieges hat sich in vermessungstechnischer Hinsicht immer dringender das Bedürfnis nach einem einheitlichen Zusammenschluß aller europäischen Triangulationen geltend gemacht. Diese große geodätische Aufgabe, die der Chef des Kriegskarten- und Vermessungswesens bereits in Angriff genommen hat, hat nicht nur eine hohe praktische Bedeutung, sondern es darf ihre Lösung auch als eine Kulturtat ersten Ranges gewertet werden. Durch die derzeitigen Verhältnisse ist die deutsche Heeresvermessung gezwungen, an eine derartige Aufgabe heranzutreten. Es ist klar, daß die Lösung dieser Aufgabe nicht Selbstzweck der Heeresvermessung ist und demnach die Entwicklung von Methoden erfordert, die bei aller Einfachheit den nötigen Genauigkeitsgrad verbürgen. So wirkt die Problemstellung der Heeresvermessung befruchtend auf die Theorie ein, die wieder das Rüstzeug für die praktische Lösung liefern muß. Wir stellen uns daher im folgenden die Aufgabe, die astronomischen Messungsdaten möglichst einfach und exakt für die Lagerung und Orientierung der Landestriangulationen auf dem vorgegebenen Bezugsellipsoid zu verwerten. Bekanntlich sind die Lotabweichungen auch eine Funktion der Parameter der Referenzfläche. Es widerspricht aber dem kontinentalen Denken unserer Zeit, hieraus für begrenzte Gebiete sogenannte bestanschließende Ellipsoide ableiten zu wollen.

Endziel der kontinentalen Großraumvermessung ist es, die verschiedenen Landestriangulationen einheitlich auf der geeignetsten Referenzfläche zu verarbeiten und in einem einheitlichen Projektionssystem koordinatenmäßig darzustellen. Die hierbei auftretenden Fragen gruppieren sich im wesentlichen um folgende vier Hauptprobleme:

1. Wahl der Referenzfläche
2. Netzausgleich
3. Netzzusammenschluß
4. Astronomische Festlegung.

Man ist meist geneigt, die ersten drei Fragenkomplexe als rein geometrische und analytische Probleme aufzufassen und bloß der Laplaceschen Punktbestimmung und ihrer Verwertung eine physikalische Sonderberechtigung zuzuerkennen. Je größer aber die Räume sind, die einer gemeinsamen Bearbeitung unterzogen werden sollen, desto mehr wird die Wahl der Bezugsfläche ein physikalisches Problem und desto mehr wird es ratsam, die Frage der Netzzusammenschlüsse nicht bloß nach geometrischen Gesichtspunkten zu lösen. Selbstverständlich wird man infolge der geringfügigen Unterschiede zwischen Niveausphäroid und Rotationsellipsoid die großen analytischen Vorteile des letzteren nie preisgeben. Aus einem ähnlichen Grunde dürften auch kaum jemals dreiaxige Ellipsoide als Referenzflächen in Frage kommen. Solange man nicht in der Lage ist, das dem Niveausphäroid entsprechende mittlere Erdellipsoid für die Berechnung der Triangulationen heranzuziehen, wird die Wahl der Bezugsfläche immer mit einer gewissen Willkür behaftet bleiben.

Es ist hier nicht beabsichtigt, die zur Verfügung stehenden Bezugsflächen kritisch zu sichten. Wir wollen daher an dieser Stelle nicht untersuchen, ob das Hayfordsche oder Besselsche Ellipsoid für eine einheitliche Bearbeitung der Triangulationen von Eurasien und Afrika dem Clarkeschen Ellipsoid vorzuziehen ist. Die größere Abplattung der Erdfigur in Indien sowie die bisher vorliegenden Schwerewerte, die bei Bedachtnahme auf die theoretisch begründete Minimumeigenschaft der Schwerestörungen auf einen größeren Abplattungswert des Niveausphäroids führen, sprechen eher dagegen. Es dürfte also aller Wahrscheinlichkeit nach die Abplattung des mittleren Erdellipsoides größer als 1:297 sein. Solange die strittige Frage nach den Geoidundulationen noch einer eingehenden Klärung bedarf und die Bestimmung der Parameter des Niveausphäroides oder des mittleren Erdellipsoides aus den Gradmessungen auf potentialtheoretischer Grundlage noch aussteht, wird man die Herleitung der geeignetsten Bezugsfläche nach dem Vorgange Hayfords am besten nach isostatischen Gesichtspunkten vornehmen. Die isostatische Reduktion rechnet ja die Undulationen des

Geoides weg und ist daher geeignet, die Abplattung des Niveausphäroids zu liefern, wenn man die Hayfordsche Methode auf breiter Grundlage und unter Rücksichtnahme auf eine möglichst symmetrische Verteilung der heranzuziehenden Gradmessungen wiederholt.

Man spricht im allgemeinen davon, daß die geodätische Lagebestimmung gegenüber der astronomischen Ortsbestimmung durch eine wesentlich größere Genauigkeit ausgezeichnet ist. Dies hat nur teilweise Berechtigung. Denn die astronomische Winkelmeßgenauigkeit ist trotz der schwierigeren Beobachtungsbedingungen im wesentlichen der geodätischen gleichwertig. Selbst der Umstand, daß ihre Fehler, als horizontale Lagefehler gedeutet, sich im Verhältnis des Erdradius zu einer Seite des Dreiecksnetzes erster Ordnung vergrößert auswirken, fällt noch nicht allzusehr ins Gewicht. Das ausschlaggebende Argument ist, daß sich die astronomischen Messungen unmittelbar auf das Geoid beziehen, also mit der Unsicherheit der Lotabweichungen behaftet sind. Dafür aber ist die geodätische Punktlagegenauigkeit nur eine relative. Der Ausgangspunkt einer Landestriangulation muß ja auf astronomischem Wege, mithin absolut bestimmt werden, und seine Lageunsicherheit erstreckt sich über das ganze Netz. Solange wir nur ein Netz allein betrachten, ist dies belanglos. Denn die Krümmungsverhältnisse der mathematischen Erdfigur, beziehungsweise des Referenzellipsoides ändern sich so langsam, daß sich der Lagefehler des Hauptpunktes in der gegenseitigen Lage der einzelnen Netzpunkte, auf die es allein ankommt, nicht auswirkt. Dies ist der Grund hierfür, daß man in der Landesvermessung der absoluten Lagebestimmung nur eine untergeordnete Rolle beimißt und das Hauptaugenmerk auf die astronomische Orientierung des Netzes richtet, also vorwiegend auf die Festlegung der Ausgangsrichtung durch eine Azimutmessung im Triangulationshauptpunkt.

Die Verhältnisse ändern sich aber sofort, wenn man größere Netzkomplexe ins Auge faßt. Schon beim Zusammenschluß verschiedener Landestriangulationen mit selbständigen Ausgangspunkten zeigt sich dies. Bei den in der heutigen Praxis üblichen, rein geometrischen Netzzusammenschlüssen wird das eine Netz festgehalten, das andere aber differentiell auf dem Referenzellipsoid verschoben und verdreht, bis die in den Nahtpunkten übrigbleibenden Klaffungen in ihrer Quadratsumme zu einem Minimum werden. Es ist ohne weiteres möglich, daß bei dieser Art der Anfoderung die Orientierung des zweiten Netzes verschlechtert wird, daß also eine an sich problematische „Lageverbesserung“ auf Kosten der Orientierung erreicht wird. Wesentlich besser dürfte es sein, wenn man vorerst unter weitgehender Ausnutzung der Kontrollmöglichkeiten, die die Lotabweichungen liefern, Lage und Orientierung der einzelnen Netze auf mehr physikalischer Grundlage verbessert und den nachträglichen Netzzusammenschluß durch eine bloße Verschiebung beider Netze erwirkt. Man trägt so der relativen Lageunsicherheit Rechnung, ohne die verbesserte, bis zu einem gewissen Grade absolute Orientierung aufzugeben. Das weiter unten entwickelte Näherungsverfahren liefert nicht nur trotz aller Einfachheit sehr verlässliche Resultate, sondern es gestattet auch die Ausnutzung älteren astronomischen Materials. Als besonderer Vorzug kann es nämlich gelten, daß neben den Laplaceschen Punkten auch alle „Lotabweichungspunkte“, d. h. alle Punkte, in denen bloß Polhöhe und Azimut astronomisch bestimmt wurden, eine rein geodätische Verwertung finden, und daß man gleichsam als Nebenprodukt ein Lotabweichungssystem erhält, das umsomehr als absolut bezeichnet werden darf, je größer der zugrundeliegende Netzkomplex ist.

§ 2. Die absolute Orientierung

Ein tieferes Eingehen auf die hier skizzierten Gedanken wird immer deutlicher zeigen, daß man die angestrebte bestmögliche Orientierung nicht erreichen kann, wenn man von der astronomischen Lageverbesserung der Netze abstrahiert. Dieser Mangel haftet aber allen modernen Näherungsverfahren an, deren Ziel es ist, die Laplaceschen Punkte von vornherein zur dauernden Orientierungskontrolle zu verwerten. Man verwendet hierzu die bekannte Laplacesche Gleichung

$$(\alpha' - \alpha) - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi = 0, \dots \dots \dots (1)$$

die eine theoretische Beziehung zwischen den astronomischen (α' , λ') und geodätischen (α , λ) Azimuten und Längen darstellt. Im Triangulierungshauptpunkt werden in der üblichen Weise die geodätischen und astronomischen Koordinaten gleichgesetzt, so daß die Laplacesche Bedingung zwangsweise erfüllt ist. Werden nun zwei Laplacesche Punkte durch eine Dreieckskette miteinander verbunden, so liefert

der rein geometrische Ausgleich dieser Kette die geodätischen Koordinaten für den Endpunkt. Stellt man diese den astronomischen Werten gegenüber, so erhält man den Laplaceschen Widerspruch:

$$(\alpha' - \alpha)_K - (\lambda' - \lambda)_K \sin \varphi_K = w_K \dots \dots \dots (2)$$

Die hier auftretenden Lotabweichungen in Länge und Azimut sind natürlich bloß relativ. Selbst wenn wir die astronomischen Messungen als fehlerfrei voraussetzen dürfen, so erhebt sich doch die Frage, inwiefern wir die Laplaceschen Widersprüche geodätisch deuten können.

Die nächstgelegene Annahme ist die einer unbekanntenen absoluten Lotabweichung im Fundamentalpunkt. Die Ostwestkomponente

$$\eta_0 = (\lambda' - \lambda)_0 \cos \varphi_0 = (\alpha' - \alpha)_0 \cotg \varphi_0 \dots \dots \dots (3)$$

dieser Lotabweichung führt wieder auf Gleichung (1) zurück und es läßt sich zeigen, daß in diesem Falle die Änderung der Laplaceschen Widersprüche w_K in allen übrigen Laplaceschen Punkten verschwindend klein ist. Einen strengen Beweis hierfür hat Kneißl¹⁾ erbracht, er geht aber einfacher aus unserer späteren Gleichung (12a) hervor, wenn man bedenkt, daß $\cos \left(\frac{s}{a}\right)$ sehr nahe 1 ist und da_0 und $d\lambda_0$ in diesem Falle die Lotabweichung η_0 repräsentieren.

Bei vorausgesetzter Fehlerfreiheit der astronomischen Messungsdaten kann daher der Widerspruch w_K bloß aus Fehlern in den geodätischen Längen λ_K und Azimuten α_K erklärt werden. Da nun z. B. in unseren Breiten einem Längenunterschied von 1" bereits eine lineare Ostwestverschiebung von rund 20 m entspricht, könnten merkbare Lotabweichungen in Länge bloß durch einen Maßstabsfehler des Netzes entstehen. Mit der Länge einer geodätischen Linie ändern sich aber nicht bloß die Koordinaten des Endpunktes, sondern auch das geodätische Endazimut um den Betrag der Meridiankonvergenz

$$\gamma = d\lambda \sin \varphi_K \dots \dots \dots (4)$$

Mithin wirkt sich auch eine Maßstabsänderung des Netzes im Laplaceschen Widerspruch nicht aus. Auch dies hat Kneißl²⁾ strenge bewiesen. Die auffallende formale Gleichheit des Näherungsausdruckes für die Meridiankonvergenz mit der Laplaceschen Gleichung ist übrigens kein Zufall. Denn ob wir in einem Punkt die astronomische und die ellipsoidische Lotrichtung unterscheiden oder zwei um den Betrag der Lotabweichung auseinanderliegende Punkte auf dem Ellipsoid betrachten, ist an sich gleichgültig. Immer werden die zwei Meridianebenen, die miteinander den Winkel $d\lambda$ einschließen, die Horizontebenen in zwei Geraden schneiden, deren Schnittwinkel

$$d\alpha = d\lambda \sin \varphi$$

wird.

Es bleibt somit lediglich die Annahme, daß der Laplacesche Widerspruch w_K im Azimut α_K begründet ist, daß also in der Übertragung der Azimute durch die Dreieckswinkel trotz des rein geometrischen Netzausgleiches eine Fehleranhäufung stattgefunden hat. Diesen Übertragungsfehlern kann man vorbeugen, wenn man das geodätische Azimut im Punkte k unter der Voraussetzung $w_K = 0$ aus (2) berechnet und als Zwangsbedingung in die Ausgleichung einführt. Man nennt das so gewonnene Azimut:

$$\bar{\alpha}_K = \alpha'_K - (\lambda' - \lambda)_K \sin \varphi_K \dots \dots \dots (5)$$

das Laplacesche Azimut. Über seine nähere Verwertung wird später die Rede sein. Liegen die Laplaceschen Punkte genügend weit auseinander, so darf man im allgemeinen die astronomischen Beobachtungsfehler im Laplaceschen Widerspruch gegenüber dem Fehler von α_K tatsächlich vernachlässigen, so daß der praktischen Verwendung der Laplaceschen Azimute nichts im Wege steht.

Die Laplaceschen Azimute sind aber gleichfalls eine Funktion des Ausgangsazimuts oder mehr physikalisch gesprochen, eine Funktion der Lotabweichung im Ausgangspunkt. Trotz der Elimination

¹⁾ M. Kneißl: „Abhängigkeit der Widersprüche in den Laplaceschen Gleichungen von der Lage und Dimension des gewählten Referenzellipsoides“. Zeitschr. f. Verm., 69. Jg., 1940, pag. 337—347.

²⁾ M. Kneißl: Die Abhängigkeit der Widersprüche in den Laplaceschen Gleichungen von den Beobachtungsfehlern. Zeitschr. f. Verm., 71. Jg., 1942, pag. 233—242.

der rein geodätischen Übertragungsfehler bleibt die gesamte Orientierung des Netzes eine relative. Eine absolute Orientierung würde sich auf diese Weise nur ergeben, wenn die geodätischen Ausgangskordinaten der absoluten Lotabweichung im Triangulierungshauptpunkt Rechnung tragen würden. Es wird unsere Aufgabe sein, diesem Mangel durch eine zweckentsprechende Modifikation der Bowieschen Methode Abhilfe zu schaffen.

Bevor wir aber auf die mathematischen Entwicklungen eingehen, sei noch ein wichtiger Hinweis gemacht. Es ist möglich, daß die Laplaceschen Widersprüche eines größeren Netzkomplexes ein systematisches Verhalten und damit einen von Null verschiedenen, größeren Mittelwert aufweisen. Das wird natürlich der Fall sein, wenn ein diesem Mittelwert entsprechender Laplacescher Widerspruch im Fundamentalpunkt vorliegt. Es kann dies aber auch dann eintreten, wenn die geodätischen Ausgangswerte den astronomischen gleich sind. Wir wollen etwa annehmen, daß die astronomische Ausgangslänge um den Betrag $\delta\lambda'_0$ falsch ist. Dann müßten alle geodätischen Längen um diesen Betrag korrigiert werden, um die Laplaceschen Widersprüche:

$$w_K = -\delta\lambda'_0 \sin \varphi_K$$

zum Verschwinden zu bringen. Hingegen bleibt, rein geometrisch gesehen, das Netz von einer derartigen Änderung der geodätischen Längen gänzlich unberührt, da wir ja auf einer Rotationsfläche operieren. Es wäre also grundfalsch, diesen mittleren Laplaceschen Widerspruch durch eine Verdrehung des Gesamtnetzes im Ausgangspunkt zu beseitigen, oder, was vielleicht noch näher liegt, die Längenverschiebung mit einer Drehung zu verbinden, um im Hauptpunkt wieder den Laplaceschen Widerspruch zu tilgen. In einem derartigen Falle erhält man sicher die bessere Orientierung, wenn man diese Laplaceschen Widersprüche nicht zwangsweise wegchnet, sondern für ihre Quadratsumme die Minimumbedingung ansetzt. Mathematisch formuliert besagt dies: Um eine möglichst einwandfreie Orientierung im Ausgangspunkt zu erhalten, muß man für die Herleitung der Längenverschiebung $d\lambda_0$ und der Netzverdrehung da_0 von dem durch die Lotabweichungskomponente η_0 gegebenen Zusammenhang absehen.

§ 3. Der genäherte Ausgleich der Lotabweichungen und Laplaceschen Widersprüche

Wir betrachten zunächst ein fertig vorliegendes Netz, das bloß nach seinen geometrischen Bedingungen ausgeglichen wurde und dessen Lage und Orientierung auf dem Referenzellipsoid allein durch die astronomische Messung im Fundamentalpunkt bestimmt ist. Weitere astronomische Messungen, Laplacesche Punkte oder Netzpunkte, in denen nur die geographische Breite und das Azimut einer Dreiecksseite bestimmt sind, ergeben die Möglichkeit, Lage und Orientierung des Netzes zu überprüfen. Wir verschieben und verdrehen das Netz auf der Bezugsfläche differentiell derart, daß sich die geodätischen Koordinaten nachträglich möglichst enge an die astronomischen Messungen anschließen. Zu diesem Zwecke stellen wir die Koordinatenänderung jedes Punktes in Funktion der Koordinatenänderung des Fundamentalpunktes dar. Geht man von den Differentialformeln der geodätischen Linie in der bekannten Helmertschen³⁾ Form aus:

$$\left. \begin{aligned} -d\varphi_K &= p_1 d\varphi_0 + p_2 ds_{0K} + p_3 d\alpha_{0K} \\ -\cos \varphi_K d\lambda_K &= -\cos \varphi_K d\lambda_0 + q_1 d\varphi_0 + q_2 ds_{0K} + q_3 d\alpha_{0K} \\ -\cotg \varphi_K d\alpha_{K0} &= r_1 d\varphi_0 + r_2 ds_{0K} + r_3 d\alpha_{0K} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

und vernachlässigt die unbekanntenen Verbesserungen der astronomischen Messungsdaten, so erhält man nach der Verschiebung und Verdrehung des Netzes die restlichen Koordinatenunterschiede:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K) - d\varphi_K \\ \Delta\lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K) - d\lambda_K \\ \Delta\alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K) - d\alpha_{K0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Hierin bedeuten die gestrichelten Koordinaten die astronomischen Werte. Die Gleichungen (7) gelten auch für den Fundamentalpunkt $K=0$. Fallen im besonderen daselbst die geodätischen Ausgangswerte mit

³⁾ Lotabweichungen. Heft 1, Veröff. d. Preuß. Geod. Inst., Berlin 1886.

den astronomischen zusammen, wie es das klassische Verfahren mit sich bringt, so reduzieren sich die Gleichungen auf:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_0 &= -d\varphi_0 \\ \Delta\lambda_0 &= -d\lambda_0 \\ \Delta\alpha_0 &= -d\alpha_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7a)$$

Infolge der Unkenntnis der astronomischen Verbesserung und der dem rein geometrisch ausgeglichenen Netz anhaftenden Fehler erfüllen die Werte (7) nicht die Laplacesche Bedingung. Vielmehr geht der ursprüngliche Laplacesche Widerspruch:

$$(\alpha'_K - \alpha_K) - (\lambda'_K - \lambda_K) \sin \varphi_K = w_K \dots \dots \dots (8)$$

in den „endgültigen“ Widerspruch über:

$$\Delta\alpha_K - \Delta\lambda_K \sin \varphi_K = \bar{w}_K \dots \dots \dots (8a)$$

Speziell für den Hauptpunkt stellt bei der (7a) zugrundeliegenden Annahme:

$$-(d\alpha_0 - d\lambda_0 \sin \varphi_0) = \bar{w}_0 \dots \dots \dots (8b)$$

den Laplaceschen Widerspruch dar, den wir in Kauf nehmen müssen. Setzen wir (1) in (2) ein und sehen sofort von einer Seitenänderung vollständig ab, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K) + p_1 d\varphi_0 + p_4 d\alpha_K \\ \Delta\lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K) - d\lambda_0 + q_1 \sec \varphi_K d\varphi_0 + q_4 \sec \varphi_K d\alpha_{oK} \\ \Delta\alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K) + r_1 \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 + r_4 \operatorname{tg} \varphi_K d\alpha_{oK} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Die Vernachlässigung der astronomischen Verbesserungen berechtigt uns, die Koeffizienten p, q, r in (9) sphärisch zu berechnen. Nach Helmert ist:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\cos l & q_1 &= -\sin l \sin \varphi_K & r_1 &= -\frac{\sin l}{\sin \varphi_K} \\ p_4 &= \sin l \cos \varphi_0 & q_4 &= \sin l \cos \varphi_K \frac{\cos \alpha_{Ko}}{\sin \alpha_{oK}} & r_4 &= -\cos l \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_K} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

worin l den gegen Osten positiv gezählten Längenunterschied

$$l = \lambda_K - \lambda_0$$

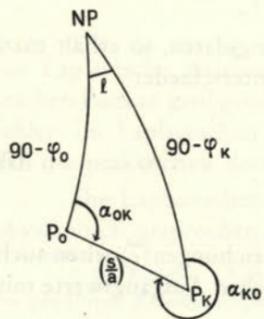
darstellt und die Azimute nordöstlich gezählt sind. Für die Laplaceschen Widersprüche finden wir:

$$\bar{w}_K = w_K + d\lambda_0 \sin \varphi_K + (r_1 - q_1) \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 + (r_4 - q_4) \operatorname{tg} \varphi_K d\alpha_{oK} \dots \dots \dots (11)$$

Dabei ist:

$$(r_1 - q_1) \operatorname{tg} \varphi_K = -\sin l \cos \varphi_K.$$

Zur Umformung von $(r_4 - q_4) \operatorname{tg} \varphi_K$ benützen wir das sphärische Dreieck zwischen Nordpol, P_0 und P_K und finden aus:



$$(r_4 - q_4) \operatorname{tg} \varphi_K = -\cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} - \sin l \sin \varphi_K \frac{\cos \alpha_{Ko}}{\sin \alpha_{oK}}$$

und:

$$\frac{\sin \left(\frac{s}{a}\right) \cos \alpha_{Ko}}{\sin \left(\frac{s}{a}\right) \sin \alpha_{oK}} = \frac{\sin \varphi_0 \cos \varphi_K - \cos \varphi_0 \sin \varphi_K \cos l}{\sin l \cos \varphi_K}$$

sofort:

$$(r_4 - q_4) \operatorname{tg} \varphi_K = -\frac{1}{\cos \varphi_K} [\cos l \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_K \sin \varphi_K - \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_K \cos l] = -\cos \left(\frac{s}{a}\right).$$

Unsere endgültigen Gleichungen sind demnach:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K) - \cos l d\varphi_0 + \sin l \cos \varphi_0 d\alpha_{oK} \\ \Delta\lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K) - d\lambda_0 - \sin l \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 + \sin l \frac{\cos \alpha_{Ko}}{\sin \alpha_{oK}} d\alpha_{oK} \\ \Delta\alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K) - \frac{\sin l}{\cos \varphi_K} d\varphi_0 - \cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} d\alpha_{oK} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

und

$$\bar{w}_K = w_K + d\lambda_0 \sin \varphi_K - \sin l \cos \varphi_K d\varphi_0 - \cos \left(\frac{s}{a}\right) d\alpha_{oK} \dots \dots \dots (12a)$$

Letztere Gleichung geht für $K=w_0=0$ wieder in (8b) über. Sind die Dimensionen des Netzes nicht zu groß, so kann man $l, (\varphi_K - \varphi_0)$ und $\left(\frac{s}{a}\right)$ als kleine Größen erster Ordnung betrachten. Dann erhält man in erster Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K) - d\varphi_0 \\ \Delta\lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K) - d\lambda_0 \\ \Delta\alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K) - d\alpha_{oK} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Die Bedingung, daß die Quadratsumme der restlichen Lotabweichungen in Länge, Breite und Azimut:

$$\Delta\varphi = \xi; \quad \Delta\lambda = \eta \sec \varphi; \quad \Delta\alpha = \eta \operatorname{tg} \varphi$$

ein Minimum werden soll, führt auf die Lösung:

$$\left. \begin{aligned} n d\varphi_0 &= \frac{n}{1}; (\varphi'_K - \varphi_K) \\ n d\lambda_0 &= \frac{n}{1}; (\lambda'_K - \lambda_K) \\ n d\alpha_0 &= \frac{n}{1}; (\alpha'_K - \alpha_K) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Sie beruht auf der im Faktor $\sin l$ zum Ausdruck kommenden weitgehenden Unabhängigkeit der Lotabweichungskomponenten voneinander.

