

Nachrichten  
aus dem  
**Reichsvermessungsdienst**

Mitteilungen  
des Reichsamts für Landesaufnahme

1943

19. Jahrgang

Nr. 6

**EHRENTAFEL**

Von den Angehörigen des Reichsvermessungsdienstes  
starben für Führer und Vaterland:



**Hans Dieter Bachmann**

Fachschulpraktikant  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Grenadier, gefallen im Juli 1943

**Erich Dolezek**

Vermessungstechniker  
beim Katasteramt Trautenau  
Gefreiter, gefallen im August 1943

**Heinrich Christoffers**

Büroangestellter  
beim Katasteramt Norden/Ostfr.  
Grenadier, gefallen im Juli 1943

**Walter Eising**

Vermessungstechniker  
beim Katasteramt Elbing  
Leutnant, gefallen im Juli 1943

**Herbert Dinger**

Fachschulpraktikant  
bei der HVA. XI in Wiesbaden  
Gefreiter u. KOB,  
gefallen im August 1943

**Karl-Heinz Flechsel**

Kartolithograph  
bei der HVA XI in Wiesbaden  
Gefreiter, gefallen im Oktober 1943



### Wilhelm Hatterich

Vermessungsinspektoranwärter  
bei der HVA. VI in Hamburg  
Gefreiter, Inhaber des E. K. II.  
an einer Verwundung verstorben  
im August 1943

### Alois Pyka

Zimmerer  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Gefreiter, gefallen im August 1943

### Wilhelm Kraft

Kupferdrucker  
bei der HVA. XII in Stuttgart  
Gefreiter, gefallen im Juli 1943

### Adolf Reuel

Meßgehilfe  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Gefreiter, an einer Verwundung verstorben  
im September 1943

### Erich Matthes

Landkartentechniker  
bei der HVA. XI in Wiesbaden  
Grenadier, gefallen im August 1943

### Gustav Scholze

Vermessungstechniker-Lehrling  
beim Katasteramt Gablonz (Neisse)  
Gefreiter, Inhaber des E. K. II.  
gefallen im August 1943

### Hermann Pietsch

Technischer Angestellter  
beim Katasteramt Troppau  
Unteroffizier, an den Folgen eines an der Front  
erlittenen Unfalls verstorben  
im Oktober 1943

### Walter Schwark

Tischler  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Grenadier, gefallen im August 1943

### Reiner Seitz

Landkartentechniker-Lehrling  
bei der HVA. XII in Stuttgart  
bei einem feindlichen Luftangriff gefallen  
im September 1943

E h r e i h r e m A n d e n k e n !



## AMTLICHER TEIL.

## Ehrung für Ministerialdirigent Albert Pfitzer

Die Landwirtschaftliche Fakultät der Universität Bonn verlieh am 18. Oktober 1943 dem Ministerialdirigenten Albert Pfitzer anlässlich der 125-Jahr-Feier der Universität in Anerkennung der von ihm in Wort und Schrift wissenschaftlich begründeten und schöpferisch durchgeführten Reform des großdeutschen Vermessungswesens, das er hierdurch auf eine der deutschen Wissenschaft würdige Höhe gebracht hat, die

**Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften ehrenhalber.**

Oberregierungsrat Dr.-Ing. habil. Heinrich Kuhlmann, kommissarischer Leiter des Landesvermessungsamtes Böhmen und Mähren in Prag, wurde beauftragt, die Lehrfächer Trigonometrie und Technische Mechanik an der Technischen Hochschule in Prag in Vorlesungen und Übungen zu vertreten.

Der Reichsminister des Innern hat im Ministerialblatt des Reichs- und Preuß. Ministeriums des Innern (MBliV.) folgende Runderlasse veröffentlicht:

## Unterhaltsbeihilfe für Fachschüler

RdErl. d. RMdI. v. 14. 9. 1943 — IIb 1364/43-6316b

Im Einvernehmen mit dem RFM. bestimme ich:

1. Die Gewährung einer Unterhaltsbeihilfe an Fachschüler setzt nach meiner Anordnung v. 16. 11. 1942 (MBliV. S. 2157)\*) voraus, daß der Fachschüler seinem Studium mit Fleiß nachgeht. Es wird deswegen von ihm regelmäßig zu verlangen sein, daß er sich während seiner Semesterferien bei der Behörde praktisch betätigt. Eine Zahlung der Unterhaltsbeihilfe während der Semesterferien kommt daher nur für die Zeit einer praktischen Betätigung bei der Behörde in Betracht. Darüber hinaus kann eine Unterhaltsbeihilfe während der Semesterferien nur gezahlt werden, wenn es sich um kurze Unterbrechungen der praktischen Tätigkeit durch eine angemessene Erholungszeit oder aus sonstigen zwingenden Gründen handelt.

2. Es bestehen auch keine Bedenken, die Unterhaltsbeihilfe schon während eines Vorsemesters an einer Fachschule zu zahlen, sofern die Aufnahme des Schülers in die Fachschule sichergestellt ist und im übrigen die Voraussetzungen meiner Anordnung v. 16. 11. 1942 gegeben sind. Wird das Vorsemester nicht an der Fachschule selbst abgeleistet, so ersuche ich, im Einzelfall meine Zustimmung zur Zahlung einer Unterhaltsbeihilfe vorher einzuholen.

[MBliV. 1943, Nr. 38, Sp. 1478.]

\*) Abgedruckt in den Nachr. a. d. RVermdienst 1942, Nr. 6, S. 358.



Vereinfachung der Verwaltung; hier: Vermessungen während des Krieges.  
RdErl. d. RMdI. v. 12. 11. 1943 — I Verm. 8731/43-6800.

Die durch RdErl. v. 15. 5. 1943 (MBliV. S. 863) \*) angeordnete Mitwirkung der unteren Forstbehörden bei der Nachprüfung von Teilungen forstwirtschaftlicher Grundstücke wird mit sofortiger Wirkung auf die mit forstlichen Hoheitsaufgaben im Rahmen der forstlichen Einheitsorganisation auftragsweise betrauten körperschaftlichen Forstämter (körperschaftliche Forstmeister, körperschaftliche Forstamtsleiter) ausgedehnt. (Hinweis auf den RdErl. des RForstM. v. 4. 4. 1943 RMBiFv. S. 90.)

[MBliV. 1943, Nr. 46, Sp. 1761/62.]

\*) Abgedruckt in den Nachr. a. d. RVermdienst 1943, Nr. 4, S. 149.

## NICHTAMTLICHER TEIL.

### Maschenweise Übertragung von Dreieckspunkten<sup>1)</sup>

Von M. Näbauer, München.

Die maschenweise Übertragung von Dreieckspunkten hat in den letzten Jahrzehnten eine früher ungeahnte Bedeutung für verschiedene Aufgabenkreise der Geodäsie erlangt. Im praktisch wichtigsten Falle dreht es sich dabei um die Aufgabe, eine große Zahl von gegenseitig gut bestimmten Punkten niederer Ordnung aus einem ungenaueren, veralteten in ein erneuertes und genaueres Hauptdreiecksnetz zu übertragen, ohne daß die große Zahl der übertragenen Punkte einer Neuausgleichung unterzogen wird.

#### Wichtigste Literatur:

- 1) Gauß, C. F.: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.“ Siehe C. F. Gauß' Werke, IV. Band, S. 193—216. Im Beispiel unter 8. steht auf S. 201: „Sind die Plätze, welche einer bestimmten Anzahl von gegebenen Punkten der ersten Ebene entsprechen sollen, vorgeschrieben, so kann man leicht nach der gemeinen Interpolationsmethode die einfachste algebraische Funktion  $f$  finden, wodurch diese Bedingung erfüllt wird. . . . Man kann von diesem Verfahren in der Geodäsie eine nützliche Anwendung machen, um eine auf mittelmäßige Messungen gegründete Karte, die im kleinen Detail gut, aber im Ganzen etwas verzerrt ist, in eine bessere zu verwandeln, wenn man die richtige Lage einer Anzahl von Punkten kennt. . . .“
- 2) v. Baur, C. W.: „Verschiebung eines trigonometrischen Netzes“, Z. V. W. 1881, S. 402—408. Anknüpfend an C. F. Gauß bringt v. Baur unter Benutzung der Lagrange'schen Interpolationsformel den konformen Anschluß an  $n$  gegebene Punkte. Die Formeln werden aber für mehr als zwei Anschlußpunkte sehr umständlich und praktisch unbrauchbar.
- 3) Schols, Ch. M.: „Over de aansluiting van een driehoeksnet van lagere orde aan een driehoeksnet van hogere orde.“ Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeling Natuurkunde, 2 de Reeks, Deel XVI. Amsterdam 1881. Enthält bequeme Rechnungsvorschriften für den Anschluß an drei Punkte (siehe Bemerkung Krüger in Z. V. W. 1896, S. 290, oben!). Erst Anschluß an 2 Punkte durch Verschiebung nebst Drehstreckung, dann erst konformer Anschluß an den dritten Punkt.

<sup>1)</sup> Die folgenden Ausführungen decken sich im wesentlichen mit dem Inhalt eines erstmals 1932 vervielfältigten Studienbehelfs.





### Wilhelm Hatterich

Vermessungsinspektoranwärter  
bei der HVA. VI in Hamburg

Gefreiter, Inhaber des E. K. II.  
an einer Verwundung verstorben  
im August 1943

### Alois Pyka

Zimmerer  
beim Reichsamt für Landesaufnahme

Gefreiter, gefallen im August 1943

### Wilhelm Kraft

Kupferdrucker  
bei der HVA. XII in Stuttgart  
Gefreiter, gefallen im Juli 1943

### Adolf Reuel

Meßgehilfe  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Gefreiter, an einer Verwundung verstorben  
im September 1943

### Erich Matthes

Landkartentechniker  
bei der HVA. XI in Wiesbaden  
Grenadier, gefallen im August 1943

### Gustav Scholze

Vermessungstechniker-Lehrling  
beim Katasteramt Gablonz (Neisse)  
Gefreiter, Inhaber des E. K. II.  
gefallen im August 1943

### Hermann Pietsch

Technischer Angestellter  
beim Katasteramt Troppau  
Unteroffizier, an den Folgen eines an der Front  
erlittenen Unfalls verstorben  
im Oktober 1943

### Walter Schwark

Tischler  
beim Reichsamt für Landesaufnahme  
Grenadier, gefallen im August 1943

### Reiner Seitz

Landkartentechniker-Lehrling  
bei der HVA. XII in Stuttgart  
bei einem feindlichen Luftangriff gefallen  
im September 1943

Ehre ihrem Andenken!



## AMTLICHER TEIL.

### Ehrung für Ministerialdirigent Albert Pfitzer

Die Landwirtschaftliche Fakultät der Universität Bonn verlieh am 18. Oktober 1943 dem Ministerialdirigenten Albert Pfitzer anlässlich der 125-Jahr-Feier der Universität in Anerkennung der von ihm in Wort und Schrift wissenschaftlich begründeten und schöpferisch durchgeführten Reform des großdeutschen Vermessungswesens, das er hierdurch auf eine der deutschen Wissenschaft würdige Höhe gebracht hat, die

**Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften ehrenhalber.**

Oberregierungsrat Dr.-Ing. habil. Heinrich Kuhlmann, kommissarischer Leiter des Landesvermessungsamtes Böhmen und Mähren in Prag, wurde beauftragt, die Lehrfächer Trigonometrie und Technische Mechanik an der Technischen Hochschule in Prag in Vorlesungen und Übungen zu vertreten.

Der **Reichsminister des Innern** hat im Ministerialblatt des Reichs- und Preuß. Ministeriums des Innern (MBliV.) folgende Runderlasse veröffentlicht:

#### Unterhaltsbeihilfe für Fachschüler

RdErl. d. RMdI. v. 14. 9. 1943 — IIb 1364/43-6316b

Im Einvernehmen mit dem RFM. bestimme ich:

1. Die Gewährung einer Unterhaltsbeihilfe an Fachschüler setzt nach meiner Anordnung v. 16. 11. 1942 (MBliV. S. 2157)\*) voraus, daß der Fachschüler seinem Studium mit Fleiß nachgeht. Es wird deswegen von ihm regelmäßig zu verlangen sein, daß er sich während seiner Semesterferien bei der Behörde praktisch betätigt. Eine Zahlung der Unterhaltsbeihilfe während der Semesterferien kommt daher nur für die Zeit einer praktischen Betätigung bei der Behörde in Betracht. Darüber hinaus kann eine Unterhaltsbeihilfe während der Semesterferien nur gezahlt werden, wenn es sich um kurze Unterbrechungen der praktischen Tätigkeit durch eine angemessene Erholungszeit oder aus sonstigen zwingenden Gründen handelt.

2. Es bestehen auch keine Bedenken, die Unterhaltsbeihilfe schon während eines Vorsemesters an einer Fachschule zu zahlen, sofern die Aufnahme des Schülers in die Fachschule sichergestellt ist und im übrigen die Voraussetzungen meiner Anordnung v. 16. 11. 1942 gegeben sind. Wird das Vorsemester nicht an der Fachschule selbst abgeleistet, so ersuche ich, im Einzelfall meine Zustimmung zur Zahlung einer Unterhaltsbeihilfe vorher einzuholen.

[MBliV. 1943, Nr. 38, Sp. 1478.]

\*) Abgedruckt in den Nachr. a. d. RVermDienst 1942, Nr. 6, S. 358.



Vereinfachung der Verwaltung; hier: Vermessungen während des Krieges.

RdErl. d. RMdL v. 12. 11. 1943 — I Verm. 8731/43-6800.

Die durch RdErl. v. 15. 5. 1943 (MBliV. S. 863) \*) angeordnete Mitwirkung der unteren Forstbehörden bei der Nachprüfung von Teilungen forstwirtschaftlicher Grundstücke wird mit sofortiger Wirkung auf die mit forstlichen Hoheitsaufgaben im Rahmen der forstlichen Einheitsorganisation auftragsweise betrauten körperschaftlichen Forstämter (körperschaftliche Forstmeister, körperschaftliche Forstamtsleiter) ausgedehnt. (Hinweis auf den RdErl. des RForstm. v. 4. 4. 1943 RMBIFv. S. 90.)

[MBliV. 1943, Nr. 46, Sp. 1761/62.]

\*) Abgedruckt in den Nachr. a. d. RVermdienst 1943, Nr. 4, S. 149.

## NICHTAMTLICHER TEIL.

### Maschenweise Übertragung von Dreieckspunkten<sup>1)</sup>

Von M. Näbauer, München.

Die maschenweise Übertragung von Dreieckspunkten hat in den letzten Jahrzehnten eine früher ungeahnte Bedeutung für verschiedene Aufgabenkreise der Geodäsie erlangt. Im praktisch wichtigsten Falle dreht es sich dabei um die Aufgabe, eine große Zahl von gegenseitig gut bestimmten Punkten niederer Ordnung aus einem ungenaueren, veralteten in ein erneuertes und genaueres Hauptdreiecksnetz zu übertragen, ohne daß die große Zahl der übertragenen Punkte einer Neuausgleichung unterzogen wird.

#### Wichtigste Literatur:

- 1) Gauß, C. F.: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.“ Siehe C. F. Gauß' Werke, IV. Band, S. 193—216. Im Beispiel unter 8. steht auf S. 201: „Sind die Plätze, welche einer bestimmten Anzahl von gegebenen Punkten der ersten Ebene entsprechen sollen, vorgeschrieben, so kann man leicht nach der gemeinen Interpolationsmethode die einfachste algebraische Funktion  $f$  finden, wodurch diese Bedingung erfüllt wird. . . . Man kann von diesem Verfahren in der Geodäsie eine nützliche Anwendung machen, um eine auf mittelmäßige Messungen gegründete Karte, die im kleinen Detail gut, aber im Ganzen etwas verzerrt ist, in eine bessere zu verwandeln, wenn man die richtige Lage einer Anzahl von Punkten kennt. . . .“
- 2) v. Baur, C. W.: „Verschiebung eines trigonometrischen Netzes“, Z. V. W. 1881, S. 402—408. Anknüpfend an C. F. Gauß bringt v. Baur unter Benutzung der Lagrange'schen Interpolationsformel den konformen Anschluß an  $n$  gegebene Punkte. Die Formeln werden aber für mehr als zwei Anschlußpunkte sehr umständlich und praktisch unbrauchbar.
- 3) Schols, Ch. M.: „Over de aansluiting van een driehoeksnet van lagere orde aan een driehoeksnet van hogere orde.“ Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeling Natuurkunde, 2 de Reeks, Deel XVI. Amsterdam 1881. Enthält bequeme Rechnungsvorschriften für den Anschluß an drei Punkte (siehe Bemerkung Krüger in Z. V. W. 1896, S. 290, oben!). Erst Anschluß an 2 Punkte durch Verschiebung nebst Drehstreckung, dann erst konformer Anschluß an den dritten Punkt.

<sup>1)</sup> Die folgenden Ausführungen decken sich im wesentlichen mit dem Inhalt eines erstmals 1932 vervielfältigten Studienbehelfs.



- 4) Krüger, L.: „Über den Anschluß eines sekundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz.“ Z. V. W. 1896, S. 289 u. f.
- 5) Jordan, W.: „Verschiebung eines trigonometrischen Netzes.“ Z. V. W. 1898, S. 281—293. Rein praktisch orientierte Arbeit aus Anlaß eines praktischen Falles (Konformer Interpolationsanschluß).

Alle bisher unter 1) bis 5) genannten Veröffentlichungen befassen sich ausschließlich mit der konformen Übertragung. Erst die weiterhin aufgezählte Literatur geht auch auf andere Übertragungsarten ein.