Setzt man diese Werte in die unterdrückten Glieder von (12) ein und vereinigt diese mit den ursprünglichen Koordinatendifferenzen, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi'_K - \varphi_K)_1 &= (\varphi'_K - \varphi_K) + \sin l \cos \varphi_0 d\alpha_{oK} \\ (\lambda'_K - \lambda_K)_1 &= (\lambda'_K - \lambda_K) - \sin l \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 + \sin l \frac{\cos \alpha_{Ko}}{\sin \alpha_{oK}} d\alpha_{oK} \\ (\alpha'_K - \alpha_K)_1 &= (\alpha'_K - \alpha_K) - \frac{\sin l}{\cos \varphi_K} d\varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Um die Berechnung der Azimute zu umgehen, benützen wir in der zweiten Gleichung die bereits bekannte Beziehung:

$$\sin l \frac{\cos \alpha_{Ko}}{\sin \alpha_{oK}} = \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_K \cos l.$$

Damit wir in zweiter Annäherung:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K)_1 - \cos l d\varphi_0 \\ \Delta\lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K)_1 - d\lambda_0 \\ \Delta\alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K)_1 - \cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} d\alpha_{oK} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichungen richtet sich nach der Art der vorliegenden astronomischen Stationen. Handelt es sich um älteres Material, bei dem meist nur Polhöhe und Azimut gemessen wurde, so geht man von der Minimumbedingung

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \Sigma (\Delta\varphi_K^2 + \Delta\alpha_K^2 \cotg^2 \varphi_K) = \min$$

aus und findet für $d\varphi_0$ und $d\alpha_0$ die Lösungen:

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 l] d\varphi_0 &= [\cos l \cdot (\varphi'_K - \varphi_K)_1] \\ \left[\frac{\cos^2 l \cos \varphi_0}{\sin^2 \varphi_K} \right] d\alpha_0 &= \left[\frac{\cos \varphi_K \cos l}{\sin^2 \varphi_K} (\alpha'_K - \alpha_K)_1 \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Setzen wir diese Werte in (12) ein, so liegen $\Delta\varphi_K$ und $\Delta\alpha_K$ numerisch vor, während sich die Längengleichung in der Form

$$\left. \begin{aligned} \Delta\lambda_K &= c - d\lambda_0 \\ \text{mit:} \\ c &= (\lambda'_K - \lambda_K) - \sin l \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 + (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_K \cos l) d\alpha_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

schreiben läßt. In Anbetracht des Umstandes aber, daß mit den Gleichungen (17) bereits über die Lotabweichungskomponenten verfügt wurde, bestimmen wir $d\lambda_0$ nicht aus Gleichung (18), sondern derart, daß die Quadratsumme der restlichen Laplaceschen Widersprüche ein Minimum wird. Wir greifen zu diesem Zwecke auf Gleichung (8a) zurück und verbinden sie mit (18):

$$\bar{w}_K = \Delta\alpha_K - c \sin \varphi_K + d\lambda_0 \sin \varphi_K = c_1 + d\lambda_0 \sin \varphi_K \dots \dots \dots (18a)$$

Die Minimumbedingung führt auf:

$$d\lambda_0 = - \frac{[c_1 \sin \varphi_K]}{[\sin^2 \varphi_K]} \dots \dots \dots (19)$$

Anders wird man vorgehen, wenn die astronomischen Stationen durchweg oder in der Mehrzahl Laplacesche Punkte sind. In diesem Falle empfiehlt es sich, auf Grund der Minimumbedingung:

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \Sigma (\Delta\varphi_K^2 + \Delta\lambda_K^2 \cos^2 \varphi_K) = \min$$

vorerst die gesamte Netzverschiebung zu berechnen. Man bestimmt also $d\varphi_0$ und $d\lambda_0$ aus den Relationen:

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 l] d\varphi_0 &= [\cos l \cdot (\varphi'_K - \varphi_K)_1] \\ [\cos^2 \varphi_K] d\lambda_0 &= [\cos^2 \varphi_K \cdot (\lambda'_K - \lambda_K)_1] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

Dann nimmt die Azimutgleichung die Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha_K &= a - b d\alpha_0 \\ \text{mit} \\ a &= (\alpha'_K - \alpha_K) - \frac{\sin l}{\cos \varphi_K} d\varphi_0 \\ b &= \cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

an und der Laplacesche Widerspruch wird:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_K &= a - b d\alpha_0 - \Delta\lambda_K \sin \varphi_K = d - b d\alpha_0 \\ \text{mit:} \\ d &= a - \Delta\lambda_K \sin \varphi_K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21a)$$

Jetzt folgt die Netzverschwenkung im Ausgangspunkt aus der Minimumbedingung für die Quadratsumme der restlichen Laplaceschen Widersprüche gemäß:

$$d\alpha_0 = \frac{[bd]}{[bb]} = \frac{\left[d \cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} \right]}{\left[\cos^2 l \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_K} \right]} \dots \dots \dots (22)$$

Dieses Näherungsverfahren zur Ableitung der Netzverschwenkung und Netzverschiebung habe ich auf das reichhaltige astronomische Material der österreich-ungarischen Militärtriangulierung⁴⁾ angewendet. Die Unterschiede gegenüber den strengen Lotabweichungsgleichungen sind bei Voraussetzung der gleichen geodätischen Grundlagen äußerst klein. Die Vernachlässigung der Verbesserungen der astronomischen Beobachtungen wirkt sich übrigens um so weniger störend auf das Endergebnis aus, je reichhaltiger das astronomische Material ist. Die restlichen Laplaceschen Widersprüche hängen aber nicht allein von den Fehlern der astronomischen Längen und Azimute ab. Es drücken sich in ihnen vielmehr auch die Fehler der Azimutübertragung durch die Dreieckswinkel aus. Da aber gemäß unserer Annahme das geometrisch ausgeglichene Netz streng beibehalten wird, also ein Ausgleich der Laplaceschen Widersprüche in welcher Form auch immer unterbleibt, kann man aus den restlichen Laplaceschen Widersprüchen die astronomischen Verbesserungen abschätzen. Mehr als eine Abschätzung liegt schließlich auch beim strengeren astronomisch-geodätischen Ausgleich nicht vor. Helmert bestimmt ja die Azimutverbesserungen bei Vernachlässigung der Längenverbesserungen und die Verbesserungen der beobachteten Breiten bleiben stets unbekannt, da sich die Lotabweichungskomponente ξ nur einmal bestimmen läßt.

Die von den astronomischen Beobachtungsfehlern befreiten Lotabweichungskomponenten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}\varphi_K &= (\varphi'_K + \delta\varphi'_K) - (\varphi_K + d\varphi_K) = \Delta\varphi_K + \delta\varphi'_K \\ \bar{\Delta}\lambda_K &= (\lambda'_K + \delta\lambda'_K) - (\lambda_K + d\lambda_K) = \Delta\lambda_K + \delta\lambda'_K \\ \bar{\Delta}\alpha_K &= (\alpha'_K + \delta\alpha'_K) - (\alpha_K + d\alpha_K) = \Delta\alpha_K + \delta\alpha'_K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

erfüllen definitionsgemäß die Laplacesche Gleichung:

$$\bar{\Delta}\alpha_K - \bar{\Delta}\lambda_K \sin \varphi_K = 0 \dots \dots \dots (24)$$

Zusammen mit (8a) folgt sofort:

$$\bar{w}_K + \delta\alpha'_K - \delta\lambda'_K \sin \varphi_K = 0 \dots \dots \dots (25)$$

Man kann somit die Verbesserungen auf Grund der Bedingung (25) nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleichen. Klarerweise wird man Gewichte einführen, deren Verhältnis sich nach dem vorliegenden Material jeweils individuell bestimmen läßt. Bezeichnet man die gesuchten Verbesserungen allgemein mit v_i , so lautet die Minimumbedingung:

$$[g_{vv}] - 2 \sum_K \sigma (\delta\alpha'_K - \delta\lambda'_K \sin \varphi_K + \bar{w}_K) = \min \dots \dots \dots (26)$$

und man findet:

$$\left. \begin{aligned} g_\alpha \delta\alpha'_K &= \sigma_K \\ g_\lambda \delta\lambda'_K &= -\sigma_K \sin \varphi_K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Die Korrelaten σ ergeben sich durch Einsetzen der Lösungen in (20):

$$\sigma_K \left(\frac{1}{g_\alpha} + \frac{\sin^2 \varphi_K}{g_\lambda} \right) = -\bar{w}_K \dots \dots \dots (28)$$

⁴⁾ K. Ledersteger: „Das Lotabweichungssystem der öst.-ung. Militärtriangulierung“. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, im Druck.

Nachdem nunmehr die Koordinatenänderungen $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ und $d\alpha_0$ im Triangulierungshauptpunkt abgeleitet sind, findet man die Koordinatenänderungen sämtlicher Netzpunkte auf Grund der Gleichungen (6), wobei jetzt selbstverständlich die Koeffizienten p , q , r ellipsoidisch zu berechnen sind. Das hier skizzierte Näherungsverfahren wird sich überall dort empfehlen, wo eine größere Anzahl astronomischer Beobachtungen, die sich flächenhaft über das ganze Netz verteilen, bei der Netzausgleichung unberücksichtigt blieb.

§ 4. Der astronomische Netzzusammenschluß

Man kann dieses Verfahren auch zweckmäßig dem Zusammenschluß zweier getrennter Landes-
triangulationen vorangehen lassen. Im allgemeinen ist ja zu erwarten, daß auf diese Weise beide Netze für sich vor dem Zusammenschluß bereits ihre bestmögliche Orientierung auf der gemeinsamen Bezugsfläche erhalten. Der Zusammenschluß selbst wird dann durch eine drehungsfreie Verschiebung beider Netze bewirkt, derart, daß an der Naht die Quadratsumme der restlichen Koordinatendifferenzen ein Minimum wird. Wir setzen demnach voraus, daß nach obigem Verfahren für beide Triangulierungshauptpunkte bereits die Größen $d\varphi$, $d\lambda$ und $d\alpha$ bestimmt sind und berechnen nach (6) die Koordinatenverbesserungen der Nahtpunkte unabhängig in beiden Netzen. Damit ergeben sich die ausgleichenden Koordinatendifferenzen $d\varphi$ und $d\lambda$ für sämtliche Nahtpunkte. Bei der Angleichung des zweiten, veränderlichen Netzes an das erste, unveränderliche Netz wird man üblicherweise auch eine Maßstabänderung zulassen. Nach dem Vorgange Finsterwalders und Thilos führen wir die Maßstabänderung k vermöge der Beziehung

$$ds = ks \dots \dots \dots (29)$$

ein. Jede Seite s wird demnach um ks vergrößert. Wir erhalten also in geringer Modifikation des Verfahrens von Thilo⁵⁾ aus den Helmertschen Differentialformeln die Fehlergleichungen für die Transformationskonstanten $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ und k :

$$\left. \begin{aligned} -d\varphi &= p_1 d\varphi_0 + p_3 ks \\ -d\lambda &= -d\lambda_0 + q_1 d\varphi_0 + q_3 ks \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Hierin sind $d\varphi$ und $d\lambda$ die bereits numerisch vorliegenden Differenzen der ellipsoidischen geographischen Koordinaten sämtlicher Nahtpunkte und $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ die durch Anfelderung bewirkten Koordinatenänderungen des Fundamentalpunktes des zweiten Netzes. Die Helmertschen Koeffizienten schreiben wir mit Thilo:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{M_0}{M} \cos l, & p_3 &= p - s = b - \frac{l^2}{4\rho''} \sin(\varphi_0 + \varphi) \\ q_1 &= -\frac{M_0}{N} \operatorname{tg} \varphi_i \sin l, & q_3 &= -q_3 s = l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

wobei φ_0 die Breite des Fundamentalpunktes 0 und φ die Breite eines beliebigen Punktes bedeutet, dessen Breiten- und Längenunterschiede gegen 0 mit b und l bezeichnet sind. M und N sind die Meridian- und Querkrümmungsradien, die sich mit dem Index o speziell auf den Triangulierungshauptpunkt beziehen. Bei der Aufstellung der Normalgleichungen hat man noch dem Verhältnis der linearen Werte der Breiten- und Längensekunden durch die Einführung von Gewichten Rechnung zu tragen⁶⁾. Setzt man für die Längengleichung das Gewicht 1 an, so findet man für die Breitengleichung entsprechend dem Verhältnis 31 m : 20 m das Gewicht $g = 2,4$. Führt man die aus den Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} n d\lambda_0 - [q_1] d\varphi_0 + [q_3] k - [d\lambda] &= 0 \\ [g p_1 p_1 + q_1 q_1] d\varphi_0 - [g p_1 p_3 + q_1 q_3] k + [g p_1 d\varphi + q_1 d\lambda] &= 0 \\ [g p_3 p_3 + q_3 q_3] k - [g p_3 d\varphi + q_3 d\lambda] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

⁵⁾ G. Thilo: „Anschluß der mecklenburgischen Landesvermessung an das deutsche Einheitssystem“. Sonderheft 3 der Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme, Berlin 1926.

⁶⁾ S. Finsterwalder: „Das Verhältnis der bayrischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München“. München 1914.

gewonnenen Werte für die Unbekannten $d\varphi_0$, $d\lambda_0$ und k in die Gleichungen (30) ein, so erhält man die endgültigen Koordinaten sämtlicher Netzpunkte gemäß:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_i &= \varphi_i - p_{1,i} d\varphi_0 + p_{3,i} k \\ \bar{\lambda}_i &= \lambda_i - q_{1,i} d\varphi_0 + q_{3,i} k + d\lambda_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Es ist klar, daß bei dieser vereinfachten Art der Anfelderung die restlichen Klaffungen größer sein werden als bei der Mitnahme einer Drehung. An den Nähten vereinigen sich die aus der mangelhaften Azimutübertragung folgenden Fehler mit dem Einfluß der Krümmungsverhältnisse der mathematischen Erdfigur. Aber da letztere diskontinuierlich sind, wird man ohnedies gezwungen sein, Diskontinuitäten in Kauf zu nehmen, wenn man sich von einer rein geometrischen zu einer mehr physikalischen Betrachtung des Problems aufschwingt. Jedenfalls wird das angegebene Verfahren bei geringstem Rechenaufwand eine möglichst einwandfreie Orientierung in allen Teilen eines größeren Netzkomplexes verbürgen und die Diskontinuitäten an jene Stelle verweisen, wo sie am schmerzlosesten hingenommen werden können, vorwiegend nämlich an Landesgrenzen. Da wir vorausgesetzt haben, daß beide Netze für sich vor dem Zusammenschluß ihre bestmögliche Lagerung auf der Referenzfläche durch den genäherten Ausgleich sämtlicher astronomischen Messungen erfahren haben, müßte man logischerweise die für die endgültige Anfelderung nötige Verschiebung auf beide Netze I und II verteilen. Die Fehlergleichungen (30) erweitern sich dann zu:

$$\left. \begin{aligned} -d\varphi &= p_{1,I} d\varphi_{0,I} + p_{1,II} d\varphi_{0,II} - p_{3,I} k_I - p_{3,II} k_{II} \\ -d\lambda &= -d\lambda_{0,I} - d\lambda_{0,II} + q_{1,I} d\varphi_{0,I} + q_{1,II} d\varphi_{0,II} - q_{3,I} k_I - q_{3,II} k_{II} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30a)$$

so daß jetzt bei n Nahtpunkten $2n$ Gleichungen für die 6 Unbekannten $d\varphi_{0,I}$, $d\varphi_{0,II}$, $d\lambda_{0,I}$, $d\lambda_{0,II}$, k_I und k_{II} vorliegen. In der Praxis wird dieser Fall aber kaum auftreten, da es sich für die europäische Vermessung um den sukzessiven Anschluß der einzelnen Landestriangulationen an das endgültige Reichsdreiecksnetz handelt. Aus diesem Grunde muß man auch eine äußerst exakte astronomische Festlegung des Reichsdreiecksnetzes fordern, die nur durch eine genügende Anzahl Laplacescher Punkte gewährleistet werden kann. Im übrigen ist zu erwarten, daß bei der astronomisch verbesserten Lage der beiden Netze die ausgleichenden Klaffungen $d\varphi$ und $d\lambda$ von vornherein klein sind, also die letzte „Restverschiebung“ des zweiten Netzes die erhaltenen Lotabweichungen kaum mehr berührt.

§ 5. Der genäherte Azimutausgleich

Gegen eine zu große Dichte der Laplaceschen Punkte gibt es gewisse praktische Bedenken, falls man nicht neben der exakten Lagerung der Dreiecksnetze ein gut fundiertes Lotabweichungssystem, mithin rein wissenschaftliche Zwecke im Auge hat. Denn die Bestimmung der geographischen Länge ist auch heute noch eine zeitraubende und kostspielige Aufgabe, wenn man die nötige Genauigkeit erreichen will. Legt man speziell besonderes Gewicht auf die Orientierung des Netzes, so ergibt sich eine Variante des obigen Näherungsverfahrens, wenn man auf die Mitnahme der Laplaceschen Bedingungen überhaupt verzichtet und die angestrebte Orientierung durch eine möglichst große Zahl von Azimutmessungen sicherstellt. Je größer die Zahl der Punkte 1. Ordnung ist, auf denen zugleich mit der Winkelmessung die astronomische Azimutbestimmung nach der Polarismethode ausgeführt wird, desto eher werden sich die Fehler dieser Messungen in ihrer Auswirkung auf den Triangulierungshauptpunkt kompensieren. Da diese Fehler unbekannt bleiben, wird man zweckmäßig auf jeder astronomischen Station das Azimut von zwei Richtungen 1. Ordnung bestimmen und ihre Differenz mit dem aus dem Stationsausgleich hervorgegangenen Winkel vergleichen. Auf diese Weise kann man sich leicht gegen größere Fehler schützen, ohne das Gewicht der Azimutmessung erhöhen zu müssen. Daß unter diesen Voraussetzungen bloß der Fundamentalpunkt des Netzes Laplacescher Punkt zu sein braucht, bedeutet keine Vernachlässigung der Netzlage gegenüber der Orientierung. Denn das neu gemessene Netz muß ohnedies nachträglich an das schon vorhandene, fixe Netz durch eine bloße Verschiebung angeschlossen werden, wie eben beschrieben. Hingegen wird die Verdrehung des neuen Netzes abermals nicht so bestimmt, daß die Klaffungen entlang der Naht in ihrer Quadratsumme zu einem Minimum gemacht werden, sondern vor der Verschiebung gänzlich unabhängig von dem festen Netz durch einen genäherten Azimutausgleich ermittelt.

Die bisher konsequent verfolgte scharfe Trennung der geodätischen und astronomischen Grundlagen der Großvermessung ist durch den Umstand ermöglicht, daß die Koordination zwischen den Punkten der physischen Erdoberfläche und des Referenzellipsoides nicht auf einer einfachen Projektion, sondern auf rein geodätischen Operationen und dem nachfolgenden Netzausgleich beruht, wenn man von der fundamentalen Festlegung des Netzes im Ausgangspunkt absieht. Man erreicht aber eine engere Anschmiebung des geometrischen Netzgebildes an die Punktconfiguration auf der Niveaufläche, wenn man auf die Unabhängigkeit der Horizontalwinkelmessung von den Lotabweichungen, d. h. auf die Möglichkeit einer rein geometrischen Interpretation der geodätischen Messungen verzichtet. Alle diesbezüglichen Versuche fußen auf den Laplaceschen Punkten, also auf Punkten, in denen die Doppelbestimmung der Ostwestkomponente der Lotabweichung:

$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi = (\alpha' - \alpha) \cot \varphi$$

die Laplacesche Kontrollgleichung:

$$(\alpha' - \alpha) - (\lambda' - \lambda) \sin \varphi = 0$$

liefert. Die Lotabweichungen folgen bekanntlich aus den verschiedenen Bildungsgesetzen von Ellipsoid und Geoid im Gebiete der Vermessung. Man muß also geringe Änderungen des Netzes hinnehmen, um die Widersprüche der Laplaceschen Gleichungen zu beseitigen, die man nicht zur Gänze den astronomischen Beobachtungen zur Last legen kann. Haben wir bisher durch eine Verschiebung und Verdrehung des in sich geschlossenen Netzes die Quadratsumme der restlichen Laplaceschen Widersprüche zu einem Minimum gemacht, so wird jetzt der rein geometrische Netzzusammenhang gelockert, um die Laplaceschen Widersprüche vollständig zu beseitigen. Auch hier bleibt das eigentliche Ziel, um mit Helmert zu sprechen, die verschärfte Orientierung in den Netzpunkten 1. Ordnung. Helmert³⁾ hat auch den klassischen Weg hierzu in seiner astronomisch-geodätischen Ausgleichung gewiesen, die allerdings mehr der Aufstellung eines wissenschaftlichen Lotabweichungssystems dient. Es ist klar, daß ein solches System zugleich die geeignetste Grundlage für die endgültige Lagerung und Orientierung der Landestriangulationen und für deren Zusammenschluß ist. Aber es liegt hierin eben ein zweiter und noch dazu sehr langwieriger Ausgleich vor. Daher ist es nur allzu verständlich, daß man anknüpfend an Helmert hier neue, vereinfachte Methoden für die Orientierungsverbesserung gesucht hat.

Will man den zweiten Ausgleich ersparen, so muß man die Laplaceschen Bedingungen irgendwie bereits beim ersten Ausgleich berücksichtigen. Der nächstliegende und zugleich korrekteste Vorgang ist der, daß man die Laplaceschen Widersprüche zusammen mit den geometrischen Netzbedingungen ausgleicht. Diesen Weg hat zuerst Ölander⁹⁾ für die südfinnische Dreieckskette beschritten. Anschließend hat W. Jenne¹⁰⁾ den Einbau der Laplaceschen Gleichungen in das Entwicklungsverfahren von Boltz durchgeführt. Ein Vorteil des Ölanderschen Verfahrens ist es, daß die Polyongleichungen wegfallen, die bei der Methode Helmersts den durch die nachträgliche Einführung der Laplaceschen Bedingungen zerstörten geometrischen Netzzusammenhang wiederherstellen müssen; ein Nachteil, daß durch die beträchtliche Steigerung der Zahl der Bedingungsgleichungen die Ausgleichsarbeit wesentlich erschwert wird. Es empfiehlt sich daher eine abteilungsweise und näherungsweise Berücksichtigung der Laplaceschen Bedingungen. Bezeichnenderweise werden bei den diesbezüglichen Vorschlägen nur mehr kettenförmige Rahmentriangulationen in Betracht gezogen, die die rascheste Erfassung großer Räume verbürgen. Bei diesen Verfahren, der amerikanischen Methode von Bowie¹¹⁾ und der russischen Methode von Krassowsky¹²⁾ handelt es sich vor allem um die exakte Orientierung

³⁾ F. R. Helmert: „Lotabweichungen“. Heft 1

⁹⁾ V. R. Ölander: „Ausgleichung einer Dreieckskette mit lauter Laplaceschen Punkten.“ Veröffentl. des Finnischen Geod. Inst., Nr. 8, Helsinki 1927.

¹⁰⁾ W. Jenne: „Einbeziehung Laplacescher Gleichungen in die Geodätische Netzausgleichung nach bedingten Beobachtungen unter Anwendung des Entwicklungsverfahrens“. Mitteilungen des Reichsamtes für Landesaufnahme, Jahrgang 9, Seite 286—299, 1933.

¹¹⁾ O. S. Adams: „The Bowie Method of Triangulation Adjustment“. U-S. Coast and Geodetic Survey, Spezial Publ. Nr. 59, Washington 1930. — M. Kneißl: „Die Bowie Methode des U. S. Coast and Geodetic Survey und ihre Verwertung für die Koloniale Triangulation 1. Ordnung“. Allg. Verm. Nachr. 1941, Seite 49—56.

¹²⁾ M. Kneißl: „Die Ausgleichung der russischen Triangulation 1. Ordnung“. Deutsche Bearbeitung dreier russischer Originalarbeiten von Krassowsky und Urmajew, Mitteilungen des Chefs des Kriegskarten- und Vermessungswesens. 1. Jahrgang, Heft 3, 1942.

Auf den geometrischen Netzausgleich folgt also wieder, ausgehend von den astronomischen Daten des Fundamentalpunktes, die Berechnung der geodätischen Koordinaten sämtlicher Netzpunkte und der geodätischen Azimute sämtlicher Dreiecksseiten durch geodätische Übertragung. Nunmehr wird das Netz im Fundamentalpunkt um den Winkel $d\alpha_0$ derart gedreht, daß es sich nachher möglichst eng an die beobachteten astronomischen Azimute anschließt, daß also die Quadratsumme der „Lotabweichungen“ in Azimut nach dem Ausgleich zu einem Minimum wird. Wir können diesem genäherten Azimutausgleich die letzte Gleichung (12) in der Gestalt:

$$\Delta \alpha_K = (\alpha'_K - \alpha_K) - \cos l \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_K} d\alpha_0 \dots \dots \dots (34)$$

zugrunde legen. Eine ellipsoidische Berechnung des Koeffizienten von $d\alpha_0$ erübrigt sich wieder, da ja die Fehler der astronomischen Azimute α'_K unbekannt sind und wir eine genügend große Zahl astronomischer Stationen vorausgesetzt haben. Diese Art des genäherten Azimutausgleiches geht auf Schumann⁷⁾ zurück und wurde in etwas anderer Form auf den Meridianbogen Großenhain—Kremsmünster—Pola⁸⁾ angewendet. Trotzdem jetzt die gesamte Netzverschiebung bei dem nachträglichen Anschluß rein geometrisch bestimmt wird, darf man ihren Einfluß auf die Azimute, der durch:

$$-\frac{\sin l}{\cos \varphi_K} d\varphi_0$$

in der letzten Gleichung (12) gegeben ist, mit ruhigem Gewissen vernachlässigen. Ist $d\alpha_0$ auf Grund der Fehlergleichungen (34) ermittelt, so erhält man die durch die Drehung verursachten Änderungen der geodätischen Koordinaten aller Netzpunkte aus:

$$\left. \begin{aligned} -d\varphi &= p_4 d\alpha_0 \\ -d\lambda &= q_4 d\alpha_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

wobei nach Helmert und Thilo:

$$\left. \begin{aligned} p_4 &= \frac{N}{M} \cos \varphi_0 \sin l \\ q_4 &= -\frac{p_5}{\rho'' \cos \varphi} \quad \text{mit: } p_5 = b - \frac{l^2 \sin(\varphi_0 + \varphi)}{4\rho''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35a)$$

ist. Die eingeführten Größen haben dieselbe Bedeutung wie in den Relationen (31). Die in p_4 ohne Index gegebenen Krümmungsradien beziehen sich auf die Mittelbreite ($\frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi$).

Selbstverständlich wird man in der Praxis auch bei diesem Verfahren nicht gänzlich auf Laplacesche Punkte verzichten, sondern vielmehr einige solche Punkte zur Kontrolle der bei der nachfolgenden Anfelderung bewirkten Netzverschiebung heranziehen. Die Gleichungen (12) reduzieren sich auf:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varphi_K &= (\varphi'_K - \varphi_K) - \cos l d\varphi_0 \\ \Delta \lambda_K &= (\lambda'_K - \lambda_K) - d\lambda_0 - \sin l \operatorname{tg} \varphi_K d\varphi_0 \\ \Delta \alpha_K &= (\alpha'_K - \alpha_K) - \frac{\sin l}{\sin \varphi_K} d\varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

und man vergleicht die aus der Minimumbedingung

$$\Sigma (\xi^2 + \eta^2) = \Sigma (\Delta \varphi_K^2 + \Delta \lambda_K^2 \cos^2 \varphi_K) = \min$$

abgeleitete Verschiebung $d\varphi_0$ und $d\lambda_0$ mit den aus dem Netzzusammenschluß folgenden Werten für diese Größen. Schließlich kann auf Grund der Formeln (21) und (22) noch festgestellt werden, ob die Minimumbedingung für die restlichen Laplaceschen Widersprüche noch eine weitere Netzverdrehung verlangen würde.

⁷⁾ R. Schumann: „Über die Lotabweichung am Hermannskogel, dem Fundamentalpunkt der österreichischen Triangulation“. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften, Wien 1917.

⁸⁾ Schumann-Hopfner: „Der Meridianbogen Großenhain—Kremsmünster—Pola“. Astr.-geod. Arbeiten Österreichs, Neue Folge, Bd. 1, Wien 1922.

der die Knotenpunkte verbindenden Dreiecksketten. Wir folgen hier den Gedankengängen Bowies. Die Knotenpunkte bilden ein Gitter von Laplaceschen Punkten, die untereinander durch einfache meridionale und dem Parallelkreis folgende Dreiecksketten verbunden sind. Die Ketten sollen eine durchschnittliche Länge von etwa 300 km haben. Aus ihnen werden Knotennetze gebildet, die auch eine Basis enthalten und vor dem definitiven Ausgleich der Dreiecksketten endgültig orientiert werden sollen. Man stützt diese Orientierung auf das sogenannte Laplacesche Azimut, d. h. man führt die Laplacesche Gleichung als Zwangsbedingung in der Form:

$$\bar{\alpha}_K = \alpha'_K - (\lambda'_K - \lambda_K) \sin \varphi_K \dots \dots \dots (5)$$

ein. Das Laplacesche Azimut $\bar{\alpha}_K$ geht aus dem astronomischen Azimut durch Subtraktion des Einflusses der relativen Lotabweichung in Länge hervor. Letztere erhält man, ausgehend von den astronomischen Koordinaten des Triangulationshauptpunktes, indem man die verbindende Dreieckskette nach ihren geometrischen Bedingungen ausgleicht. Während also das unmittelbar aus der Kette berechnete geodätische Azimut α_K von den Fehlern in den Dreieckswinkeln abhängt, enthält das Laplacesche Azimut lediglich die Fehler in der Übertragung der geodätischen Längen, die wesentlich kleiner sind. Die zu erwartende Größe der Übertragungsfehler des Azimuts durch die Dreieckskette rechtfertigt bei genügender Länge der geodätischen Linien ferner die Vernachlässigung der astronomischen Messungsfehler. Nunmehr liegt jedes Knotennetz durch die Basis in seinen Dimensionen und durch das Laplacesche Azimut in seiner Orientierung fest. Es folgt der neuerliche Ausgleich der Dreiecksketten, wobei durch die in Größe und Richtung festliegenden Endseiten zu den geometrischen Bedingungen noch Basis- und Azimutgleichungen hinzutreten. Da hingegen die koordinatenmäßige Lage der Knotenpunkte noch aussteht, werden sich nachträglich bei der Bildung von Schleifen noch Widersprüche ergeben, die durch einen separaten Endausgleich beseitigt werden.

Man erkennt aus dieser kurzen Darlegung der Bowieschen Methode, daß wohl die Laplaceschen Widersprüche getilgt werden, hingegen dem Ausgangspunkt eine Vorrangstellung erhalten bleibt, obwohl eine Reihe gleichberechtigter Laplacescher Punkte zur Verfügung steht. Dies erscheint besonders dann bedenklich, wenn der Triangulierungshauptpunkt mit einer größeren absoluten Lotabweichung behaftet ist. Außerdem darf man, wie schon in § 2 auseinandergesetzt wurde, die Laplaceschen Widersprüche nicht ohne weiteres zur Gänze auf die Azimutfehler des Netzes werfen. Systematische Anteile in den Laplaceschen Widersprüchen können auch auf die astronomischen Ausgangswerte zurückzuführen sein. Ein klassisches Beispiel hierfür bietet der alte österreichische Fundamentalpunkt Hermannskogel, in dem die Länge nicht astronomisch bestimmt, sondern geodätisch von der 5 km entfernten Universitätswarte übertragen wurde und daher mit der relativen Lotabweichung zwischen diesen beiden Punkten behaftet ist. Freilich werden ähnliche Fälle heutzutage, dank der wesentlichen Erleichterung, die die Bestimmung der geographischen Länge durch die Radiosignale erfahren hat, seltener mehr auftreten.

Da Bowie starr an den astronomischen Ausgangswerten im Fundamentalpunkt festhält, bleibt die Gesamtorientierung des Netzes trotz der Verbesserung durch die Laplaceschen Azimute relativ. Um eine wenigstens annähernd absolute Orientierung im Ausgangspunkt zu erhalten, muß man vorerst aus einem größeren Netzkomplex einen guten Näherungswert für die Lotabweichung daselbst ableiten. Die Änderung der geodätischen Ausgangslänge $d\lambda_0$ ist vermöge (3) mit einer Änderung des geodätischen Ausgangsazimuts $d\alpha_0$ verbunden. Will man die Ausgangskordinaten φ_0 und λ_0 aus praktischen Gründen nicht mehr abändern, so empfiehlt es sich trotzdem, das Ausgangsazimut zu verbessern:

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0' + d\lambda_0 \sin \varphi_0 \dots \dots \dots (5a)$$

und allgemein die Vernachlässigung der Längenverbesserung durch ein Zusatzglied in den Laplaceschen Azimuten zu kompensieren:

$$\bar{\alpha}_K = \alpha'_K - (\lambda'_K - \lambda_K) \sin \varphi_K + d\lambda_0 \sin \varphi_K \dots \dots \dots (5b)$$

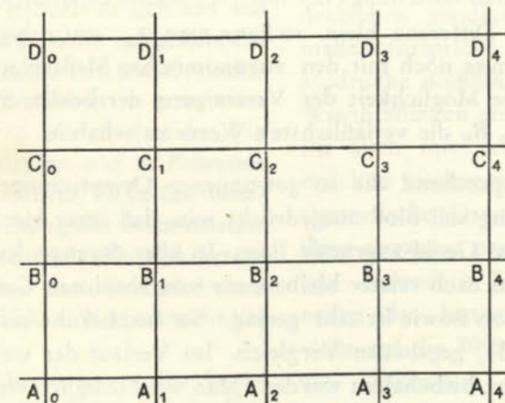
Es mag dieser Vorschlag auf den ersten Blick befremdend erscheinen; er ist aber geodätisch einwandfrei, da unser auf dem Rotationsellipsoid berechnetes Netz a priori von der Ausgangslänge unabhängig ist. Die Beibehaltung der astronomischen Ausgangslänge λ'_0 bedingt, daß nach der Ausgleichung systematische Laplacesche Widersprüche vom Betrage

$$d\lambda_0 \sin \varphi_K$$

bestehen bleiben, in denen $d\lambda_0$ die „absolute“ Lotabweichung in Länge darstellt. Die Orientierung des Gesamtnetzes ist aber offensichtlich verbessert. Es ist in diesem Zusammenhang erwähnenswert, daß man sich in Rußland wegen der bereits vorhandenen, umfangreichen topographischen Aufnahmen veranlaßt fühlte, die astronomischen Koordinaten von Pulkowo beizubehalten, obwohl daselbst die Lotabweichungskomponente η_0 mit $2''.5$ ermittelt wurde, und daß Prof. Krassowsky das müheselig abgeleitete Ausgangsazimut nachträglich wieder um etwa $1''.5$ verbessert hat, um die Stimmigkeit der Laplaceschen Gleichungen zu erzielen.

Wenn es sich auch bei den Kettentriangulationen in erster Linie um die dauernde Kontrolle der Orientierung, also um eine schrittweise Überprüfung der Azimutübertragung durch die Dreieckswinkel handelt, so zeigen die vorhergehenden Überlegungen doch, daß sich Orientierung und Lage nicht vollständig voneinander trennen lassen. Von einem höheren physikalischen Standpunkt aus gilt es ja ganz allgemein zu verhindern, daß die bewußte Idealisierung unserer Dreiecksnetze, wie sie in der fiktiven Verarbeitung auf rotationsellipsoidischen Referenzflächen vorliegt, allzuweit von der Natur wegführt. In diesem Sinne müssen wir auch den Begriff der absoluten Lotabweichung einer Revision unterziehen. Liegt für ein größeres Vermessungsgebiet das geodätische Netz fertig vor, so bezeichnen wir einfach jenes System von Lotabweichungen als absolut, dessen Quadratsumme der Minimumbedingung genügt, bei dem sich also die geodätische Lage und Orientierung möglichst enge an die durch die astronomischen Messungen gegebenen geodätischen Verhältnisse anpaßt. Einer anders gearteten Aufgabe stehen wir aber gegenüber, wenn wir im Zuge einer Neutriangulierung schrittweise eine ähnliche Korrektur vornehmen sollen, die sich wegen des inneren Netzzusammenhangs vorwiegend auf die Azimute erstrecken muß. Hier ist es notwendig, durch eine weitgehende Glättung dem Einfluß lokaler Verbiegungen des Geoides vorzubeugen, jedoch im Großen eine engere Anschmiebung an die Form des Geoides zu erreichen. Der im wesentlichen stetige Krümmungsverlauf wird hierbei sicherlich vor der Gefahr von Verbiegungen der Dreiecksketten schützen. Die Beseitigung der Unsicherheit in der Lagebestimmung, die aus der ziemlich weitgehenden Unabhängigkeit der Winkelmessungen von den Lotabweichungen folgt, ergibt sich wohl am zwanglosesten, wenn jeder Knotenpunkt der Reihe nach gleichsam die Rolle eines Triangulationshauptpunktes übernimmt. Wie wir bereits wissen, handelt es sich vor allem um einen genügend verlässlichen Wert der Lotabweichung in Länge, um ein einwandfreies Laplacesches Azimut zu gewinnen. Da wir aber aus praktischen Gründen die Rechnung nicht zu umfangreich gestalten dürfen, wird es wohl genügen, den Wert $(\lambda'_K - \lambda_K)$ in jedem Punkt gleichsam aus zwei zueinander senkrechten Geoidschnitten abzuleiten.

Wir betrachten wieder ein Gitter von Laplaceschen Punkten, die Knotenpunkte in einem System von Meridian- und Parallelkreisketten darstellen. Ausgehend von den astronomischen Werten für φ λ und α im Fundamentalpunkt A_0 berechnen wir vorerst nach den rein geometrischen Bedingungen alle im Meridian und Parallel von A_0 liegenden Kettenabschnitte und erhalten damit geodätische Koordinaten für die Punkte $A_1, A_2, A_3 \dots B_0, C_0, D_0 \dots$. Aus der Gegenüberstellung der astronomischen und geodätischen Werte φ und λ folgt nach



den Formeln (20) die Netzverschiebung in A_0 und man erhält das Laplacesche Azimut:

$$\bar{\alpha}_{A_0} = \alpha'_{A_0} + d\lambda_{A_0} \sin \varphi_{A_0} \dots \dots \dots (5c)$$

Nunmehr gehen wir von den bereits bekannten geodätischen Näherungskoodinaten von B_0 aus und berechnen die Koordinaten aller Punkte B_i im zugehörigen Parallel. Nach demselben Verfahren findet man dann aus sämtlichen Punkten des Meridians und Parallels von B_0 die Verschiebung $d\varphi_{B_0}$ und $d\lambda_{B_0}$ und somit die endgültige Orientierung des Knotennetzes von B_0 :

$$\bar{\alpha}_{B_0} = \alpha'_{B_0} - (\lambda'_{B_0} - \lambda_{B_0} - d\lambda_{B_0}) \sin \varphi_{B_0} \dots \dots \dots (5)$$

Indem man so Schritt für Schritt weiter geht, findet man die endgültige Orientierung aller Knotennetze durch den jeweiligen Ausgleich der Lotabweichungen im Meridian und Parallel des betreffenden Punktes. Das von Bowie verwendete relative Lotabweichungssystem mit dem Triangulationshauptpunkt als Ursprung ist damit auf denkbar einfachste Weise eliminiert. Etwaige größere Fehler in den astronomischen Messungen der einzelnen Punkte machen sich in einem systematischen Verhalten der Laplaceschen Widersprüche in den beiden Schnitten bemerkbar, wenn man die relativen Lotabweichungen in Azimut und Länge miteinander vergleicht. Dazu wäre strenge nötig, für jedes System von den astronomischen Daten des jeweiligen „Hauptpunktes“ auszugehen. Jedoch dürfte es im Hinblick auf die verhältnismäßig geringe Punktzahl nicht empfehlenswert sein, die endgültige Orientierung auf Grund der Gleichung (22) nach der Methode der kleinsten Quadrate abzuleiten.

Man könnte gegen das hier geschilderte Verfahren einwenden, daß durch die unabhängige Ableitung der Azimute in zwei benachbarten Punkten der geodätische Zusammenhang allzusehr gelockert wird und man, statt bloß die geodätischen Übertragungsfehler durch die Laplaceschen Azimute zu beseitigen, neue unkontrollierbare Einflüsse des Kraftfeldes der Erde auf die Azimute wirft. Demgegenüber ist zu betonen, daß zwei benachbarte Punkte immer demselben Meridian oder Parallel angehören, also zur Herleitung der beiden Lotabweichungs-Minimalsysteme zu 50 Prozent die gleichen Punkte verwendet werden, so daß schon aus diesem Grunde keine zu große Divergenz zu erwarten ist. Außerdem besteht die Möglichkeit, lokale Einflüsse, die nicht genügend durch die Glättung beseitigt sind, durch die Gegenüberstellung der beiden Längenwerte desselben Punktes aufzudecken. Wir haben z. B. aus den astronomischen Ausgangswerten A_0 die geodätischen Näherungswerte φ_{B_0} , λ_{B_0} für den Punkt B_0 aus der verbindenden Dreiecks-kette abgeleitet. Im System des Punktes A_0 erhält B_0 die Längenkorrektur:

$$d\lambda_{B_0} = d\lambda_{A_0} + \sin l \operatorname{tg} \varphi_{B_0} d\varphi_{A_0} - \sin l \frac{\cos \alpha_{B_0}}{\sin \alpha_{A_0}} (\bar{\alpha}_{A_0} - \alpha'_{A_0}), \dots \dots \dots (37)$$

was aus der Verbindung der zweiten Gleichung (12) mit (5c) unmittelbar hervorgeht. Diesen Wert vergleichen wir mit $d\lambda_{B_0}$. Ist die Differenz klein, so kann man $\bar{\alpha}_{B_0}$ mit ruhigem Gewissen übernehmen, zumal ja alle Laplaceschen Azimute noch mit den astronomischen Meßfehlern behaftet sind. Bei größeren Differenzen besteht aber die Möglichkeit der Vereinigung der beiden Systeme, um für beide Azimute der geodätischen Linie A_0 , B_0 die verlässlichsten Werte zu erhalten.

Wir bezeichnen dementsprechend die so gewonnenen Orientierungen als absolute Laplacesche Azimute. Mit dieser Bezeichnung soll bloß ausgedrückt sein, daß ihrer Herleitung das Bestreben nach einer besseren Annäherung an das Geoid zugrunde liegt. In aller Strenge kann man bei den Lotabweichungen, die ihrer Definition nach relativ bleiben, nie von absoluten Größen sprechen. Die Mehrarbeit gegenüber der Methode von Bowie ist sehr gering. Sie beschränkt sich auf die Durchrechnung der Formeln (20) und den in (37) gegebenen Vergleich. Im Verlauf der weiteren Rechnung kann das Bowiesche Verfahren unverändert beibehalten werden. Man wird lediglich wegen der oben geschilderten Verhältnisse gut tun, die auftretenden kleinen Laplaceschen Widersprüche nachträglich zu dulden. Sie entspringen den geringfügigen Längenänderungen bei der endgültigen Koordinierung der Punkte.

Die Bowie-Methode des U. S. Coast and Geodetic Survey

Von Oberleutnant Dr.-Ing. habil. M. Kneißl

In dem Vorwort zur Ausgleichung der russischen Triangulationen I. O. (Ausgleichungsmethode von F. N. Krassowsky) in Heft 3/1942 dieser Mitteilungen wurde darauf hingewiesen, daß zur Anregung theoretischer Untersuchungen und praktischer Vorschläge auf dem Gebiete der Großraumvermessung beabsichtigt ist, bedeutendere Veröffentlichungen über die Landes- und Kolonialvermessungen des Auslandes zu besprechen oder durch Übersetzungen der Originalschriften der deutschen Wissenschaft und Fachwelt zugänglich zu machen. Im Zuge der Erforschung und Erschließung ausländischer geodätischer und kartographischer Arbeiten und Schriften, wird nachfolgend eine deutsche Übersetzung der Originalschrift über die bei der Ausgleichung der Nordamerikanischen Dreiecks-ketten von W. Bowie und O. S. Adams entwickelten Methode veröffentlicht. (Special Publication Nr. 159 des U. S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey vom Jahre 1930 „The Bowie-Method of triangulation adjustment as applied to the first-order net in the western part of the United States“ von Oscar S. Adams.) Diese Methode verdient neben der Methode von F. N. Krassowsky unter den Verfahren zur Ausgleichung großer Dreiecksnetze unter Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen, schon wegen ihrer Einfachheit besondere Beachtung. Daher wurde auch in der deutschen Literatur mehrfach auf diese Methode hingewiesen.*)

Bei der Bowie-Methode handelt es sich um ein Verfahren zur Ausgleichung eines ausgedehnten Dreiecksnetzes, das aus langgestreckten Dreiecks-ketten gebildet wird, die das Gebiet in mehr oder weniger regelmäßiger Form durchschneiden, in Knotenpunkten zusammenlaufen und so Polygone bilden, die durch nachgeordnete Füllnetze überdeckt werden. Zur Ausgleichung des Gesamtnetzes wurden an den Kreuzungsstellen der Dreiecks-ketten besondere Knotennetze aus den Dreiecks-ketten herausgelöst und die restlichen Kettenabschnitte

*) Vgl. hierzu die Arbeit des Verfassers „Die Bowie-Methode des U. S. Coast and Geodetic Survey und ihre Verwendung für koloniale Triangulationen I. O.“, Allg. Verm.-Nachr. 1941, S. 49–56.

als einzelne Netzelemente (Verbindungsketten) betrachtet. Hiernach sind bei der Ausgleichung folgende Abschnitte zu unterscheiden:

1. Die Ausgleichung, Maßstabsbestimmung und Orientierung der Knotennetze.
2. Die vorläufige Ausgleichung der Verbindungsketten.
3. Die vorläufige Koordinierung der Hauptnetzpunkte.
4. Die Polygonausgleichung zur endgültigen Lagebestimmung der Knotenpunkte.
5. Die endgültige Ausgleichung der Verbindungsketten.
6. Die endgültige Koordinierung der Hauptnetzpunkte.

Im einzelnen darf zu der vorliegenden Übersetzung bemerkt werden, daß sämtliche Bezeichnungen, Formeln, Tabellen und Abbildungen unverändert der Originalschrift entnommen wurden. Bei der Wiedergabe des Textes wurde an der wörtlichen Übertragung so weit festgehalten, als es für das Verständnis zulässig war. Im übrigen wurde versucht, bei möglicher Anlehnung an die wörtliche Übertragung, in freier Übersetzung, teilweise auch durch Kürzungen, aber auch durch Einschaltung von Zwischensätzen und Erklärungen, durch Unterteilung der Sätze und ggf. durch Zusammenfassung, eine Darstellung zu geben, die dem deutschen geodätischen Sprachgebrauch einigermaßen entspricht. Spezielle amerikanische Fachausdrücke mußten hierbei manchmal durch neue Wortbildungen ersetzt und an verschiedenen Stellen auch mit verschiedenen deutschen Fachausdrücken wiedergegeben werden. Im übrigen ist die theoretische Darstellung der Methode gegenüber ihrer eleganten praktischen Anwendung sehr dürftig. Besondere Erwähnung im Text verdienen neben den historischen Ausführungen die Hinweise auf die Wirtschaftlichkeit der Methode und die Diskussion der Ergebnisse. Umfangreiche Tabellen erleichtern das Verständnis für die eigentliche Polygonausgleichung.

Die Bowie-Methode zur Ausgleichung eines Dreiecknetzes und ihre Anwendung auf das Netz I. O. im westlichen Teil der Vereinigten Staaten

Von Oscar Adams,
Chef-Mathematiker im U. S. Coast and Geodetic Survey

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
Abriss	25
Einführung	25
Die Entwicklung des Dreiecksnetzes	25
Begründung einer einheitlichen Neuausgleichung	26
Entwicklung der Bowie-Methode	26
Darstellung des Ausgleichungsschemas	27
Laplacesche Azimute	28
Typische Knotennetze	28
Vorläufige Ausgleichung der einzelnen Verbindungsketten (Kettenabschnitte)	29
Berechnung vorläufiger Koordinaten	30
Ausgleichung der Breiten- und Längenanschlußfehler (Polygonschlußfehler)	30
Auflösung der Fehlergleichungen	33
Auflösung der Normalgleichungen	33
Zusammenstellung der Berechnungsergebnisse:	
Näherungswerte für die Koordinaten der Knotenpunkte	34
Endgültige Werte	47
Koordinatenunterschiede zwischen benachbarten Knotenpunkten	34
Fehlergleichungen	34
Tabelle zur Aufstellung der Normalgleichungen für die Breite	35
Tabelle zur Aufstellung der Normalgleichungen für die Länge	36
Normalgleichungen für die Breite	37
Normalgleichungen für die Länge	38
Auflösung der Normalgleichungen	39—43
Rückläufige Berechnung der Verbesserungen für die Breite	44
Rückläufige Berechnung der Verbesserungen für die Länge	45
Verbesserung für die Breite und Länge und lineare Verbesserungen	46
Koordinatenverbesserungen der Knotenpunkte durch die Neuausgleichung	47
Diskussion der Polygonschlußfehler	48
Koordinatenverbesserungen	48
Breiten- und Längenanschlußfehler in den Verbindungsketten	49
Günstige Netzfiguren	49
Schlußfolgerungen	49

Abbildungen:

	Seite
Abb. 1 Einfaches Knotennetz mit Grundlinie und Laplaceschem Azimut	29
Abb. 2 Kompliziertes Knotennetz, das mehrere Stationen umfaßt	30
Abb. 3 Knotennetz ohne Grundlinie und ohne Laplacesches Azimut	30
Abb. 4 Schematisches Netzbild mit den Nummern der Knotenpunkte	31
Abb. 5 Polygonschlußfehler nach der Ausgleichung	31
Abb. 6 Anschlußfehler zwischen den einzelnen Verbindungsketten, die den Polygonschlußfehlern entsprechen	32
Abb. 7 Unterschiede der endgültigen neuen Koordinaten der Knoten- punkte gegenüber den alten Werten	32

Abriss

Die vorgelegte Veröffentlichung enthält die Darstellung einer neuen Methode zur Ausgleichung eines Dreiecknetzes und ihre Anwendung im westlichen Teil der Vereinigten Staaten. Die Ausdehnung der Dreiecksketten und ihre gegenseitigen komplizierten Beziehungen machten eine Ausgleichung in einem Guß praktisch unmöglich. Es wurde daher eine neue Methode zur Bearbeitung eines solchen Netzes entwickelt, wobei das Gesamtnetz in Knotennetze und einzelne Kettenabschnitte — sogenannte Verbindungsketten — unterteilt wurde. In der folgenden Darstellung ihrer Anwendung auf die Dreiecknetze I. O. in der westlichen Hälfte der Vereinigten Staaten wird diese Methode ausführlich erläutert und ein Überblick über die Anlage der Knotennetze gegeben. Ebenso wird die Aufstellung der Polyongleichungen (equations for the loop closures) im einzelnen aufgezeigt. Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Punktlagen, die in den Knotennetzen angehalten werden mußten, erfolgte nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Tabellen enthalten die Ergebnisse der vorläufigen Berechnungen und die Bedingungen für die Ausgleichung der Polygonschlußfehler. Zur Erleichterung der praktischen Anwendung ist die Aufstellung und Auflösung der Normalgleichungen besonders dargestellt. Endlich sind noch die endgültigen Ergebnisse der Neuausgleichung und die Koordinatenänderungen gegenüber dem alten Dreiecksnetz wiedergegeben.

Den Schluß der Veröffentlichung bildet eine Diskussion der Probleme, die bei einer so umfangreichen Ausgleichung von Dreiecksketten auftreten sowie eine Untersuchung der Genauigkeit der Beobachtungen auf Grund der Polygonschlußfehler.

Einführung

Das Dreiecksnetz I. O. der Vereinigten Staaten wurde während der letzten 80 Jahre — etwa seit 1850 — von Jahr zu Jahr mit mehr oder weniger großer Gleichförmigkeit entwickelt. Die Dreiecksketten im westlichen Teil der Vereinigten Staaten wurden hierbei in rund 50 Jahren bearbeitet. Diese mehr oder weniger gleichförmige Entwicklung bestand darin, daß neue Dreiecksketten an die bereits bestehenden angeschlossen wurden. Die verschiedenen Dreiecksketten wurden hierbei nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen, so daß alsbald endgültige Werte für ingenieur-technische Zwecke zur Verfügung standen. Wenn hierbei irgendeine Schleife oder ein Polygon (loop) geschlossen wurde, wurde der gesamte Polygonschlußfehler (discrepancy in closure) innerhalb der

letzten Dreieckskette (arc) ausgeglichen, durch die das Polygon geschlossen wurde. Dadurch wurden häufig die Winkelbedingungen der letzten Dreieckskette sehr beeinflußt und damit Verzerrungen des ganzen Netzes verursacht, die durch die allgemeine Übereinstimmung der Beobachtungen nicht mehr gerechtfertigt waren.

Diese Methode mußte aus praktischen Gründen beibehalten werden, weil sonst jedesmal, wenn ein neues Polygon geschlossen wurde, die gesamte Triangulation neu hätte ausgeglichen werden müssen. Wirtschaftliche Rücksichten machten es notwendig, diese Methode so lange beizubehalten, bis nach dem endgültigen Aufbau der Hauptdreiecksketten eine das gesamte Gebiet umfassende einheitliche Neuausgleichung durchgeführt werden konnte.

Die letzten Ketten des Dreiecksnetzes im westlichen Teil der Vereinigten Staaten wurden 1926 vollendet; im Anschluß hieran wurde die einheitliche Neuausgleichung durchgeführt. Der Plan für diese Ausgleichung wurde bereits 1924 festgelegt, so daß viele der vorbereitenden Rechnungen schon vor Fertigstellung der letzten Ketten gemacht werden konnten.

Eine Ausgleichung solchen Ausmaßes konnte nur mit Hilfe einer geschulten Rechengruppe durchgeführt werden. Hierbei verdienen eine Reihe von Mitgliedern der geodätischen Abteilung besondere Erwähnung; W. F. Reynolds, C. H. Swick, H. C. Mitchell, W. D. Sutcliffe und Howard S. Rappleye halfen bei der Aufstellung der Fehler- und Normalgleichungen und gaben wertvolle Ratschläge für die technische Durchführung der Ausgleichung. Bei den übrigen Berechnungen wurde die Hauptarbeit von G. L. Fenstres, H. P. Kaufmann, F. W. Darling, J. A. Duerksen, W. Shofnos, C. J. Clifford und W. E. Wodd geleistet.

Die Entwicklung des Dreiecksnetzes

Bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes sollte selbstverständlich der Schlußfehler einer Schleife (Polygonschlußfehler) auf ihre ganze Länge verteilt werden. Das ist sehr einfach, wenn das Dreiecksnetz aus einer einzelnen geschlossenen Dreieckskette besteht, wie sie bei der Durchführung einer Triangulation um eine Insel oder um einen See herum gebildet wird. Wenn aber das Dreiecksnetz aus einer ganzen Reihe von zusammenhängenden Schleifen oder Polygonen besteht, macht die Auflösung der Bedingungsgleichungen für all diese Schleifen in einem Guß mit Rücksicht auf die umfangreichen Berechnungen erhebliche Schwierigkeiten.

Als in den Vereinigten Staaten die geodätischen Ausgangswerte festgesetzt wurden, bestand das Dreiecksnetz nur aus einem schmalen Gerippe, das die Dreieckskette längs der Atlantikküste mit der an der Pazifikküste verband. Wurden diese Rahmenketten durch neue Arbeiten verbunden und ergänzt, so wurden die Polygonschlußfehler nur in den neuen Dreiecksketten ausgeglichen, während die bereits ausgeglichenen Netzteile unverändert beibehalten wurden. Hierbei waren in die früheren Berechnungen keine beobachteten geodätischen Azimute einbezogen worden, die mit Hilfe der Laplaceschen Gleichung aus den beobachteten astronomischen Azimuten abgeleitet werden können. Man hatte seinerzeit noch keine Erfahrung, daß eine Dreieckskette verschwenkt wird, wenn ihre Orientierung nicht durch Bedingungsgleichungen gesichert wird, die man aus den beobachteten und um den Betrag der Lotabweichung verbesserten Azimuten erhält. Die Abweichung von der wahren Orientierung in den früher ausgeglichenen Dreiecksketten verursachte zuweilen verhältnismäßig große Widersprüche, die sich zeigten, wenn neue Ketten beobachtet und mit den früheren Ketten zu neuen Polygonen oder Schleifen zusammengefaßt wurden. Als das Land mit einer ganzen Reihe von Polygonen von Dreiecksketten überzogen worden war, wurde diese Ausgleichsmethode immer untragbarer, weil häufig verhältnismäßig kurze Ketten Polygonschlußfehler aufnehmen mußten, die in keinem Verhältnis zu ihrer Länge standen und daher übertrieben große Verbesserungen verursachten. Die Polygonschlußfehler waren im allgemeinen nicht größer wie sie bei dem Genauigkeitsgrad der Beobachtungen erwartet werden durften, sofern man die ganze Umfangslänge der Polygone berücksichtigte, aber sie waren zu groß, um sie bei unveränderter Beibehaltung der alten Netzteile allein der Ausgleichung der neuen Netzteile zugrunde zu legen. Damit wurde klar, daß einmal eine Richtigstellung des ganzen Netzes oder wenigstens eines Teiles des Netzes gemacht werden mußte, um diese ungleichen Spannungen auszugleichen. Als daher der Westen des Landes in fast ideal geformte Polygone aufgeteilt worden war, wurde dieser Teil vom 98. Meridian ab neu ausgeglichen.