- 6) van der Tas: „Overbrengen van coördinaten“, Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, Jg. XXX (1914). Nach Döbritzsch hat v. d. Tas die maschenweise affine Abbildung in einem einzigen graphischen Arbeitsgang vorgeschlagen. In zwei Arbeitsgängen wurde sie schon um 1880 von Gleuns angewendet.
- 7) Merkel, Heinrich: a) „Über den Anschluß eines gegebenen sekundären Dreiecksnetzes an ein erneuertes Hauptnetz durch maschenweise Übertragung der trigonometrischen Punkte.“ Dissertation 1924, infolge der Zeitverhältnisse nicht gedruckt. Ausführliche Besprechung von Idler in Z. V. W. 1927, S. 117—122. Diese Arbeit bringt erst eine Darstellung und Würdigung der bisherigen konformen Übertragungsverfahren und anschließend eine Reihe neuer Vorschläge, darunter insbesondere die Anwendung der affinen und projektiven Übertragung. Alle Übertragungsverfahren werden auf ein der Praxis entnommenes Beispiel angewendet (Deutsche Quellenschrift für die Anwendung nichtkonformer Übertragungen).  
b) „Koordinatenumformung durch maschenweise Abbildung.“ A. V. N. 1932, Nr. 8 u. 9 (Auszug aus der unter 7 a) genannten Dissertation).  
c) „Zur maschenweisen Abbildung von Dreieckspunkten.“ A. V. N. 1934, Nr. 23 u. 24.  
d) „Anwendung der maschenweisen Abbildung in der Bildmessung.“ B. M. L. W. 1938, S. 7—17.
- 8) Clauß, Gustav: „Die Eingliederung eines alten engmaschigen Dreiecksnetzes niederer Ordnung in ein neubearbeitetes Netz von geringerer Dichte mittels Näherungsverfahren.“ Z. V. W. 1931, S. 579—589 u. 607—614. Geht im Anschluß an Merkel auf die konforme, die affine, die Übertragung mit Hilfe der Ecktransversalenabschnitte und auf die projektive Übertragung ein. Die einzelnen Übertragungsarten werden am gleichen praktischen Beispiel verprobt.
- 9) Döbritzsch, Heinrich: „Die Verknüpfung von Dreiecksnetzen“, Leipzig 1933.
- 10) Idler, R.: „Praktische Anwendung der maschenweisen Abbildung trigonometrischer Punkte bei der Umrechnung der Soldnerschen Koordinaten in das Gauß-Krügersche Einheitssystem.“ A. V. N. 1935, S. 230—244.
- 11) Tienstra, J. M.: „Eine Methode für die Auswertung von Luftaufnahmen von flachem Gelände.“ Photogrammetria 1940, S. 90—104.
- 12) Einige weitere, mehr oder weniger einschlägige Arbeiten stammen von:  
a) Wenner, F. (Z. V. W. 1920, S. 657—663), b) Strinz (Z. V. W. 1925, S. 289—300 u. A. V. N. 1929, Nr. 36, S. 565—572), c) Blaß, K. (A. V. N. 1933, S. 693 u. f. u. Z. V. W. 1935, S. 107—115), d) Ammermann, E. (A. V. N. 1935, S. 581—590), e) Bodemüller, H. (Z. V. W. 1936, S. 165—171), f) Müller, Eugen, Leipzig 1938.

Von allen Übertragungsverfahren muß man verlangen:

1. daß jeder Punkt einer Altmasche (Dreieck oder Viereck) in der entsprechenden Neumasche eindeutig abgebildet wird und daß auch die Eckpunkte an den vorgeschriebenen Platz, d. h. wieder in die Eckpunkte, kommen;
2. daß einem Punkt auf der Dreiecksseite ein und derselbe Neupunkt entspricht, gleichgültig, von welchem der beiden Nachbardreiecke aus die Abbildung erfolgt;
3. die Dreiecksseiten sollen geradlinig bleiben.



Bei größerer Ausdehnung der Netze ist eine ebene Projektion vorausgesetzt, von welcher man am Ende der Arbeit wieder auf die ursprüngliche Bezugsfläche (Kugel oder Ellipsoid) übergehen kann.

Als die wichtigsten Verfahren sind zu bezeichnen:

1. die affine Übertragung,
2. die projektive Übertragung,
3. die Übertragung mit Hilfe der Abschnittsverhältnisse der Ecktransversalen.

Diese Verfahren eignen sich auch für Ketten bzw. Netze mit beliebig viel Dreiecken. Liegt nur ein einzelnes Dreieck vor, so kann auch

4. die konforme Übertragung von Vorteil sein.

Bemerkung: Bei allen folgenden Untersuchungen wird stets das allgemeine Koordinatensystem verwendet.

### I. Affine Übertragung.

a) Wesen und Bezeichnungen. Die affine Abbildung, welche als Sonderfall der projektiven Übertragung gelten kann, läßt sich — nötigenfalls nach geeigneter Vergrößerung des einen Bildes — geometrisch als Parallelprojektion deuten. Daraus folgt, daß für jede feste Richtung die Verhältnisse entsprechender Strecken beider Ebenen unveränderlich sind. Außerdem lassen sich zwei in allgemeiner Lage befindliche affine ebene Gebilde — wieder nach geeigneter Vergrößerung des einen Bildes — so gegeneinander drehen und verschieben, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte zueinander parallel sind und daß entsprechende Seiten sich auf der gleichen Geraden (Affinitätsachse) schneiden. Sie befinden sich dann in affiner Lage. Die affine Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen in allgemeiner Lage ist durch drei Paare einander entsprechender Punkte, d. h. durch zwei einander entsprechende Dreiecke, eindeutig bestimmt.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

	gegebene Dreieckspunkte			beliebiger Maschenpunkt
im Altsystem	$P'_1(x'_1 y'_1)$	$P'_2(x'_2 y'_2)$	$P'_3(x'_3 y'_3)$	$Q'(x' y')$
im Neusystem	$P_1(x_1 y_1)$	$P_2(x_2 y_2)$	$P_3(x_3 y_3)$	$Q(x y)$

... (1)

b) Rechnerische Lösung. Durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 = x' + dx, \\ y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 = y' + dy, \end{aligned} \quad \dots (2)$$

in welchen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  zahlenmäßig bekannt sind, wird eine affine Abbildung vermittelt. Hieraus folgen die Koordinatenänderungen (Verbesserungen der Koordinaten des Altsystems) zu

$$\begin{aligned} dx &= x - x' = (a_1 - 1) x' + b_1 y' + c_1, \\ dy &= y - y' = a_2 x' + (b_2 - 1) y' + c_2. \end{aligned} \quad \dots (3)$$



Durch Subtraktion der aus (3) für  $P_1'$  folgenden Änderungen

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_1 - x'_1 = (a_1 - 1) x'_1 + b_1 y'_1 + c_1, \\ dy_1 &= y_1 - y'_1 = a_2 x'_1 + (b_2 - 1) y'_1 + c_2 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

von den entsprechenden Ausdrücken unter (3) ergeben sich die Teiländerungen

$$\begin{aligned} dx' &= dx - dx_1 = (a_1 - 1) (x' - x'_1) + b_1 (y' - y'_1), \\ dy' &= dy - dy_1 = a_2 (x' - x'_1) + (b_2 - 1) (y' - y'_1). \end{aligned} \quad \dots (5)$$

Die Differenzen  $x' - x'_1 = x''$ ,  $y' - y'_1 = y''$  ... (6)

sind die Koordinaten des laufenden Punktes  $Q'$  in einem zum ursprünglichen parallelen System, dessen Ursprung  $U''$  nach  $P_1'$  fällt. Mit den weiteren Abkürzungen:

$$a_1 - 1 = A_1, \quad b_1 = B_1, \quad a_2 = A_2, \quad b_2 - 1 = B_2 \quad \dots (7)$$

erhält man aus (5) die Teiländerungen

$$\begin{aligned} dx' &= A_1 x'' + B_1 y'', \\ dy' &= A_2 x'' + B_2 y''. \end{aligned} \quad \dots (8)$$

Diese einfacheren Formen enthalten nur noch 4 Koeffizienten, welche mit Hilfe der bekannten, den Punkten  $P_2'$ ,  $P_3'$  entsprechenden Teilverschiebungen

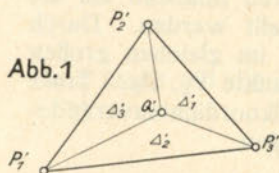
$$\begin{aligned} dx'_2 &= dx_2 - dx_1, \quad dy'_2 = dy_2 - dy_1, \\ dx'_3 &= dx_3 - dx_1, \quad dy'_3 = dy_3 - dy_1 \end{aligned} \quad \dots (9)$$

zu ermitteln sind. Hat man nach erfolgter Konstantenbestimmung für einen Punkt  $Q'$  die Teiländerungen  $dx'$ ,  $dy'$  aus (8) gefunden, so ergeben die Summen

$$dx = dx_1 + dx', \quad dy = dy_1 + dy' \quad \dots (10)$$

die vollständigen Koordinatenänderungen von  $Q'$ .

Andere Ausdrücke für die Koordinatenänderungen lassen sich aus dem Umstand herleiten, daß bei der affinen Abbildung das Verhältnis der Flächeninhalte entsprechender Figuren konstant ist.



Bezeichnet man die durch  $Q'$  bestimmten Teildreiecke  $\Delta_1'$ ,  $\Delta_2'$ ,  $\Delta_3'$  jeweils nach der Nummer des in ihnen nicht enthaltenen Dreieckspunktes und gebraucht man die Abkürzung

$$\Delta' = \Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' \quad \dots (11)$$

für die Fläche des Dreiecks  $P_1'P_2'P_3'$ , so bestehen zwischen den Koordinaten von  $Q'$  und denjenigen der Dreieckspunkte die einfachen Beziehungen

$$x' = \frac{\Delta_1' x_1 + \Delta_2' x_2 + \Delta_3' x_3}{\Delta'}, \quad y' = \frac{\Delta_1' y_1 + \Delta_2' y_2 + \Delta_3' y_3}{\Delta'} \quad \dots (12)$$

Entsprechendes gilt für die Neumasche. Hieraus und aus

$$\Delta_1' : \Delta_2' : \Delta_3' : \Delta' = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta$$

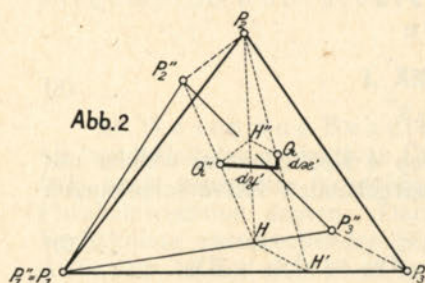


folgen die vollständigen Koordinatenänderungen

$$dx = \frac{\Delta'_1 dx_1 + \Delta'_2 dx_2 + \Delta'_3 dx_3}{\Delta'}, \quad dy = \frac{\Delta'_1 dy_1 + \Delta'_2 dy_2 + \Delta'_3 dy_3}{\Delta'} \dots (13)$$

als Funktionen der vollständigen Koordinatenänderungen der Dreieckspunkte.

c) Zeichnerische Lösung bei geringer Punktzahl. Man verschiebt das Altdreieck  $P_1'P_2'P_3'$  mit seinem ganzen Inhalt parallel in eine solche Zwischenlage  $P_1''P_2''P_3''$ , daß  $P_1'$  nach  $P_1 = P_1''$  gelangt. Zur Übertragung des laufenden Punktes  $Q'$  in die Neumasche wird der Umstand benutzt, daß das Verhältnis entsprechender Streckenabschnitte in der Altmasche, also auch im gestaltgleichen Zwischendreieck und in der affinen Übertragung den gleichen Zahlenwert besitzt.



Einzelheiten:  $P_2''Q''$  schneidet auf  $P_1''P_3''$  den Hilfspunkt  $H$  aus; die Parallele zu  $P_3''P_3$  durch  $H$  trifft  $P_1P_3$  in  $H'$ ;  $H''$  wird auf  $HP_2$  mittels einer Parallelen zu  $P_2''P_2$  durch  $Q''$  bestimmt; die Parallele zu  $HH'$  durch  $H''$  schneidet auf  $H'P_2$  den laufenden Neupunkt  $Q$  aus. Nach dem Anblick von Abb. 2 werden nämlich die einander entsprechenden Strecken  $HP_2''$  und  $H'P_2$  der Alt- und Neufigur durch den laufenden Punkt  $Q''$  bzw.  $Q$  im gleichen Verhältnis  $v = HH'' : H'P_2$  geteilt.

Die der Abb. 2 zu entnehmenden Koordinatenzuwächse von  $Q$  gegen  $Q''$  sind die Teilverschiebungen  $dx'$ ,  $dy'$ , welche nach (10) auf die Gesamtverschiebungen

$$dx = dx_1 + dx', \quad dy = dy_1 + dy'$$

führen.

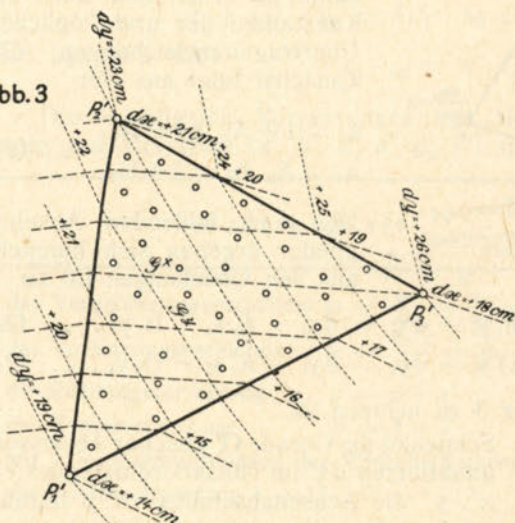
Zur Erreichung einer genügenden Genauigkeit müssen die auftretenden Koordinatenänderungen in einem viel größeren Maßstab als die Dreiecke, etwa im Maßstab 1:20 bis 1:50, dargestellt werden. Durch Abtrag der Teiländerungen  $dx_2'$ ,  $dy_2'$  bzw.  $dx_3'$ ,  $dy_3'$  im gleichen großen Maßstab von  $P_2''$  bzw.  $P_3''$  aus ergeben sich die Neupunkte  $P_2$ ,  $P_3$ . Trotz der Deformation des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  werden die Teilkoordinatenveränderungen  $dx'$ ,  $dy'$  im vergrößerten Maßstab richtig erhalten.

d) Zeichnerischer Weg durch Linien gleicher Koordinatenänderungen bei großer Punktzahl. Bei großer Punktzahl ist es weitaus am einfachsten, in das betreffende Dreieck Linien gleicher Koordinatenänderungen einzutragen, mit deren Hilfe sogleich die Gesamtbeträge  $dx$ ,  $dy$  aller Punktverschiebungen abgelesen werden können. Gibt man in (3) den Koordinatenänderungen bestimmte feste Werte, so sind die ihnen entsprechenden geometrischen Örter durch die Geradengleichungen



$$\left. \begin{aligned} G^x &\equiv (a_1 - 1) x' + b_1 y' + \frac{(c_1 - dx)}{c_x} = 0, \\ G^y &\equiv a_2 x' + (b_2 - 1) y' + \frac{(c_2 - dy)}{c_y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Abb. 3



bestimmt, welche die neuen von  $dx$  und  $dy$  abhängigen Absolutglieder  $c_x, c_y$  enthalten. Die Einzeichnung der Parallelscharen — die Geradengleichungen einer Schar unterscheiden sich nur in den Absolutgliedern — erfolgt durch gleichmäßige Unterteilung der Dreiecksseiten. Beim Übergang von einem Dreieck zum nächsten erfahren diese Linien eine Drehung um ihre Schnittpunkte mit der Dreiecksseite, so daß diese geometrischen Orte gleicher Koordinatenänderungen in einem Dreiecknetz geknickte Linienzüge darstellen.

Sie werden um so gestreckter, je besser die Übertragungskonstanten  $a, b, c$  für die einzelnen Dreiecke übereinstimmen.

e) Konstantenbestimmung. Die rechnerische Lösung knüpft an die Gleichungen (8) an. Deren Anwendung auf  $P_2, P_3$  führt auf die beiden Gleichungspaare:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x_2'' + B_1 y_2'' &= dx_2', \\ A_1 x_3'' + B_1 y_3'' &= dx_3', \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 x_2'' + B_2 y_2'' &= dy_2', \\ A_2 x_3'' + B_2 y_3'' &= dy_3', \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

und damit auf die gesuchten Koeffizienten:

$$A_1 = \frac{y_3'' dx_2' - y_2'' dx_3'}{x_2'' y_3'' - x_3'' y_2''} = \frac{2 \Delta_y dx}{2 \Delta'} = \frac{\Delta_y dx}{\Delta'}, \dots (17)$$

$$B_1 = \frac{x_2'' dx_3' - x_3'' dx_2'}{2 \Delta'} = \frac{\Delta_x dx}{\Delta'}, \dots (18)$$

$$A_2 = \frac{y_3'' dy_2' - y_2'' dy_3'}{2 \Delta'} = \frac{\Delta_y dy}{\Delta'}, \dots (19)$$

$$B_2 = \frac{x_2'' dy_3' - x_3'' dy_2'}{2 \Delta'} = \frac{\Delta_x dy}{\Delta'}. \dots (20)$$



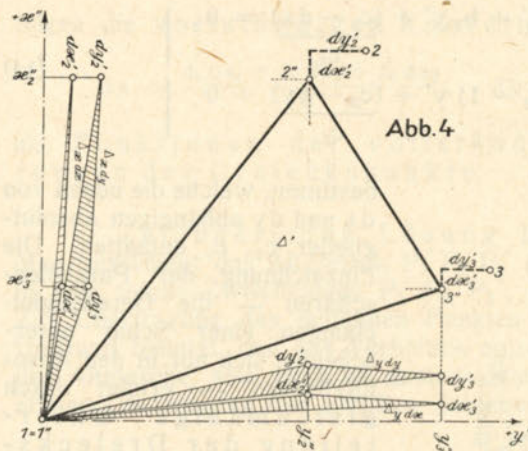


Abb. 4

Sie lassen sich mit den in Abb. 4 enthaltenen Einträgen auch als Flächenverhältnisse deuten. Sind die Koeffizienten  $A_1, B_1, A_2, B_2$  numerisch bekannt, so erhält man auch die Konstanten der ursprünglichen Übertragungsgleichungen (2). Zunächst folgt aus (7):

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + A_1, \quad b_1 = B_1, \quad \dots \quad (21) \\ a_2 &= A_2, \quad b_2 = 1 + B_2. \end{aligned}$$

Die noch fehlenden Absolutglieder ergeben sich nunmehr aus den Gleichungen (3) zu

$$c_1 = -(a_1 - 1) x_i' - b_1 y_i' + dx_i = dx_i - A_1 x_i' - B_1 y_i', \quad \dots \quad (22)$$

$$c_2 = -a_2 x_i' - (b_2 - 1) y_i' + dy_i = dy_i - A_2 x_i' - B_2 y_i', \quad \dots \quad (23)$$

worin nach Belieben  $i = 2$  oder  $3$  zu nehmen ist.

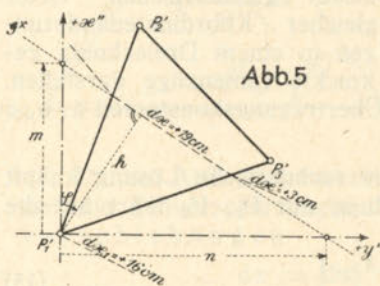


Abb. 5

Schneidet die Gerade  $G^x$  gleicher Abszissenänderungen  $dx'$  im Hilfskoordinatensystem  $x'', y''$  die Achsenabschnitte  $m, n$  heraus, so bestehen die einfachen Beziehungen:

$$A_1 = \frac{dx'}{m}, \quad B_1 = \frac{dx'}{n} \quad \dots \quad (24)$$

Entsprechend ist

$$A_2 = \frac{dy'}{p}, \quad B_2 = \frac{dy'}{q} \quad \dots \quad (25)$$

wenn  $p$  und  $q$  die zu  $G^y$  gehörigen Achsenabschnitte im System  $x'', y''$  bedeuten.

Die Ausdrücke (24), (25) folgen unmittelbar aus dem Vergleich der aus Abb. 5 zu entnehmenden Geradengleichungen

$$\frac{x''}{m} + \frac{y''}{n} = 1 \quad \dots \quad (24^1)$$

$$\frac{x''}{p} + \frac{y''}{q} = 1 \quad \dots \quad (25^1)$$

mit den Gleichungen (8).

f) Verzerrungen der affinen Übertragung für kleine Koordinatenänderungen. Die bisherigen Entwicklungen gelten — unbeschadet des bereits verwendeten Differentialzeichens — für beliebig große Koordinatenänderungen. Von nun an bedeuten, der Natur der vorliegenden praktischen Aufgabe entsprechend,  $dx, dy$  Größen, welche im Verhältnis zu den auftretenden Entfernungen (Dreiecksseiten  $s$ ) als sehr klein zu betrachten sind.