Begründung einer einheitlichen Neuausgleichung

Obwohl der Westteil mit einer so ausreichenden Anzahl von Dreiecksketten bedeckt war, daß eine einheitliche Ausgleichung in Angriff hätte genommen werden können, um endgültige Ergebnisse zu erhalten, die für alle Zeiten festgehalten werden

sollten, so ergaben sich dennoch für die praktische Durchführung dieser Ausgleichung erhebliche Schwierigkeiten. Wenn die Ausgleichung für das ganze Gebiet in einem Guß nach der Methode der kleinsten Quadrate hätte durchgeführt werden sollen, so hätten hierbei mehr als 3000 zusammenhängende Gleichungen berücksichtigt werden müssen. Selbst bei Verwendung moderner Rechenmaschinen würde das einen ungeheuren Arbeitsaufwand erfordern, der in keiner Weise wirtschaftlich verantwortet werden kann. Darüber hinaus besteht dann noch die Gefahr, daß bei der Bildung oder Auflösung der Fehler- und Normalgleichungen ein Fehler unterläuft, der erst bei den Abschlußrechnungen entdeckt wird und dessen Richtigstellung noch besondere zusätzliche Arbeit verursacht.

Die Frage der Neuausgleichung war seinerzeit sehr wichtig, denn die Dreieckskette I. O., die sich vom Nordwesten der Vereinigten Staaten entlang der Küste von Britisch Kolumbien und durch das südöstliche Alaska erstreckt, mußte vordringlich ausgeglichen werden, und diese Ausgleichung konnte solange nicht durchgeführt werden, als nicht die endgültigen geographischen Koordinaten für die Punkte feststanden, von denen die neue Kette ausging. Diese Kette wurde gemeinsam vom Coast and Geodetic Survey und dem Geodetic Survey of Canada beobachtet und ausgeglichen. Die über diese Kette nach Alaska übertragenen Ausgangswerte sind bestimmend für die gesamte Triangulation in Alaska und ebenso für die Triangulation im Westen und im Nordwesten Kanadas. Aus diesem Grunde war es notwendig, die bestmöglichen Werte für die Dreiecksseite im Nordwesten Washingtons zu bestimmen, von der die kanadisch-alaskische Dreieckskette ausging.

Die Entwicklung der Bowie-Methode

Zur Ausgleichung eines derart umfangreichen Dreiecksnetzes wurde bereits 1924 durch Dr. William Bowie, Chef der Geodätischen Abteilung des U. S. Coast and Geodetic Survey, eine möglichst wirtschaftliche Methode ausgearbeitet. Bowie entwickelte und begründete einen Plan, mit dem ein so ausgedehntes Dreiecksnetz mit ausreichender Strenge und mit verhältnismäßig geringen Kosten und in verhältnismäßig kurzer Zeit ausgeglichen werden kann. Bei der Bowie-Methode werden die Anschlußfehler der einzelnen Dreiecksketten in Breite und Länge in ähnlicher Weise verteilt, wie die Höhenschlußfehler bei der Ausgleichung eines Nivellementsnetzes I. O.

Das Dreiecksnetz im westlichen Teil der Vereinigten Staaten besteht aus einer Reihe sich schneidender Meridian- und Parallelkreisketten. Zur Richtigstellung des Netzes durch eine Neuausgleichung nach der Bowie-Methode wurde das Netz in Kettenabschnitte oder Verbindungsketten (section of an arc) zwischen den Kreuzungsstellen der Dreiecksketten oder je zwei Knotenpunkten (junction points) unterteilt.

Die Bowie-Methode, die ursprünglich zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes aus einzelnen sich schneidenden Dreiecksketten erdacht wurde, kann in gleicher Weise auch zur Ausgleichung eines flächenförmig angeordneten Dreiecksnetzes verwendet werden, wenn hierbei Schleifen oder Polygone von Dreiecksketten ausgewählt werden, die aus wohlgeformten Dreiecken, Vierecken und anderen Figuren bestehen, und die die dazwischen liegenden Netzteile umschließen. Die zunächst ausgesparten Stationen müssen dann später im Anschluß an die bereits ausgeglichenen Netzteile gesondert ausgeglichen werden.

Nach der Verteilung der Polygonschlußfehler auf die verschiedenen Verbindungsketten der Polygone und nach der Berechnung der wahrscheinlichsten geographischen Koordinaten für die als Knotenpunkte benutzten Stationen, können die Verbindungsketten zwischen den Knotennetzen (junctions figures) gesondert ausgeglichen werden.

Auf Anregung von Dr. Bowie arbeitete zur praktischen Durchführung des Planes der Verfasser (O. S. Adams) eine Methode zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen und zu ihrer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate aus. Dabei war zunächst daran gedacht, die Ausgleichung für den Polygonschluß in Breite und Länge mit einheitlichen Gleichungen in einem Satz durchzuführen. Aber bei den weiteren Untersuchungen konnte hierfür kein wirtschaftliches Verfahren gefunden werden. Nach eingehenden Untersuchungen wurde daher ein Ausgleichsschema mit zwei unabhängigen Reihen von Bedingungsgleichungen aufgestellt, und zwar mit einer Gleichungsreihe für den Breiten- und einer Gleichungsreihe für den Längenanschluß. Dieses Schema erwies sich in gleicher Weise wirtschaftlich und praktisch und sicherte zugleich eine zufriedenstellende Verteilung der Polygonschlußfehler.

Nach der Bearbeitung der mathematischen Theorie der Methode wurde dem Verfasser (O. S. Adams) die gesamte Ausführung des Projekts übertragen. Hierbei wurden 8—12 Rechner (die Zahl wechselte entsprechend dem jeweiligen Arbeitsanfall) für die Ausgleichung der Verbindungs-

ketten angesetzt. In 15 Monaten war die Arbeit bereits so weit vorangekommen, daß die Berechnungen für die Ausgleichung der Polygonschlußfehler begonnen werden konnten, um die wahrscheinlichsten Koordinaten der Knotenpunkte festzustellen, die in der Folge in den Knotennetzen angehalten werden mußten. Einer der großen Vorteile der Bowie-Methode liegt darin, daß gleichzeitig eine große Zahl von Rechnern angesetzt werden kann. Bei Beginn der Ausgleichung war die Feldarbeit in verschiedenen Dreiecksketten, die in die Ausgleichung einbezogen wurden, noch nicht abgeschlossen. Wenn seinerzeit bereits alle Beobachtungsdaten zur Verfügung gestanden wären, hätten ebenso viele Rechner angesetzt werden können, als Verbindungsketten vorlagen, und damit hätte man die endgültigen Ergebnisse in noch kürzerer Zeit erhalten können. Das Rechenbüro machte alle Anstrengungen, um die Berechnungen möglichst bald nach Abschluß der Beobachtungen zu beenden. Der schnelle Abschluß der Rechenarbeiten spricht sowohl für die Bowie-Methode, als auch für die Tüchtigkeit der Geodäten, die mit der Durchführung der erforderlichen Berechnungen beauftragt waren. Wir glauben, daß diese Ausgleichung die Beachtung aller praktischen Geodäten verdient, weil sie eine neue Methode zur Bearbeitung eines umfangreichen und komplizierten Dreiecksnetzes darstellt, die in einer verhältnismäßig kurzen Zeit zum Ziele führt und wissenschaftlichen Anforderungen genügt. Die Wirtschaftlichkeit in bezug auf Zeit und Kosten ist eine Tatsache, die ebenso in Betracht zu ziehen ist wie der Umstand, daß die Methode zur Ausgleichung von Dreiecksnetzen verwendet werden kann, die schwerlich auf andere Weise behandelt werden können. Insgesamt wurden für die Bestimmung der Knotenpunkte 2200 Arbeitstage mit je 7 Arbeitsstunden benötigt. Die für die Ausgleichung der Verbindungsketten zwischen den Knotennetzen benötigte Zeit betrug 1600 Arbeitstage, so daß sich damit ein Gesamtzeitaufwand von 3800 Arbeitstagen mit je 7 Arbeitsstunden für die Gesamtausgleichung des ganzen Netzes ergab.

Darstellung des Ausgleichungsschemas

Bei der Durchführung der Ausgleichung wurden zunächst Knotennetze (junction figures) aus den verschiedenen Verbindungsketten herausgelöst. Dabei war man bemüht, diese Knotennetze so einfach als möglich zu gestalten und nach Möglichkeit so festzulegen, daß die verschiedenen Verbindungsketten, die von ihnen strahlenförmig ausgingen, jeweils lediglich durch eine einzige Seite mit ihnen

verbunden waren. Es war selbstverständlich nicht in allen Fällen möglich, solch ideale Knotennetze zu erhalten; die Knotennetze wurden aber nach Möglichkeit in dieser idealen Form ausgewählt. Die Knotennetze bestanden in einzelnen Fällen nur aus einem oder zwei Vierecken; in anderen Fällen wieder wurden sie aus ziemlich komplizierten Figuren gebildet. Wenn das Ausgleichungsschema schon während der Feldarbeiten festgestanden wäre, hätte man ohne Zweifel in fast allen Fällen ideal geformte, einfache Knotennetze festlegen können. Nachdem aber die Beobachtungen bereits abgeschlossen waren, blieb nichts anderes übrig, als von dem Vorhandenen den bestmöglichen Gebrauch zu machen.

Nach der Auswahl der Knotennetze mußte für jedes ein bestimmter Maßstab und ein bestimmtes Azimut festgelegt werden, die in der Folge beizubehalten waren. Im Idealfall enthielt das Knotennetz selbst eine gemessene Grundlinie und ein beobachtetes Laplacesches Azimut. Das Knotennetz konnte dann nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden und sein Maßstab und seine Orientierung durch die gemessene Grundlinie und durch das beobachtete Azimut festgelegt werden. Durch diese Ausgleichung wurden die Dreiecksseiten, von denen die Verbindungsketten ausgingen, in bezug auf Länge und Azimut festgelegt, so daß diese bei der nachfolgenden Ausgleichung der Verbindungsketten als endgültig beibehalten werden konnten.

Wenn nun in einem Knotennetz keine Grundlinie und kein beobachtetes Laplacesches Azimut vorhanden waren, mußte für die Länge und für das Azimut irgend einer Ausgangsseite des Knotennetzes (ggf. wenn sowohl Grundlinie und Azimut fehlten für die Länge und für das Azimut) ein passender Wert abgeleitet werden. Hierzu wurden im allgemeinen die Länge und das Azimut irgend einer Seite des Knotennetzes durch besondere Übertragungsgleichungen über alle anschließenden Verbindungsketten von den zunächstgelegenen Grundlinien und beobachteten Azimuten aus übertragen und dann der endgültige Gebrauchswert dem allgemeinen Mittel aus den verschiedenen Übertragungen gleichgesetzt. Die Gewichte wurden hierbei mit Rücksicht auf die Zuverlässigkeit der Übertragung festgesetzt; eine nahegelegene Grundlinie oder ein nahegelegenes Azimut bekamen ein größeres Gewicht als weiter abliegende. Dabei war man stets bestrebt, Werte zu erhalten, die mit den zunächst gelegenen Grundlinien und Laplaceschen Azimuten in den verschiedenen Verbindungsketten möglichst gut übereinstimmten. Auf diese

Weise ist es in allen Fällen gelungen, aus den verschiedenen Werten, die über die einzelnen Verbindungsketten erhalten wurden, irgend einen vernünftigen Mittelwert zu bestimmen. In einigen Fällen, in denen das Knotennetz bereits zusammen mit einer anschließenden Verbindungskette ausgeglichen worden war, wurden die ausgeglichenen Werte der Winkel und Längen beibehalten, wenn sie genügend genau mit den aus den Verbindungsketten abgeleiteten Linien übereinstimmten. Auf diese Weise wurden verschiedene Methoden zur Feststellung der Ausgangswerte benutzt, wobei stets angestrebt wurde, Werte zu erhalten, die mit den Grundlinien und Laplaceschen Azimuten in den von den Knotennetzen strahlenförmig auslaufenden Verbindungsketten möglichst gut übereinstimmten.

Laplacesche Azimute

Da die Frage auftreten kann, wie die Laplaceschen Azimute erhalten werden, ist es wohl am besten, hier etwas darüber zu sagen. Ein Laplacesches Azimut ist ein beobachtetes astronomisches Azimut, das um den Betrag der Lotabweichung verbessert ist. Diese Verbesserung kann berechnet werden, wenn sowohl die astronomische Länge einer Station, als auch das Azimut beobachtet worden sind. Wenn die astronomischen Werte mit A , die geodätischen mit G bezeichnet werden, dann gilt die Beziehung

$(A - G)$ im Azimut = $-(A - G)$ in der Länge $\cdot \sin \varphi$, wobei φ die geographische Breite der Station ist. Bei der Berechnung dieser Verbesserung wurde der bestmögliche Wert für die geodätische Länge aus den vorläufigen Berechnungen eingesetzt. Da dieser Wert in den meisten Fällen von dem endgültigen Wert nur um einige zehntel Sekunden abweicht, wird die berechnete Verbesserung ziemlich richtig sein. Nach der endgültigen Feststellung der geodätischen Längen für das Knotennetz kann für das angehaltene Azimut eine kleine Verbesserung berechnet werden, die der Änderung der geodätischen Länge gegenüber der vorläufigen Berechnung entspricht; bei der endgültigen Ausgleichung der Verbindungsketten zwischen den Knotennetzen, kann dann diese Azimutänderung beachtet werden.

Typische Knotennetze

Um die verschiedenen Verhältnisse aufzuzeigen, die bei der Festlegung der Längen der Ausgangsseiten und der orientierenden Azimute in den Knotennetzen auftreten können, sind im Folgenden

drei Skizzen (Abb. 1—3) eingefügt, die drei typische Fälle zeigen, die bei der vorliegenden Ausgleichung auftraten. Abbildung 1 zeigt den einfachsten Fall, in dem eine gemessene Grundlinie (stark ausgezogen) und ein Laplacesches Azimut (durch einen Pfeil dargestellt) in einer einfachen Figur eingeschlossen sind. In Abbildung 2 sind die

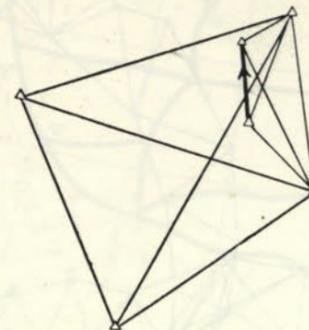


Abb. 1. Einfaches Knotennetz mit Grundlinie und Laplaceschem Azimut

Grundlinie und das Laplacesche Azimut ebenfalls noch im Knotennetz selbst enthalten, aber das Knotennetz selbst ist wesentlich komplizierter. Abbildung 3 zeigt den schwierigsten Fall. Hier mußten die Grundlinie und das Laplacesche Azimut in das eigentliche Knotennetz über vier verschiedene Verbindungsketten übertragen werden. Die Übertragung erfolgte hierbei über einfache Dreiecksketten. Das Knotennetz, von dem hier einige nebensächliche Dreiecke weggelassen wurden, war in Wirklichkeit noch komplizierter. Dies war der verwickelteste Fall, der bei der ganzen Ausgleichung auftrat. Auf diese Weise konnte bei der vorliegenden Ausgleichung für jedes Knotennetz auf irgend eine vernünftige Weise die Länge einer Ausgangsseite und ein orientierendes Azimut bestimmt werden, wobei — wie schon oben gesagt — immer angestrebt wurde, diese Werte in möglichst guter Übereinstimmung mit den festen Ausgangswerten in den anschließenden Verbindungsketten festzulegen. Bei der vorliegenden Ausgleichung wurde dies immer beachtet und lediglich die Methode manchmal geändert um sie einem speziellen Fall anzupassen.

Vorläufige Ausgleichung der Verbindungsketten

Nach der Ausgleichung der Knotennetze liegen die Längen und Azimute der Dreiecksseiten fest, von denen die einzelnen Verbindungsketten ausgehen. Die Verbindungsketten können daher zwischen den Knotennetzen unter Beibehaltung der Längen und Azimute der Anschlußseiten ausgeglichen werden. Dabei werden alle Bedingungen, mit Ausnahme der Gleichungen für

den Anschluß in Länge und Breite, berücksichtigt. Aus praktischen Gründen wurden die Gleichungen für den Breiten- und Längenanschluß bei der vorläufigen Ausgleichung ohne Absolutglieder mitangesetzt. Die Auflösung der Normalgleichungen konnte dann unter Berücksichtigung dieser Gleichungen durchgeführt werden, wobei diese beiden Gleichungen als letzte Normalgleichungen geführt wurden. Bei der vorläufigen rückläufigen Bestimmung der Unbekannten wurden dann diese beiden Gleichungen vernachlässigt. Durch diese vorsorgliche Maßnahme war es später, nachdem die Anschlußwidersprüche in Länge und Breite feststanden, nur notwendig bei der Auflösung der Normalgleichungen diese Gleichungen zu berücksichtigen, wobei die konstanten Glieder der übrigen Normalgleichungen vernachlässigt wurden. Lediglich das konstante Glied der Azimutgleichung jeder Verbindungskette erhielt noch eine kleine Verbesserung, die von der Änderung der Laplaceschen Azimute infolge der Änderung der geodätischen Länge herrührte. Auf diese Weise wurden weitere Verbesserungen bestimmt, die zusammen mit den bereits vorläufig bestimmten Verbesserungen die endgültigen Gesamtverbesserungen ergaben. Damit war auch die verlangte Wirtschaftlichkeit der Ausgleichung erreicht. Gleichwohl könnte, wenn es gewünscht würde, bei der Anwendung der Bowditch-Methode nach der endgültigen Berechnung der Positionen der Knotennetze — die Art dieser Berechnung wird im Folgenden noch gezeigt — eine vollständige Neuausgleichung jeder Verbindungskette, die in einem Guß alle Bedingungen umfaßt, durchgeführt werden. Dies würde selbstverständlich wesentlich mehr Arbeit verursachen und trotzdem würden die Ergebnisse kaum besser befriedigen. Bei der Entscheidung der Art und Weise, wie die ganze Arbeit durchzuführen ist, ist der Wirtschaftlichkeit immer ein bestimmtes Gewicht beizumessen. Ohne Zweifel wurden durch die bei der vorliegenden Ausgleichung angewandte Methode viel Zeit und damit auch große Kosten erspart.

Die vorläufige Ausgleichung ist nichts anderes, als eine gewöhnliche Netzausgleichung, wobei alle Winkelbedingungen, die Seitengleichungen, die Basisgleichungen (zur Beibehaltung der Längen der gemessenen Grundlinien und der Anschlußseiten der Verbindungsketten) sowie die Azimutbedingungen (zur Beibehaltung der Azimute zwischen den Laplaceschen Punkten in der Mitte der Verbindungsketten und den Azimuten der Anschlußseiten) berücksichtigt werden. Hiernach werden also alle Bedingungen mit Ausnahme des Anschlußzwangs in Länge und Breite beachtet.

Berechnung vorläufiger Koordinaten

Im Anschluß an diese vorläufigen Ausgleichungen können, ausgehend von einem Zentralpunkt, dessen geographische Breite und Länge als Ausgangswerte unverändert festgehalten werden, geographische Koordinaten für alle Netzpunkte berechnet werden. Da die vorläufigen Koordinaten über verschiedene Verbindungsketten übertragen werden können, werden in verschiedenen Knotenpunkten Widersprüche in den Koordinaten auftreten. Bei der Fortführung der Koordinatenberechnung über einen solchen Knotenpunkt, muß dann an einem bestimmten Koordinatenpaar festgehalten werden. Auf diese Weise können die Koordinaten aller Punkte in einem ungebrochenen Zuge über mehrere zusammenhängende Dreiecksketten übertragen werden, bis man wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

In jedem Knotennetz werden nun für einen beliebigen Punkt aus den zugehörigen, vorliegenden Koordinaten bestimmte Näherungswerte angenommen. Hierbei vereinfacht sich die Aufstellung der Fehlergleichungen, wenn

als Näherungswerte unmittelbar die vorläufigen Koordinaten übernommen werden, die über eine zusammenhängende Folge von Verbindungsketten übertragen wurden. Dadurch werden die konstanten Glieder in einer Reihe von Fehlergleichungen gleich Null, wodurch die Bildung der Fehlergleichungen für die Breite und Länge wesentlich vereinfacht wird.

Ausgleichung der Breiten- und Längenanschlußfehler

Nach der Annahme der Näherungskordinaten für die Knotenpunkte, werden die Fehlergleichungen für

den Anschluß in Breite und Länge aufgestellt. Das Verfahren ist in beiden Fällen gleich. Durch Subtraktion der angenommenen Näherungs-

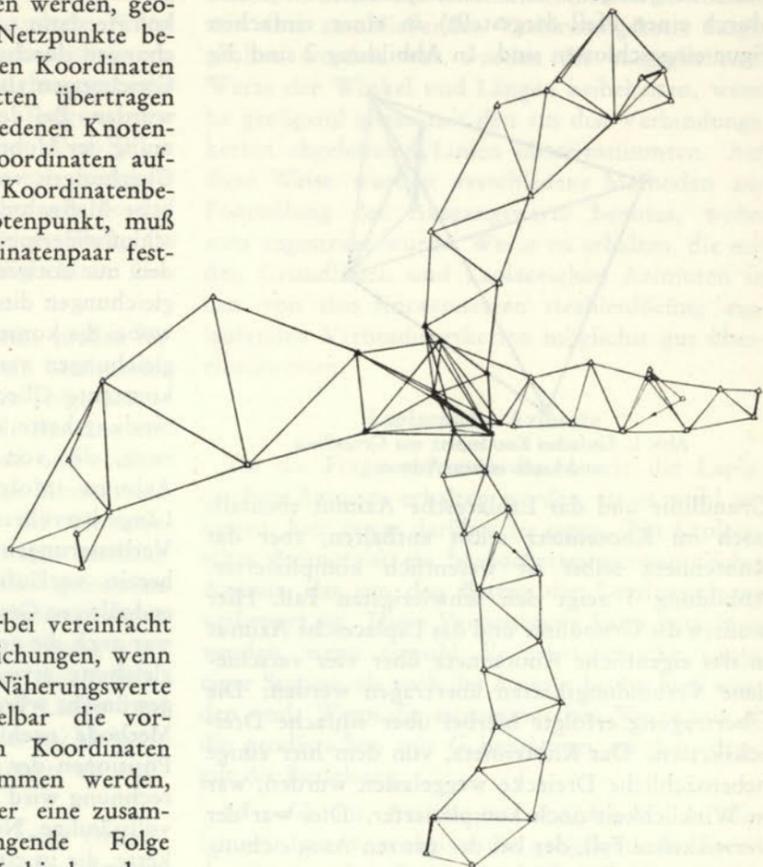


Abb. 3. Knotennetz ohne Grundlinie und Laplacesches Azimut. Die Längen- und Azimute der Dreiecksseiten des Knotennetzes werden durch Übertragung der vier Grundlinien (stark ausgezogen) und der vier Laplaceschen Azimute (durch Pfeile dargestellt) in den Verbindungsketten überprüft.

breiten für die Endpunkte einer Verbindungskette, erhält man einen bestimmten Näherungswert für den zugehörigen Breitenunterschied. Wird nun von diesem angenommenen Näherungswert, der bei der vorläufigen Koordinierung berechnete Breitenunterschied der Verbindungskette subtrahiert, so erhält man die Fehlergleichung für die Verbesserung v des berechneten Breitenunterschieds, der hier wie eine Beobachtungsgröße behandelt wird. Auf dieselbe Weise werden die Verbesserungen v für die berechneten Längenunterschiede erhalten. Die konstanten Glieder werden hierbei in Einheiten der Bogensekunde ausgedrückt. Den Bogensekunden entsprechen nun aber in verschiedenen geographischen Breiten verschiedene lineare Werte.

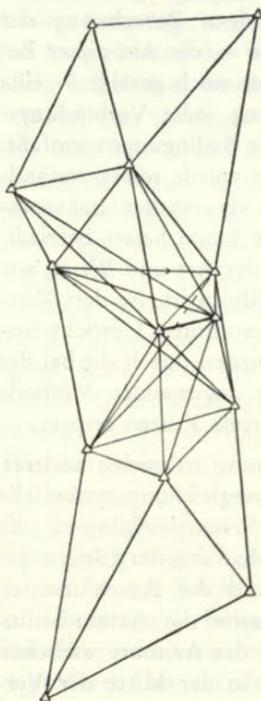


Abb. 2. Kompliziertes Knotennetz, das mehrere Stationen umfaßt.

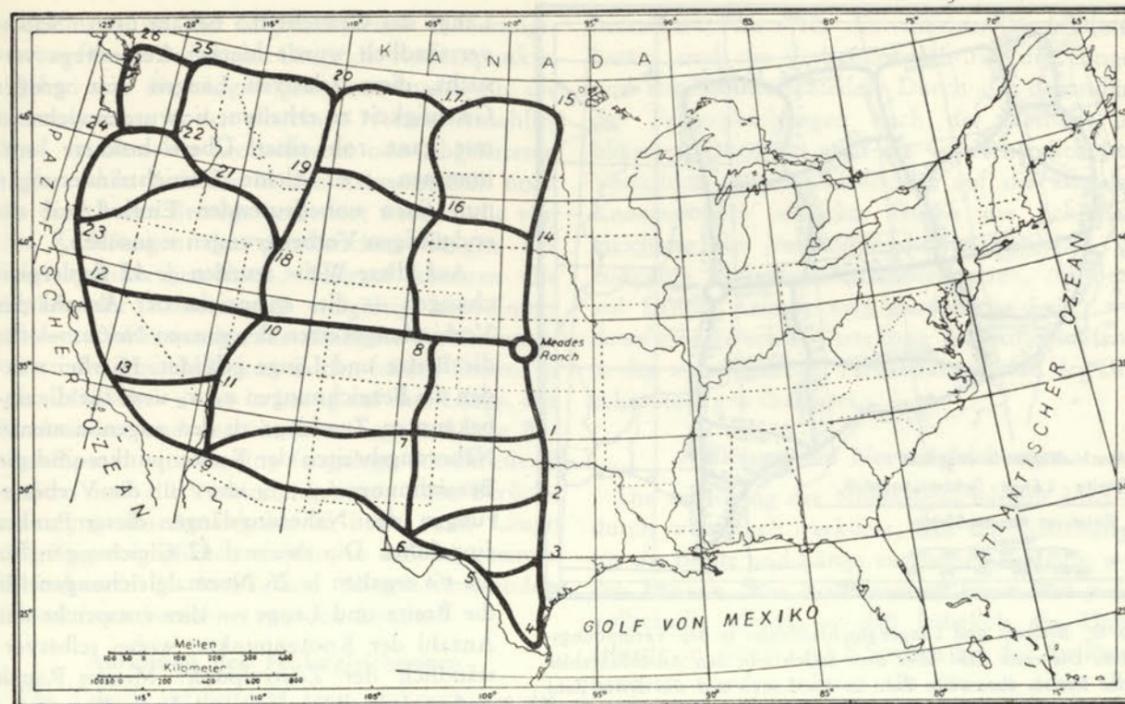


Abb. 4. Netzskizze mit dem Ausgangspunkt Meades Ranch und den Nummern der Knotenpunkte.