Mit

$$\frac{dx}{s}, \frac{dy}{s} = G^1 \quad \dots (26)$$

$$\text{folgt aus (17) bis (20): } A_1, B_1, A_2, B_2 = G^1 \quad \dots (27)$$

und weiterhin aus (21):

$$a_1 = 1 + G^1, \quad b_1 = G^1, \quad a_2 = G^1, \quad b_2 = 1 + G^1 \quad \dots (28)$$

$$\text{bzw. aus (22), (23): } c_1, c_2 = s \cdot G^1. \quad \dots (29)$$

Die wichtigsten Verzerrungen des Neusystems ( $x, y, s, \alpha, \beta, F$ ) gegen das Altsystem ( $x', y', s', \alpha', \beta', F'$ ) sind:

Verzerrungsart	Richtungswinkel der	
	Extremwerte	Nullwerte
1. das Vergrößerungsverhältnis $m = \frac{ds}{ds'} = \frac{s}{s'} = 1 + v$	$\alpha_m^{\min}, \alpha_m^{\max}$	—
2. das Verzerrungsverhältnis $v = \frac{s' - s}{s'} = m - 1$	$\alpha_v^{\min}, \alpha_v^{\max}$	$\alpha_v^0$
3. die Richtungsverzerrung $\rho = \alpha - \alpha'$	$\alpha_\rho^{\min}, \alpha_\rho^{\max}$	$\alpha_\rho^0$
4. die Winkelverzerrung $w = \beta - \beta'$	$\omega^{\min}, \omega^{\max}$	$\omega^0$
mit $\omega$ = Richtungswinkel der Winkelhalbierenden		
5. die Flächenverzerrung $f = F - F'$	.	.

Es bestehen innerhalb ein und derselben Masche folgende Beziehungen:

1. Vergrößerungsverhältnis.

$$m = \frac{1}{2} \{ (a_1 - b_2) \cos 2\alpha + (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 + b_2) \}. \quad \dots (35)$$

Für zwei zueinander senkrechte Richtungen  $\alpha$  und  $\alpha + 90^\circ$  ist

$$m_\alpha + m_{\alpha+90^\circ} = a_1 + b_2 = \text{konstant!} \quad \dots (36)$$

Die Richtungswinkel  $\alpha_m^{\min}, \alpha_m^{\max}$  der extremen Vergrößerungsverhältnisse ergeben sich aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha_m^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2} \quad \dots (37)$$

und dem Vorzeichen der 2. Ableitung von  $m$  nach  $\alpha$  für die Werte  $\alpha^m$

$$\frac{d^2 m}{d\alpha^2} = -2 \{ (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 - b_2) \cos 2\alpha \}. \quad \dots (38)$$

Die Extremwerte selbst sind die Ausdrücke

$$m^m = \frac{1}{2} \{ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \} \quad \dots (39)$$

und die beiden Werte von  $\alpha_m^0$  für  $m_0 = 1$  ergeben sich aus (35), wenn dort  $m = 1$  gesetzt wird. Reelle Werte für  $\alpha_m^0$  können nur bei Erfüllung der Bedingung

$$m^{\min} < 1 < m^{\max} \quad \dots (39^1)$$

erscheinen.



## 2. Verzerrungsverhältnis.

$$v = \frac{1}{2} \{ (a_1 - b_2) \cos 2\alpha + (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 + b_2 - 2) \}, \quad \dots (40)$$

$$v_\alpha + v_{\alpha+90^\circ} = a_1 + b_2 - 2 = A_1 + B_2 = \text{konstant!} \quad \dots (41)$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_v^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2} = \frac{A_2 + B_1}{A_1 - B_2}, \quad \dots (42)$$

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} = -2 \{ (a_2 + b_1) \sin 2\alpha + (a_1 - b_2) \cos 2\alpha \}. \quad \dots (43)$$

$$v^m = \frac{1}{2} \{ (a_1 + b_2 - 2) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \}. \quad \dots (44)$$

Die beiden Richtungswinkel  $\alpha_v^0$  für den Nullwert  $v_0 = 0$  folgen aus (40), wenn dort  $v = 0$  gesetzt wird. Auch hier ist die reelle Lösung an die Bedingung (39)<sup>1</sup> oder an die gleichbedeutende Forderung

$$v^{\min} < 0 < v^{\max} \quad \dots (44^1)$$

geknüpft.

## 3. Richtungsverzerrung.

$$\rho = \frac{1}{2} \{ -(a_1 - b_2) \sin 2\alpha + (a_2 + b_1) \cos 2\alpha + (a_2 - b_1) \}, \quad \dots (45)$$

$$\rho_\alpha + \rho_{\alpha+90^\circ} = a_2 - b_1 = \text{konstant!} \quad \dots (46)$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_\rho^m = -\frac{a_1 - b_2}{a_2 + b_1}, \quad \dots (47)$$

$$\frac{d^2 \rho}{d\alpha^2} = 2 \{ (a_1 - b_2) \sin 2\alpha - (a_2 + b_1) \cos 2\alpha \}, \quad \dots (48)$$

$$\rho^m = \frac{1}{2} \{ (a_2 - b_1) \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2} \}. \quad \dots (49)$$

Dem Sonderwert  $\varrho_0 = 0$  entsprechen die durch (45) bestimmten Richtungen  $\alpha_\rho^0$ , wenn dort  $\varrho = 0$  gesetzt wird. Voraussetzung für die Realität der Lösung ist die Erfüllung der Bedingung

$$\varrho^{\min} < 0 < \varrho^{\max}. \quad \dots (49^1)$$

## 4. Winkelverzerrung.

Die Verzerrung von  $\beta$  ist

$$w = -\sin \beta \{ (a_1 - b_2) \cos 2\omega + (a_2 + b_1) \sin 2\omega \}, \quad \dots (50)$$

$$w_\omega + w_{\omega+90^\circ} = 0, \quad \dots (51)$$

$$\operatorname{tg} 2 \omega^m = \frac{a_2 + b_1}{a_1 - b_2}, \quad \dots (52)$$

$$\frac{d^2 w}{d\omega^2} = 4 \sin \beta \{ (a_2 + b_1) \sin 2\omega + (a_1 - b_2) \cos 2\omega \}, \quad \dots (53)$$

$$w^m = \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + (a_2 + b_1)^2}. \quad \dots (54)$$



Die Richtungswinkel  $\omega_1^0, \omega_2^0$  der Halbierenden des Winkels  $\beta$  zum Nullwert  $\omega_0 = 0$  folgen aus

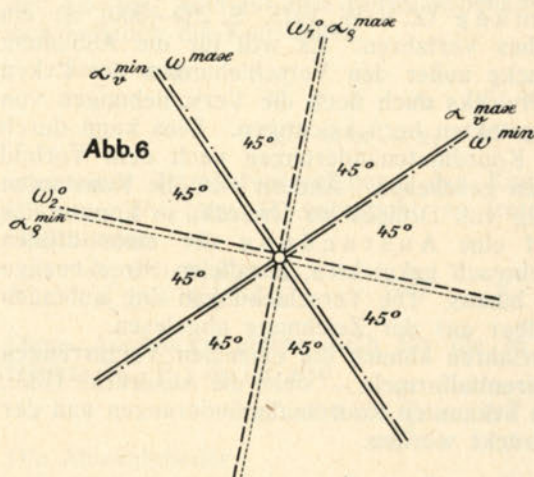
$$\operatorname{tg} 2 \omega^0 = - \frac{a_1 - b_2}{a_2 + b_1} . \quad \dots (55)$$

### 5. Flächenverzerrung.

$$f = F - F' = (a_1 + b_2 - 2) \cdot F = (v_\alpha + v_{\alpha+90^\circ}) \cdot F . \quad \dots (56)$$

Bemerkung.  $m, v, \rho$  und  $w$  sind unabhängig vom Ort. Sie hängen nur von der betrachteten Richtung  $\alpha$  bzw. bei festem  $\beta$  vom Richtungswinkel  $\omega$  der Winkelhalbierenden ab. Die Flächenverzerrung ist sowohl vom Ort wie von der Richtung unabhängig. Die Summe von zwei gleichartigen zueinander senkrechten Verzerrungen ist jeweils konstant und die Extremwerte gleichartiger Verzerrungen stehen senkrecht zueinander. Im übrigen gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_m^{\max} &= \alpha_v^{\max} = \alpha_m^{\min} + 90^\circ = \alpha_v^{\min} + 90^\circ = \omega^{\min} = \omega^{\max} + 90^\circ \\ &= \alpha_\rho^{\max} + 45^\circ = \alpha_\rho^{\min} + 135^\circ = \omega_1^0 + 45^\circ = \omega_2^0 + 135^\circ . \end{aligned} \quad \dots (57)$$



Zur besseren Veranschaulichung der gegenseitigen Lage der Richtungen ausgezeichnete Verzerrungen dient die in Abb. 6 enthaltene Richtungsrose der Verzerrungen. Sie kann gezeichnet werden, sobald die Richtung eines einzigen Extremwertes bekannt ist.

g) Affine Abbildung von genügend eng begrenzten Bezirken. Eine erste Ebene  $(x, y)$  werde in eine zweite Ebene  $(\xi, \eta)$  mittels der beliebigen differenzierbaren Beziehungen

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y) \quad \dots (58)$$

abgebildet. Wir sondern von  $x, y$  die runden, etwa der Mitte des Bezirks entsprechenden Werte  $x_0, y_0$  ab, so daß

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y \quad \dots (59)$$

wird. Für genügend kleine  $\Delta x, \Delta y$  erhält man für die Koordinatenänderungen die hinreichend genauen Ausdrücke

$$dx = \xi - x = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y - (x_0 + \Delta x), \quad \dots (60)$$

$$dy = \eta - y = \varphi(x_0, y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y - (y_0 + \Delta y). \quad \dots (61)$$



Bei bekannten Funktionen  $f, \varphi$  können deren erste Ableitungen gebildet und mit den Argumenten  $x_0, y_0$  numerisch berechnet werden. Gebraucht man hierfür die Abkürzungen

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad b_1 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad a_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad b_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \dots (62)$$

und setzt man weiter

$$c_1 = f(x_0, y_0) - x_0, \quad c_2 = \varphi(x_0, y_0) - y_0, \quad \dots (63)$$

so erscheinen die Koordinatenänderungen als die Ausdrücke

$$dx = (a_1 - 1) \Delta x + b_1 \Delta y + c_1, \quad \dots (64)$$

$$dy = a_2 \Delta x + (b_2 - 1) \Delta y + c_2. \quad \dots (65)$$

Diese Formen stimmen aber mit den für die affine Übertragung aufgestellten Beziehungen (3) vollkommen überein. Man kann also für ein beliebiges stetiges Abbildungsgesetz zwischen zwei Ebenen genügend eng begrenzte Bezirke derselben jeweils affin übertragen. Die zugehörigen Konstanten ändern sich von Bezirk zu Bezirk.

h) Das von Strinz angegebene graphische Verfahren der Koordinatenumformung (Z. V. W. 1925, S. 289—300) ist ein der affinen Übertragung ähnliches Verfahren. Es will für die Abbildung des Inhalts der einzelnen Dreiecke außer den Verschiebungen der Ecken des jeweils zu übertragenden Dreiecks auch noch die Verschiebungen von weiteren benachbarten Dreieckspunkten berücksichtigen. Dies kann durch Zeichnung von Linien gleicher Koordinatenänderungen nach dem Vorbild der Konstruktion von Höhenlinien geschehen. Ändern sich die Konstanten der affinen Abbildung nur wenig von Dreieck zu Dreieck, so kommt das Verfahren im wesentlichen auf eine Ausrundung der einer affinen Übertragung entsprechenden, schwach geknickten, parallelen Streckenzüge gleicher Koordinatenänderungen hinaus. Die Verschiebungen der laufenden Punkte werden wieder unmittelbar aus der Zeichnung abgelesen.

Bei diesem graphischen Verfahren können die einzelnen Verzerrungen nur durch allgemein gültige Differentialformeln — siehe die Ausdrücke (133), (134) — mit Hilfe der numerisch bekannten Koordinatenänderungen und der Koordinatenunterschiede ausgedrückt werden.

## II. Projektive Übertragung.

Liegen nur zwei Dreiecke vor, so ist durch dieselben, da sie zusammen nur ein einziges Viereck bilden, eine eindeutige projektive Übertragung für das ganze Übertragungsgebiet bestimmt. Für mehr als zwei Dreiecke wird eine für das ganze Gebiet gemeinsame, grundsätzlich beliebige Gerade zu Hilfe genommen, welche jedes Dreieck so zu einem Viereck ergänzt, daß auch auf jeder Dreiecksseite eine eindeutige Punktbestimmung stattfindet, gleichgültig, welches der beiden Nachbardreiecke dazu benutzt wird.

a) Rechnerischer Weg für beliebig große Koordinatenänderungen. Eine projektive Abbildung, in welcher gerade Linien als solche erhalten bleiben (kollinear!), wird durch Übertragungsgleichungen



$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1}, \quad \dots (66) \quad y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + 1} \quad \dots (67)$$

vermittelt. Für  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 0$  ergibt sich als Sonderfall die affine Abbildung. Im allgemeinen Fall sind die Koordinaten  $x$ ,  $y$  eines Neupunktes gebrochene rationale Funktionen der Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  des zugehörigen Altpunktes mit gleichen Nennern. Es treten 8 zunächst unbekannte Konstanten auf. Sie können aus 8 linearen Gleichungen bestimmt werden, wenn die Koordinaten von vier Punkten sowohl im Altsystem wie auch im Neusystem bekannt sind.

Als vollständige Koordinatenänderungen ergeben sich die Ausdrücke

$$dx = x - x' = \frac{(a_1 - 1)x' + b_1 y' - a_3 x'^2 - b_3 x' y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1}, \quad \dots (68)$$

$$dy = y - y' = \frac{a_2 x' + (b_2 - 1)y' - b_3 y'^2 - a_3 x' y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + 1}, \quad \dots (69)$$

welche — wie auch (66) und (67) — für jede beliebige Lage eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems und eine beliebige gegenseitige Lage der Alt- und Neufigur ihre Form beibehalten. Bei Verschiebungen ändern sich lediglich die Konstanten.

Setzt man

$$x'' = x' - x_1', \quad y'' = y' - y_1', \quad \dots (70)$$

$$x''' = x - x_1, \quad y''' = y - y_1, \quad \dots (71)$$

was einer Parallelverschiebung des Koordinatensystems in den neuen Ursprung  $P_1'$  bzw.  $P_1$  entspricht, so treten an Stelle von (66), (67) die Gleichungen

$$x''' = \frac{A_1 x'' + B_1 y'' + C_1}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}, \quad \dots (72) \quad y''' = \frac{A_2 x'' + B_2 y'' + C_2}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}. \quad \dots (73)$$

Diese Ausdrücke gelten auch für die in den neuen Ursprung fallenden Punkte  $P_1'$ ,  $P_1$ ; es ist also

$$x_1''' = 0 = \frac{C_1}{1}, \quad y_1''' = 0 = \frac{C_2}{1}. \quad \dots (74)$$

Die Absolutglieder

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0 \quad \dots (75)$$

verschwinden und es ergeben sich für diese besondere Lage des Koordinatensystems die einfacheren Formen

$$x''' = \frac{A_1 x'' + B_1 y''}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}, \quad \dots (76) \quad y''' = \frac{A_2 x'' + B_2 y''}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}, \quad \dots (77)$$

deren 6 Koeffizienten  $A$ ,  $B$  aus

$$x_2'' y_2'', x_3'' y_3'', x_4'' y_4'' \quad \text{und} \quad x_2''' y_2''', x_3''' y_3''', x_4''' y_4'''$$

linear zu bestimmen sind.

Der Zusammenhang zwischen den hier neu auftretenden Koeffizienten und denjenigen für eine allgemeine Lage des Koordinatensystems wird durch die Beziehungen



$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1 - a_3 x_1}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, & B_1 &= \frac{b_1 - b_3 x_1}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, \\ A_2 &= \frac{a_2 - a_3 y_1}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, & B_2 &= \frac{b_2 - b_3 y_1}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, \\ A_3 &= \frac{a_3}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, & B_3 &= \frac{b_3}{a_3 x'_1 + b_3 y'_1 + 1}, \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1 + A_3 x_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, & b_1 &= \frac{B_1 + B_3 x_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, \\ a_2 &= \frac{A_2 + A_3 y_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, & b_2 &= \frac{B_2 + B_3 y_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, \\ a_3 &= \frac{A_3}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, & b_3 &= \frac{B_3}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1} \end{aligned} \right\} \dots (79)$$

vermittelt. Die alten Absolutglieder sind:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_1 - (A_1 + A_3 x_1) x'_1 - (B_1 + B_3 x_1) y'_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}, \\ c_2 &= \frac{y_1 - (A_2 + A_3 y_1) x'_1 - (B_2 + B_3 y_1) y'_1}{1 - A_3 x'_1 - B_3 y'_1}. \end{aligned} \dots (80)$$

Man kann die Koeffizienten A, B auch unter Mitbenutzung von Dreiecksflächen ausdrücken. Versteht man unter  $\Delta'_{eik}$ ,  $\Delta_{eik}$  und  $\Delta'_{x'ik}$ ,  $\Delta y'_{ik}$ ,  $\Delta x_{ik}$ ,  $\Delta y_{ik}$  einander entsprechende Dreiecksflächen  $P'_e P'_i P'_k$ ,  $P_e P_i P_k$  und Koordinatenunterschiede im Altsystem ( $x'$ ,  $y'$ ) und Neusystem ( $x$ ,  $y$ ) und setzt man zur Abkürzung

$$C_3 = 2 \Delta'_{123} \cdot \Delta'_{124} \cdot \Delta'_{134} \frac{\Delta_{234}}{\Delta'_{234}}, \dots (81)$$

so gelten folgende Beziehungen<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{C_3} \{ -\Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta y'_{12} \Delta x_{13} + \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta y'_{13} \Delta x_{12} \}, \\ A_2 &= \frac{1}{C_3} \{ -\Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta y'_{12} \Delta y_{13} + \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta y'_{13} \Delta y_{12} \}, \\ A_3 &= -\frac{1}{C_3} \{ \Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta y'_{12} - \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta y'_{13} + \Delta'_{124} \Delta'_{134} \frac{\Delta_{234}}{\Delta'_{234}} \Delta y'_{23} \}, \end{aligned} \right\} \dots (82)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{C_3} \{ \Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta x'_{12} \Delta x_{13} - \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta x'_{13} \Delta x_{12} \}, \\ B_2 &= \frac{1}{C_3} \{ \Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta x'_{12} \Delta y_{13} - \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta x'_{13} \Delta y_{12} \}, \\ B_3 &= \frac{1}{C_3} \{ \Delta_{124} \Delta'_{134} \Delta x'_{12} - \Delta_{134} \Delta'_{124} \Delta x'_{13} + \Delta'_{124} \Delta'_{134} \frac{\Delta_{234}}{\Delta'_{234}} \Delta x'_{23} \}. \end{aligned} \right\} \dots (83)$$

<sup>2)</sup> Sie folgen durch Koeffizientenvergleich mit den Formeln (68<sup>1</sup>), (68<sup>2</sup>), (69<sup>1</sup>) und (69<sup>2</sup>) in „Projektives Vorwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung“ (Nachrichten a. d. Reichsvermessungsdienst 1942, Seite 368).



Aus (76), (77) ergeben sich die unvollständigen Koordinatenänderungen

$$dx' = x''' - x'' = dx - dx_1 = \frac{(A_1 - 1)x'' + B_1 y'' - A_3 x''^2 - B_3 x'' y''}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}, \quad \dots (84)$$

$$dy' = y''' - y'' = dy - dy_1 = \frac{A_2 x'' + (B_2 - 1)y'' - B_3 y''^2 - A_3 x'' y''}{A_3 x'' + B_3 y'' + 1}. \quad \dots (85)$$

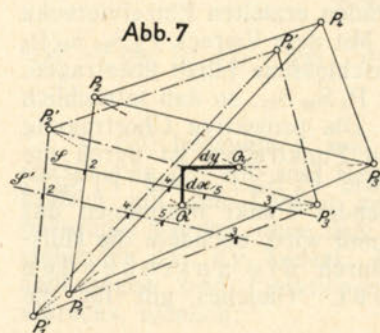
Die vollständigen Koordinatenänderungen im ursprünglichen System sind schließlich

$$dx = dx_1 + dx', \quad dy = dy_1 + dy'. \quad \dots (86)$$

Es sei noch bemerkt, daß die in (73) bis (85) auftretenden Koeffizienten A, B mit den früher in (8) verwendeten gleichnamigen Koeffizienten zur affinen Übertragung nicht identisch sind.

Der vorstehend beschriebene rechnerische Weg kommt als viel zu umständlich für praktische Zwecke kaum in Betracht!

b) Zeichnerische Lösung nach dem Vierstrahlenverfahren (Streifenmethode). Zunächst seien nur zwei ein einziges Viereck  $P_1 P_2 P_3 P_4$  bildende Dreiecke vorhanden.



Man trägt erst in der Netzfigur von den Altpunkten  $P'_1, \dots, P'_4$  aus die jetzt wieder als klein vorausgesetzten Koordinatenänderungen  $dx_1, dy_1, \dots, dx_4, dy_4$  in einem geeigneten Maßstab ( $M = 1:50$  bis  $M = 1:20$ ) ab und kommt so auf die Punkte  $P_1, \dots, P_4$ . Nunmehr werden mittels des bekannten Streifenverfahrens die Altpunkte  $Q'$  in die Neufigur übertragen, wobei je zwei entsprechende Eckpunkte der beiden Vierecke als Mittelpunkte der projektiven Vierstrahlen Verwendung finden. Der mit Kontrolle übertragene Punkt  $Q$  steht von  $Q'$  um die gesuchten Gesamtkoordinatenänderungen  $dx, dy$  ab. Sie sind unmittelbar der Zeichnung zu entnehmen; natürlich im gleichen Maßstab, in dem vorher die Werte  $dx_1, dy_1, \dots, dx_4, dy_4$  abgetragen worden sind.

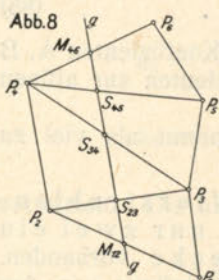
Dadurch, daß die Koordinatenänderungen  $dx_1, dy_1, \dots, dx_4, dy_4$  in einem anderen Maßstab wie die Altfigur aufgetragen werden, kommt in die abgeleitete Neufigur  $P_1 \dots P_4$  eine leichte Verzerrung herein, welche in den der Zeichnung entnommenen  $dx, dy$  der laufenden Punkte kleine Ungenauigkeiten verursacht. Diese bleiben jedoch praktisch bedeutungslos, solange die gezeichneten  $dx, dy$  im Vergleich zu den Dreiecksseiten der Zeichnung sehr klein bleiben.<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> Handelt es sich — was für die vorliegende Aufgabe nicht in Frage kommt — um Koordinatenänderungen von der Größenordnung einer Dreiecksseite, so müssen zur Ableitung der Neufigur  $P_1 \dots P_4$  aus der vorher aufgetragenen Altfigur die Koordinatenänderungen  $dx_1, dy_1, \dots, dx_4, dy_4$  natürlich im Maßstab der Altfigur gezeichnet werden.



Liegen mehr als zwei Dreiecke vor, so braucht man zur Wahrung der Eindeutigkeit auf den gemeinsamen Dreiecksseiten eine für das ganze Gebiet gemeinsame Hilfsgerade  $g$ , welche jedes Einzeldreieck durch Abschneiden oder Hinzufügen eines Dreiecks zum Viereck macht und eine eindeutige Übertragung der auf diesen Seiten liegenden Punkte ermöglicht.

Der Geraden  $g'$  im Altsystem kann an sich eine beliebige Gerade  $g$  in der Neufigur zugeordnet werden. Bei einer einfachen Kette liegt es nahe,  $g'$  durch die Mittelpunkte — hier  $M'_{12}$  und  $M'_{45}$  — der Kettenendseiten der



Altfigur und  $g$  durch die entsprechenden Mittelpunkte der Neuseiten gehen zu lassen. In diesem Fall werden die Kettenendseiten beider Figuren — aber auch nur diese — ähnlich ineinander abgebildet. Will man den vorhin für den Fall zweier Dreiecke beschriebenen zeichnerischen Weg beschreiten, so müssen erst die Koordinatenänderungen der Schnittpunkte von  $g$  und  $g'$  mit sämtlichen in Betracht kommenden Dreiecksseiten in beiden Systemen rechnerisch oder viel einfacher zeichnerisch ermittelt werden, damit die Koordinatenänderungen für alle vier Ecken der bei Benutzung der Hilfsgeraden erzielten Einzelvierecke bekannt sind und aufgetragen werden können. Mit dem Viereck  $P_3 S_{34} S_{45} P_5$  z. B. wird nicht nur der von seinen Seiten umschlossene Inhalt übertragen, sondern auch noch das abgeschnittene Dreieck  $P_4 S_{45} S_{34}$ , so daß tatsächlich das ganze Dreieck  $P_3 P_4 P_5$  abgebildet wird. Die projektive Übertragung der auf den Seiten  $P_3 P_4$  und  $P_4 P_5$  liegenden Punktreihen ist durch die Punkttupel  $P_3 S_{34} P_4$  und  $P_3 S_{34} P_4$  sowie  $P_4 S_{45} P_5$  und  $P_4 S_{45} P_5$  (je zwei derselben und ein zugehöriger laufender Punkt bestimmen das gleiche Doppelverhältnis!) eindeutig bestimmt und wird, nachdem die Hilfsgerade in beiden Systemen festgelegt ist, durch die anstoßenden Figuren gar nicht mehr beeinflusst. Gleiches gilt für die übrigen Dreiecksseiten.

c) Rechnerische Übertragung für sehr kleine Koordinatenänderungen beim Vorliegen von sehr vielen Punkten.<sup>4)</sup> Liegen sehr kleine Koordinatenänderungen  $dx$ ,  $dy$  in dem Sinne vor, daß ihr Verhältnis zu den Dreiecksseiten  $s$  wie schon in (26) als eine kleine Größe 1. Ordnung ( $G^1$ ) aufgefaßt werden kann, so ergeben sich zur Übertragung des laufenden Punktes  $P'_i$  die kleinen vollständigen Koordinatenänderungen in der Form:

$$dx_i = dx_1 + dx'_i = dx_1 + a_{11} x_i''^2 + 2 a_{12} x_i'' y_i'' + 2 a_{13} x_i'' + 2 a_{23} y_i'', \dots \quad (87)$$

$$dy_i = dy_1 + dy'_i = dy_1 + b_{22} y_i''^2 + 2 b_{12} x_i'' y_i'' + 2 b_{13} x_i'' + 2 b_{23} y_i'', \dots \quad (88)$$

$$\text{wobei} \quad a_{11} = 2 b_{12}, \quad 2 a_{12} = b_{22} \quad \dots \quad (89)$$

ist und die folgenden Abkürzungen verwendet wurden.

<sup>4)</sup> Siehe dazu Abschnitt VII in „Projektives Vorwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung“ (Nachrichten a. d. Reichsvermessungsdienst 1942, Seite 360–371).



$$x_i'' = x_i' - x_1', \quad y_i'' = y_i' - y_1', \quad k = \frac{1}{2 \Delta_{123} \Delta_{124} \Delta_{134}}, \quad \dots (90)$$

$$a_{11} = 2 b_{12} = k \left[ y_2'' \Delta_{134} d\Delta_{124} - y_3'' \Delta_{124} d\Delta_{134} + (y_3'' - y_2'') \frac{\Delta_{124} \Delta_{134}}{\Delta_{234}} d\Delta_{234} \right], \quad \dots (91)$$

$$2 a_{12} = b_{22} = -k \left[ x_2'' \Delta_{134} d\Delta_{124} - x_3'' \Delta_{124} d\Delta_{134} + (x_3'' - x_2'') \frac{\Delta_{124} \Delta_{134}}{\Delta_{234}} d\Delta_{234} \right], \quad \dots (92)$$

$$2 a_{13} = k \left[ \Delta_{124} \Delta_{134} (y_3'' dx_2'' - y_2'' dx_3'') - x_3'' y_2'' \Delta_{134} d\Delta_{124} + x_2'' y_3'' \Delta_{124} d\Delta_{134} - 2 \frac{\Delta_{123} \Delta_{124} \Delta_{134}}{\Delta_{234}} d\Delta_{234} \right], \quad \dots (93)$$

$$2 a_{23} = -k [\Delta_{124} \Delta_{134} (x_3'' dx_2'' - x_2'' dx_3'') - x_2'' x_3'' (\Delta_{134} d\Delta_{124} - \Delta_{124} d\Delta_{134})], \quad \dots (94)$$

$$2 b_{13} = k [\Delta_{124} \Delta_{134} (y_3'' dy_2'' - y_2'' dy_3'') - y_2'' y_3'' (\Delta_{134} d\Delta_{124} - \Delta_{124} d\Delta_{134})], \quad \dots (95)$$

$$2 b_{23} = -k \left[ \Delta_{124} \Delta_{134} (x_3'' dy_2'' - x_2'' dy_3'') - x_2'' y_3'' \Delta_{134} d\Delta_{124} + x_3'' y_2'' \Delta_{124} d\Delta_{134} + 2 \frac{\Delta_{123} \Delta_{124} \Delta_{134}}{\Delta_{234}} d\Delta_{234} \right], \quad \dots (96)$$

$$dx_i'' = dx_i' = dx_i - dx_1, \quad dy_i'' = dy_i' = dy_i - dy_1, \\ d\Delta_{eik} = \Delta_{eik} - \Delta'_{eik}. \quad \dots (97)$$

In (97) bedeuten  $\Delta'$  und  $\Delta$  wieder zwei einander entsprechende Dreiecksflächen der Alt- und Neufigur. Vorstehende Koeffizienten (90) bis (96) können mit den Längen und Flächen der Altfigur oder der Neufigur berechnet werden, ohne daß sich der Genauigkeitsgrad der unter (87), (88) stehenden  $dx_i$ ,  $dy_i$  ändert. Die in den Koeffizienten enthaltenen Flächenänderungen sind Funktionen der Eckpunktsverschiebungen des Grundvierecks, nämlich:

$$d\Delta_{123} = \frac{1}{2} [y_3'' (dx_2 - dx_1) - y_2'' (dx_3 - dx_1) - x_3'' (dy_2 - dy_1) + x_2'' (dy_3 - dy_1)], \quad \dots (98)$$

$$d\Delta_{124} = \frac{1}{2} [y_4'' (dx_2 - dx_1) - y_2'' (dx_4 - dx_1) - x_4'' (dy_2 - dy_1) + x_2'' (dy_4 - dy_1)], \quad \dots (99)$$

$$d\Delta_{134} = \frac{1}{2} [y_4'' (dx_3 - dx_1) - y_3'' (dx_4 - dx_1) - x_4'' (dy_3 - dy_1) + x_3'' (dy_4 - dy_1)], \quad \dots (100)$$

$$d\Delta_{234} = \frac{1}{2} [(y_4'' - y_2'') (dx_3 - dx_2) - (y_3'' - y_2'') (dx_4 - dx_2) - (x_4'' - x_2'') (dy_3 - dy_2) + (x_3'' - x_2'') (dy_4 - dy_2)]. \quad \dots (101)$$

Da es sich um kleine Koordinatenänderungen handelt, so können die ganzen Berechnungen mit dem Rechenschieber durchgeführt werden, so daß sich bei einer großen Zahl von Übertragungspunkten der oben beschriebene Weg lohnen kann.



Die im allgemeinen Fall (endliche Koordinatenänderungen) in den Gleichungen (66), (67) und (76), (77) auftretenden Konstanten  $a_i, b_i, c_i, A_i, B_i$  besitzen in dem Sonderfall sehr kleiner Koordinatenänderungen besondere Werte  $a'_i, b'_i, c'_i, A'_i, B'_i$ , für welche bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung die folgenden Beziehungen bestehen.

Wegen  $\frac{dx}{s}, \frac{dy}{s} = G^1$  folgt zunächst aus (82) und (83)

$$\begin{aligned} A'_1 &= 1 + G^1, B'_1 = G^1, A'_2 = G^1, B'_2 = 1 + G^1, \\ A'_3 &= \frac{1}{s} G^1, B'_3 = \frac{1}{s} G^1. \end{aligned} \quad \dots (102)$$

Damit ergeben sich aus (79) und (80) die Ausdrücke

$$\begin{aligned} a'_1 &= A'_1 + 2 A'_3 x_1 + B'_3 y_1 + G^2 = 1 + G^1, \quad b'_1 = B'_1 + B'_3 x_1 + G^2 = G^1, \\ c'_1 &= dx_1 - (A'_1 - 1 + A'_3 x_1) x_1 - (B'_1 + B'_3 x_1) y_1 + s G^2 = s G^1 \quad \dots (103) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_2 &= A'_2 + A'_3 y_1 + G^2 = G^1, \quad b'_2 = B'_2 + 2 B'_3 y_1 + A'_3 x_1 + G^2 = 1 + G^1, \\ c'_2 &= dy_1 - (A'_2 + A'_3 y_1) x_1 - (B'_2 - 1 + B'_3 y_1) y_1 + s G^2 = s \cdot G^1 \quad \dots (104) \end{aligned}$$

$$a'_3 = A'_3 + \frac{1}{s} G^2 = \frac{1}{s} G^1, \quad b'_3 = B'_3 + \frac{1}{s} G^2 = \frac{1}{s} G^1. \quad \dots (105)$$

Durch Vergleich der aus (84), (87) bzw. (85), (88) für die Teiländerungen  $dx', dy'$  folgenden identischen Ausdrücke ergibt sich weiterhin

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 2 b_{12} = -A'_3 = \frac{1}{s} G^1, & 2 a_{12} &= b_{22} = -B'_3 = \frac{1}{s} G^1, \\ 2 a_{13} &= A'_1 - 1 = G^1, & 2 a_{23} &= B'_1 = G^1, & 2 b_{13} &= A'_2 = G^1, \\ 2 b_{23} &= B'_2 - 1 = G^1 \\ \text{bzw.} & \quad A'_1 = 1 + 2 a_{13}, & B'_1 &= 2 a_{23}, & A'_2 &= 2 b_{13}, \\ B'_2 &= 1 + 2 b_{23}, & A'_3 &= -a_{11} = -2 b_{12}, & B'_3 &= b_{22} = -2 a_{12}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (106)$$

und aus (79), (80), (106) folgt schließlich noch

$$\begin{aligned} a'_1 &= 1 + 2 a_{13} - 2 a_{11} x_1 - b_{22} y_1 + G^2, \quad b'_1 = 2 a_{23} - b_{22} x_1 + G^2, \\ c'_1 &= dx_1 - (2 a_{13} - a_{11} x_1) x_1 - (2 a_{23} - b_{22} x_1) y_1 + s \cdot G^2, \quad \dots (107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_2 &= 2 b_{13} - a_{11} y_1 + G^2, \quad b'_2 = 1 + 2 b_{23} - 2 b_{22} y_1 - a_{11} x_1 + G^2, \\ c'_2 &= dy_1 - (2 b_{13} - a_{11} y_1) x_1 - (2 b_{23} - b_{22} y_1) y_1 + s \cdot G^2. \quad \dots (108) \end{aligned}$$

d) Verwendung von Kurven gleicher Koordinatenänderungen. Graphisch analytische Lösung und Kurvenermittlung durch Interpolation. Ist eine sehr große Anzahl von Punkten zu übertragen, so wird wieder die Zeichnung von Linien gleicher Koordinatenänderungen zweckmäßig, obgleich diese Orte für die projektive Übertragung keine geraden Linien, sondern Hyperbeln sind.



Aus (84) und (85) erhält man beim allgemeinen Fall endlicher Koordinatenänderungen für die geometrischen Orte  $H^x$ ,  $H^y$  gleicher Teiländerungen<sup>5)</sup>  $dx'$ ,  $dy'$  die Beziehungen

$$H^x \dots \left. \begin{aligned} & \frac{A_3}{a_{11}} x''^2 + \frac{B_3}{2 a_{12}} x'' y'' + \frac{(1 - A_1 + A_3 dx')}{2 a_{13}} x'' \\ & + \frac{(-B_1 + B_3 dx')}{2 a_{23}} y'' + \frac{dx'}{a_{33}} = 0, \end{aligned} \right\} \dots (109)$$

$$H^y \dots \left. \begin{aligned} & \frac{A_2}{a_{11}} x''^2 + \frac{A_3}{2 a_{12}} x'' y'' + \frac{B_3}{2 a_{22}} y''^2 + \frac{(-A_2 + A_3 dy')}{2 a_{13}} x'' \\ & + \frac{(1 - B_2 + B_3 dy')}{2 a_{23}} y'' + \frac{dy'}{a_{33}} = 0, \end{aligned} \right\} \dots (110)$$

welche sich in die allgemeine Form der Gleichung 2. Grades:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 \quad \dots (111)$$

einreihen lassen.<sup>6)</sup> Mit den Konstanten von (109) und (110) ergeben sich für den entscheidenden Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \quad \dots (112)$$

die stets negativen Werte  $-\frac{1}{4} B_3^2$  bzw.  $-\frac{1}{4} A_3^2$ . Die durch (109), (110) dargestellten Linien  $H^x$ ,  $H^y$  gleicher Koordinatenänderungen sind also Hyperbeln<sup>7)</sup> und für wechselnde  $dx'$ ,  $dy'$  zwei Hyperbelscharen. Für die Mittelpunktskoordinaten der Hyperbel  $H^x$  gleicher  $dx'$  erhält man die Ausdrücke<sup>8)</sup>

$$x_m'' = \frac{a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{B_1}{B_3} - dx', \quad \dots (113)$$

$$y_m'' = \frac{a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = -2 \cdot \frac{A_3 B_1}{B_3^2} + \frac{A_1 - 1}{B_3} + \frac{A_3}{B_3} dx' \quad \dots (114)$$

und für die Mittelpunktskoordinaten  $a_m''$ ,  $o_m''$  der Hyperbel  $H^y$  gleicher  $dy'$  findet man

$$a_m'' = -2 \cdot \frac{A_2 B_3}{A_3^2} + \frac{B_2 - 1}{A_3} + \frac{B_3}{A_3} dy', \quad o_m'' = \frac{A_2}{A_3} - dy'. \quad \dots (115)$$

<sup>5)</sup> Sie sind auch Orte gleicher Gesamtänderungen — mit anderen Zahlenwerten —, da sich die Gesamtänderungen von den Teiländerungen nur um die gleichbleibenden Werte  $dx_1$ ,  $dy_1$  unterscheiden.