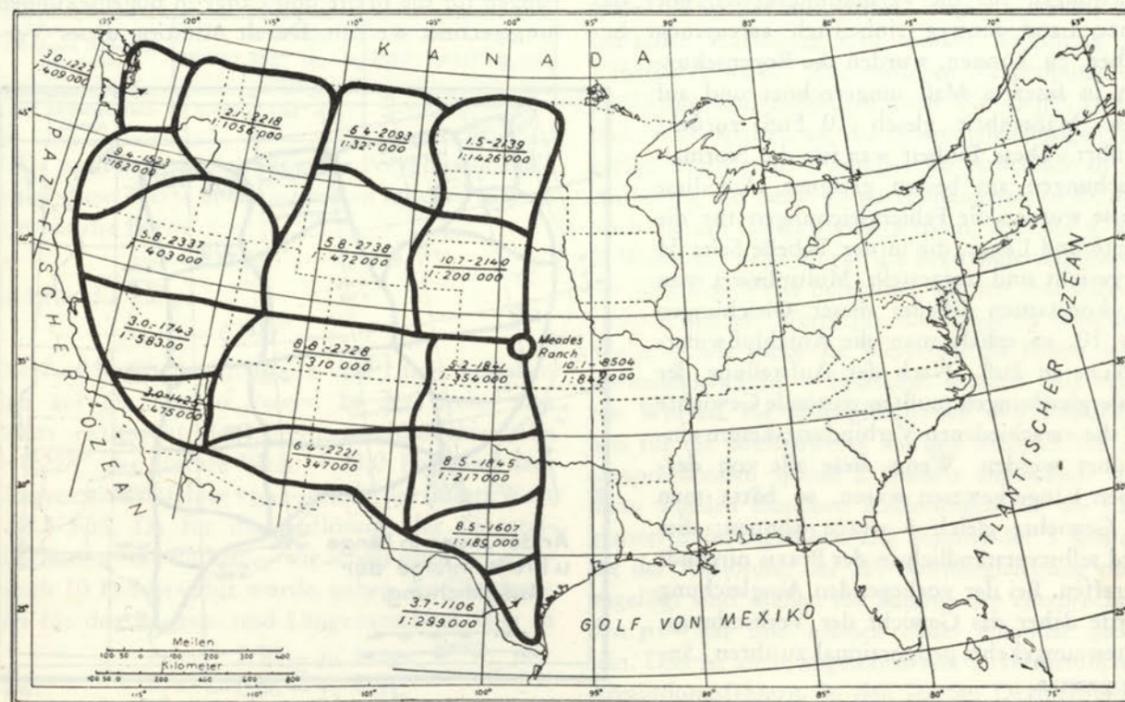


Abb. 5. Polygonschlußfehler nach der vorläufigen Ausgleichung der Verbindungsketten. Die erste Zahl über dem Strich gibt die linearen Anschlußfehler in Metern, die zweite Zahl die ungefähre Länge des Polygonumfangs in Kilometern und die Zahl unter dem Strich endlich das Verhältnis des linearen Anschlußfehlers zum Polygonumfang.



Abb. 6. Breiten- und Längenanschlußfehler in den Verbindungsketten. Die erste Zahl über dem Strich gibt den Anschlußfehler in der Breite, die zweite Zahl in der Länge und die dritte Zahl den linearen Anschlußfehler jeweils in Fuß. Unter dem Strich wird das Verhältnis des linearen Anschlußfehlers zur Länge der Verbindungskette dargestellt.

Um die konstanten Glieder in den Fehlergleichungen für die Verbindungsketten über das ganze Land hinweg einheitlich aufeinander beziehen zu können, wurden die Bogensekunden in lineares Maß umgerechnet und auf diese Maßeinheit gleich 10 Fuß zurückgeführt. Diese Einheit war für die Normalgleichungen am besten geeignet. Auf diese Weise wurden die Fehlergleichungen für die Breite und Länge, die in der Tabelle Seite 34 dargestellt sind, aufgestellt. Multipliziert man die konstanten Glieder dieser Gleichungen mit 10, so erhält man die Anschlußwidersprüche in Fuß. Nach der Aufstellung der Fehlergleichungen mußten passende Gewichte für die verschiedenen Verbindungsketten eingeführt werden. Wenn diese alle von derselben Länge gewesen wären, so hätte man die Gewichte gleich 1 setzen können; dies wird selbstverständlich in der Praxis nirgends zutreffen. Bei der vorliegenden Ausgleichung wurde daher das Gewicht der Verbindungsketten umgekehrt proportional zu ihren Längen gesetzt.

Dabei erhielt eine Kette mit durchschnittlicher Länge das Gewicht 1. Eine Kette, die nur etwa halb so lang war, erhielt das Gewicht 2, während eine Kette mit doppelter

Länge das Gewicht 0,5 bekam usw. Selbstverständlich wurde hierbei keineswegs versucht, diese relativen Längen mit großer Genauigkeit zu erhalten; sie wurden vielmehr nur ganz roh einer Übersichtskarte entnommen, weil kleine Gewichtsänderungen nur einen unbedeutenden Einfluß auf die endgültigen Verbesserungen v ausüben.

Auf diese Weise wurden je 42 Fehlergleichungen — dies entspricht der Anzahl der Verbindungsketten des ganzen Netzes — für die Breite und Länge gebildet. Hierbei wurden die Bezeichnungen x_1, x_2 usw. für die unbekanntes Zuschläge zu den angenommenen Näherungsbreiten der Knotenpunkte und die Bezeichnungen y_1, y_2 usw. für die Verbesserungen der Näherungslängen dieser Punkte eingeführt. Die zweimal 42 Gleichungen für die v 's ergaben je 26 Normalgleichungen für die Breite und Länge — dies entspricht der Anzahl der Knotenpunkte, wobei selbstverständlich der Zentralpunkt Meades Ranch nicht mitgezählt wird, weil dessen Breite und Länge unverändert beibehalten wurden.

Nach der Aufstellung der Normalgleichungen und der Bestimmung der x und y mußten die in der Einheit 10 Fuß erhaltenen Verbesserungen für die Breite und Länge in Bogensekunden umgerechnet werden. Durch Addition dieser Ver-



Abb. 7. Änderung der geographischen Breite und Länge der bereits früher ausgeglichenen Knotenpunkte durch die Neuausgleichung. Die Vorzeichen gelten im Sinne endgültige Koordinaten — früher bestimmte Koordinaten. Die obere Zahl gibt die Änderung in der Breite, die untere Zahl die Änderung in der Länge.

besserungen zu den angenommenen Näherungswerten für die Breite und Länge der Knotenpunkte, ergaben sich die endgültigen Koordinaten für die Knotenpunkte in den einzelnen Netzen. Anschließend mußten die beobachteten oder abgeleiteten Laplaceschen Azimute in den Knotennetzen noch um die kleinen Beträge verbessert werden, die von den Änderungen der geodätischen Längen der Knotenpunkte herrühren. Hierauf konnten alle Punkte der Knotennetze endgültig koordiniert werden. Damit wurden für sämtliche Verbindungsketten die Anschlußseiten an den beiden Enden, in jeder Hinsicht — also in bezug auf ihre Länge, auf die Azimute und auch in ihrer Lage auf dem Bezugseipsoid — endgültig festgelegt. Anschließend mußten noch alle Verbindungsketten unter Berücksichtigung des Anschlusses in Breite und Länge endgültig ausgeglichen werden, so daß das gesamte Dreiecksnetz in fortlaufend übereinstimmenden Koordinaten berechnet werden konnte.

Auflösung der Fehlergleichungen

Die Tabelle auf Seite 34 zeigt praktisch wie die Fehlergleichungen gebildet werden. Gleichwohl soll an Hand der Tabelle noch ein praktisches Beispiel angegeben werden. Für die Stationen Donna und Peters (vgl. die Tabellen auf Seite 34) werden folgende Koordinatenunterschiede erhalten.

Unterschied der angenommenen Näherungskordinaten	In der Breite: $3^{\circ}00'52,382'' - x_4 + x_5$	In der Länge: $2^{\circ}33'17,613'' - y_4 + y_5$
Unterschied der berechneten vorläufigen Koordinaten	$3^{\circ}00'52,154'' + v_5$	$2^{\circ}33'17,712'' + v_5$

Da nach der Ausgleichung der Polygonanschlußfehler diese Werte übereinstimmen müssen, so muß sein für die Breite

$$v_5 = +0,228'' - x_4 + x_5$$

und für die Länge

$$v_5 = -0,099'' - y_4 + y_5.$$

Die Anschlußfehler in Breite und Länge beziehen sich auf die Station Peters. In der Breite von Peters entspricht dem Breitenanschlußfehler von $+0,228''$ der lineare Wert $+23,0$ Fuß und dem Längenanschlußfehler von $-0,099''$ der lineare Wert $-8,8$ Fuß. Da für die Auflösung der Normalgleichungen die Einheit — wie schon oben gesagt — gleich 10 Fuß gewählt wurde, gehen die Gleichungen für den Breiten- und Längenanschluß über in

$$v_5 = +2,30 - x_4 + x_5$$

bzw.

$$v_5 = -0,88 - y_4 + y_5.$$

In der selben Weise wurden sämtliche Fehlergleichungen gebildet. Hiernach wurde also der Breiten- und Längenunterschied für jede Verbindungskette als unmittelbare Beobachtungsgröße

betrachtet; die v für die einzelnen Verbindungsketten sind die Verbesserungen für die Längen- und Breitenunterschiede. Durch die Behandlung der Fehlergleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate wird die wahrscheinlich beste Verteilung der Anschlußfehler auf die einzelnen Knotenpunkte erreicht. Durch die Schlußausgleichung der Verbindungsketten zwischen den endgültig festgelegten Knotennetzen (in bezug auf Länge, Azimut und geodätische Lage) wird dann eine gerechte Verteilung der Anschlußfehler in den verschiedenen Verbindungsketten des Dreiecksnetzes gewährleistet.

Auflösung der Normalgleichungen

Die Auflösung der Normalgleichungen wird dadurch wesentlich verkürzt, daß die Gleichungen für die Breite und Länge zusammen aufgelöst werden können. Die Koeffizienten für x und y sind vollständig gleich, so daß lediglich die Unterschiede in den η und Σ Spalten bei der Auflösung beachtet werden müssen. Es können daher diese Spalten bei der Auflösung am Schlusse des Schemas nebeneinander aufgeführt werden (vgl. das Schema für die Auflösung Seite 39—43), wodurch eine erhebliche Rechenarbeit eingespart wird. Zur Verprobung der Auflösung wird die Summenspalte (Σ Spalte) mitgeführt, womit auch bei nur einfacher Auflösung eine sichere Rechnung gewährleistet wird. Zur weiteren Verprobung der Auflösung sind außerdem noch die $(p\eta^2)$, $(p\eta\Sigma)$ und $(p\Sigma^2)$ Spalten an die Normalgleichungen angefügt und deren Ergebnisse im Anschluß an die Auflösung auf Seite 43 zusammengestellt. Es darf noch darauf hingewiesen werden, daß die η und Σ Werte auf Seite 43 für die Breitengleichungen in der üblichen Weise berechnet wurden und daß die entsprechenden Werte für die Länge in derselben Weise — wie wenn die Werte für die Breite nicht vorhanden wären — bestimmt wurden. Mit anderen Worten, die Multiplikationen und Reduktionen für die Breitenwerte wurden lediglich für die entsprechenden η und Σ Spalten angewandt und dann wurden dieselben Rechnungen für die Längenwerte durchgeführt. Die Summe der 3 Spalten, die der Auflösung der 26. Normalgleichung noch angefügt sind, stellen die Summe der entsprechenden $p v^2$ dar und müssen daher einander gleich sein. Dies ist auch, abgesehen von unvermeidlichen Abrundungsfehlern, in den letzten Dezimalstellen für beide Normalgleichungsreihen erreicht worden. Diese Summen werden auch noch durch die Summen $p v^2$ auf Seite 46 bis auf die letzten abgeworfenen Dezimalstellen überprüft.

Tafel zur Aufstellung der Normalgleichungen für die Länge

<i>v</i>	<i>p</i>	η	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	$p\eta$	$p\Sigma$	
1	1.00	0	+1	0	+1.00	
2	1.65	0	-1	+1	0	0	
3	1.45	0	.	-1	+1	0	0	
4	1.00	0	.	.	-1	+1	0	0	
5	.90	-88	.	.	.	-1	+1	-7920	-7920	
6	1.65	-1.91	.	.	-1	.	+1	-3.1515	-3.1515	
7	1.00	0	-1	+1	0	0	
8	.75	-2.88	.	-1	.	.	.	+1	-2.1600	-2.1600	
9	.70	-1.20	-1	+1	-8400	-8400	
10	1.10	0	+1	0	+1.10	
11	1.10	0	-1	+1	0	0	
12	1.00	0	-1	+1	0	0	
13	.50	0	-1	.	.	+1	0	0	
14	.50	-89	-1	.	.	+1	-4450	-4450	
15	.70	0	-1	.	+1	0	0	
16	2.00	0	-1	+1	0	0	
17	2.00	+3.57	-1	+1	+7.1400	+7.1400	
18	.70	-2.39	-1	.	+1	-1.6730	-1.6730	
19	2.00	0	-1	.	+1	0	0	
20	.90	+47	-1	+1	+4.230	+4.230	
21	.80	0	0	+80	
22	.65	-2.91	-1	+1	-1.8915	-1.8915	
23	.80	-2.70	-1	.	+1	-2.1600	-2.1600	
24	.80	0	-1	+1	0	0	
25	.80	0	-1	+1	0	0	
26	.85	0	0	0
27	2.00	0	-1	0	0	
28	1.65	0	-1	0	0	
29	.70	+97	-1	+1	+6790	+6790	
30	1.25	0	-1	+1	0	0	
31	.80	+3.05	+2.4400	+2.4400	
32	1.25	0	9	0	
33	2.00	0	-1	+1	0	0	
34	2.00	0	-1	+1	.	.	.	0	0	
35	.90	0	-1	+1	.	.	.	0	0	
36	2.00	0	0	0	
37	.80	-1.03	-1	-8240	-8240	
38	.70	0	0	0	
39	1.20	-25	-1	-3000	-3000	
40	.80	-2.95	-1	.	+1	-2.3600	-2.3600	
41	1.45	+94	-1	+1	+1.3630	+1.3630	
42	1.25	0	-1	+1	0	0	

Normalgleichungen für die Breite

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	η	Σ		
1	+3.35	-1.65	-0.70	-0.8890	+0.1110	
2		+3.85	-1.45	.	.	-0.75	+7725	+7725	
3			+4.10	-1.00	-1.65	-2.6730	-2.6730	
4				+1.90	-0.90	-2.0700	-2.0700	
5					+3.55	-1.00	+4.7430	+4.7430	
6						+3.35	-1.10	-0.50	-7725	-7725	
7							+3.30	-1.00	-0.50	-0560	-0560	
8								+3.60	.	-0.70	-0.80	.	0	+1.1000	
9									+3.90	.	-2.00	.	-0.90	+4.7040	+4.7040	
10										+5.40	-2.00	-0.70	-2.00	+1.1410	+1.1410	
11	+4.80	.	-0.80	-0.8840	-0.8840		
12		+4.70	-2.00	-2.00	-1.1410	-1.1410		
13			+3.70	-2.8750	-2.8750		
14				+2.25	-0.65	-0.80	+3.3695	+4.1695	
15					+1.50	.	-0.85	-1.6575	-1.6575	
16						+3.10	-0.80	.	-0.70	-2.8180	-2.8180	
17							+2.45	.	.	-0.80	-1.2480	-1.2480	
18								+4.90	-1.65	.	-1.25	0	0	
19									+3.60	-1.25	+1.1060	+1.1060	
20										+2.75	+1.2480	+1.2480	
21											+4.05	-2.00	-0.80	+2.3280	+2.3280	
22												+5.20	.	-2.00	-1.20	-7920	-7920	
23													+3.70	-0.90	-2.3280	-2.3280	
24															+4.15	.	-1.25	.	.	0	0	
25																+3.35	-1.45	.	.	+2.7495	+2.7495	
26																	+2.70	-1.9575	.	.	+43.4557	+43.4557
																					+46.3557	+46.3557

Normalgleichungen für die Länge

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	η	Σ
1	+3.35	-1.65	-0.70	+0.8400	+1.8400
2		+3.85	-1.45	-0.75	+2.1600	+2.1600
3			+4.10	-1.00	-1.65	+3.1515	+3.1515
4				+1.90	-0.90	+0.7920	+0.7920
5					+3.55	-1.00	-3.9435	-3.9435
6						+3.35	-1.10	...	-0.50	-2.1600	-2.1600
7							+3.30	-1.00	-0.50	-0.3950	-0.3950
8								+3.60	...	-0.70	0	+1.1000
9									+3.90	...	-2.00	...	-0.90	-8.0080	-8.0080
10										+5.40	-2.00	-0.70	-2.00	-1.6730	+1.6730

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	η	Σ
11	+4.80	...	-0.80	+9.5000	+9.5000
12		+4.70	-2.00	-2.00	-1.6730	-1.6730
13			+3.70	-1.9370	-1.9370
14				+2.25	-0.65	-0.80	+4.0515	+4.8515
15					+1.50	...	-0.85	-1.8915	-1.8915
16						+3.10	-0.85	...	-0.70	-2.8390	-2.8390
17							+2.45	-0.80	-2.4400	-2.4400
18								+4.90	-1.65	-1.25	-1.25	0	0
19									+3.60	+2.75	+0.6790	+0.6790
20											-0.70	...	+2.4400	+2.4400
21											+4.05	-2.00	-0.80	+0.8240	+0.8240
22												-5.20	...	-2.00	-1.20	...	+0.3000	+0.3000
23													+3.70	-0.90	-0.8240	-0.8240
24														+4.15	...	-1.25	0	0
25															+3.35	-1.45	-1.6630	-1.6630
26																+2.70	+1.3630	+1.3630
																	+72.6321	+72.6321
																		+75.5321

Auflösung der Normalgleichungen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	η (Breite)	Σ (Breite)	η (Länge)	Σ (Länge)
+3.35 $x_1 =$	-1.65 +0.49254	-0.70 +0.20896	-0.8890 +0.26537	+0.1110 -0.03313	+0.8400 -0.25075	+1.8400 -0.54925
1	+3.85 -0.8127	-1.45	-0.75 -0.3448	+0.7725 -0.4379	+0.7725 +0.0547	+2.1600 +0.4137	+2.1600 +0.9063
	+3.0373 $x_2 =$	-1.45 +0.47740	-0.75 +0.24693	-0.3448 +0.11352	...	+0.3346 -0.11016	+0.8271 -0.27231	+2.5737 -0.84736	+3.0662 -1.00952
		2	+4.10 -0.6922	-1.00	-1.65	-2.6730 +0.1597	-2.6730 +0.3949	+3.1515 +1.2287	+3.1515 +1.4638
			+3.4078 $x_3 =$	-1.00 +0.29344	-1.65 +0.48418	-0.3580 +0.10505	-0.1646 -0.04830	...	-2.5133 +0.73751	-2.2781 +0.66850	+4.3802 -1.28535	+4.6154 -1.35436
				3	+1.90 -0.2934	-0.90 -0.4842	-2.0700 -0.7375	-2.0700 -0.6685	+0.7920 +1.2853	+0.7920 +1.3543
					+1.6066 $x_4 =$	-1.3842 +0.86157	-0.1050 -0.06336	-0.0483 +0.03006	-2.8075 +1.74748	-2.7384 +1.70447	+2.0773 -1.29298	+2.1464 -1.33599
					3	+3.55 -0.7989	-1.00 -0.1733	...	+4.7430 -1.2169	+4.7430 -1.1030	-3.9435 +2.1208	-3.9435 +2.2347
				4	-1.1926	-0.0905	-2.4189	-2.3593	+1.7897	+1.8493
					+1.5585 $x_5 =$	-1.2638 +0.81091	-0.1213 +0.07783	...	+1.1072 -0.71043	+1.2806 -0.82169	-0.0330 +0.02017	+0.1404 -0.09009
					2	+3.35 -0.1852	-1.10 -0.0851	...	-0.50 +0.0826	-0.7725 +0.2042	-2.1600 +0.6355	-2.1600 +0.7571
				3	-0.0376	-0.0173	-0.2640	+0.2393	+0.4601	+0.4848
				4	-0.0069	-0.0032	-0.1835	-0.1790	+0.1358	+0.1403
				5	-1.0248	-0.0984	+0.8978	+1.0385	-0.0268	+0.1139
					-2.0955 $x_6 =$	-1.3040 +0.62229	-0.50 +0.23861	-0.2396 +0.11434	+0.0519 -0.02477	-0.6639 +0.31682
									+3.30 -0.1463	-0.0560 +0.0233	-0.3950 +0.1755	-0.3950 +0.3845
									-0.0391	+0.0380	+0.0939	+0.3481
									-0.0080	-0.1214	-0.1100	+0.2229
									-0.0015	-0.0844	-0.0823	+0.0645
									-0.0094	+0.0862	+0.0997	+0.0109
									-0.8115	-0.3111	+0.0323	-0.4131
									+2.2842 $x_7 =$	-1.00 +0.43779	-0.8111 +0.35509	+0.2227 -0.09750
											+0.20686	-0.00026
											+0.10962	

Auflösung der Normalgleichungen (Fortsetzung)

	8	9	10	12	14	15	16	17	18	19	23	11	13	η (Breite)	Σ (Breite)	η (Länge)	Σ (Länge)
7	+3.60	-0.70	-0.80	0	+1.10	0	+1.10
	-4378	-.3551	-2069	+1.0003	-1.096	+1.0975
$x_8=$	+3.1622	-.3551	-.70	-.80	-2069	+1.1002	-1.096	+1.1975
	+11230	+22136	+25299	+06543	-34792	+03466	-37869
6	+3.90	-2.00	-0.90	+4.7040	+4.7040	-8.0080	-8.0080
	-1193	-0572	+0124	-2280	-1584
7	-2880	-1678	+0002	-0889	+0791
	-0399	-.0786	-.0898	-0232	+1.236	-0123	+1.345
8	+3.4528	-.0786	-.0898	-2.00	-.90	+4.4558	+4.8402	-8.3372	-7.9528
	$x_9=$	+02276	+02601	+57924	+26066	-1.29049	+1.40182
8	+5.40	-0.70	-2.00	+1.1410	+1.1410	+1.6730	+1.6730
	-1550	-.1771	-0458	+2435	-0243	+2651
9	-0018	-.0020	+1014	+1102	-1898	+1810
	+5.2432	-.70	-.1791	-2.00	+1.1966	+1.4947	+1.4589	+1.7570
$x_{10}=$	+13351	+03416	+38145	+00391	-22822	-28507	-33510
	10	+4.70	-2.00	-1.1410	-1.1410	-1.6730	-1.6730
-0935		-.0239	-.2670	+1593	+1990	-1943	+2339
$x_{11}=$	+4.6065	-.0239	-.2670	-2.00	-.2731	-2.0027	-09817	-09419	-1.4787	-1.4389
	+00519	+05796	+43417	+05929	+43476	+21311	+20447	+32100	+31236
$x_{14}=$	+2.25	-0.65	+3.3695	+4.1695	+4.0515	+4.8515
	+28889	-1.49756	-1.85311	-1.80067	-2.15622
14	+1.50	-1.6575	-1.6575	-1.8915	-1.8915
	-1878	-.2311	+9734	+1.2045	+1.1704	+1.4015
$x_{15}=$	+1.3122	-.2311	-06841	-04530	-07211	-04900
	+17612	+64777	+52134	+34522	+54954	+37342
8	+3.10	-2.8180	-2.8180	-2.8390	-2.8390
	-2024	-0523	+2783	-0277	+3030
9	-0023	+1159	+1259	-2169	+2069
	-0061	+0409	+0511	+0498	+0600
10	-0001	-0007	-0007	-0077	-0075
	-0001	+1.1981	+1.4825	+1.4406	+1.7250
12	-0001	-1205	-0798	-1270	-0863
	-2844
14	-0407

15	+2.5640	-1.6410	-09646	-1.7279	-1.0515
	$x_{16}=$	+64002	+37621	+67391	+41010

Auflösung der Normalgleichungen (Fortsetzung)

	17	18	19	20	21	22	23	11	13	24	25	η (Breite)	Σ (Breite)	η (Länge)	Σ (Länge)
15	+2.45	-0.80	-1.2480	-1.2480	-2.4400	-2.4400
	-5506	-4431	-2934	-4671	-3174
16	-3518	-0.0258	-0.2593	-0.0039	-0.0457	-0.0128	-6078	-3573	-6400	-3895
	+1.5476	-.0258	-.2593	-.80	-.0039	-.0457	-.0128	-2.2989	-1.8988	-3.5471	-3.1470
$x_{17}=$	+01667	+1.6775	+51693	+00252	+02953	+00827	+1.48546	+1.22693	+2.29200	+2.03347
	10	+4.90	-1.65	-1.25	0	0	0
-7629		+4564	+5702	+5565	+6702
12	-0155	-0569	-0546	-0857	-0834
	-0019	-0446	-0262	-0470	-0286
16	-0019	-0383	-0317	-0591	-0525
	-0004
17	+4.1193	-1.6733	-.0133	-1.25	-.1163	-.8003	-1250	+3166	+4577	+3647	+5058
	$x_{18}=$	+40621	+00323	+30345	+02823	+19428	+03034	-07686	-11111	-08853	-12279
16	+3.60	-1.25	+1.1060	+1.1060	+6790	+6790
	-1911	-4480	-2633	-4717	-2871
17	-0434	-3852	-3181	-5943	-5273
	-6797	+1286	+1859	+1481	+2055
18	+2.6858	-1.3894	-.5078	+4014	+7105	-2359	+0702
	$x_{19}=$	+51731	+18907	-14945	-26454	+08895	-02614
17	+2.75	+1.2480	+1.2480	+2.4400	+2.4400
	-4135	-1.1884	-09815	-1.8336	-1.6268
18	0	+0010	+0015	+0012	+0016
	-7188	+2076	+3675	+1236	+0363
19	+1.6177	+2682	+6356	+4840	+8514
	$x_{20}=$	-16579	-39290	-29919	-52630
18	+4.05	-2.00	+2.3280	+2.3280	+8240	+8240
	-3793	+0961	+1389	+1107	+1535
19	-0960	+0759	+1343	+0452	+0133
	-0440	+0442	+1048	+0798	+1404
20	+3.5307	-2.00	+2.5442	+2.7059	+9693	+1.1310
	$x_{21}=$	-72059	-76639	-27453	-32033
21	+5.20	-7920	-7920	+3000	+3000
	-1.1329	+1.4412	+1.2328	+5491	+6407
$x_{22}=$	+4.0671	+6492	+7408	+8491	+9407
	-15962	-18214	-20877	-23130

Auflösung der Normalgleichungen (Fortsetzung)

	23	11	13	24	25	η (Breite)	Σ (Breite)	η (Länge)	Σ (Länge)
12	+3.70	-0.90	-2.3280	-2.3280	-0.8240	-0.8240
16	-0.8683	-0.1186	-8.8695	-4.262	-4.089	-6.420	-6.247
17	0	-0.0005	-0.0001	-0.0067	-0.0039	-0.0070	-0.0043
18	0	-0.0001	-0.0058	-0.0048	-0.0089	-0.0079
19	-0.0033	-0.0226	-0.0035	+0.0089	+0.0129	+0.0103	+0.0143
20	-0.0010	-0.0069	-0.0012	+0.0076	+0.0134	-0.0045	+0.0013
21	-0.0005	-0.0038	-0.0007	-0.0124	+0.0047	+0.0112	+0.0086	+0.0151
22	-0.2044	-0.0837	-0.0135	-0.0278	+0.6122	+0.6511	+0.2332	+0.2722
22	-0.0570	-0.0233	-0.0038	-2367	-1497	+0.0768	+0.0877	+0.1005	+0.1113
	+2.5655	-2595	-8923	-1.1367	-1899	-2.0565	-1.9694	-1.1338	-1.0467
	$x_{23} =$	+10115	+34781	+44307	+07402	+80160	+76765	+44194	+40799
9	+4.80	-80	-8840	-8840	+9.5000	+9.5000
10	-1.1585	-5213	+2.5810	+2.8036	-4.8292	-4.6066
12	-0.7980	-0080	+4668	+5831	+5691	+6854
16	-0.0162	-1187	-0582	-0558	-0877	-0853
17	-0.0059	-0017	-0789	-0464	-0831	-0506
18	-0.0013	-0004	-0679	-0561	-1047	-0929
19	-1555	-0243	+0615	+0889	+0708	+0983
20	-0500	-0085	+0548	+0970	+0326	+0096
21	-0288	-0052	-0934	+0358	+0848	+0646	+1136
22	-0343	-0055	-0114	+2506	+2666	+0955	+1114
23	-0095	-0015	-0969	-0613	+0314	+0359	+0411	+0456
23	-0262	-0903	-1150	-0192	-2080	-1992	-1147	-1059
	+2.5158	-1.5854	-2119	-1853	+2.1849	+2.7181	+5.0891	+5.6223	+5.6223
	$x_{11} =$	+63018	+08423	-07365	-1.86847	+1.08041	-2.02286	-2.23480	-2.23480
9	+3.70	-2.8750	-2.8750	-1.9370	-1.9370
10	-2346	+1.1614	+1.2616	-2.1732	-2.0730
12	-0001	+0047	+0058	+0057	+0069
16	-8707	-4268	-4095	-6429	-6256
17	-0005	-0221	-0130	-0233	-0142
18	-0001	-0190	-0157	-0293	-0260
19	-0038	+0096	+0139	+0111	+0153
20	-0014	+0093	+0165	-0055	+0016
21	-0009	-0170	+0065	+0154	+0117	+0206
22	-0002	-0156	-0099	+0405	+0431	+0154	+0180
23	-3104	-3954	-0660	+0051	+0058	+0066	+0074
11	-9991	-1335	-1168	+7153	+6850	+3943	+3641
	+1.2773	-5445	-2115	-1.4442	-9229	-1.9480	-1.9480	-1.4267	-1.4267
	$x_{13} =$	+42629	+16558	+1.13067	+72254	+1.52509	+1.52509	+1.11697	+1.11697