<sup>6)</sup> Die Koeffizienten von (111) sind nicht mit den gleichnamigen in (87) zu verwechseln!

<sup>7)</sup> Für  $B_3 = 0$  bzw.  $A_3 = 0$  sind es Parabeln, deren Achsen parallel zur Ordinaten- bzw. zur Abszissenachse liegen.

<sup>8)</sup>  $x_m''$ ,  $y_m''$  sind nicht mit den gleichnamigen Größen anderer Bedeutung in (131), (132) zu verwechseln!



Die Lage der Mittelpunkte hängt von  $dx'$  bzw.  $dy'$  ab; die zu verschiedenen Koordinatenänderungen gehörigen Hyperbeln besitzen daher auch verschiedene Mittelpunkte. Für die zu den Sonderwerten  $dx' = 0$ ,  $dy' = 0$  gehörigen Hyperbeln  $H_0^x$ ,  $H_0^y$  sind die Mittelpunktskoordinaten:

$$x''_{m0} = \frac{B_1}{B_3}, \quad y''_{m0} = -2 \cdot \frac{A_3 B_1}{B_3^2} + \frac{A_1 - 1}{B_3}, \quad \dots (116)$$

$$\text{bzw.} \quad a''_{m0} = -\frac{2 A_2 B_3}{A_3^2} + \frac{B_2 - 1}{A_3}, \quad o''_{m0} = \frac{A_2}{A_3}. \quad \dots (117)$$

Da zu  $P'_1$  die Koordinaten  $x''_1 = 0$ ,  $y''_1 = 0$  gehören, welche in Verbindung mit  $dx'_1 = 0$ ,  $dy'_1 = 0$  die Gleichungen (109), (110) erfüllen, so müssen die den Koordinatenänderungen Null entsprechenden Orte  $H_0^x$ ,  $H_0^y$  durch  $P'_1$  hindurchgehen.

Zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen  $\varphi$  (Richtungswinkel!) und der Achsenrichtungen  $\alpha$  dienen die Beziehungen

$$a_{11} + 2 a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi = 0, \quad \dots (118)$$

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}}. \quad \dots (119)$$

Für die Hyperbeln  $H^x$  ist nach (109)  $a_{22}$  Null und für die Kurven  $H^y$  verschwindet  $a_{11}$ . Bei Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man zur Ermittlung der Asymptoten- und Achsrichtungen:

$$\text{für } H^x \dots \operatorname{tg} \varphi_1^x = \infty, \operatorname{tg} \varphi_2^x = -\frac{A_3}{B_3}, \quad \dots (120) \quad \operatorname{tg} 2 \alpha^x = \frac{B_3}{A_3}, \quad \dots (121)$$

$$\text{bzw. für } H^y \dots \operatorname{tg} \varphi_1^y = 0, \operatorname{tg} \varphi_2^y = -\frac{A_3}{B_3}, \quad \dots (122) \quad \operatorname{tg} 2 \alpha^y = -\frac{A_3}{B_3}. \quad \dots (123)$$

Diese Ausdrücke sind von den Koordinatenänderungen unabhängig. Alle Hyperbeln je einer Schar besitzen daher gleichgerichtete Asymptoten und gleichgerichtete Hauptachsen. Außerdem stehen die Asymptotenrichtungen  $\varphi_1^x$ ,  $\varphi_1^y$  senkrecht zueinander und liegen parallel zur Ordinaten- bzw. zur Abszissenachse. Die durch den Zeiger 2 gekennzeichneten Richtungen  $\varphi_2^x$  und  $\varphi_2^y$  hingegen sind zueinander parallel.  $\operatorname{tg} 2 \alpha^x$  und  $\operatorname{tg} 2 \alpha^y$  besitzen entgegengesetztes Vorzeichen und sind im übrigen reziproke Werte. Die Richtungen  $2 \alpha^x$ ,  $2 \alpha^y$  stehen daher senkrecht zueinander und die Achsen beider Kurvenscharen schließen einen Winkel von  $45^\circ$  ein.

Für die großen Halbachsen der Hyperbeln erscheinen die Ausdrücke

$$a^x = \sqrt{2 \frac{(A_1 B_3 - A_3 B_1) x''_m - B_1}{B_3 (A_3 \pm \sqrt{A_3^2 + B_3^2})}}, \quad \dots (124)$$

$$a^y = \sqrt{2 \frac{(A_3 B_2 - A_2 B_3) o''_m - A_2}{A_3 (B_3 \pm \sqrt{A_3^2 + B_3^2})}}. \quad \dots (125)$$



In beiden Kurvenscharen ist je eine Hyperbel  $\dot{H}^x, \dot{H}^y$ , welche in zwei Gerade zerfällt. Betrachtet man sie als Hyperbeln zu den Achsenlängen Null, so ergeben sich aus (124), (125) und (113) bis (115) die Schnittpunktskoordinaten dieser Geradenpaare mit den Richtungen  $\varphi_1^x, \varphi_2^x$  und  $\varphi_1^y, \varphi_2^y$  zu

$$\dot{H}^x \dots \dot{x}_m'' = \frac{B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1}, \quad \dot{y}_m'' = - \frac{A_3 B_1}{B_3^2} + \frac{1}{B_3} \left\{ A_1 - 1 - \frac{A_3 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \right\}, \quad \dots (126)$$

$$\dot{H}^y \dots \dot{y}_m'' = \frac{A_2}{A_3 B_2 - A_2 B_3}, \quad \dot{x}_m'' = - \frac{A_2 B_3}{A_3^2} + \frac{1}{A_3} \left\{ B_2 - 1 - \frac{A_2 B_3}{A_3 B_2 - A_2 B_3} \right\}. \quad \dots (127)$$

Die zugehörigen gleichbleibenden Koordinatenänderungen folgen aus (113) und (115) zu

$$d\dot{x}' = \frac{B_1}{B_3} - \dot{x}_m'' \text{ für } \dot{H}^x \text{ bzw. } d\dot{y}' = \frac{A_2}{A_3} - \dot{y}_m'' \text{ für } \dot{H}^y. \quad \dots (128)$$

Zur praktischen Verwertung dieser Beziehungen könnte folgender Weg eingeschlagen werden. Nachdem aus (82), (83) oder auf anderem Wege die Konstanten  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$  berechnet worden sind, erhält man aus (113) bis (115) die Hyperbelmittelpunkte, welche aufgetragen werden. Die Gleichungen (120) bis (123) ergeben die Richtungen der Achsen und der Asymptoten, während (124) und (125) die großen Halbachsen liefern. Zeichnet man mit diesen Daten die Asymptoten und die Hyperbelscheitelpunkte ein, so kann man in einfacher Weise weitere Punkte der Kurven  $\dot{H}^x, \dot{H}^y$  finden; etwa aus dem Satz, daß die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten liegenden Stücke einer Sekante gleich lang sind.

Leider treffen die notwendigen praktischen Voraussetzungen für diese Art der Konstruktion meist nicht zu: die Hyperbelmittelpunkte, die Kurvenscheitel und die Asymptoten oder doch einige von diesen Gebilden werden nicht in die Zeichnung fallen.

Dagegen bleibt es praktisch immer möglich, für eine geringere Zahl (20 bis 30) von gleichmäßig verteilten Punkten, welche nach dem Streifenverfahren übertragen werden, die Gesamtkoordinatenänderungen  $dx, dy$  abzulesen, sie den Punkten beizuschreiben und durch Interpolation sofort die geometrischen Örter  $\dot{H}^x, \dot{H}^y$  gleicher Gesamtkoordinatenänderungen zu zeichnen.

Die Zeichnung dieser Örter wird durch Beachtung der vorhin angegebenen besonderen Asymptotenrichtungen erleichtert.

e) Verzerrungen der projektiven Übertragung bei kleinen Koordinatenänderungen. Aus (87) und (88) erhält man für die Änderungen der Koordinatenunterschiede mit beliebigen Endpunkten die Ausdrücke:



$$\begin{aligned} d\Delta x_{ik} &= \Delta x_{ik} - \Delta x'_{ik} = (x_k - x_i) - (x'_k - x'_i) \\ &= 2s_{ik} \{ (a_{11}x''_m + a_{12}y''_m + a_{13}) \cos \alpha_{ik} + (a_{12}x''_m + a_{23}) \sin \alpha_{ik} \}, \dots (129) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Delta y_{ik} &= \Delta y_{ik} - \Delta y'_{ik} = (y_k - y_i) - (y'_k - y'_i) \\ &= 2s_{ik} \{ (b_{23}y''_m + b_{12}x''_m + b_{23}) \sin \alpha_{ik} + (b_{12}y''_m + b_{13}) \cos \alpha_{ik} \}, \dots (130) \end{aligned}$$

Hierin sind<sup>9)</sup>

$$x''_m \approx x'''_m = \Delta x_{1m} = \frac{1}{2} (\Delta x_{1i} + \Delta x_{1k}) = \frac{1}{2} (x'_i + x'_k), \dots (131)$$

$$y''_m \approx y'''_m = \Delta y_{1m} = \frac{1}{2} (\Delta y_{1i} + \Delta y_{1k}) = \frac{1}{2} (y'_i + y'_k) \dots (132)$$

die auf  $P_1'$  bzw.  $P_1$  bezogenen Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke  $s_{ik}$ .

Die Einführung der unter (129), (130) stehenden Änderungen in die von der Übertragungsart unabhängigen, allgemein gültigen Differentialausdrücke:

$$\text{Verzerrungsverhältnis } v = \frac{s-s'}{s'} = \frac{1}{s} \{ d\Delta x \cdot \cos \alpha + d\Delta y \cdot \sin \alpha \}, \dots (133)$$

$$\text{Richtungsverzerrung } \varrho = \alpha - \alpha' = -\frac{1}{s} \{ d\Delta x \cdot \sin \alpha - d\Delta y \cdot \cos \alpha \} \dots (134)$$

führt zu folgenden Ergebnissen:

#### 1. Verzerrungsverhältnis.

$$v = \frac{1}{2} \{ [b_{22}x''_m + a_{11}y''_m + 2(a_{23} + b_{13})] \sin 2\alpha + [a_{11}x''_m - b_{22}y''_m + 2(a_{13} - b_{23})] \cos 2\alpha + [3a_{11}x''_m + 3b_{22}y''_m + 2(a_{13} + b_{23})] \}, \dots (135)$$

$$v_\alpha + v_{\alpha+90^\circ} = 3a_{11}x''_m + 3b_{22}y''_m + 2(a_{13} + b_{23}) = \text{konstant!} \dots (136)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha^m = \frac{b_{22}x''_m + a_{11}y''_m + 2(a_{23} + b_{13})}{a_{11}x''_m - b_{22}y''_m + 2(a_{13} - b_{23})}, \dots (137)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\alpha^2} &= -2 \{ [b_{22}x''_m + a_{11}y''_m + 2(a_{23} + b_{13})] \sin 2\alpha \\ &\quad + [a_{11}x''_m - b_{22}y''_m + 2(a_{13} - b_{23})] \cos 2\alpha \}, \dots (138) \end{aligned}$$

$$v^m = \frac{1}{2} \{ [3a_{11}x''_m + 3b_{22}y''_m + 2(a_{13} + b_{23})] \pm \sqrt{[b_{22}x''_m + a_{11}y''_m + 2(a_{23} + b_{13})]^2 + [a_{11}x''_m - b_{22}y''_m + 2(a_{13} - b_{23})]^2} \} \dots (139)$$

Setzt man in (135)  $v = 0$ , so ergibt sich bei kleinen Koordinatenänderungen die Gleichung für die Achse  $s$  der Perspektivität

$$\left. \begin{aligned} y'' &= -\frac{a_{11}}{b_{22}} \cdot x'' + \frac{1}{b_{22}(a_{11}^2 + b_{22}^2)} [2a_{11}b_{22}(a_{23} + b_{13}) - 2(a_{13}b_{22}^2 + b_{23}a_{11}^2)] \\ &= -\frac{A'_3}{B'_3} \cdot x'' - \frac{1}{B'_3(A'^2_3 + B'^2_3)} [A'_3B'_3(A'_2 + B'_1) - (A'_1 - 1)B'^2_3 - (B'_2 - 1)A'^2_3] \end{aligned} \right\} \dots (139^1)$$

Der relative Fehler dieser Ausdrücke kann  $G^1$  nicht überschreiten.

<sup>9)</sup>  $x''_m, y''_m$  dürfen nicht mit den gleichnamigen Größen anderer Bedeutung in (113), (114) verwechselt werden!



Fügt man zur rechten Seite von (139<sup>1</sup>) innerhalb der eckigen Klammer das Glied  $+k(a_{11}^2 + b_{22}^2)$  bzw.  $+k(A_3'^2 + B_3'^2)$  hinzu, so entsteht die Gleichung einer zu  $s$  Parallelen mit dem konstanten Verzerrungsverhältnis  $v = k$ .

## 2. Richtungsverzerrung.

$$\rho = -\frac{1}{2} \{a_{11}x_m'' - b_{22}y_m'' + 2(a_{13} - b_{23})\} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \{a_{11}y_m'' + b_{22}x_m'' + 2(a_{23} + b_{13})\} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \{a_{11}y_m'' - b_{22}x_m'' - 2(a_{23} - b_{13})\} \dots (140)$$

oder unabhängig von den Koordinaten:

$$\varrho = +p(a_{11} \cos \alpha + b_{22} \sin \alpha) - (a_{13} - b_{23}) \sin 2\alpha - 2(a_{23} \sin^2 \alpha - b_{13} \cos^2 \alpha) \dots (141)$$

Hierin ist  $p$  der Abstand des Ursprungs  $P_1''$  von der betrachteten Geraden. Er ist positiv, wenn  $P_1''$  links von der untersuchten, im Sinne  $\alpha$  genommenen Geraden liegt.

$$\rho_\alpha + \rho_{\alpha+90^\circ} = a_{11}y_m'' - b_{22}x_m'' - 2(a_{23} - b_{13}) = \text{konstant!} \dots (142)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\rho^m = -\frac{a_{11}x_m'' - b_{22}y_m'' + 2(a_{13} - b_{23})}{a_{11}y_m'' + b_{22}x_m'' + 2(a_{23} + b_{13})} \dots (143)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\alpha^2} = 2 \{ [a_{11}x_m'' - b_{22}y_m'' + 2(a_{13} - b_{23})] \sin 2\alpha - [a_{11}y_m'' + b_{22}x_m'' + 2(a_{23} + b_{13})] \cos 2\alpha \} \dots (144)$$

$$\rho^m = \frac{1}{2} \{ [a_{11}y_m'' - b_{22}x_m'' - 2(a_{23} - b_{13})] \pm \sqrt{[a_{11}x_m'' - b_{22}y_m'' + 2(a_{13} - b_{23})]^2 + [a_{11}y_m'' + b_{22}x_m'' + 2(a_{23} + b_{13})]^2} \} \dots (145)$$

Da die Richtungsverzerrung die gleiche bleibt für die unbegrenzte Gerade und für beliebig abgegrenzte Teile derselben, so kann man in dem ganzen Formelsystem (140) bis (145) die Koordinaten  $x_m''$ ,  $y_m''$  des Streckenmittelpunktes durch diejenigen irgendeines Geradenpunktes, also auch durch diejenigen des Streckenanfangspunktes ersetzen. Die Einführung des Nullwertes  $\varrho = 0 = \varrho_0$  in (140) ergibt die zugehörigen Richtungen. Sie sind reel, wenn der Bedingung

$$\varrho_{\min} < 0 < \varrho_{\max} \dots (145^1)$$

genügt wird.

## 3. Winkelverzerrung.

Gehören  $x_0''$ ,  $y_0''$  bzw.  $x_0'''$ ,  $y_0'''$  zum Scheitel  $P_0$  des bestimmten Winkels  $\beta$ , so folgt:

$$w = -\sin \beta \{ [a_{11}x_0'' - b_{22}y_0'' + 2(a_{13} - b_{23})] \cos 2\omega + [a_{11}y_0'' + b_{22}x_0'' + 2(a_{23} + b_{13})] \sin 2\omega \} \dots (146)$$

$$w_\omega + w_{\omega+90^\circ} = 0 \dots (147)$$

$$\operatorname{tg} 2\omega^m = \frac{a_{11}y_0'' + b_{22}x_0'' + 2(a_{23} + b_{13})}{a_{11}x_0'' - b_{22}y_0'' + 2(a_{13} - b_{23})} \dots (148)$$



$$\frac{d^2 w}{d\omega^2} = 4 \sin \beta \{ [a_{11} y_0'' + b_{22} x_0'' + 2(a_{23} + b_{13})] \sin 2\omega + [a_{11} x_0'' - b_{22} y_0'' + 2(a_{13} - b_{23})] \cos 2\omega \}, \quad \dots (149)$$

$$w^m = \pm \sqrt{[a_{11} x_0'' - b_{22} y_0'' + 2(a_{13} - b_{23})]^2 + [a_{11} y_0'' + b_{22} x_0'' + 2(a_{23} + b_{13})]^2}. \quad \dots (150)$$

Die Richtungswinkel  $\omega_1^0, \omega_2^0$  der dem Nullwert  $w_0 = 0$  entsprechenden Winkelhalbierenden ergeben sich aus

$$\operatorname{tg} 2\omega^0 = - \frac{a_{11} x_0'' - b_{22} y_0'' + 2(a_{13} - b_{23})}{a_{11} y_0'' + b_{22} x_0'' + 2(a_{23} + b_{13})} \quad \dots (151)$$

Die Winkelverzerrung  $w$  ist außer vom Faktor  $\sin \beta$  lediglich vom Ort des Winkelscheitels und von der Richtung  $\omega$  der Winkelhalbierenden abhängig.

Setzt man in (146)  $w = 0$ , so erhält man auch die Koordinaten eines winkeltreuen Punktes, nämlich

$$\left. \begin{aligned} x''^* &= -2 \cdot \frac{a_{11}(a_{13} - b_{23}) + b_{22}(a_{23} + b_{13})}{a_{11}^2 + b_{22}^2} = \frac{A_3(A_1' - B_2') + B_3'(A_2' + B_1')}{A_3'^2 + B_3'^2} \\ y''^* &= -2 \cdot \frac{a_{11}(a_{23} + b_{13}) - b_{22}(a_{13} - b_{23})}{a_{11}^2 + b_{22}^2} = \frac{A_3'(A_2' + B_1') - B_3'(A_1' - B_2')}{A_3'^2 + B_3'^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (151^1)$$

Ihr relativer Fehler kann  $G^1$  nicht überschreiten.

#### 4. Flächenverzerrung.

$$f_1 = F - F' = \{3a_{11}x_s'' + 3b_{22}y_s'' + 2(a_{13} + b_{23})\} F, \quad \dots (152)$$

wo  $x_s'', y_s''$  die Koordinaten des Flächenschwerpunktes sind.

Die verschiedenen Verzerrungsrichtungen der projektiven Übertragung besitzen die gleiche gegenseitige Lage wie bei der affinen Abbildung. Für die projektive Übertragung gelten daher ebenfalls die Gleichungen (57) sowie die für die affine Abbildung gezeichnete Richtungsrose der Verzerrungen.

### III. Übertragung mit Hilfe der Abschnittsverhältnisse der Ecktransversalen.

Bei dieser in den Einzelheiten noch nicht untersuchten Abbildungsart handelt es sich um Folgendes:

Der laufende Punkt  $Q$  zerlegt die durch ihn gehenden Ecktransversalen in die Abschnitte  $a_1, r_1$  bzw.  $a_2, r_2$  bzw.  $a_3, r_3$ . Nimmt man die Quotienten  $a:r$  dieser Abschnitte als Gewichte der Koordinatenänderungen der entsprechenden Ecken des Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$ , so erhält man in den Ausdrücken

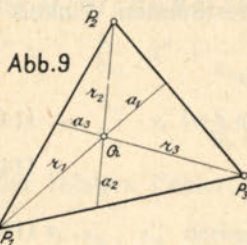


Abb. 9

$$dx = \frac{\frac{a_1}{r_1} dx_1 + \frac{a_2}{r_2} dx_2 + \frac{a_3}{r_3} dx_3}{\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \frac{a_3}{r_3}}, \quad \dots (153)$$

$$dy = \frac{\frac{a_1}{r_1} dy_1 + \frac{a_2}{r_2} dy_2 + \frac{a_3}{r_3} dy_3}{\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \frac{a_3}{r_3}} \quad \dots (154)$$



die Koordinatenänderungen von Q als das allgemeine arithmetische Mittel der Eckpunktsänderungen.

Fällt der laufende Punkt Q auf eine Dreiecksseite, so wird das dem dritten Punkt entsprechende Gewicht Null; die Koordinatenänderungen von Q hängen nur noch von den Verschiebungen der beiden Seitenendpunkte ab und es bleibt für die Endlage von Q gleichgültig, von welchem der beiden Nachbardreiecke aus die Übertragung stattfindet. Für diesen Fall wird

$$dx = \frac{p_1^2 dx_1 + dx_2}{1 + p_1^2}, \quad dy = \frac{p_1^2 dy_1 + dy_2}{1 + p_1^2}, \quad \dots (155)$$

wenn Q auf  $P_1P_2$  liegt und das zugehörige Gewicht

$$\frac{a_1}{r_1} = p_1 \quad \dots (156)$$

gesetzt wird.

Rückt Q in eine Ecke des Dreiecks — etwa nach  $P_1$  —, so wird  $a_1 = P_1P_2$ ,  $r_1 = 0$ ,  $p_1 = \infty$  und es bleibt

$$dx = dx_1, \quad dy = dy_1. \quad \dots (157)$$

Durch (153), (154) werden also auch die Ecken des alten Dreiecks in diejenigen des neuen Dreiecks abgebildet.

#### IV. Die konforme Übertragung.

Liegt nur ein einziges Dreieck vor, so ist auch die bei Anwendung der konformen Übertragung auftretende Arbeit noch zu bewältigen. Das Ziel wird zweckmäßig in zwei Abschnitten erreicht, nämlich:

a) Durch eine solche Parallelverschiebung  $dx_1$ ,  $dy_1$ , Drehung  $\delta$  und Maßstabänderung  $\mu$ , daß  $P'_1$ ,  $P'_2$  auf  $P_1$ ,  $P_2$  fallen (Teiländerungen  $dx'$ ,  $dy'$ , aber in anderer Bedeutung wie bisher);

b) Durch eine weitere konforme Änderung derart, daß unter Festhaltung von  $P_1$ ,  $P_2$  auch die dritte Ecke in den angegebenen Punkt  $P_3$  fällt (Teiländerung  $d\xi$ ,  $d\eta$ ).

Die beiden Teiländerungen und damit auch die Gesamtänderungen werden im Vergleich zu den Dreiecksseiten als kleine Größen 1. Ordnung vorausgesetzt.

a) Erste Übertragung durch Schiebung, Drehung und Streckung (Drehzerrung).

Die genannten Bewegungen sind so zu bemessen, daß den Bedingungen

$$dx_2 = dx_1 - \Delta y_{12} \cdot \delta + \Delta_{12} \cdot \mu \quad \dots (158)$$

$$dy_2 = dy_1 + \Delta y_{12} \cdot \delta + \Delta_{12} \cdot \mu \quad \dots (159)$$

genügt wird. Aus diesen beiden in den Unbekannten  $\delta$  und  $\mu$  linearen Gleichungen, deren Koeffizienten und Absolutglieder bekannt sind, erhält man:



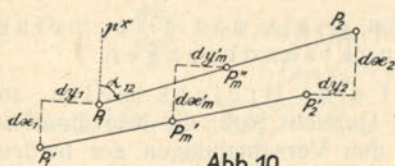


Abb. 10

$$\delta = -\frac{1}{s_{12}} \{ (dx_2 - dx_1) \sin \alpha_{12} - (dy_2 - dy_1) \cos \alpha_{12} \}, \quad \dots (160)$$

$$\mu = +\frac{1}{s_{12}} \{ (dx_2 - dx_1) \cos \alpha_{12} + (dy_2 - dy_1) \sin \alpha_{12} \}. \quad \dots (161)$$

Mit den bekannten Übertragungskonstanten  $\delta$ ,  $\mu$  kann man nunmehr die der ersten Abbildung entsprechenden Teilkoordinatenänderungen  $dx'_i$ ,  $dy'_i$  des laufenden Punktes  $Q'_i$  mit den bisherigen Koordinaten  $x_i$ ,  $y_i$  berechnen. Es wird:

$$dx'_i = dx_i - \Delta y_{1i} \delta + \Delta x_{1i} \mu, \quad dy'_i = dy_i + \Delta x_{1i} \delta + \Delta y_{1i} \mu \quad \dots (162)$$

und die Zwischenwerte

$$x''_i = x'_i + dx'_i, \quad y''_i = y'_i + dy'_i \quad \dots (163)$$

gehören zur Zwischenlage  $Q''_i$ , in welche  $Q'_i$  durch die erste Übertragung gebracht wird.<sup>10)</sup> Diese Zwischenwerte sind für alle zu übertragenden Punkte  $Q'_i$  und auch für den dritten Eckpunkt  $P'_3$  sowie für den Streckenmittelpunkt  $P'_m$  zu ermitteln. Dieser wird durch die Teiländerungen

$$dx'_m = \frac{1}{2} (dx_1 + dx_2), \quad dy'_m = \frac{1}{2} (dy_1 + dy_2) \quad \dots (164)$$

in die Zwischenlage  $P'_m$  (Mittelpunkt von  $P_1 P_2$ ) gebracht. Für die geometrischen Örter gleicher Koordinatenänderungen  $dx'_i$ ,  $dy'_i$  folgen aus (162) zwei zu einander senkrechte Geradenscharen  $G^x$ ,  $G^y$ , welche für gleiche Zuwächse in  $dx'_i$ ,  $dy'_i$  ein Quadratnetz ergeben. Der Richtungswinkel ( $G^x$ ) der Geraden  $G^x$  folgt aus

$$\operatorname{tg} (G^x) = +\frac{\mu}{\delta} = -\frac{(dx_2 - dx_1) \cos \alpha_{12} + (dy_2 - dy_1) \sin \alpha_{12}}{(dx_2 - dx_1) \sin \alpha_{12} - (dy_2 - dy_1) \cos \alpha_{12}}. \quad \dots (165)$$

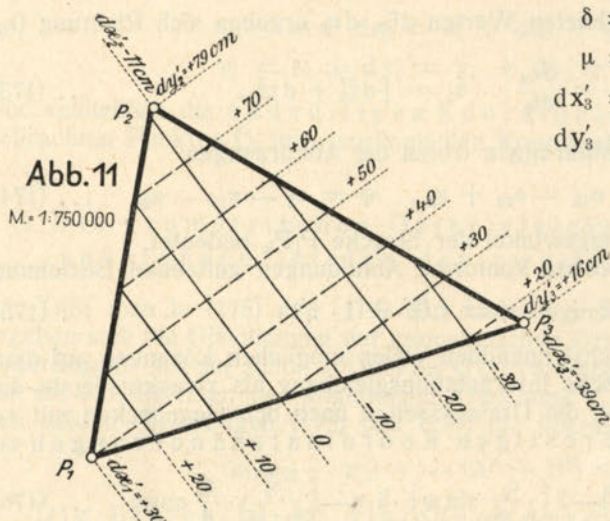
Die Berechnung der  $dx'$ ,  $dy'$  nach (162) ist einfach genug. Bei einer großen Zahl von Punkten ist es aber noch einfacher, die Geradenscharen durch entsprechende Proportionalteilung der Dreiecksseiten einzutragen — nachdem natürlich vorher  $dx_3$ ,  $dy_3$  berechnet worden sind — und hierauf die sämtlichen Teiländerungen  $dx'_i$ ,  $dy'_i$  unmittelbar abzulesen.

Das in Abbildung 11 veranschaulichte Beispiel ist auf folgender Grundlage berechnet:

$$\left. \begin{array}{lll} \Delta x_{12} = + 35,00 \text{ km} & \Delta x_{13} = + 15,00 \text{ km} & \Delta x_{23} = + 20,00 \text{ km} \\ \Delta y_{12} = + 5,00 \text{ km} & \Delta y_{13} = + 42,50 \text{ km} & \Delta y_{23} = + 37,50 \text{ km} \\ s_{12} = s_3 = 35,36 \text{ km}; & s_{13} = s_2 = 45,07 \text{ km}; & s_{23} = s_1 = 42,50 \text{ km}; \\ \alpha_{12} = 8^\circ 08'; & \alpha_{13} = 70^\circ 34'; & \alpha_{23} = 118^\circ 04'; \\ dx_1 = dx'_1 = + 30 \text{ cm}; & dx_2 = dx'_2 = - 11 \text{ cm}; & dx_3 = + 16 \text{ cm}; \\ dy_1 = dy'_1 = + 40 \text{ cm}; & dy_2 = dy'_2 = + 79 \text{ cm}; & dy_3 = + 56 \text{ cm}; \end{array} \right\} \dots (166)$$

<sup>10)</sup>  $x''$ ,  $y''$  besitzen hier eine andere Bedeutung wie früher. Sie beziehen sich jetzt auf den alten Ursprung, während sie bisher in I. und II. zum Ursprung  $P'_1$  gehörten.





$$\left. \begin{aligned} \delta &= +1,255 \cdot 10^{-5}; \\ \mu &= -1,012 \cdot 10^{-5}; \\ dx'_3 &= -39 \text{ cm } (-38,55 \text{ cm}) \\ dy'_3 &= +16 \text{ cm } (+15,79 \text{ cm}) \end{aligned} \right\} \dots (167)$$

Für das Intervall  $d^2x' = d^2y' = 10 \text{ cm}$  der Koordinatenänderungen wird die Maschenweite des Quadratnetzes

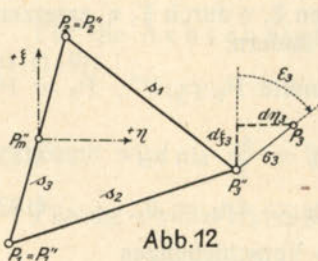
$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{d^2 x'}{\sqrt{b^2 + \mu^2}} \\ &= 6,21 \text{ km} \\ &\text{bzw. } 1,242 \text{ cm;} \\ \text{tg}(G^x) &= -0,807; \end{aligned} \right\} \dots (168)$$

b) Zweite Übertragung durch konforme Abbildung der ersten Übertragung.

Das Ergebnis der ersten Übertragung war ein dem Urbild in beliebigen großen Teilen ähnliches Bild, in dem  $P'_1$  und  $P'_2$  sogleich in ihre Endlage  $P_1$  bzw.  $P_2$  gerückt worden sind. Die zweite Abbildung, durch welche auch  $P'_3$  noch angeschlossen werden soll, ist eine konforme Abbildung im gewöhnlichen Sinne: Die Ähnlichkeit besteht hier nur zwischen unendlich kleinen einander entsprechenden Teilen.

In dem parallel in den Streckenmittelpunkt  $P_m''$  mit den Koordinaten

$$x_m'' = \frac{1}{2} (x_1 + x_2), y_m'' = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) \quad \dots (169)$$



verschobenen Koordinatensystem  $\xi, \eta$  besitzt ein Punkt  $Q_i''$  der Zwischenlage die Koordinaten

$$\xi'_i = x''_i - x''_m, \quad \eta'_i = y''_i - y''_m. \quad \dots (170)$$

Die darin noch anzubringenden Verbesserungen  $d\xi_i$ ,  $d\eta_i$  sind die zweiten Teiländerungen; sie führen auf die Koordinaten

$$\xi_i = \xi'_i + d\xi_i, \quad \eta_i = \eta'_i + d\eta_i \quad \dots (171)$$

des laufenden Punktes  $Q_1$  in seiner Endlage im System  $\xi, \eta$ .

Für die dritte Ecke des Dreiecks erhält man:

$$\begin{aligned} d\xi_3 &= \xi_3 - \xi'_3 = x_3 - x'_3 = dx_3 - dx'_3, \\ d\eta_3 &= \eta_3 - \eta'_3 = y_3 - y'_3 = dy_3 - dy'_3. \end{aligned} \quad \dots (172)$$



Mit den nach (172) berechneten Werten  $d\xi_3$ ,  $d\eta_3$  ergeben sich Richtung ( $\varepsilon_3$ ) und Länge ( $\sigma_3$ ) aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon_3 = \frac{d\eta_3}{d\xi_3}, \quad \sigma_3 = \sqrt{d\xi_3^2 + d\eta_3^2}. \quad \dots (173)$$

In den folgenden Ausführungen treten die Abkürzungen

$$\varphi = 2\alpha_{12} - \alpha_{13} - \alpha_{23} + \varepsilon_3, \quad \psi = \varepsilon_3 - \alpha_{13} - \alpha_{23} \quad \dots (174)$$

auf, worin  $\alpha_{ik}$  den Richtungswinkel der Strecke  $P_i P_k$  bedeutet.

Ausgehend von der für ebene konforme Abbildungen geltenden Beziehung

$$\xi + i \cdot \eta = f(\xi' + i \cdot \eta') \quad \dots (175)$$

erhält man aus den zunächst unendlich vielen möglichen Lösungen auf dem Weg über die Lagrange'sche Interpolationsgleichung als zweckmäßigste die folgende. Bezeichnet man die Dreiecksseiten nach den Gegenecken mit  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , so ergeben sich die restigen Koordinatenänderungen zu

$$d\xi = \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cos \psi \right) (\xi^2 - \eta^2) - 2 \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \sin \psi \right) \cdot \xi \cdot \eta - \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cdot \frac{s_3^2}{4} \cos \varphi \right) \quad \dots (176)$$

$$d\eta = \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \sin \psi \right) (\xi^2 - \eta^2) + 2 \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cos \psi \right) \cdot \xi \cdot \eta - \left( \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cdot \frac{s_3^2}{4} \sin \varphi \right) \quad \dots (177)$$

$$\text{oder} \quad d\xi = A \cdot \xi^2 - 2B \xi \cdot \eta - A \cdot \eta^2 - C, \quad \dots (178)$$

$$d\eta = B \cdot \xi^2 + 2A \xi \cdot \eta - B \cdot \eta^2 - D, \quad \dots (179)$$

wenn von den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cos \psi &= A = \frac{1}{s} G^1, & \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \sin \psi &= B = \frac{1}{s} G^1, \\ \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cdot \frac{s_3^2}{4} \cos \varphi &= C = s \cdot G^1, & \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \cdot \frac{s_3^2}{4} \sin \varphi &= D = s' \cdot G^1 \end{aligned} \right\} \quad \dots (180)$$

Gebrauch gemacht wird. Da  $d\xi$ ,  $d\eta$  nach Voraussetzung sehr kleine Größen sind, so kann man in (176) bis (179) die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  durch  $\xi'$ ,  $\eta'$  ersetzen, ohne den Genauigkeitsgrad dieser Ausdrücke zu ändern.

Die Anwendung von (178), (179) auf die Punkte  $P_1 = P''$ ,  $P_2 = P_2''$  gibt wegen

$$\xi_2 = -\xi_1 = \frac{s_3}{2} \cos \alpha_{12}, \quad \eta_2 = -\eta_1 = \frac{s_3}{2} \sin \alpha_{12} \quad \dots (181)$$

$$\text{die Koordinatenänderungen } d\xi_1 = d\xi_2 = 0, \quad d\eta_1 = d\eta_2 = 0. \quad \dots (182)$$

Dagegen erfährt der Streckenmittelpunkt  $P_m''$  die Verschiebungen

$$d\xi_m = -C, \quad d\eta_m = -D. \quad \dots (183)$$

Die Gesamtkoordinatenänderungen, welche dem Zusammenwirken beider Umformungen Rechnung tragen, sind die Summen

$$dx_i = dx'_i + d\xi_i, \quad dy_i = dy'_i + d\eta_i \quad \dots (184)$$

und die Ausdrücke



$$\left. \begin{aligned} x_i &= x'_i + dx_i = x'_i + dx'_i + d\xi_i, \\ y_i &= y'_i + dy_i = y'_i + dy'_i + d\eta_i \end{aligned} \right\} \dots (185)$$

sind schließlich die endgültigen Koordinaten des in seine Endlage gebrachten Punktes  $Q_i$  im ursprünglichen Koordinatensystem.

c) Die geometrischen Örter gleicher Koordinatenänderungen infolge der zweiten Umbildung.

Gibt man in (178) und (179) den Änderungen  $d\xi$ ,  $d\eta$  feste Werte, so ergeben sich die Gleichungen der geometrischen Örter gleicher Koordinatenänderungen. Mit der schon in (109) bis (111) verwendeten Bezeichnungsweise für die Koeffizienten der allgemeinen Gleichung 2. Grades findet man aus den beiden Gleichungen (178) und (179) die übereinstimmenden Ausdrücke

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = -(A^2 + B^2) < 0. \dots (186)$$

Die Linien  $H^\xi$ ,  $H^\eta$  gleicher Koordinatenänderungen  $d\xi$ ,  $d\eta$  sind also Hyperbelscharen. Da  $a_{13} = 0$ ,  $a_{23} = 0$ , so werden die Mittelpunktskoordinaten  $\xi_m$ ,  $\eta_m$  aller dieser Hyperbeln Null. Die beiden Hyperbelscharen  $H^\xi$ ,  $H^\eta$  besitzen also einen gemeinsamen Mittelpunkt, welcher in den Streckenmittelpunkt  $P''_m$  fällt.