Auflösung der Normalgleichungen (Fortsetzung)

	24	25	26	η (Breite)	Σ (Breite)	η (Länge)	Σ (Länge)
22	+4.15	-1.21	0	0	0	0
23	-9835	-0.6223	+0.3192	+0.3643	+0.4175	+0.4626
11	-5036	-0841	-9112	-8726	-5024	-4638
13	-0178	-0156	+1840	+2289	+4287	+4736
	-2321	-0902	-6156	-3934	-8304	-6082
	+2.4130	-8122	-1.25	-1.0236	-0.6728	-4866	-1358
	$x_{24} =$	+33659	+51803	+42420	+27882	+20166	+05628
20	+3.35	-1.45	+2.7495	+2.7495	-1.6630	-1.6630
21	-3029	+1161	+2750	+2094	+3684
22	-0038	+0831	+0884	+0317	+0370
23	-3937	+2020	+2305	+2642	+2927
11	-0141	-1522	-1458	-0839	-0775
13	-0136	+1609	+2002	+3748	+4141
24	-0350	-2391	-1528	-3225	-2362
	-2734	-4207	-3445	-2265	-1638	-0457
	+2.3135	-1.8707	+2.5758	+3.0186	+1.3531	-9103	-9103
	$x_{25} =$	+80860	-1.1338	+58487	+39347	-39347	-39347
24	+2.70	-1.9575	-1.9575	-1.9575	+1.3630	+1.3630
25	-6475	-5303	-3485	-2521	-0703	-0703
	-1.5126	+2.0828	+2.4408	-1.0941	-7361	-7361
	+5399	+4050	+1349	+0168	+5567	+5567
	$x_{26} =$	+75014	-24986	-03112	-103112	-103112	-103112
1	+43.4557	+43.4557	+72.6321	+72.6321	+72.6321	+72.6321
2	-2359	+0295	-2106	-4614	-4614	-4614
3	-0369	-0911	-21809	-25982	-25982	-25982
4	-1.8536	-1.6801	-5.6301	-5.9324	-5.9324	-5.9324
5	-4.9061	-4.7853	-2.6859	-2.7753	-2.7753	-2.7753
6	-7866	-9098	-0007	+0028	+0028	+0028
7	-0274	+0059	-4356	-3027	-3027	-3027
8	-0977	+0001	-0274	+0244	+0244	+0244
9	-0135	+0720	-0038	+0415	+0415	+0415
10	-5.7502	-6.2462	-20.1312	-19.2030	-19.2030	-19.2030
12	-2731	-3411	-4059	-4889	-4889	-4889
14	-2092	-2007	-4747	-4619	-4619	-4619
15	-5.0460	-6.2441	-7.2954	-8.7360	-8.7360	-8.7360
16	-3566	-2362	-3963	-2693	-2693	-2693
17	-1.0503	-6174	-1.1644	-7086	-7086	-7086
18	-3.4149	-2.8206	-8.1300	-7.2129	-7.2129	-7.2129
19	-0323	-0352	-0423	-0448	-0448	-0448
20	-0600	-1062	-0213	+0062	+0062	+0062
21	-0445	-1054	-1448	-2547	-2547	-2547
22	-1.8333	-1.9498	-2661	-3105	-3105	-3105
23	-1086	-1182	-1773	-1964	-1964	-1964
11	-1.6485	-1.5787	-5011	-4626	-4626	-4626
13	-1.8975	-2.3606	-10.2945	-11.3731	-11.3731	-11.3731
24	-1.6329	-1.0435	-2.9709	-2.1758	-2.1758	-2.1758
25	-4342	-2854	-0981	-0274	-0274	-0274
26	-2.8678	-3.3608	-7914	-5324	-5324	-5324
	-3038	+1012	-0005	-0173	-0173	-0173
	+8.5473	+8.5480	+8.1609	+8.1614	+8.1614	+8.1614
1	+46.3557	+75.5321	+75.5321	+75.5321	+75.5321
2	-0037	-1.0106	-1.0106	-1.0106	-1.0106
3	-2252	-3.0954	-3.0954	-3.0954	-3.0954
4	-1.5229	-6.2509	-6.2509	-6.2509	-6.2509
5	-4.6675	-2.8676	-2.8676	-2.8676	-2.8676
6	-1.0523	-0.126	-0.126	-0.126	-0.126
7	-0013	-2103	-2103	-2103	-2103
8	0	-0217	-0217	-0217	-0217
9	-3828	-4535	-4535	-4535	-4535
10	-6.7851	-18.3176	-18.3176	-18.3176	-18.3176
12	-4261	-5888	-5888	-5888	-5888
14	-1926	-4495	-4495	-4495	-4495
15	-7.7265	-10.4609	-10.4609	-10.4609	-10.4609
16	-1564	-1830	-1830	-1830	-1830
17	-3629	-4312	-4312	-4312	-4312
18	-2.3297	-6.3993	-6.3993	-6.3993	-6.3993
19	-0509	-0621	-0621	-0621	-0621
20	-1880	-0018	-0018	-0018	-0018
21	-2497	-4481	-4481	-4481	-4481
22	-2.0738	-3623	-3623	-3623	-3623
23	-1349	-2176	-2176	-2176	-2176
11	-1.5118	-4270	-4270	-4270	-4270
13	-2.9367	-12.5647	-12.5647	-12.5647	-12.5647
24	-6668	-1.5936	-1.5936	-1.5936	-1.5936
25	-1876	-0076	-0076	-0076	-0076
26	-3.9386	-3582	-3582	-3582	-3582
	-0337	-5740	-5740	-5740	-5740
	+8.5482	+8.1622	+8.1622	+8.1622	+8.1622

Rückläufige Bestimmung der Verbesserungen für die Breite

26	25	24	13	11	23	22	21	20
+0.75014	-1.11338	+0.42420	+1.13067	-0.86847	+0.80160	-0.15962	-0.72059	-0.16579
	+0.60656	+0.38860	-0.8392	-0.3733	-0.3751	-0.15769	-0.1656	-0.21931
+0.75014		-0.17059	+0.27377	+0.05409	+0.28454	+0.31581	+0.02102	+0.03200
+0.075	-0.50682			+0.83217	+0.45929	+0.01033	-0.00192	-0.00261
		+0.64221	+1.32052		-0.00198	-0.00095	+0.36237	+0.02663
+0.074	-0.051			-0.01954		+0.17821	+0.10541	-0.04126
	-0.050	+0.064	+0.132		+1.50594			
		+0.063	+0.131	-0.002	+0.151	+0.18609	-0.25027	-0.37034
				-0.002	+0.149	+0.019	-0.025	-0.037
						+0.019	-0.025	-0.037
19	18	17	16	15	14	12	10	9
-0.14945	-0.07686	+1.48546	+0.64002	+0.52134	-1.49756	+0.21311	-0.22822	-1.29049
+0.03064	+0.04006	+0.01092	+0.01777	+0.80908	+0.36596	+0.57411	+0.00516	+0.34421
-0.00267	-0.00380	-0.00058	-0.00094	+0.18127	+0.43671	-0.00116	-0.00762	-0.01132
+0.02843	+0.04251	+0.00379	+0.00611			+0.65383	-0.08013	+0.02677
-0.04732	-0.07594	-0.19144	-0.09063	+1.51169	-0.69489	-0.01218	+0.03516	-0.00192
-0.19158	-0.00120	-0.05562	-0.00571			+0.00334	+0.19133	
	-0.13484	-0.00350	+0.46264	+0.151	-0.069			-0.93275
-0.33195				+0.149	-0.068	+1.43305	-0.08432	-0.093
-0.033	-0.21007	+1.24903	+1.02926			+0.143	-0.008	-0.092
-0.033	-0.021	+0.125	+0.103			+0.141	-0.008	
	-0.021	+0.124	+0.102					
8	7	6	5	4	3	2	1	
+0.00543	+0.20686	+0.11434	-0.71043	+1.74748	+0.73751	-0.11016	+0.26537	
+0.26039	-0.33121	-0.22256	-0.00278	-0.00107	-0.00173	-0.00406	-0.00747	
-0.01867	+0.08861	-0.02224	-0.10579	-0.00853	-0.01370	-0.03221	+0.07565	
-0.10475				-0.70563	-0.39654	+0.30002		
+0.20240	-0.03574	-0.13046	-0.81900	+1.03225	+0.30290		+0.33355	
+0.020	-0.004	-0.018	-0.082	+0.103	+0.62844	+0.15359	+0.033	
+0.020	-0.004	-0.013	-0.081	+0.102	+0.063	+0.015	+0.033	
					+0.062	+0.015		

Rückläufige Bestimmung der Verbesserungen für die Länge

26	25	24	13	11	23	22	21	20
-0.03112	+0.58487	+0.20166	+1.52509	-2.02286	+0.44194	-0.20877	-0.27453	-0.29919
	-0.2516	-0.01612	+0.09268	+0.04122	+0.04143	+0.17414	+0.01829	+0.24219
-0.03112		+0.18839	+0.15940	+0.03150	+0.16568	+0.18388	+0.02829	+0.04306
-0.003	+0.55971			+1.11994	+0.61812	+0.01390	-0.08178	-0.11075
		+0.37393	+1.77717		-0.08397	-0.04021	+0.28471	+0.02092
-0.004	+0.056			-0.83020		+0.14002	+0.14896	+0.02043
	+0.084	+0.037	+0.178		+1.18320			
		+0.052	+0.214	-0.083	+0.118	+0.26296	+0.12394	-0.08334
				-0.101	+0.153	+0.026	+0.012	-0.008
						+0.037	+0.016	-0.012
19	18	17	16	15	14	12	10	9
+0.08895	-0.08853	+2.29200	+0.67391	+0.54954	-1.80067	+0.32100	-0.27825	+2.41462
+0.04123	+0.05392	+0.01470	+0.02392	+1.45321	+0.53185	+0.77264	+0.00695	+0.46324
-0.11329	-0.16129	-0.02452	-0.03992	+0.26344	+0.65468	-0.04922	-0.32388	-0.48089
+0.02234	+0.03340	+0.00298	+0.00480			+0.51371	-0.04471	+0.03891
+0.02343	+0.03761	-0.04308	+0.00334	+2.26619	-0.61414	-0.00679	+0.05110	-0.00866
-0.04311	-0.00027	+0.00328	-0.00319			+0.00776	+0.20816	
	+0.00794	-0.00195	+0.83096	+0.227	-0.061			+2.42722
+0.01955				+0.340	-0.083	+1.55910	-0.38063	+0.243
+0.002	-0.11722	+2.24341	+1.49582			+0.156	-0.038	+0.287
+0.003	-0.012	+0.224	+0.150			+0.195	-0.049	
	-0.016	+0.335	+0.207					
8	7	6	5	4	3	2	1	
+0.03466	+0.10962	+0.45593	+0.02017	-1.29298	-1.28535	-0.84736	-0.25075	
+0.37843	+0.86188	+0.57916	+0.09610	+0.03712	+0.05964	+0.14017	+0.25802	
-0.08426	+0.26329	+0.76840	+1.46247	+0.11788	+0.18946	+0.44534	-0.17756	
+0.27258				+1.36020	+0.76439	-0.09865		
+0.60141	+1.23479	+1.80349			+0.06521		-0.17029	
+0.060	+0.123	+0.180	+1.57874	+0.22222		-0.36050	-0.017	
+0.076	+0.148	+0.208	+0.158	+0.022	-0.20665	-0.036	-0.021	
			+0.178	+0.024	-0.021	-0.042		
					-0.024			

Verbesserungen für die Breiten- und Längenunterschiede und lineare Anschlußverbesserung

Nr. der Verbindungs- kette	Breite			P	Länge			Lineare Anschluß- verbesserung	Verhältnis der linearen Anschluß- verbesserungen zur Länge der Verbindungsketten 1:.....
	v	pv	pvv		v	pv	pvv		
1	+0.33	+0.33	0.11	1.00	-0.17	-0.17	0.03	3.7	357,000
2	-0.18	-0.30	.05	1.65	-0.19	-0.31	.06	2.6	292,000
3	+0.48	+0.70	.34	1.45	+0.15	+0.22	.03	5.0	185,000
4	+0.40	+0.40	.16	1.00	+0.43	+0.43	.18	5.9	224,000
5	+0.45	+0.40	.18	.90	+0.48	+0.43	.21	6.6	220,000
6	+0.17	+0.28	.05	1.65	-0.12	-0.20	.02	2.1	390,000
7	+0.69	+0.69	.48	1.00	+0.22	+0.22	.05	7.2	183,000
8	-1.31	-0.98	1.28	.75	-0.72	-0.54	.39	14.9	120,000
9	+0.90	+0.63	.57	.70	+0.20	+0.14	.03	9.2	201,000
10	+0.20	+0.22	.04	1.10	+0.60	+0.66	.40	6.3	187,000
11	+0.09	+0.10	.01	1.10	-0.57	-0.63	.36	5.8	205,000
12	+0.24	+0.24	.06	1.00	-0.63	-0.63	.40	6.7	197,000
13	-0.80	-0.40	.32	.50	+0.63	+0.32	.20	10.2	259,000
14	+1.00	+0.50	.50	.50	+0.31	+0.16	.05	10.4	254,000
15	-0.28	-0.20	.06	.70	-0.98	-0.69	.68	10.2	186,000
16	+0.06	+0.12	.01	2.00	-0.45	-0.90	.40	4.5	147,000
17	+0.16	+0.32	.05	2.00	+0.31	+0.62	.19	3.5	189,000
18	-0.12	-0.08	.01	.70	-0.45	-0.32	.14	4.6	413,000
19	-0.11	-0.22	.02	2.00	+0.22	+0.44	.10	2.5	264,000
20	-0.26	-0.23	.06	.90	-0.18	-0.16	.03	3.1	477,000
21	-0.69	-0.55	.38	.80	-0.61	-0.49	.30	9.2	178,000
22	-0.35	-0.23	.08	.65	-0.03	-0.02	.00	3.5	581,000
23	-0.42	-0.34	.14	.80	-0.59	-0.48	.28	7.2	227,000
24	+0.83	+0.66	.55	.80	+0.90	+0.72	.65	12.2	134,000
25	+0.22	+0.18	.04	.80	+0.74	+0.59	.44	7.7	213,000
26	-0.26	-0.22	.06	.85	-0.03	-0.03	.00	2.6	599,000
27	-0.13	-0.26	.03	2.00	+0.26	+0.52	.14	2.9	227,000
28	-0.12	-0.20	.02	1.65	+0.14	+0.23	.03	1.8	440,000
29	+0.22	+0.15	.03	.70	-0.51	-0.36	.18	5.5	344,000
30	-0.04	-0.05	.00	1.25	-0.10	-0.12	.01	1.1	960,000
31	-0.06	-0.05	.00	.80	+0.73	+0.58	.42	7.3	224,000
32	-0.04	-0.05	.00	1.25	+0.24	+0.30	.07	2.4	440,000
33	+0.44	+0.88	.39	2.00	+0.14	+0.28	.04	4.6	143,000
34	+0.45	+0.90	.40	2.00	+0.11	+0.22	.02	4.6	143,000
35	-0.87	-0.78	.68	.90	-0.81	-0.73	.59	11.9	124,000
36	+0.08	+0.16	.01	2.00	-0.38	-0.76	.29	3.9	169,000
37	-1.15	-0.92	1.07	.80	+0.03	+0.02	.00	11.5	142,000
38	-0.14	-0.10	.01	.70	+0.64	+0.45	.29	6.6	288,000
39	-0.04	-0.05	.00	1.20	+0.05	+0.06	.00	0.6	2,015,000
40	+0.57	+0.46	.26	.80	-0.34	-0.27	.09	6.6	248,000
41	-0.09	-0.13	.01	1.45	+0.35	+0.51	.18	3.6	252,000
42	+0.11	+0.14	.02	1.25	-0.40	-0.50	.20	4.1	258,000
Summe.....			8.54				8.17		

Anderung der geographischen Breiten und Längen durch die Neuausgleichung

Nr. des Knoten- punkts	Knotenpunkt	Endgültige Breite und Länge nach der Neuausgleichung			Breite und Länge nach früheren Berechnungen			Endgültige neue Werte minus alte Werte
		°	'	"	°	'	"	
1	Carson	35	16	24.922	35	16	24.848	+0.074
		97	57	32.416	97	57	32.760	-0.344
2	Kyle	32	49	18.039	32	49	18.014	+0.025
		98	19	11.612	98	19	12.209	-0.597
3	Mission	29	42	52.843	29	42	52.761	+0.082
		98	09	52.109	98	09	52.996	-0.887
4	Donna	26	09	40.593	26	09	40.459	+0.134
		98	02	44.471	98	02	45.414	-0.943
5	Peters	29	10	32.792	29	10	32.904	-0.112
		100	36	02.238	100	36	03.100	-0.862
6	Ingle	31	35	48.685	31	35	49.018	-0.333
		103	35	24.355	103	35	25.284	-0.929
7	Phillips	34	59	03.363	34	59	03.385	-0.022
		104	07	59.629	104	07	60.204	-0.575
8	Aroya	38	48	09.721	38	48	10.006	-0.285
		103	10	55.580	103	10	55.610	-0.030
9	Whitetank	33	34	01.652	33	31	02.053	-0.401
		112	33	27.501	112	33	28.731	-1.230
10	Mount Nebo	39	48	38.316	39	48	39.113	-0.797
		111	45	56.235	111	45	56.918	-0.683
11	Black	35	55	51.689	Früher nicht bestimmt			
		115	02	35.556				
12	Mount Diablo	37	52	54.387	37	52	55.482	-1.095
		121	54	47.107	121	54	48.355	-1.248
13	Tepusquet	34	54	36.522	34	54	37.432	-0.910
		120	11	08.335	120	11	09.654	-1.319
14	Farmer	43	42	21.212	43	42	21.389	-0.177
		97	40	34.023	97	40	34.412	-0.389
15	States	49	00	01.447	49	00	01.687	-0.240
		97	07	39.343	97	07	39.738	-0.395
16	Sundance	44	28	44.202	44	28	44.696	-0.494
		104	27	03.099	104	27	02.821	+0.278
17	Norge	48	53	38.110	48	53	38.866	-0.756
		103	47	21.176	103	47	20.556	+0.620
18	Oxford	42	16	10.842	42	16	11.766	-0.924
		112	05	49.460	112	05	49.972	-0.512
19	Mount Ellis	45	34	38.926	Früher nicht bestimmt			
		110	57	18.432				
20	Goldstone	48	52	55.681	Früher nicht bestimmt			
		110	29	18.684				
21	Dry	44	10	08.183	44	10	09.309	-1.126
		117	39	39.844	117	39	40.845	-1.001
22	Alder	45	50	59.419	45	50	60.583	-1.164
		119	56	21.080	119	56	22.229	-1.149
23	Bally	40	36	10.879	40	36	11.939	-1.060
		122	38	59.178	122	38	60.370	-1.192
24	Red	45	56	06.140	45	56	07.249	-1.109
		121	49	11.100	121	49	12.344	-1.244
25	Oroville	48	53	44.203	Früher nicht bestimmt			
		119	20	12.879				
26	Birch Point	48	56	30.854	48	56	31.910	-1.056
		122	49	12.021	122	49	13.395	-1.374

Diskussion der Polygonschlußfehler

Die Gleichungen auf Seite 34 zeigen die Anschlußfehler in Breite und Länge, für die man aber ein wesentlich besseres Verständnis bekommt, wenn man sie für die einzelnen Polygone zusammenstellt. Die Angaben bei den oben genannten Gleichungen beziehen sich vielfach auf die Anschlußfehler sich gegenseitig überlappender Polygone und sind daher nicht so einleuchtend wie die Ergebnisse für die einfachen Polygone. Diese speziellen Anschlußfehler sind in Abbildung 5 dargestellt; hierbei bezeichnet die erste Zahl über dem Strich den linearen Anschlußfehler in Metern, die zweite Zahl den ungefähren Umfang des Polygons in Kilometern, und die Zahl unter dem Strich gibt das ungefähre Verhältnis des linearen Anschlußfehlers zum Polygonumfang. Nur zwei dieser Anschlußfehler sind hernach $> 1 : 200\,000$, wobei der größte etwa $1 : 162\,000$ ist. Im Durchschnitt betragen die Anschlußfehler $1 : 450\,000$. Der Anschlußfehler für das Umfangspolygon für das gesamte Netz ist $10,1$ m auf eine Länge von $8\,504$ km, das ist ungefähr $1 : 842\,000$. Die Länge aller in die Ausgleichung einbezogener Dreiecksketten beträgt rund $20\,000$ km. Die Bedeutung dieser Anschlußfehler kann man erst richtig beurteilen, wenn man beachtet, daß sie das Ergebnis einer Vermessung darstellen, die sich aus verschiedenartigen Messungen zusammensetzt, die oft auch unter sehr ungünstigen Bedingungen durchgeführt wurden. Die Grundlinienmessungen vermittelten die Ausgangslängen; mit Hilfe der geodätischen Winkelmessungen wurden die Seitenlängen durch die verschiedenen Dreiecksketten hindurch von Grundlinie zu Grundlinie übertragen und endlich wurden noch die Azimute in den verschiedenen Ketten durch astronomische Messungen gesichert. Dabei wurde ein Teil dieser Arbeiten bereits vor 50 Jahren ausgeführt, der größte Teil aber etwa in den letzten 25 Jahren. In dem in diese Ausgleichung einbezogenen Dreiecksnetz wird der Maßstab durch 50 Grundlinien und die Orientierung durch 74 Laplacesche Azimute überprüft und gesichert, wobei die Grundlinienmessungen und die astronomischen Beobachtungen mehr oder weniger gleichmäßig über das gesamte Netz verteilt sind. Die 50 Grundlinien sind während der letzten 50 Jahre mit den verschiedensten Basisapparaten gemessen worden. Die älteren Grundlinien wurden mit Stangenapparaten gemessen. 1900—1901 wur-

den 9 Grundlinien längs des 98. Meridians sowohl mit einem Stangenapparat als auch mit Stahlmaßbändern, und 1907 wiederum 6 Grundlinien mit Stahl- und Invarbändern gemessen. Ab 1907 wurden alle Grundlinien I. O. mit Invarbändern gemessen. Neben der Anwendung der 3 verschiedenen Basisapparate wurde auch noch nach verschiedenen Methoden gemessen. Ungeachtet dessen ist die allgemeine Übereinstimmung der verschiedenen Grundlinien, wie die linearen Anschlußfehler zeigen, wesentlich besser, als man eigentlich erwarten durfte, und der Zusammenschluß der verschiedenen Verbindungsketten ist in jeder Hinsicht zufriedenstellend. Bei der früheren Ausgleichung der transkontinentalen Dreiecksketten entlang des 39. Parallelkreises und der Dreiecksketten, die sich südlich dieses Parallelkreises, längs des 98. Meridians bis Texas und bis fast an die kalifornische Küste erstrecken, waren die Gleichungen zur Sicherung der Laplaceschen Azimute nicht beachtet worden. Dadurch wurden die Azimute der Dreiecksketten immer mehr verfälscht und Lagefehler verursacht, die um so größer wurden, je weiter man sich vom Koordinatenausgangspunkt entfernte. Mit Rücksicht auf die dadurch verursachte Verschwenkung der Triangulation (swerving of the triangulation) — wie der technische Ausdruck lautet — war es nicht zweckmäßig, neue Ketten mit Anschlußzwang anzubinden, wobei der gesamte Anschlußfehler in Breite und Länge von den neuen Netzteilen allein übernommen werden mußte. Die Berücksichtigung der Laplaceschen Gleichungen zur Überprüfung und Sicherstellung der Orientierung der Dreiecksketten war daher in der geodätischen Praxis ein gewaltiger Schritt nach vorwärts.

Koordinatenverbesserungen

Nach der Bestimmung der Polygon-Schlußfehler und der Fehlergleichungen wurden diese nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, um die wahrscheinlichsten Lagen der Knotennetze zu erhalten. Dadurch wurden jeweils für einen Punkt in den 26 Knotennetzen die endgültigen geodätischen Koordinaten bestimmt. Diese Koordinaten sind auf Seite 47 zusammengestellt. Gleichzeitig sind, soweit diese Punkte bereits durch frühere Ausgleichungen bestimmt worden waren, die alten Koordinaten und die Koordinatenverbesserungen infolge der Neuausgleichung auf Seite 47 dargestellt. Diese Koordinatenverbesserungen sind noch in Ab-

bildung 7 angegeben. Hierbei darf darauf hingewiesen werden, daß sich die Koordinaten für den Knotenpunkt Nr. 26 (Vergl. auch Abb. 4 und 7!) in der Breite um $-1,056''$ und in der Länge um $-1,374''$ dies entspricht linear etwa 30 m in beiden Koordinatenrichtungen — geändert haben. Dieser Punkt liefert die Ausgangswerte für die Dreiecksketten im westlichen Kanada und in Alaska.

Breiten- und Längenanschlußfehler in den einzelnen Verbindungsketten

Abbildung 6 und die Tabelle auf S. 46 zeigen die Breiten- und Längenanschlußfehler, sowie die linearen und entsprechenden proportionalen Anschlußfehler, die bei der endgültigen Ausgleichung jeder Verbindungskette getilgt werden mußten. Hiernach ist der größte Anschlußfehler etwa $1 : 120\,000$, während der größte Teil der Anschlußfehler um oder unter $1 : 200\,000$ liegt. Der durchschnittliche Anschlußfehler einer Verbindungskette beläuft sich auf etwa $1 : 317\,000$. Diese Widersprüche konnten selbstverständlich durch die Einführung der Anschlußgleichungen in Breite und Länge getilgt werden, ohne daß dadurch irgendwo große Spannungen entstanden. Das gesamte Dreiecksnetz wurde also — ohne daß in irgendeinem Netzteil unverhältnismäßig große Spannungen auftraten — zu einem einheitlichen, starren System zusammengefaßt. Damit läßt sich auch künftig jede nachgeordnete Kette mit verhältnismäßig kleinem Anschlußwiderspruch in das Gesamtnetz einfügen.