Zur Bestimmung der Asymptotenrichtungswinkel  $\varphi^\xi$  der ersten Hyperbelschar folgt aus (118):

$$A - 2B \operatorname{tg} \varphi^\xi - A \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi^\xi = 0; \dots (187)$$

also wird

$$\operatorname{tg} \varphi^\xi = -\frac{B}{A} \pm \frac{1}{A} \sqrt{A^2 + B^2} = -\operatorname{tg} \psi \pm \frac{1}{\cos \psi} = \begin{cases} \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\psi) \\ \operatorname{tg}(135^\circ - \frac{1}{2}\psi) \end{cases} \dots (188)$$

$$\text{und} \quad \varphi^\xi = 45^\circ - \frac{\psi}{2} \text{ bzw. } \varphi^\xi = 135^\circ - \frac{\psi}{2}. \dots (189)$$

Für die Achsenrichtung  $\alpha^\xi$  der ersten Kurvenschar ergibt sich aus (119):

$$\operatorname{tg} 2\alpha^\xi = -\frac{B}{A} = -\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(180^\circ - \psi). \dots (190)$$

$$\text{Somit wird} \quad \alpha^\xi = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \text{ bzw. } \alpha^\xi = 180^\circ - \frac{\psi}{2}. \dots (191)$$

Für die zweite Hyperbelschar  $H^\eta$  folgt entsprechend:

$$B + 2A \cdot \operatorname{tg} \varphi^\eta - B \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi^\eta = 0 \dots (192)$$

und weiter:

$$\operatorname{tg} \varphi^\eta = +\frac{A}{B} \pm \frac{1}{B} \sqrt{A^2 + B^2} = \operatorname{ctg} \psi \pm \frac{1}{\sin \psi} = \begin{cases} \operatorname{tg}(90^\circ - \frac{\psi}{2}) \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \frac{\psi}{2}) \end{cases} \dots (193)$$

Also wird

$$\varphi^\eta = 90^\circ - \frac{\psi}{2} \text{ bzw. } \varphi^\eta = 180^\circ - \frac{\psi}{2}. \dots (194)$$



Die Achsenrichtungen dieser Linienschar  $H^\eta$  ergeben sich aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha^\eta = + \frac{A}{B} = \operatorname{ctg} \psi = \operatorname{tg} (90^\circ - \psi) \quad \dots (195)$$

$$\text{zu } \alpha^\eta = 45^\circ - \frac{\psi}{2} \text{ bzw. } \alpha^\eta = 135^\circ - \frac{\psi}{2}. \quad \dots (196)$$

Für die Halbmesser erhält man die Ausdrücke

$$a^\xi = \sqrt{\pm \frac{s_1 s_2}{\sigma_3} (C + d\xi)}, \quad \dots (197)$$

$$a^\eta = \sqrt{\pm \frac{s_1 \cdot s_2}{\sigma_3} (D + d\eta)}. \quad \dots (198)$$

Die Gleichungen (189) und (194) zeigen, daß die Asymptoten jeder Kurvenschar einen rechten Winkel einschließen. Es handelt sich also um lauter gleichseitige Hyperbeln! Die Hinzunahme von (191) und (196) zeigt ferner, daß die Achsenrichtungswinkel  $\alpha$  der einen Schar mit den Asymptotenrichtungen  $\varphi$  der anderen Schar übereinstimmen. Die beiden Scharen  $H^\xi$ ,  $H^\eta$  von gleichseitigen Hyperbeln mit einem gemeinsamen Mittelpunkt  $P_m''$  sind also um  $45^\circ$  gegeneinander gedreht und es fallen daher die Achsen der einen Schar in die Asymptoten der anderen Schar. Jede Hyperbel der einen Schar steht senkrecht auf allen Hyperbeln der anderen Schar.

Die Nullkurven der beiden Scharen gehen natürlich durch die bereits festliegenden Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und die Asymptoten  $A^\xi$ ,  $A^\eta$  sind die geometrischen Örter der Koordinatenänderungen  $d\xi = -C$ ,  $d\eta = -D$ .

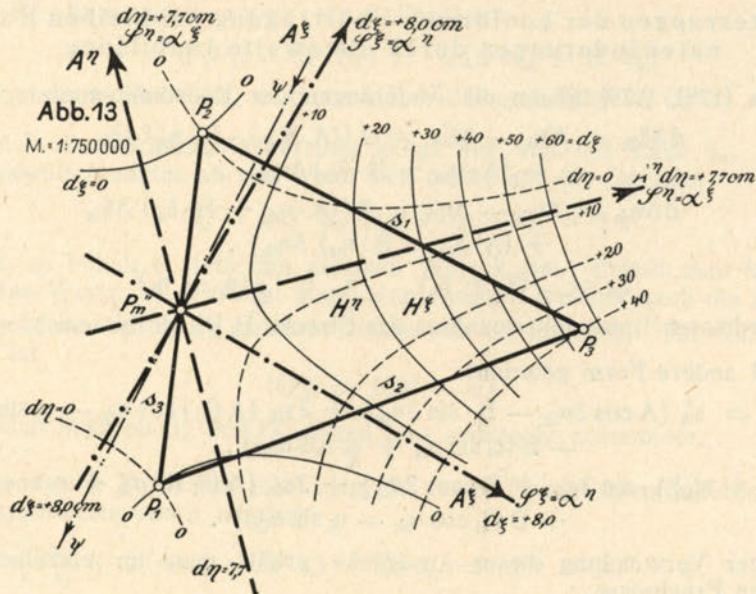
Bei der besprochenen konformen Abbildung liegen — anders wie bei der projektiven Übertragung — sowohl der gemeinsame Mittelpunkt  $P_m''$  aller gleichseitigen Hyperbeln wie auch die je einer Schar  $H^\xi$  bzw.  $H^\eta$  gemeinsamen Asymptoten stets auf dem Zeichenblatt und die für alle Kurven der gleichen Schar zusammenfallenden, auf den Asymptoten der anderen Schar liegenden Halbachsen können nach (197), (198) recht einfach berechnet werden.

Bei einer größeren Punktzahl kann es sich daher lohnen, die Hyperbelscharen aus den Asymptoten und Kurvenscheiteln zu zeichnen, um die Werte  $d\xi$ ,  $d\eta$  wieder unmittelbar abzulesen, statt sie aus (178), (179) zu berechnen.

Hat man etwa für genügend viele, gut verteilte Punkte die zugehörigen  $d\xi$ ,  $d\eta$  nach (178), (179) berechnet, so kann die Zeichnung der geometrischen Örter  $H^\xi$ ,  $H^\eta$  auch wieder durch Interpolation erfolgen.

Die diesen Ausführungen beigelegte Abb. 13 schließt an die Abb. 11 und ihre Ausgangsdaten an. Damit ergeben sich für die Zeichnung von Abb. 13 die folgenden weiteren Unterlagen:





$$d\xi_3 = dx_3 - dx'_3 = +55 \text{ cm}, d\eta_3 = dy_3 - dy'_3 = +40 \text{ cm},$$

$$\varepsilon_3 = 36^\circ 01', \sigma_3 = 68,01 \text{ cm}; \quad \dots (199)$$

$$\varphi = -136^\circ 21', \psi = -152^\circ 37', \operatorname{tg} \psi = +0,5180; \quad \dots (200)$$

$$A = -3,152 \cdot 10^{-7} \text{ km}^{-1}, B = -1,633 \cdot 10^{-7} \cdot \text{km}^{-1},$$

$$C = -8,024 \text{ cm}, D = -7,660 \text{ cm}. \quad \dots (201)$$

Achsen- und Asymptotenrichtungen:

$$\alpha^\xi = \varphi^\eta = 76^\circ 18' \text{ bzw. } 166^\circ 18', \alpha^\eta = \varphi^\xi = 31^\circ 20' \text{ bzw. } 121^\circ 20'. \quad \dots (202)$$

Achsenlängen zu verschiedenen  $d\xi, d\eta$ :

$d^\xi$ bzw. $d^\eta$ cm	$C + d^\xi$ cm	$D + d^\eta$ cm	$a^\xi$ km	$a^\eta$ km	
+60	+51,976	+52,340	38,26	38,40	
+50	+41,976	+42,340	34,40	34,54	
+40	+31,976	+32,340	30,00	30,20	...
+30	+21,976	+22,340	24,89	25,10	(203)
+20	+11,976	+12,340	18,38	18,64	
+10	+1,976	+2,340	7,48	8,12	
0	-8,024	-7,660	15,03	14,68	



d) Verzerrungen der konformen Übertragung bei **kleinen** Koordinatenänderungen durch die zweite Umbildung.

Aus (178), (179) folgen die Änderungen der Koordinatenunterschiede:

$$d\Delta\xi_{ik} = \Delta\xi_{ik} - \Delta\xi'_{ik} = 2 \{ (A \cdot \xi_m - B \cdot \eta_m) \Delta\xi_{ik} - (A \cdot \eta_m + B \cdot \xi_m) \Delta\eta_{ik} \}, \quad \dots (204)$$

$$d\Delta\eta_{ik} = \Delta\eta_{ik} - \Delta\eta'_{ik} = 2 \{ (A \cdot \eta_m + B \cdot \xi_m) \Delta\xi_{ik} + (A \cdot \xi_m - B \cdot \eta_m) \Delta\eta_{ik} \}, \quad \dots (205)$$

mit  $\xi_m = \frac{1}{2}(\xi_i + \xi_k), \quad \eta_m = \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_k) \quad \dots (206)$

als Koordinaten<sup>11)</sup> des Mittelpunktes der Strecke  $P_i P_k$  im System  $\xi, \eta$ .

Auf andere Form gebracht:

$$d\Delta\xi_{ik} = s_{ik}^2 \{ A \cos 2\alpha_{ik} - B \sin 2\alpha_{ik} \} + 2s_{ik} \{ A (\xi_i \cos \alpha_{ik} - \eta_i \sin \alpha_{ik}) - B (\xi_i \sin \alpha_{ik} + \eta_i \cos \alpha_{ik}) \}, \quad \dots (207)$$

$$d\Delta\eta_{ik} = s_{ik}^2 \{ A \sin 2\alpha_{ik} + B \cos 2\alpha_{ik} \} + 2s_{ik} \{ A (\xi_i \sin \alpha_{ik} + \eta_i \cos \alpha_{ik}) + B (\xi_i \cos \alpha_{ik} - \eta_i \sin \alpha_{ik}) \}. \quad \dots (208)$$

Unter Verwendung dieser Ausdrücke erhält man im einzelnen die folgenden Ergebnisse:

1. **Verzerrungsverhältnis.** Ist  $r_i$  der Radiusvektor  $P_m P_i$  und  $(r_i)$  sein Richtungswinkel, so wird

$$v = \frac{s_{ik} - s'_{ik}}{s_{ik}} = 2 (A \cdot \xi_m - B \cdot \eta_m) = \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \{ s_{ik} \cdot \cos (\psi + \alpha_{ik}) + 2 r_i \cos [\psi + (r_i)] \} = G^1, \quad \dots (209)$$

wo  $s'_{ik}$  und  $s_{ik}$  die Strecken  $P'_i P'_k$  und  $P_i P_k$  bedeuten.

Nach der ersten Form von (209) ist das Verzerrungsverhältnis  $v$  nur von der Lage  $\xi_m, \eta_m$  des Streckenmittelpunktes abhängig und es behält  $v$  den gleichen festen Wert  $k_v$  bei, wenn sich der Streckenmittelpunkt auf der Geraden

$$G_k^v \equiv 2 A \cdot \xi_m - 2 B \cdot \eta_m - k_v = 0 \quad \dots (210)$$

bewegt. Legt man  $v$  verschiedene Werte  $k_v$  bei, so ergibt sich eine Schar von parallelen Geraden, welche auch die dem besonderen Wert  $v_0 = 0$  entsprechende, durch  $P_m$  gehende Gerade  $G_0^v$  enthält. Der Richtungswinkel aller dieser Geraden ist

$$(G_k^v) = 90^\circ - \psi. \quad \dots (211)$$

Aus der zweiten Form von (209) ergeben sich bei festliegendem Anfangspunkt  $P_i$  und fester Entfernung  $s_{ik}$  die Extremwerte von  $v$  zu

$$v^{\max} = \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \{ s_{ik} + 2 r_i \cdot \cos [\psi + (r_i)] \} \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_v^{\max} = \dots \psi, \quad \dots (212)$$

$$v^{\min} = \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \{ -s_{ik} + 2 r_i \cdot \cos [\psi + (r_i)] \} \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_v^{\min} = 180^\circ - \psi. \quad \dots (213)$$

Diese zweite Form von (209) zeigt auch, daß das Verzerrungsverhältnis  $v$  zur zweiten Teilverschiebung  $\sigma_3$  des dritten Punktes direkt proportional ist.

<sup>11)</sup> Der Zeiger  $m$  dieser Koordinaten hat nichts mit  $P''_m$  zu tun.



2. Richtungsverzerrung. Diese ist

$$\begin{aligned}\varphi &= (P_i P_k) - (P'_i P'_k) = 2(A \cdot \eta_m + B \cdot \xi_m) \\ &= s_{ik} (A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cos \alpha_{ik}) + 2(A \eta_i + B \xi_i) = G^1 \dots (214)\end{aligned}$$

Auch die Richtungsverzerrung hängt nur von der Lage  $\xi_m, \eta_m$  des Streckenmittelpunktes ab und wenn sich dieser auf der Geraden

$$G_k^0 \equiv 2B \cdot \xi_m + 2A \cdot \eta_m - k_p = 0 \dots (215)$$

bewegt, so behält  $\varphi$  stets den gleichen Wert  $k_p$  bei. Erteilt man  $k_p$  verschiedene Werte, so erscheint eine Geradenschar, welcher auch die  $\varphi_0 = 0$  entsprechende, durch  $P_m$  gehende Nullgerade  $G_0^0$  angehört. Ihr Richtungs-  
winkel ist

$$(G_k^0) = 180^\circ - \psi; \dots (216)$$

Die beiden Scharen  $G_k^v$  und  $G_k^0$  stehen also senkrecht zueinander.

Die zweite Form von (214) zeigt für festes  $P_i$  und unveränderliches  $s_{ik}$  die Extremwerte von  $\varphi$ , nämlich:

$$\varphi^{\max} = \frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} + 2(A \cdot \eta_i + B \cdot \xi_i) \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_{\rho}^{\max} = 90^\circ - \psi, \dots (217)$$

$$\varphi^{\min} = -\frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} + 2(A \cdot \eta_i + B \cdot \xi_i) \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_{\rho}^{\min} = 270^\circ - \psi. \dots (218)$$

3. Winkelverzerrung. Die Verzerrung des Winkels  $\beta_{ik} = \alpha_{oi}$  —  $\alpha_{ok}$  zum Winkelscheitel  $P_0$  wird

$$\begin{aligned}w &= \varphi_k - \varphi_i = B \cdot \Delta \xi_{ik} + A \cdot \Delta \eta_{ik} \\ &= \frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} \sin(\psi + \alpha_{ik}). \dots (219)\end{aligned}$$

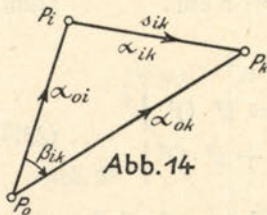


Abb. 14

Für alle zueinander parallelen  $s_{ik}$  von gleicher Länge ist  $w$  konstant, gleichgültig wo jeweils der Winkelscheitel liegt. Hält man eine bestimmte Richtung  $\alpha_{ik}$  fest, so ist  $w$  außer zu  $\sigma_3$  auch zur Gegenseite  $s_{ik}$  des Winkels  $\beta_{ik}$  direkt proportional. Ferner ist

$$w_0 = 0 \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_w^0 = -\psi. \dots (220)$$

Liegen also bei beliebigem gegenseitigen Abstand die Schenkelendpunkte  $P_i, P_k$  auf irgendeiner Geraden zum Richtungswinkel  $\alpha_{ik} = -\psi$ , so verschwindet die Winkelverzerrung für jede Lage des Winkelscheitels  $P_0$ .

Für unveränderliches  $s_{ik}$  folgt weiterhin

$$w^{\max} = \frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_w^{\max} = 90^\circ - \psi \dots (221)$$

und

$$w^{\min} = -\frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} \quad \text{für } \alpha_{ik} = \alpha_w^{\min} = 270^\circ - \psi \dots (222)$$

in den Richtungen mit (217), (218) übereinstimmend.



4. Das konforme Bild einer Strecke. Das Bild der Strecke  $P_i'P_k'$  des Zwischenbildes ist ein Parabelbogen  $\widehat{s}_{ik}$  zur Gleichung

$$\begin{aligned} o &= a(a - s_{ik})(A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cdot \cos \alpha_{ik}) + s \cdot G^2 \\ &= a(a - s_{ik}) \frac{\sigma_3}{s_1 \cdot s_2} \sin(\alpha_{ik} + \psi) + s \cdot G^2, \end{aligned} \quad \dots (223)$$

worin  $a, o$  die Koordinaten des laufenden Punktes  $P$  im System  $P_iP_k$  mit  $P_i$  als Anfangspunkt sind. Die zweite Form von (223) folgt mit Rücksicht auf (180). Der Parabelscheitel  $S$  hat die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} s_{ik}, o_m = -\frac{1}{4} s_{ik}^2 (A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cdot \cos \alpha_{ik}) + s \cdot G^2 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{s_{ik}^2}{s_1 \cdot s_2} \sigma_3 \cdot \sin(\alpha_{ik} + \psi) + s \cdot G^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (224)$$

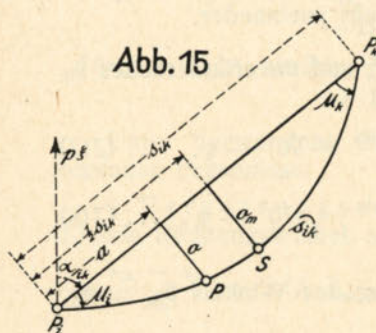


Abb. 15

und für die Winkel des Bogens  $\widehat{s}_{ik}$  mit der Sehne  $s_{ik}$  ergeben sich die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= -s_{ik}(A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cdot \cos \alpha_{ik}) + G^2 \\ &= -\frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} \cdot \sin(\alpha_{ik} + \psi) + G^2, \\ \mu_k &= +s_{ik}(A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cdot \cos \alpha_{ik}) + G^2 \\ &= +\frac{\sigma_3 \cdot s_{ik}}{s_1 \cdot s_2} \cdot \sin(\alpha_{ik} + \psi) + G^2. \end{aligned} \right\} \quad \dots (225)$$

In Abb. 13 entsprechen den Seiten  $s_1, s_2, s_3$  in gleicher Reihenfolge die Scheitelabstände

$$o_{m1} = +9 \text{ cm}, o_{m2} = +18 \text{ cm}, o_{m3} = +6 \text{ cm}. \quad \dots (226)$$

Die von  $s_{ik}$  und  $\widehat{s}_{ik}$  eingeschlossene Fläche ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_{ik} &= -\frac{1}{6} s_{ik}^3 (A \cdot \sin \alpha_{ik} + B \cdot \cos \alpha_{ik}) + s^2 \cdot G^2 = s^2 \cdot G^1 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sigma_3 s_{ik}^3}{s_1 \cdot s_2} \sin(\alpha_{ik} + \psi) + s^2 \cdot G^1 \end{aligned} \right\} \quad \dots (227)$$

Sie wächst für festes  $\alpha_{ik}$  mit der dritten Potenz der Sehne und wird positiv gezählt, wenn durch die Punktfolge  $P_i, P_k, S$  eine Umfahrung im Uhrzeigersinn bestimmt wird.