Günstigste Netzfiguren

Es darf besonders darauf hingewiesen werden, daß in sämtlichen Dreiecksketten, die insgesamt $20\,000$ km umfaßten (mit einer einzigen Ausnahme, bei der in letzter Minute eine Vierecksdiagonale wegen schlechter Dreiecksschlußfehler verworfen werden mußte), nur vollständige Diagonalenvierecke und Zentralsysteme verwendet wurden. Die geringen Polygonschlußfehler sind weitgehend dem Umstande zu verdanken, daß bei der Anlage und Fortführung der Dreiecksketten über so gewaltige Entfernungen hin solche Netzfiguren verwendet wurden. Diese Behauptung wird schon allein durch die vorliegenden Ergebnisse gerechtfertigt. Der Geodätische Dienst hat daher die Absicht, künftig alle grundlegenden Triangulationen I. O. — soweit es immer möglich ist — nach

diesem Schema aufzubauen. Diese vorsorgliche Maßnahme ist erfahrungsgemäß bei allen geodätischen Arbeiten zur Sicherstellung der Maßstabsübertragung gerechtfertigt.

Schlußfolgerungen

Die vorliegenden Zwangsanschlüsse bei der Polygonsausgleichung zeigen klar, daß die bei den geodätischen Arbeiten angewandten Methoden sowohl für alle praktischen und auch für alle wissenschaftlichen Zwecke völlig ausreichend sind. In der Instruktion für die Winkelbeobachtungen waren ein durchschnittlicher Dreiecksschlußfehler von etwa $1''$ und für einige Ausnahmefälle ein Maximalfehler von $3''$ zugelassen worden. Laplacesche Azimute sollten in den Dreiecksketten nach jeweils 6—10 Vierecken oder Zentralsystemen beobachtet werden. Grundlinienmessungen sollten durchgeführt werden, wenn die Summe der R_1 etwa 80 — 100 erreichte¹⁾. Diese idealen Bedingungen konnten nicht immer streng eingehalten werden; es wurden aber nur sehr wenige Ausnahmen gemacht, und diese waren in allen Fällen auf außerordentliche Umstände zurückzuführen. Im ganzen genommen zeigen die erhaltenen Polygonschlußfehler die große Güte der Feldarbeit in den 50 Jahren, in denen das ganze Dreiecksnetz entstand. Diese Ergebnisse bestätigen auch vollständig unsere Ansicht, daß durch die Erfahrungen unseres Instituts eine Beobachtungsmethode entwickelt wurde, die allen Genauigkeitsansprüchen an geodätische Arbeiten I. O. genügt.

Die Ergebnisse der Ausgleichung zeigen, daß die Beobachtungsmethode hinreichend genau und die Netzausgleichung nach der Bowie-Methode in bezug auf Wirtschaftlichkeit und wissenschaftliche Leistungsfähigkeit für eine Anwendung auf ein derart ausgedehntes und kompliziertes Dreiecksnetz sicher geeignet ist. Besondere Anerkennung gebührt den Beobachtern dieses Instituts für die gewissenhafte Art, in der sie sich bemühten, die in der Instruktion verlangte Genauigkeit der Beobachtung zu erreichen. Dieselbe Anerkennung verdienen auch die Rechenkräfte für die gewandte Durchführung der bei der Ausgleichung anfallenden schwierigen Rechenarbeiten.

¹⁾ Die Summe der R ist eine Funktion der Winkel, über die die Länge der Dreiecksseiten übertragen werden. Vgl. Special Publication Nr. 120, S. 5.

Betrachtungen zur russischen Dienstvorschrift über die Basismessung I. und II. Ordnung (1940)*)

Von Leutnant E. Gigas

Rußland mit seinen weiten, ebenen Gebieten und noch verhältnismäßig geringer Bebauung ist das ideale Land für Basismessungen. Man ist daher gewillt, eine Vorschrift über diesen Zweig des Landesvermessungswesens mit besonderer Erwartung zu betrachten. Schon im ehemaligen Rußland vor dem Weltkrieg hatte man sich des neuen Jäderin-Verfahrens mit großem Interesse angenommen und verschiedene Verbesserungen und fortschrittliche Erkenntnisse fanden von hier aus Verbreitung in der gesamten Vermessungswelt. Es sei nur an die in Rußland erfundenen Witramschen Spannbocke mit beweglichen Rollen oder den Ersatz der Stative durch in den Boden gerammte Pfähle mit eingeschraubten Meßzapfen erinnert.

Studiert man die im Jahre 1940 in Moskau von der „Hauptverwaltung für Geodäsie und Kartographie beim Rat der Volkskommissare der UdSSR“ herausgegebene Anweisung, so findet man zwar keine umwälzenden neuen Gedanken, die noch nicht in der Weltliteratur bekannt sind, man ist jedoch überrascht von der nüchternen, vorurteilsfreien und wahrscheinlich auch aus einer sehr großen Felderfahrung heraus erwachsenen, klaren Entscheidung für die unzweifelhaft besten aller gebräuchlichen Methoden und Vermeidung der mannigfachen Fehlschlüsse und Überschätzung der Genauigkeit, die in der übrigen Weltliteratur über Basismessungen so häufig Platz greifen.

Die Russen unterscheiden zwischen Basismessungen I. und II. Ordnung entsprechend ihrem Triangulationsnetzaufbau. Die großen Polygone der Triangulation I. Ordnung stützen sich auf die Basislinien I. Ordnung in ihren Kreuzungspunkten, während die zur Ausfüllung der großen Polygone gelegten Querketten und Füllnetze als II. Ordnung angesprochen werden und sich auf Basislinien II. Ordnung an den Kreuzungsstellen der Querketten untereinander und in der Mitte der Füllnetze gründen. Die Genauigkeit der Netzseiten, die aus den Basislinien direkt abgeleitet sind, ist von den Russen für die I. Ordnung auf 1 : 300 000, für die II. Ordnung auf 1 : 200 000 festgesetzt. Da ein Dreiecksnetz an allen Stellen, unabhängig von der Ordnung, dieselbe Genauigkeit aufweisen soll,

*) Diese Dienstanweisung wurde 1942 im Auftrag des OKH, Abt. f. Kriegs-Karten- u. Verm.-Wesen, übersetzt und deutsch nachgedruckt.

kommt man zu den obigen Genauigkeitsgrenzen, wenn man einen mittleren Punktfehler von ± 15 cm und die Durchschnittslänge einer Seite I. Ordnung mit 60 km und der Seite II. Ordnung mit 40 km annimmt. Da aber wahrscheinlich die Durchschnittslänge der Dreiecksseiten geringer sein wird, setzt der Russe also für die aus der Basis abgeleitete Dreiecksseite eine um ca. 50% höhere Genauigkeit voraus, wahrscheinlich in der Vermutung, daß in den langen, meist einfachen Dreiecksketten die Genauigkeit der Seitenlänge bei ausschließlicher Winkelbeobachtung rasch abnimmt und im Durchschnitt dann etwa die auch in Deutschland übliche Punktlagegenauigkeit erzielt wird.

Die Vorschrift sagt, daß die Länge der Hauptdreiecksseiten entweder a) direkt, b) als Polygonzug oder c) aus einem auf einer Basis aufgebauten Vergrößerungsnetz abgeleitet werden kann.

Bei den russischen Geländeverhältnissen wird man geneigt sein, Fall a) oder b) anzustreben, und deshalb ist wohl auch das sonst in stark zivilisierten Gegenden überwiegend gebräuchliche Verfahren c) erst an letzter Stelle genannt.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers werden nicht nur die inneren Messungsfehler berücksichtigt — wie es sonst sehr gebräuchlich ist —, sondern es werden auch die Fehler aus dem Nivellement, die Fehler einer ungenügenden Bestimmung des Temperaturkoeffizienten, die Fehler des Vergleichsmaßes bei der Eichung und die Fehler, die durch die Änderung der Drahtlängen entstehen, berücksichtigt. Man vermißt den wesentlichen Einfluß des Eichungsfehlers selbst und den Einfluß der Verschiedenheit der Spanngeräte im Eichungslaboratorium und bei der Feldmessung, sowie die Fehler der Temperaturermittlung selbst.

Die Messung einer Basis ist untersagt, wenn starker Querwind zur Basis herrscht, bei Regen und bei Temperaturen über $+ 35^{\circ}$ und unter $- 10^{\circ}$ C, d. h. es gelten dieselben Grundsätze wie im deutschen Vermessungswesen.

Bei der Erkundung einer Basis wird darauf Rücksicht genommen, daß das Gefälle 1 : 30 nicht überschreitet. Wenn eine ganze Dreiecksseite gemessen wird, soll das Gefälle nicht größer als 1 : 20 sein. Diese Festsetzungen erscheinen uns verhältnismäßig

eng gezogen. Wir lassen bei Basismessungen ohne Bedenken 1 : 20, ja sogar 1 : 10 zu. Allerdings sprechen auch die Russen von Ausnahmefällen, wo sie derartige Neigungen gestatten. Der Grund für diese Festsetzungen liegt wohl darin, daß in Rußland überwiegend flaches Gelände zu finden ist, und außerdem die geringe Bebauung eine leichte Auswahl geeigneter Basislinien gestattet. Die Russen verlangen ferner, daß einzelne Hindernisse, wie Flüsse, Teiche, Erdschluchten, nicht breiter als 40 m sein dürfen, wahrscheinlich von dem Gedanken ausgehend, daß ein solches Hindernis mit einem 48 m langen Draht ohne weiteres überquert werden kann. In Deutschland haben wir eine so enge Begrenzung nicht vorgeschrieben und haben derartige Hindernisse bisher stets mit gutem Erfolg durch Errichtung von kleineren Kunstbauten überbrückt. Beim Durchschreiten eines Waldes soll eine 4 m breite Schneise geschlagen werden. Die Praxis macht eine derartige Breite nicht erforderlich. Es genügen zu bequemen Messungen bereits 2 m breite Schneisen. Besondere Beachtung verdient die russische Vorschrift an der Stelle, wo sie sich mit der Messung von Polygonzügen befaßt. In Deutschland wurden gebrochene Basislinien im allgemeinen nur in Notfällen vorgesehen, wengleich auch ohne tiefere Berechtigung. Die Mehrarbeit, die durch die Messung der Brechungswinkel entsteht, ist trotz der notwendigen hohen Genauigkeit gering. Dafür kann die sehr zeitraubende Vorbereitung der Meßstrecke wesentlich abgekürzt werden. Natürlich muß die Brechung der Basis auf ein Minimum beschränkt werden. Nach der russischen Vorschrift soll das Brechungsverhältnis in keinem Fall 1 : 15 und bei der Messung einer ganzen Seite 1 : 10 nicht überschreiten. Es sollen ferner nicht mehr als 10, bei der Messung einer Basis nicht mehr als 5 Brechpunkte vorgesehen werden. Es ist schließlich in der russischen Vorschrift als Grundsatz aufgestellt worden, daß die Brechungswinkel vom Stativ aus gemessen werden können, so daß die Errichtung größerer Signalbauten hinfällig ist. Sehr interessant ist auch die Vorschrift über das Absetzen von Teilen der zu messenden Basislinie bei ungünstigem Gelände. Derartige Fälle sind in Deutschland bisher ängstlich vermieden worden oder höchstens dann angewandt worden, wenn es galt, eine in der Nähe liegende, früher gemessene Basisstrecke aus historischem Grunde mit der neuen Basis in Verbindung zu bringen. Der Übergang von der Hauptlinie auf die in gewissem Abstand verlaufende Nebenlinie geschieht mittels nahezu gleichzeitiger Dreiecke. Sucht man für diese Maßnahme eine Erklärung, so

findet man sie wohl darin, daß es den Russen lieber ist, eine ganze Dreiecksseite des Hauptnetzes zu messen und hierbei auf gewisse Feinheiten zu verzichten, als eine kürzere Basis zu ermitteln, unter Beachtung höchster Präzision, und diese dann mittels eines Vergrößerungsnetzes auf die Hauptdreiecksseite zu vergrößern. Der russische Standpunkt ist durchaus gesund und auch in den letzten Jahren in Deutschland angestrebt worden. Es sei z. B. auf die 20 km lange Basis bei Wien hingewiesen, die es gestattete, mit nur einfachen Vergrößerungen auf die Hauptdreiecksseite überzugehen. Die Messung ganzer Dreiecksseiten bildet in Deutschland bei der vorhandenen engen Bebauung naturgemäß erhebliche Schwierigkeiten.

Ein Basismessstrupp setzt sich bei den Russen aus 1 Leiter, 1 Ingenieur, 2 Obertechnikern, 2 Technikern, 4 Vorarbeitern und 17 bis 19 Arbeitern zusammen. Es ist dabei folgende Arbeitsverteilung vorgesehen:

Der Ingenieur führt das Protokollbuch, die beiden Techniker sind die Beobachter an den Drahtskalen, 2 Vorarbeiter werden für die Aufstellung der Spannbocke verwendet, 2 weitere Arbeiter tragen die Gewichte, 4 bis 6 Arbeiter transportieren die Drähte, 1 Arbeiter übernimmt das Schleudern des Thermometers und 1 weiterer Arbeiter steht als Reserve bereit. Diese Mannschaft wird als Vermessungsbrigade bezeichnet, die übrigen Teilnehmer des Basismesstrupps bilden weitere 2 Brigaden, von denen die eine, bestehend aus 1 Techniker, 1 Vorarbeiter und 5 Arbeitern, die Aufstellung der Stative übernimmt, während die andere Brigade für die Durchführung des Nivellements aus 1 Techniker und 3 Arbeitern besteht.

Der Meßgang ist ganz dem französischen Meßverfahren angeglichen worden. Es sei hervorgehoben:

a) Die überwiegende Verwendung von Stativen und nicht von Pfählen, wie es in Deutschland üblich ist.

b) Ein Beobachtungstrupp mißt zugleich mit sämtlichen zur Verfügung stehenden Drähten, wobei alle Drähte nacheinander im selben 24-m-Intervall aufgelegt werden. In Deutschland wird grundsätzlich von jedem Beobachtungstrupp mit jedem Draht einzeln die ganze Basisstrecke hintereinander gemessen.

Der Vorteil der deutschen Methode liegt darin, daß die Messung sehr rasch vorschreitet und Veränderungen in den Ablesemarken auf den Pfählen bzw. Stativen weniger zu fürchten sind. Je mehr Drähte nacheinander über die gleiche Meßstrecke

geführt werden, um so länger dauert die Arbeit in jedem Abschnitt und um so größer wird die Gefahr, daß durch das Herumtreten, durch das Übernehmen und Abgeben der Drähte an die Hilsträger, Veränderungen an den Marken auftreten.

c) Die Drähte werden während der Messung in der Hauptsache von Arbeitern bedient und vorwärts bewegt, so daß zufällige Ungeschicklichkeiten beim Drahttransport vom Beobachter nicht bemerkt werden. In Deutschland tragen die Beobachter, die ja nur einen Draht mit sich führen, ihren Draht selbst und sind daher für alles verantwortlich.

Es tritt natürlich auch hier wieder die entscheidende Frage auf, ob das russische Meßverfahren — das, wie oben erwähnt, dem französischen völlig ähnelt — einen bedeutenden Zeitgewinn und Personaleinsparungen gegenüber dem deutschen Meßverfahren mit sich bringt. Verwendet man beispielsweise 3 Invardrähte, so benötigt man in Deutschland 3 Beobachtertrupps, bestehend aus je 1 Aufschreiber, 2 Beobachtern und 4 Arbeitern, insgesamt also 9 Fachkräfte und 12 Arbeiter. Die russische Vermessungsbrigade hat 3 Fachkräfte und 10 bis 12 Arbeiter. Um mit 3 Drähten nun eine gewisse Strecke zu messen, würde die russische Vermessungsbrigade aber eine wesentlich längere Zeit benötigen, als die 3 deutschen Vermessungstrupps, so daß, da die Arbeiterzahl in beiden Fällen ungefähr die gleiche ist, bei den Arbeitern sich eine Einsparung in Deutschland ergibt, bei den Fachkräften jedoch eine etwas stärkere Beanspruchung, da hier 9 gegenüber 3 in Rußland eingesetzt werden. Mit Rücksicht auf die Zeit, während der die 3 Trupps bei gleichem Arbeitsumfang tätig sind, verändert sich jedoch das Bild zu Gunsten der deutschen Methode, so daß man höchstens ein Drittel der Fachkräfte mehr benötigt.

Falls die Basismessarbeiten unter expeditiousähnlichen Bedingungen stattfinden, arbeiten die Russen mit reduzierten Basismessstrupps. Diese weisen 2 Techniker, 1 Vorarbeiter und 5 bis 7 Arbeiter weniger auf. In diesem Falle verlängert sich natürlich auch die Zeit der Basismessung selbst.

Sehr wesentlich erscheint, daß die Russen glauben, ohne eine Vergleichsbasis auszukommen. Sie überlassen jedoch die Prüfung der Meßdrähte den Beobachtungstrupps selbst. Die letztere Maßnahme ist unbedingt erforderlich, wenn man auf eine Vergleichsbasis verzichten will. Da aber eine Prüfung der Drähte in einem Laboratorium stets gegenüber der Feldmessung systematische Unterschiede aufweisen wird, ist die Verwendung einer Vergleichsbasis doch von unschätzbarem Vorteil.

Besonderer Erwähnung bedarf das von den Russen verwandte Gerät. Als Nivellierinstrument verwenden sie in richtiger Erkenntnis der Bedeutung der Höhenmessung ein Präzisionsinstrument mit einer Libellenangabe von 5—10 Sekunden. Jede Meßgruppe hat 5—8 Invardrähte, die mindestens 2 verschiedenen Legierungen mit unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten angehören. Die Intervalle der Skalen werden vor Ingebrauchnahme der Drähte überprüft. Drähte mit scharfen Knicken werden von der Benutzung ausgeschlossen. Die Russen haben also dieselben Grundsätze, die auch bei deutschen Basismessungen zur Anwendung kommen. Der Basismessstrupp hat außerdem ein Invarband von 8 m Länge zur Messung von Reststücken. Während in Deutschland darauf Wert gelegt wird, die Basislänge zu einem Vielfachen von 24 m zu machen, achtet man in Rußland nicht auf diesen Umstand und nimmt die Messung eines Reststückes in Kauf. Da jedoch eine Basismessung auch in Rußland gewisse Vorarbeiten erfordert, dürfte es wohl vorzuziehen sein, auf die Messung von Reststücken von vornherein zu verzichten.

Bei Basismessungen I. Ordnung werden stets 8 Drähte verwendet. An Basisstativen stehen 30—45 Stück zur Verfügung. Man ist also in der Lage, eine Basis von ungefähr 1 km Länge auf einmal vorzubereiten. Entscheidet man sich für Messung einer Basis mittels Stativen an Stelle von Pfählen, so ist es unbedingt erforderlich, eine große Zahl von Stativen verfügbar zu haben, falls man die Messungsdauer nicht unnötig stark verlängern will. Bei französischen Basismessungen sind nur etwa 5—6 Stative in Benutzung, so daß während der Messung und unmittelbar vorher Stative auf- und umgestellt werden, was sich auf die Genauigkeit der Messung sicher ungünstig auswirken wird.

Die Längen der 24 m langen Meßdrähte werden vor Beginn der Meßarbeiten im übrigen alljährlich mindestens einmal auf dem Komparator des Moskauer Instituts der Geodäsie-, Aero-Photogrammetrie- und Kartographie-Ingenieure durch Vergleich mit einem Normal-Maßstab durchgeführt. Bei dieser Gelegenheit werden auch die Temperaturkoeffizienten überprüft. Spätestens einen halben Monat nach Rückkehr von den Basismessungen werden die Drähte erneut einer Eichung unterzogen. Zwischen beiden sollen nicht mehr als 40—60 km Basislänge gemessen werden. Zieht man die deutschen Verhältnisse hierzu in Vergleich, so findet man hier die Möglichkeiten der Vor- und Nacheichung durch Vergleich mit den Normal-Maßstäben nicht so günstig liegend wie in Rußland. Dafür wird aber unmittelbar vor und nach

jeder Basismessung in Deutschland die Vergleichsbasis bei Potsdam gemessen und dadurch eine sehr gute Überprüfung der Drahtlänge ermöglicht.

Beim Eichen im Institut verwenden die Russen die gleichen Spannbocke, Gewichte und Spannseile wie bei den Feldarbeiten. Sie haben also dieselben Grundsätze, die auch in Deutschland seit langem geübt werden. Der mittlere Fehler der Eichung eines Meßdrahtes soll $\pm 5 \mu$ nicht überschreiten und die beiden Ermittlungen der Komparatorlänge vor und nach der Drahteichung sollen nicht mehr als 15μ von einander abweichen. Man erhält demnach dieselben Genauigkeiten, die auch in Deutschland bei Eichungen von Invardrähten erzielt werden. Eine Einrichtung zur Eichung von 48 m langen Drähten besitzt Deutschland zur Zeit noch nicht. Derartige Untersuchungen können hier nur auf der Vergleichsstrecke in Potsdam durchgeführt werden.

Die Ausdehnungskoeffizienten werden in Rußland mindestens alle drei Jahre einmal bestimmt. Sie werden dabei in Intervallen von 5° in einem Temperaturbereich von 35° gründlich untersucht. In Deutschland hat man der Überprüfung der Ausdehnungskoeffizienten bisher nicht die nötige Beachtung geschenkt. Erst in den letzten Jahren hat sich aus den Ergebnissen der Basismessungen eindeutig feststellen lassen, daß die Ausdehnungskoeffizienten ebenfalls Schwankungen unterliegen und in gewissen Zeitabständen einer Nachprüfung bedürfen.

Die Durchführung einer Basismessung mit Stativverwendung in Rußland unterscheidet sich in vielem wesentlich von den in Deutschland üblichen Methoden. Auch in Rußland ist eine Vorbereitung der Basismessung erforderlich, die darin besteht, daß nach Errichtung von Miren innerhalb der Basisflucht in Abständen von 24 m kleine Pflöcke geschlagen werden, die später das rasche Aufstellen der Stative ermöglichen. An den Endpunkten der Basis wird das Zentrum der tiefgelegenen Basisfestlegung mittels eines Lotstabes in die Meßflucht aufgelotet. In Deutschland ist man von der Verwendung von Lotstäben wieder abgekommen und man zieht hier feste Marken in Messungshöhe über der unterirdischen Festlegung vor, deren seitlicher Abstand vom Zentrum der Festlegung durch Winkelmessung aus bekannter Entfernung (große Lotung) ermittelt wird. Mitunter wird auf das Setzen der kleinen Zwischenpfähle verzichtet, und es werden die Stative sofort in der Basisflucht aufgestellt, wobei zugleich auf den richtigen Abstand durch eine provisorische Messung geachtet wird. Der Abstand soll von 24 m nicht mehr als 3 cm

abweichen. Bei den Basismessungen des Reichsamts für Landesaufnahme ist im allgemeinen angestrebt worden, den Abstand der Zielmarken etwa 1 cm größer als 24 m zu wählen, damit sich stets positive Werte für die Korrektur der 24 m langen Strecke ergeben und Vorzeichenfehler damit vermieden werden. Es wird jedenfalls in Rußland teilweise darauf Wert gelegt, einen ganzen Abschnitt in der Basis sofort mit Stativen zu besetzen, damit nicht wie in Frankreich ein Umsetzen während der Messung erforderlich wird. Die Stative tragen Ablesezapfen bekannter Art. Grundsätzlich werden die Stative von den Russen nur bei günstigen Geländebedingungen verwendet. In Sumpfbereichen kommen ausschließlich Pfähle zur Anwendung, die auch noch durch drei Stützen versteift werden.

Das Messen über Stative nach französischer oder russischer Art hat den großen Nachteil, daß in jedem Abschnitt über 24 m alle Drähte nacheinander aufgelegt werden müssen, ehe zur nächsten 24-m-Strecke weitergegangen werden kann. Beim Messen über Pfähle kann jeder Draht einzeln über die Basis geführt werden. Das Ergebnis ist in diesem Falle von vielen systematischen Fehlern befreit, die im andern Fall nicht zum Ausdruck kommen, da bei dem langen Verweilen auf einer Strecke die Gefahr der Verlagerung der Stative eintritt und systematische Fehler entstehen, die sonst nicht bemerkt werden können. Wenn man so viele Stative zur Verfügung hat wie die Russen, könnte man allerdings ebenfalls mit jedem Draht einzeln den gesamten Basisabschnitt messen, falls die Teilstrecke nicht länger als ca. 1100 m ist. Warum die Russen sich zu dieser weit sichereren Methode nicht entschlossen haben, ist höchstens dadurch zu erklären, daß in diesem Falle die Notwendigkeit sich ergeben kann, daß das Nivellement der Basiszapfen mehrfach wiederholt werden muß, besonders wenn die Gefahr besteht, daß an den Stativen in der Zeit, wo sie nicht zur Messung benutzt werden, Veränderungen vorkommen können. Interessant ist auch, daß die Russen beim Messen mit Pfählen auf eine Unterteilung der Basisstrecke verzichten und die Standfestigkeit eines Pfahles als ausreichend ansehen, um bei Einbruch des Abends an einem beliebigen Pfahl Halt zu machen und erst am nächsten Tage hier wieder fortzufahren.

Wie schon vorher erwähnt, wird auf ein gutes Nivellement besonderer Wert gelegt, da man sich über den Einfluß von Fehlern in den Höhenunterschieden — besonders bei großen Neigungen — auf das Ergebnis der Streckenmessung voll bewußt geworden ist. So ist z. B. vorgeschrieben, daß in Strecken, die eine Neigung von mehr als 1 m auf

24 m haben, mit zwei verschiedenen Horizonten nivelliert wird, wobei die Entfernungen nach den beiden Lattenstandorten sorgfältig einander gleich gemacht sind. Das Hinnivellement wird vor der Basismessung, das Rücknivellement nach der Basismessung durchgeführt. Die Differenzen der beiden Messungen sollen 2 mm nicht überschreiten. Bei größeren Höhenunterschieden ist eine größere Genauigkeit erforderlich, jedoch haben die Russen über die Größe der Steigerung der Genauigkeit bei wachsendem Höhenunterschied besondere Angaben nicht gemacht.

Beigebrochenen Basislinien werden die Brechungswinkel entweder mit einem großen Wild-Theodolit in 4 Sätzen oder mit einem 10-Sekunden-Theodolit oder Zeiß-Instrument in 2—6 Sätzen gemessen. Entsprechend der Größe des Brechungskoeffizienten sind folgende Genauigkeiten vorgeschrieben:

Bei einem Brechungs-	ein mittlerer Winkel-
koeffizienten	fehler
$q = 1/15 - 1/20$	m von $\pm 2''$
$1/20 - 1/35$	m von $\pm 3''$
und so fort bis	
$q = 1/70 - \text{weniger}$	m von $\pm 10''$.

Aus den geforderten Genauigkeiten geht hervor, daß der Aufwand für die Messung der Brechungswinkel sehr gering ist und im Hinblick auf die Dauer einer Basismessung überhaupt nicht ins Gewicht fällt.

Bei einer Basismessung I. Ordnung verwenden die Russen im allgemeinen 8 Drähte, von denen 2 als Reservedrähte verwendet werden. Die Basis wird gewöhnlich in 3 ungefähr gleiche Teile unterteilt. Es wird dann mit jedem Draht nicht die ganze Basis, sondern nur ein Teil gemessen, entsprechend dem nachfolgenden Schema:

	Hingang	Rückgang
I. Teil	Draht 1 + 2	Draht 3 + 4
II. Teil	Draht 5 + 6	Draht 1 + 2
III. Teil	Draht 3 + 4	Draht 5 + 6

Es wird also jeder Teil abschnittsweise mit 4 Drähten, davon mit zweien im Hin- und den anderen beiden im Rückgang, gemessen. Es entspricht also die Messung der Russen einer Messung des Reichsamts für Landesaufnahme mit 2 Drähten. Die Franzosen messen die ganze Basis mit 3 Drähten im Hin- und Rückgang und das Reichsamt für Landesaufnahme hat die Basislinien mit 6—8 Drähten im Hin- und Rückgang gemessen. Wenn die Basis sich auf einer Eisfläche befindet, wird der Hingang mit den Drähten 1, 2 und 3 in einem Zuge und der Rückgang mit den Drähten 4, 5 und 6

gemessen. Durch diese Art der Messung entfällt eine wichtige Probe, die bei Messungen des Reichsamts für Landesaufnahme nicht entbehrt werden möchte, nämlich der Vergleich der Hin- und Rückmessung mit demselben Draht. Bei längeren Basislinien reichen die vorhandenen Stative nicht aus und es müssen während der Messung ständig Stative umgesetzt werden. In diesem Falle würde auch eine Rückmessung mit demselben Draht sich nicht sofort mit der Hinmessung vergleichen lassen, da die Stative umgestellt werden müssen und damit andere Höhenkorrekturen erhalten. Das letztere Prinzip wird von den Russen auch bei Basismessungen angewendet, wo an Stelle der Stative Pfähle getreten sind. Die Vorteile, die die Pfähle gegenüber den Stativen haben, werden also von den Russen nicht ausgenutzt. Bei Verwendung von Pfählen braucht man mit Veränderungen im Höhenunterschied für den Verlauf einiger Tage nicht zu rechnen und man kann daher ruhig mit jedem Draht einzeln die Basis durchmessen. Diesen großen Vorteil machen sich die Russen nicht zunutze. Sie arbeiten hier genau so, als ob Stative vorhanden seien und legen in jedem 24-m-Intervall alle Drähte nacheinander zur Ablesung auf und gehen dann erst zum nächsten Abschnitt weiter.

Bei Basislinien, die sich über Eisflächen erstrecken, bevorzugen die Russen 48 m lange Drähte, desgleichen bei wenig standfestem Boden. In Deutschland liegen Erfahrungen für die Messung mit 48 m langen Drähten noch nicht vor. Der Transport eines so langen Drahtes muß sicher mit größter Sorgfalt durchgeführt werden, da ja der Draht nicht auf der Erde schleifen darf; es wird jedoch die Hälfte aller Ablesungen eingespart. Der Zeitgewinn dürfte aber bei der Messung nur unerheblich sein. Ausschlaggebend ist jedoch der Zeitgewinn bei der Basisvorbereitung. Hier wird die Zeitdauer auf die Hälfte herabgesetzt.

Die Basislinien II. Ordnung, wie auch die unmittlere Messung einer Dreiecksseite I. Ordnung werden mit 48-m-Drähten häufiger durchgeführt. Bei den Basislinien II. Ordnung kommen 4 Drähte zur Verwendung, davon zwei für die Hinmessung und zwei für die Rückmessung. Die Drähte werden mit Spannböcken gespannt, die nach dem Muster von Witram oder Carpentier gebaut sind. Auch hat das Moskauer Institut eigene Spanndrähte gebaut, über deren Konstruktion jedoch nichts gesagt ist.

Genau wie auch in Deutschland wird das Auf- und Abrollen der Drähte auf die Trommel durch den Ingenieur vorgenommen. Da die Russen ebenfalls Aluminiumtrommeln verwenden, werden die

Drähte nur locker aufgewickelt, damit bei Temperaturveränderungen der Draht keine Überspannungen erleidet. Beim Aufwickeln und Abrollen wird das freie Drahtende am Karabiner gehalten, so daß sich der Draht um seine Achse drehen kann und Torsionsspannungen vermieden werden. Dies alles sind Regeln, die auch in Deutschland sorgfältigst beachtet werden. Es wird dafür Sorge getragen, daß die Drähte vor plötzlichen Erschütterungen und Temperaturveränderungen geschützt werden. Ebenfalls sehr wichtig ist es, daß die Hilfsarbeiter während der Basismessung nicht gewechselt werden, so daß jeder mit den ihm übertragenen Funktionen gut vertraut ist. Zum Tragen der Drähte werden — nach der russischen Vorschrift — die „aufmerksamsten“ Arbeiter ausgesucht. Man hat also auch in Rußland die Bedeutung des sorgfältigen Transports während der Messung erkannt. Aus diesem Grunde tragen in Deutschland stets die Beobachter den Draht selbst. Bei 48 m langen Drähten werden diese in der Mitte durch einen dritten Arbeiter unterstützt. Die Drähte werden mindestens 20 Minuten vor Beginn der Messung von der Trommel abgewickelt und aufgehängt. Bei den Basismessungen in Deutschland ist man noch vorsichtiger zu Werke gegangen und hat die Drähte schon einen halben oder einen ganzen Tag zuvor abgerollt.

Das Aufstellen der Spannböcke, das Geben der Kommandos, das Einhängen des Drahtes und der Gewichte, sowie das Aufschreiben unterscheiden sich bei den Russen nicht von den auch in Deutschland üblichen Gepflogenheiten. Die Russen machen jedoch nur drei Lesungen bei jedem Draht, während beim Reichsamt für Landesaufnahme regelmäßig fünf Lesungen gemacht werden. Die Finnen haben sich ebenfalls für nur drei Lesungen entschieden. Gelegentlich einer früheren Untersuchung konnte jedoch festgestellt werden, daß durch die weiteren zwei Lesungen die Genauigkeit um 25 % gesteigert wird. Der Zeitaufwand für die beiden zusätzlichen Messungen beträgt höchstens 20 Sekunden pro Strecke. Der Zeitverlust ist also verschwindend. Die russischen Beobachter wechseln bei jeder 24-m-Strecke. Das Reichsamt für Landesaufnahme begnügt sich mit einem einzigen Wechsel in der Mitte einer Teilstrecke. Die Ausschaltung der persönlichen Fehler wird in beiden Fällen gleich gut erreicht. In Finnland wechseln die Beobachter während der Hinmessung überhaupt nicht; sie wechseln ihre Stellungen erst bei der Rückmessung, die mit demselben Draht erfolgt und bekommen dann erst im Mittel aus Hin- und Rückmessung einen von persönlichen Fehlern freien Wert.

Die Lufttemperatur wird bei den Russen mittels eines Schleuderthermometers gemessen. Bei jeder 5. Strecke wird nach einem 2—3 Minuten dauernden Schleudern die Temperatur abgelesen. Die Erfahrungen des Reichsamts für Landesaufnahme gehen aber dahin, daß die Temperatur des Drahtes mehr der Strahlungstemperatur als der Lufttemperatur gleicht. Man erhält daher einen weit zuverlässigeren Wert, wenn man das Thermometer ruhig im Schatten hängen läßt. Die Lufttemperatur kann bei Sonnenstrahlung bis zu 5° von der Drahttemperatur abweichen.

Die einzelnen Messungen sollen nach der russischen Vorschrift für jede Teilstrecke nicht mehr als $4\sqrt{k}$ mm differieren, wobei k die Länge des Basisabschnittes in km darstellt.

Die deutschen Vorschriften setzen weit engere Grenzen bei Betrachtung der inneren Genauigkeit. Es ist daher zu vermuten, daß die Russen sämtliche Fehler, die sich aus der Eichung, Temperaturbestimmung usw. ergeben, in der obigen Formel eingeschlossen wissen wollen. In diesem Falle würden die Fehlergrenzen mit den in Deutschland üblichen zusammenstimmen. Falls mit demselben Draht durchgehend gemessen wird, wird die Fehlergrenze weitergezogen. Es wird dann $8\sqrt{k}$ mm zugelassen. Dies erklärt sich daraus, daß die Russen durch den Wechsel der Drähte auf den verschiedenen Teilstrecken während eines Hinganges oder eines Rückganges eine bessere Elimination der systematischen Drahtfehler erwarten.

Zusammenfassend kann über die russische Vorschrift für die Ausführung von Basismessungen gesagt werden, daß sie alle wichtigen Gesichtspunkte, die bei einer Basismessung zu beachten sind, in übersichtlicher Weise zusammenstellt. Man wird den Basislinien, die von den Russen nach dieser Vorschrift gemessen sind, unbedingtes Vertrauen schenken dürfen. Im Vergleich zu deutschen Basismessungen wird die Messung mit Stativen rascher vorangehen. Besonders wichtig erscheint auch die sehr häufige Verwendung der 48 m langen Drähte, die besonders bei schnell durchzuführenden Basismessungen sicher eine bedeutende Beschleunigung herbeiführen. Sehr wichtig erscheint auch, daß mit dem allzu weit verbreiteten Vorurteil, daß Basislinien möglichst nicht gebrochen werden sollen, ziemlich gründlich aufgeräumt wird, und die gebrochenen Basislinien an erster Stelle gesetzt werden. Bei der recht kärglichen Literatur über die Durchführung von Basismessungen stellt die russische Dienstvorschrift eine wertvolle Bereicherung des Schrifttums dar.

Koordinatenumformungen im rumänischen Küstengebiet

Von Dr.-Ing. K. Hubeny, Reg.-Rat d. R. im OKM.

Als Folge der großen Entfernung des rumänischen Küstengebietes vom Zentralpunkt der stereographischen Projektion (Roussilhe) ist es bei Verwendung der von Wl. Hristow in [1] angegebenen Reihen zur Umformung geographischer Koordinaten in ebene und umgekehrt nötig, diese Reihen bis zu den Gliedern 5. Ordnung einschließlich bei Umformungen von Punkten des Küstengebietes zu berechnen.

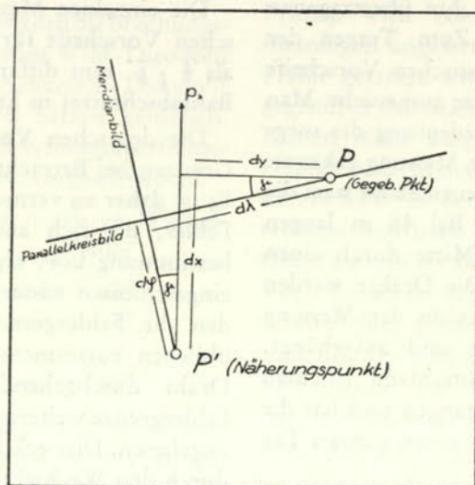


Abb. 1

Durch die Wahl eines neuen (rechnerischen) Nullpunktes ist nach einem Vorschlag des erwähnten Autors die Rechnung dadurch zu vereinfachen, daß die die Abbildungsgleichungen darstellenden Reihen im neuen Nullpunkt nach Potenzen der Koordinatenunterschiede zu diesem Punkt neuerlich in Reihen entwickelt werden. Derartige Reihen wurden für das rumänische Küstengebiet entwickelt; im Folgenden soll über die Berechnung berichtet und das Ergebnis angegeben werden.

Die Abbildungsgleichungen sind allgemein aus

$$\left. \begin{aligned} y &= (10) \Delta\varphi + (20) \Delta\varphi^2 + (02) \Delta\lambda^2 + (12) \Delta\varphi \Delta\lambda^2 + \dots = f_1(\Delta\varphi, \Delta\lambda) \\ x &= (01) \Delta\lambda + (11) \Delta\varphi \Delta\lambda + (21) \Delta\varphi^2 \Delta\lambda + (03) \Delta\lambda^3 + \dots = f_2(\Delta\varphi, \Delta\lambda) \end{aligned} \right\} \dots (1a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= [10] y + [20] y^2 + [02] x^2 + [12] yx^2 + \dots = f_1(y, x) \\ \Delta\lambda &= [01] x + [11] yx + [21] y^2 x + [03] x^3 + \dots = f_2(y, x) \end{aligned} \right\} \dots (1b)$$

gegeben. Die Bedeutung der Koeffizienten dieser Reihen ist in (1) angegeben; die ebenen Koordinaten y, x zählen ebenso wie die Breiten- und Längensunterschiede $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ vom Zentralpunkt der Abbildung ($\varphi = 45^\circ 54', \lambda = 25^\circ 23' 32'', 8772$ ö. Gr.).

Für das rumänische Küstengebiet wurde bei $\varphi = 45^\circ, \lambda = 29^\circ 30'$, also ungefähr in der Mitte des Umrechnungsgebietes, ein neuer rechnerischer Nullpunkt angenommen, dessen ebene auf den Zentralpunkt bezogene Koordinaten mit

$$y = -91\,725,36 \quad x = 323\,720,62$$

oder, unter Hinzuziehung der Konstanten, mit

$$H = 408\,274,64 \quad R = 823\,720,62$$

gegeben sind.

Die Entwicklung der Abbildungsgleichungen im rechnerischen Nullpunkt nach Potenzen der Koordinatenunterschiede erfolgt nach der Taylorschen Reihe für eine Funktion mit zwei Veränderlichen; es ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= \frac{df_1}{d\Delta\varphi} \Delta\varphi' + \frac{df_1}{d\Delta\lambda} \Delta\lambda' + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f_1}{d\Delta\varphi^2} \Delta\varphi'^2 + \frac{df_1}{d\Delta\varphi} \frac{df_1}{d\Delta\lambda} \Delta\varphi' \Delta\lambda' + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f_1}{d\Delta\lambda^2} \Delta\lambda'^2 + \dots \\ \Delta x &= \frac{df_2}{d\Delta\varphi} \Delta\varphi' + \frac{df_2}{d\Delta\lambda} \Delta\lambda' + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f_2}{d\Delta\varphi^2} \Delta\varphi'^2 + \frac{df_2}{d\Delta\varphi} \frac{df_2}{d\Delta\lambda} \Delta\varphi' \Delta\lambda' + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_2}{d\Delta\lambda^2} \Delta\lambda'^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (2a)$$

oder, in abgekürzter Schreibweise,

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= (10)^+ \Delta\varphi' + (01)^+ \Delta\lambda' + (20)^+ \Delta\varphi'^2 + (11)^+ \Delta\varphi' \Delta\lambda' + (02)^+ \Delta\lambda'^2 + \dots \\ \Delta x &= (\overline{10})^+ \Delta\varphi' + (\overline{01})^+ \Delta\lambda' + (\overline{20})^+ \Delta\varphi'^2 + (\overline{11})^+ \Delta\varphi' \Delta\lambda' + (\overline{02})^+ \Delta\lambda'^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (2b)$$

In diesen Reihen bedeuten $\Delta y, \Delta x, \Delta\varphi', \Delta\lambda'$ die Koordinatenunterschiede zum rechnerischen Nullpunkt; die Koeffizienten $(10)^+, (01)^+, (\overline{10})^+, (\overline{01})^+$ usw. sind die durch die entsprechenden Faktoriellen dividierten partiellen Ableitungen der Abbildungsgleichungen (1a) nach $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ oder bei Berechnung von $\Delta\varphi'$ und $\Delta\lambda'$ die entsprechenden Ableitungen nach y und x . Wie aus (2) ersichtlich ist, ergeben sich vollständige Reihen, die für eine zum Bezugsmeridian (Meridian durch den rechnerischen Nullpunkt) nicht symmetrische Abbildung charakteristisch sind.

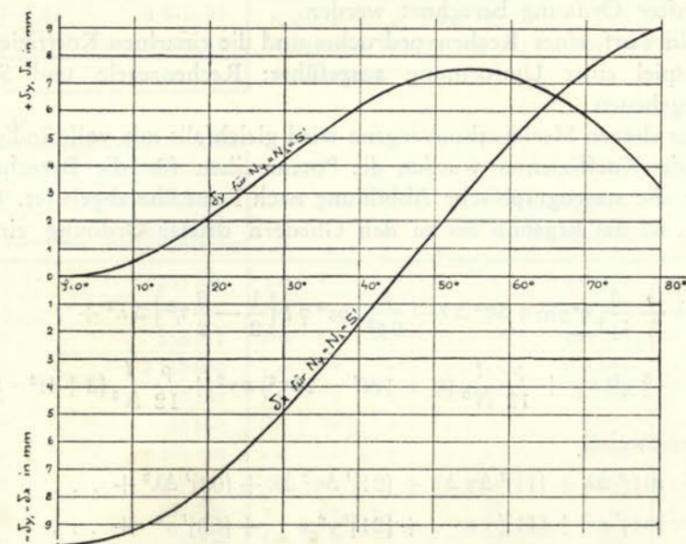


Abb. 2

Der Vollständigkeit halber seien noch die Reihen zur Berechnung des Breiten- und Längensunterschiedes angegeben; es ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi' &= [10]^+ \Delta y + [01]^+ \Delta x + [20]^+ \Delta y^2 + [11]^+ \Delta y \Delta x + [02]^+ \Delta x^2 + \dots \\ \Delta\lambda' &= [\overline{10}]^+ \Delta y + [\overline{01}]^+ \Delta x + [\overline{20}]^+ \Delta y^2 + [\overline{11}]^+ \Delta y \Delta x + [\overline{02}]^+ \Delta x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (2c)$$

Um die Bildung der einzelnen Koeffizienten $(10)^+, (01)^+$ usw. in einem Beispiel zu zeigen, werden diese für die erste Reihe in (2b) allgemein abgeleitet.

Aus (1a) hat man gegeben

$$y = (10) \Delta\varphi + (20) \Delta\varphi^2 + (02) \Delta\lambda^2 + (12) \Delta\varphi \Delta\lambda^2 + (30) \Delta\varphi^3 + (40) \Delta\varphi^4 + (22) \Delta\varphi^2 \Delta\lambda^2 + (04) \Delta\lambda^4 + \dots = F_1(\Delta\varphi, \Delta\lambda)$$

Durch die Bildung der partiellen Ableitungen findet man für die Koeffizienten (10)⁺, (01)⁺ ... usw. folgende Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} (10)^+ &= \frac{df_1}{d\Delta\varphi} = (10) + 2(20)\Delta\varphi + (12)\Delta\lambda^2 + 3(30)\Delta\varphi^2 + 4(40)\Delta\varphi^3 + 2(22)\Delta\varphi\Delta\lambda^2 + \dots \\ (01)^+ &= \frac{df_1}{d\Delta\lambda} = 2(02)\Delta\lambda + 2(12)\Delta\varphi\Delta\lambda + 2(22)\Delta\varphi^2\Delta\lambda + 4(04)\Delta\lambda^3 \\ (20)^+ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2f_1}{d\Delta\varphi^2} = (20) + 3(30)\Delta\varphi + 6(40)\Delta\varphi^2 + (22)\Delta\lambda^2 + \dots \\ (11)^+ &= 2 \cdot \frac{1}{2!} \frac{df_1}{d\Delta\varphi} \cdot \frac{df_1}{d\Delta\lambda} = 2(12)\Delta\lambda + 4(22)\Delta\varphi\Delta\lambda + \dots \\ (02)^+ &= \frac{1}{2!} \frac{d^2f_1}{d\Delta\lambda^2} = (02) + (12)\Delta\varphi + (22)\Delta\varphi^2 + 6(04)\Delta\lambda^2 + \dots \text{ usw.} \end{aligned} \right\} (3)$$

In gleicher Weise wird die Bildung der weiteren Koeffizienten sowie die der anderen Reihen ausgeführt.

Die in (3) vorkommenden Koeffizienten der Abbildungsgleichungen sind für die Breite des Zentralpunktes zu berechnen; die Koordinatenunterschiede sind die des rechnerischen Nullpunktes vom Zentralpunkt. Für das rumänische Küstengebiet wurden die Reihen (2b) und (2c) bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschließlich entwickelt; je nach der Entfernung des umzuformenden Punktes vom rechnerischen Nullpunkt genügt die Berechnung bei $\Delta\varphi' = \Delta\lambda' \leq 10'$, $\Delta y = \Delta x \leq 10$ km bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, bei $\Delta\varphi' = \Delta\lambda' \leq 30'$, $\Delta y = \Delta x \leq 40$ km bis zu den Gliedern dritter Ordnung. Erst darüber hinaus müssen die Glieder vierter Ordnung berechnet werden, um die verlangte Genauigkeit von einigen cm zu ergeben. Der Vorteil gegenüber der Anwendung der Reihen (1a) und (1b) ist damit gegeben, denn die Reihen (1a) und (1b) müssen bei jeder Umformung im Küstengebiet bis zu den Gliedern fünfter Ordnung berechnet werden.

Im beigefügten Entwurf eines Rechenvordruckes sind die einzelnen Koeffizienten zahlenmäßig angegeben und ein Beispiel einer Umformung ausgeführt; Rechenregeln und Stellenzahlen entsprechen den in [2] angegebenen.

Die Berechnung der ebenen Meridiankonvergenz wird gleichfalls mit vollständigen Reihen ausgeführt. Zur Bestimmung der Koeffizienten wurden die Potenzreihen für die Berechnung der ebenen Meridiankonvergenz für die stereographische Abbildung nach Roussilhe abgeleitet. Ohne auf die Ableitung selbst einzugehen, sei das Ergebnis bis zu den Gliedern dritter Ordnung einschließlich angegeben. Es ist

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \sin\varphi\Delta\lambda + \frac{\cos\varphi}{2\rho}\Delta\varphi\Delta\lambda - \frac{5}{4\rho^2}\eta^2\sin\varphi\Delta\varphi^2\Delta\lambda + \frac{1}{6\rho^2}\cos^3\varphi t \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\eta^2 \right) \Delta\lambda^3 + \dots \\ \gamma &= \rho \frac{t}{N} x + \frac{\rho}{3N^2} \left(\frac{3}{2} + 3t^2 + \frac{3}{2}\eta^2 \right) xy + \frac{\rho}{12} \frac{t}{N^3} (q + 12t^2 - 15\eta^2) x^2 y^2 + \frac{\rho}{12} \frac{t}{N^3} (3 + 4t^2 - 5\eta^2) x^3 + \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

oder in abgekürzter Schreibweise,

$$\begin{aligned} \gamma &= (01)'\Delta\lambda + (11)'\Delta\varphi\Delta\lambda + (21)'\Delta\varphi^2\Delta\lambda + (03)'\Delta\lambda^3 + \dots \\ \gamma &= [01]'\gamma + [11]'\gamma x + [21]'\gamma^2 x + [03]'\gamma^3 + \dots \end{aligned}$$

Nach der Durchführung der Reihenentwicklung erhält man zur Berechnung der Meridiankonvergenz wieder vollständige Reihen, die aus

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma &= (10)'^+\Delta\varphi' + (01)'^+\Delta\lambda' + (20)'^+\Delta\varphi'^2 + (11)'^+\Delta\varphi'\Delta\lambda' + (02)'^+\Delta\lambda'^2 + \dots \\ \Delta\gamma &= [10]'^+\Delta\gamma + [01]'^+\Delta x + [20]'^+\Delta y^2 + [11]'^+\Delta y\Delta x + (01)'^+\Delta x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

allgemein gegeben sind. Die berechnete Größe $\Delta\gamma$ stellt den Unterschied der Meridiankonvergenz γ im betrachteten Punkt zu der im rechnerischen Nullpunkt (γ_0) dar; die Meridiankonvergenz im umzuformenden Punkt wird demnach aus

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma$$

gefunden.

Literatur:

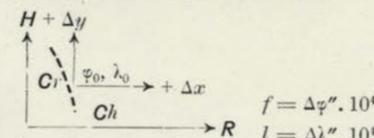
- [1] Wl. Hristow: Zeitschr. f. Verm. 1937, Seite 84—89.
- [2] K. Rinner: Mitteilungen des Chefs des Kriegs-Karten- und Vermessungswesens, Heft 6, 1942.

Entwurf eines Rechenvordruckes

(Doppelrechenmaschine)

a) R, H aus φ, λ .

φ	44°30'00",0000	λ	29°45'00",0000
	-45°00'00",0000		-29°30'00",0000
$\Delta\varphi$	0°30'00",0000	$\Delta\lambda$	0°15'00",0000



	1 577 442	30 841 814	r w	l w	r w	l w	f	18 000'000	w	r	w	r	24 942
	21 882 258	1 119 194	l w	r r	l w	r r	l	9 000 000	w	w	w	w	713 129
	18 714	270	r w	l r	r r	l w	f²	3 240 000	r	r	w	w	21
	1 067 656	28 070	l r	r r	l w	r w	f l	1 620 000	w	r	r	w	16 849
	9 957	378 750	r w	l r	r r	l w	l²	810 000	w	w	r	r	317
	301	6 008	r w	l w	r w	l w	f³	583 200					
	12 598	1 953	l r	r w	l r	r w	f² l	291 600					
	901	9 546	l r	r r	l r	r r	f l²	145 800					
	2 257	213	r w	l r	r w	l r	l³	72 900					
	0	0	l r	r w	l w	r r	f⁴						
	201	21	l r	r r	l w	r w	f³ l						
	58	660	r r	l w	r w	l r	f² l²						
	203	37	l r	r r	l w	r w	f l³						
	6	36	r w	l r	r r	l w	l⁴						

$\Delta\gamma''$	+	594",21
$\Delta\gamma^0$	+	9'54",21
		+ 2°55'40",50
γ	+	3°05'34",71

Komma: x, y, γ bei 10.
Vorzeichen: Δx , γ wie $\Delta\lambda$, Δy wie $\Delta\varphi$; bei dekad. Ergänzung jedoch entgegengesetzt.

b) φ, λ aus H, R

R	846 419,79	H	353 801,70
	-823 720,62		-408 274,64
Δx	+ 22 699,17	Δy	- 54 472,94

$\eta = \Delta y, 10^3$
 $\xi = \Delta x, 10^3$

	32 338 918	2 331 238	l w	r r	l w	r r	η	5 447 294	w	r	w	r	2 473 330
	1 654 012	45 579 889	r w	l w	r w	l w	ξ	2 269 917	w	w	w	w	32 458 570
	17 277	456 271	r w	l w	r r	l r	η^2	296 730	w	w	r	r	453 100
	386 385	7 145 656	r w	l r	r r	l w	$\eta\xi$	123 649	w	r	r	w	7 609 400
	2 541 544	456 282	l r	r r	l w	r w	ξ^2	51 525	r	r	w	w	465 700
	68 350	86 440	r w	l r	r w	l r	η^3	16 164	w	r	w	r	93 000
	60 824	1 385 180	r w	l w	r w	l w	$\eta^2\xi$	6 736	w	w	w	w	1 400 000
	589 306	259 340	l r	r w	l r	r w	$\eta\xi^2$	2 807	r	w	r	w	143 000
	40 595	461 720	r r	l r	r r	l r	ξ^3	1 170	r	r	r	r	479 000
	200	18 000	l w	r w	l r	r r	η^4	881					
	12 140	267 000	r w	l r	r r	l w	$\eta^2\xi^2$	367					
	93 950	108 000	l r	r r	l w	r w	$\eta\xi^3$						
	22 280	267 000	r r	l w	r w	l r	$\eta\xi^2$						
	31 350	18 000	l w	r w	l r	r r	ξ^4						

$\Delta\gamma''$	+	593"8
$\Delta\gamma^0$	+	9'53"8
		+ 2°55'40"5
γ	+	3°05'34"3

Komma: $\Delta\varphi''$, $\Delta\lambda''$, $\Delta\gamma''$ bei 11.
Vorzeichen: $\Delta\lambda$, γ wie Δx , $\Delta\varphi$ wie Δy ; bei dekad. Ergänzung jedoch entgegengesetzt.

Rechenvorschrift:

1. Bilden der Potenzen f^{ilk} ($\eta^i\xi^k$); dabei immer von rechts einstellen (einkurbeln); Ergebnis steht im Res.-Werk Links der 8. Stelle.
2. Koeffizienten der linken Kolonne ins linke, der rechten Kolonne ins rechte Einstellwerk; f^{ilk} bzw. $\eta^i\xi^k$ einkurbeln. Hebelstellung und Farbe aus der nach den Vorzeichen von $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ (Δy , Δx) bestimmten Spalte entnehmen. Auch dabei von rechts einkurbeln (einstellen).
3. Bei $\Delta\varphi = \Delta\lambda < 10'$ } nur Glieder 2. bei $\Delta\varphi = \Delta\lambda < 30'$ } nur Glieder 3.
 $\Delta x = \Delta y < 10$ km } Ordnung, $\Delta x = \Delta y < 40$ km } Ordn. berechnen!

Hebelstellung und Farbe [für a), b)]

$\Delta\varphi$ (Δy)	+	1.Sp.	-	2.Sp.	+	3.Sp.	+	4.Sp.
$\Delta\lambda$ (Δx)	+	+	+	+	+	+	+	+