Für  $\alpha_{ik} = -\psi$  bzw.  $\alpha_{ik} = 180^\circ - \psi$  verschwinden nach (223) die Parabelordinaten  $o$  und damit auch die Größen  $\mu_i, \mu_k$  und  $\Delta F_{ik}$ . Der Bogen  $\widehat{s}_{ik}$  fällt mit der Sehne  $s_{ik}$  zusammen. Alle Geraden einer Parallelschar zur Richtung  $-\psi$  bzw.  $180^\circ - \psi$  sind daher auch nach der zweiten Umbildung wieder gerade — aber nicht mehr parallele — Linien. Aus (214) folgt der zugehörige Sonderwert der Richtungsverzerrung:

$$\rho_\psi = 2 \frac{\sigma_3 \cdot p}{s_1 \cdot s_2}, \quad \dots (228)$$

wo  $p$  den Abstand der Geraden vom Ursprung  $P_m''$  bedeutet.  $\rho_\psi$  ist zum Abstand  $p$  direkt proportional.



5. Flächenverzerrung. Bedeutet  $F''$  die beliebig begrenzte Fläche des Zwischenbildes und  $\widehat{F}$  die entsprechende Fläche nach der zweiten Abbildung, so wird die Flächenverzerrung

$$\widehat{f} = \widehat{F} - F'' = 4F''(A \cdot \xi_s - B \cdot \eta_s). \quad \dots (229)$$

Hierin sind  $\xi_s, \eta_s$  die Koordinaten des Flächenschwerpunktes im System  $\xi, \eta$  zum Ursprung  $P''_m$ . Ist  $F''$  ein geradlinig begrenztes  $n$ -Eck, so kommt neben der bisher behandelten Bildfläche  $\widehat{F}$ , dem Kurvenpolygon, noch die Fläche  $\overline{F}$  des Sehnepolygons in Betracht. Diese unterscheidet sich von  $\widehat{F}$  um die Summe der Parabelabschnitte  $\Delta F_i$  (jetzt nach dem jeweiligen Anfangspunkt  $P_i$  benannt) und es ist

$$\overline{F} = \widehat{F} + \sum_{i=1}^n \Delta F_i. \quad \dots (230)$$

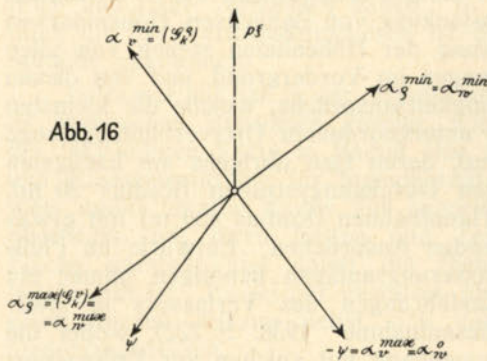
Während die Flächenverzerrung des Kurvenpolygons  $\widehat{F}$  durch (229) bestimmt ist, wird

$$\overline{f} = \overline{F} - F'' = \widehat{f} + \sum_{i=1}^n \Delta F_i \quad \dots (231)$$

die Flächenverzerrung des Sehnepolygons.

6. Richtungsrose der Verzerrungen. Ein Vergleich der von (204) an ermittelten besonderen Verzerrungsrichtungen führt auf die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_v^{\max} = \alpha_v^{\min} - 180^\circ = -\psi &= (G_k^v) - 90^\circ = (G_k^p) - 180^\circ \\ &= \alpha_p^{\max} - 90^\circ = \alpha_p^{\min} - 270^\circ = \alpha_w^0 \\ &= \alpha_w^{\max} - 90^\circ = \alpha_w^{\min} - 270^\circ. \end{aligned} \right\} \quad \dots (232)$$



Da sich die Richtung  $\psi$  nach (174) in einfachster Weise auftragen läßt, so kann man, von ihr ausgehend, unter Beachtung von (232) sogleich auch die Richtungsrose für die bei der besprochenen konformen Abbildung auftretenden besonderen Verzerrungswerte zeichnen.

In Abbildung 16 ist diese Rose mit dem Abbildung 14 entsprechenden Ausgangswert  $\psi$  dargestellt.



## Zur Frage der zweckmäßigen Herstellung der Deutschen Grundkarte 1:5000.

Von Dr.-Ing. Walther, Direktor bei der Heeresplankammer, Berlin.

In den „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst“ 1943, S. 38, schreibt Regierungsvermessungsrat Major a. D. Schaefer, München, „die Genauigkeit  $0,4 + 5 \text{ tg } \alpha$  sei für alle technischen Bedürfnisse ausreichend und ein Unterbieten dieser Genauigkeit sei unwirtschaftlich“.

Über die Frage der erforderlichen Genauigkeit von Höhenlinien muß letzten Endes der Benutzer der Karte gefragt werden, soll die Karte allen Anforderungen der Wehrmacht und der zivilen Wissenschaften genügen. Von letzteren stellt zweifellos das Bauwesen — in Gegenüberstellung von Forst- und Landwirtschaft, Geologie, Geographie usw. — die größten Anforderungen, insbesondere dann, wenn nach den Höhenlinien nicht nur der Vorentwurf, sondern der endgültige Entwurf eines Bauunternehmens gefertigt werden soll. Der Einsender dieser Zeilen möchte daher die Genauigkeitsfrage von seiten des Bauingenieurwesens näher betrachten.

Hier muß aus der Baupraxis einiges vorausgeschickt werden. Der Entwurf eines Bauvorhabens besteht in der zeichnerischen Darstellung des Baues unter Ermittlung der wirtschaftlichsten Lösung. Einerseits dient diese Darstellung zur Bearbeitung des auf wenige Prozent genauen Kostenanschlages zwecks Finanzierung des Baues, andererseits zur Übertragung des Entwurfes in die Natur durch Absteckung von Bauachsen, Höhenmarken und Lattenprofilen. Für die Benutzung der Höhenlinien stehen von allen Bauentwürfen solche von Verkehrswegen im Vordergrund, und von diesen stellen diejenigen die höheren Genauigkeitsansprüche, welche die kleinsten Krümmungsradien zulassen, also die untergeordneten Ortsverbindungswege (kleinste Krümmungshalbmesser 20 m), deren Bau übrigens am häufigsten in der Praxis auftritt. Dann folgen Durchgangsstraßen (Radius 30 m), Schmalspurbahnen (Radius 200 m), Hauptbahnen (Radius 400 m) mit etwas niedrigeren, aber nicht weit abliegenden Ansprüchen. Entwürfe im Fluß- und Strombau und Be- und Entwässerungsanlagen benötigen immer ein geometrisches Nivellement (vgl. Ausführungen des Verfassers in „Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme“ 1938, S. 222), wobei die topographische Karte nur im Zusammenhang mit solchen zur Erdmassenberechnung herangezogen werden kann. Die übrigen Wasserbauanlagen, wie Trinkwasserversorgung, Wasserkraftanlagen, Kanalisation, Abwasserreinigungen u. a., sind in der Genauigkeitsforderung nicht so empfindlich wie die Erdmassenberechnung bei Straßenbauten.

Man kann also den Grundsatz aufstellen, daß Straßenbauten III. Rangordnung für die Genauigkeitsansprüche, welche der Bauingenieur an die Topographische Landesvermessung zu stellen hat, maßgebend sind.



Die im Verlauf des letzten Jahrhunderts meist in 1 : 25 000 aufgenommenen Höhenlinienkarten konnten dem Bauingenieur nur für den auf dem Papier auszuarbeitenden Vorentwurf eines Straßenbaues dienen, und aus diesem Grunde findet man in der Fachliteratur allgemein die Ansicht vertreten, daß auch die neueren, großmaßstäblichen topogr. Karten nur für Vor-, nicht aber für endgültige Entwürfe dienen können. Der Vorentwurf löst in einer ersten Bearbeitungsstufe die Frage, welche Landschaftsstreifen für die Baulinie in Betracht kommen und mit welchen Steigungen man den Bau anlegen kann. Anschließend werden sodann in zweiter Bearbeitungsstufe Längen- und Querschnitte im Gelände entlang einer Gefällmessaufnahme oder ähnl. geometrisch aufgenommen und der endgültige Entwurf hiernach auf dem Papier ermittelt. In einer dritten Stufe wird dieser Entwurf durch Bauabsteckung in die Natur übertragen. Hierbei erhält man zum zweiten Male Längen- und Querschnitte, nach welchen die Lattenprofile erstellt und nach Beendigung der Erdarbeiten die Kostenabrechnungen mit den Unternehmern getätigt werden. Die nochmalige Vermessung der III. Arbeitsstufe läßt sich nur bei ganz einfachen Verhältnissen ersparen. Jedoch kann die erste Vermessung (der II. Bearbeitungsstufe) in Wegfall kommen, wenn eine 5000teilige Karte mit genügend genauen Höhenlinien zur Verfügung steht. Der Fortfall dieser Feld- und darauffolgenden Zeichenarbeit bedeutet aber eine wesentliche Zeitersparnis und eine Vermeidung von Ausgaben für Vermessungen, welche nur für einen einzigen Entwurf dienen und nach dessen Abschluß wertlos werden. Gerade dieser Umstand ist u. a. eine Begründung für die allgemeine Herstellung einer großmaßstäblichen Höhenlinienkarte gewesen, welche für alle Zeiten zur Planung von Tiefbauten zur Verfügung steht, während bisher die verschiedenen staatlichen und kommunalen Fachbehörden — jede getrennt für sich und jeweils nur einem einzigen Spezialwerk dienend — die für Bauentwürfe in Betracht kommenden Gebiete nach Höhe und Lage vermessen haben. In den Sitzungen des ehemaligen Beirates für das Vermessungswesen ist dieser Umstand seinerzeit öfters zur Sprache gekommen.

Verfasser hat nun in der „Bautechnik“ 1929, S. 432 ff., und 1935, S. 415 ff., an praktischen Beispielen gezeigt, wie weit die damaligen Ausführungen der 5000teiligen Karte in Baden eine genügend genaue Längen-, Flächen- und Massenermittlung für Ingenieurentwürfe gewährleisten. Dieser Nachweis mußte letzten Endes auf empirischem Wege erfolgen, da die Erdoberfläche mit ihren Falten und Zergliederungen keine mathematische Fläche darstellt und damit die theoretische Behandlung dieser Frage beschränkt ist. Es sei mir gestattet, über meine genannten Untersuchungen einen kurzen Auszug nebst sich daraus ergebenden Folgerungen hier niederzuschreiben.

Das gebräuchlichste Verfahren zur Aufstellung des Kostenanschlages eines Straßenbaues, bestehend in Längen- und Höhenmessung eines Polygonzuges entlang einer Gefällmessertrasse und Aufnahme von Querprofilen zu diesem (in der Ebene tritt Absteckung gerader Linien an Stelle der Gefällmessaufnahmen), wird nachstehend mit „altes Verfahren“ bezeichnet, während die Aufstellung des Kostenanschlages unter Zugrundelegung einer großmaßstäblichen Höhenlinienkarte „neues Verfahren“ heißen soll.



Im Juni 1929 wurde ein Geländestreifen für den Bau einer 1,1 km langen Straße bei durchschnittlich 7° Geländeneigung einmal nach dem alten Verfahren (59 Querprofile) und zum andern mit 500 Tachymeterpunkten pro qkm für Fertigung einer 5000teiligen Grundkarte vermessen und der mittlere Fehler des neuen gegenüber dem alten Verfahren bestimmt. Er betrug in der Massenberechnung 10 % und im Gesamtkostenanschlag 3 %. Infolge Abgreifens der Längen entstanden noch 0,2 % und dgl. der Flächen 0,3 %, was keine Rolle spielt.

Nachdem ebenfalls im Jahre 1929 durch den Lehrstuhl für Eisenbahn- und Straßenbau Karlsruhe, welcher sich der Einführung der topographischen Karte 1:5000 in die Ingenieurpraxis schon frühzeitig angenommen hatte, ein „Profilmaßstab“ veröffentlicht und damit die Aufstellung von Massenberechnungen für ein endgültiges Projekt aus der Karte wesentlich im Zeitaufwand abgekürzt war, wurde 1935 in einem Gelände mit durchschnittlicher Neigung von 14° (maximal 30°) für einen Straßenbau von 2,78 km Länge (129 Querprofile) das Verfahren unter Benutzung des Profilmaßstabes wiederholt, zugleich aber auch alle Querprofile einnivelliert. Die Querschnittflächen dieser letzteren wurden planimetriert, wodurch ein fast fehlerfreies Sollmaß erhalten wurde. Nun konnte der mittlere Massenfehler gegenüber diesem Sollmaß für altes und neues Verfahren berechnet werden.

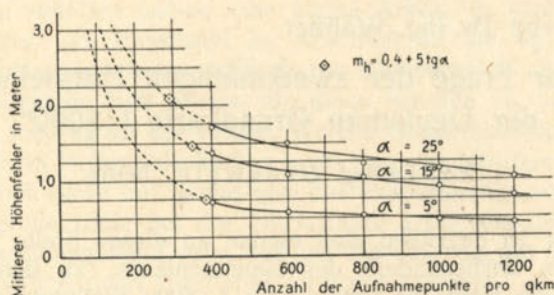
Die Schlußfolgerung „Bautechnik“ 1929, S. 444, rechts unten, besagt, daß der mittlere Fehler im Gesamtkostenanschlag eines Straßenbaues mit ansteigenden Geländeneigungen von 10 bis 30° bei Entwurfsbearbeitung nach altem Verfahren von 0,6 % auf 2,8 % anwächst, während bei Entwurfsbearbeitung nach dem neuen Verfahren sich eine Zunahme von 0,95 % auf 5,1 % ergibt. Diese Beträge halten sich in zulässigen Grenzen und mit dieser Feststellung hatten die damaligen Untersuchungen bewiesen, daß bei Geländeneigung bis 30° die aus 350 bis 500 Aufnahmepunkten entwickelte Höhenlinienkarte zur Aufstellung eines endgültigen Straßenentwurfes und dessen Kostenanschlages durchaus genügt. Bei größeren Geländeneigungen werden mehr Punkte bei der Kartenherstellung aufzunehmen sein. Diese Schlußfolgerung bezieht sich entsprechend den Versuchsgeländen auf großformige Landschaft. Kleingegliederte und unregelmäßige Formen benötigen natürlich stets für alle Geländeneigungen einen besonderen Zuschlag an Aufnahmepunkten, wobei auf Grund der Bildungsvorgänge der Erdoberfläche vielfach, und besonders bei wasserundurchlässigen Gebirgen, eine Abhängigkeit zwischen Kleingliederung und Geländeneigung besteht.

Es soll jetzt im Hinblick auf den Aufsatz von Regierungsvermessungsrat Schaefer überprüft werden, ob die topographische Karte 1:5000 ebenfalls noch vorgenannten Zweck erfüllt, wenn deren Höhenliniengenauigkeit der Formel  $m_h = 0,4 + \text{tg } \alpha$  entspricht. In vollem Umfang muß diese Frage nun wieder durch Vergleich der auf die zwei verschiedenen Arbeitsweisen gewonnenen Massenberechnungen gelöst werden. Jedoch gibt nachstehende Betrachtung eine untere Genauigkeitsgrenze.

Ich bringe nochmals die Tabelle über mittlere Fehler des Kostenanschlages  $m_K$  aus „Bautechnik“ 1935, S. 444 (Zeile 1 und 2), und füge neu hinzu die Zeilen 3 bis 5.



Ziff.	Geländeneigung	10°	14°	20°	30°
		±	±	±	±
1	$m_K$ bei Längen- und Querprofilaufnahmen ..	0,6 %	0,95 %	1,75 %	2,8 %
2	$m_K$ bei Benutzung der top. Karte aus 500 Aufnahmepkt. ....	0,95 %	1,7 %	3,1 %	5,1 %
3	$m_h$ der Karte Ziff. 2 aus Abb. 1 .....	0,9 m	1,15 m	1,35 m	1,7 m
4	$m_h 0,4 + 5 \operatorname{tg} \alpha$ .....	1,3 m	1,65 m	2,2 m	3,3 m
5	$m_K$ bei Benutzung der top. Karte mit $m_h = 0,4 + 5 \operatorname{tg} \alpha$ .....	1,4 %	2,5 %	5 %	9,8 %



Die Zeile 5 ist aus Zeile 2 auf Grund der Zeile 3 und 4 und unter Benutzung der Schaulinien „Bautechnik“ 1935, S. 439, umgerechnet, weshalb ich diese Schaulinien nochmals bringe.

Zur Berechnung der Zeile 5 wurde der mittlere Fehler des Kostenanschlages  $m_K$  proportional mit dem mittleren Höhenfehler der Karte gesetzt

$$m_K (\text{Ziff. 5}) = m_K (\text{Ziff. 2}) \cdot \frac{m_h (\text{Ziff. 4})}{m_h (\text{Ziff. 3})}$$

wozu die Formel aus „Bautechnik“ 1939, S. 434 (links unten), über den mittleren Fehler der Massen  $m_M$  rein mathematisch betrachtet die Berechtigung gibt. In der Praxis dürften aber — wie schon erwähnt — die so erhaltenen Werte sich als zu niedrig erweisen, da eben eine Karte mit niedriger Höhengengenauigkeit infolge der geringen Anzahl Aufnahmepunkte zwischenliegende Geländefalten unberücksichtigt läßt, was bei der Erdmassenberechnung dann als weitere, nur wieder durch eine praktische Vermessung zu ermittelnde Ungenauigkeit zum Ausdruck kommen muß. Sieht man von diesen noch notwendigen Zuschlägen der Zeile 5 obiger Tabelle ab, so besagen doch immerhin diese Zahlen, daß schon im regelmäßig geformten Gelände bei Neigung über 20 % die Unsicherheit in der Erdmassenberechnung nicht mehr tragbare Werte annimmt. Denn ein Kostenanschlag sollte im ganzen genommen auf 10 % sicher sein, wobei die Unsicherheiten für Brückenfundamente, für Felsvorkommen unter dem



Boden u. a. einen wesentlichen Anteil darstellen. Es sind auch die tatsächlichen Höhengenaugkeiten der bis jetzt entstandenen Grundkarten beim Reichsamt für Landesaufnahme, wie auch in Württemberg und Baden wesentlich höher als die nach der Formel  $0,4 + 5 \lg \alpha$  festgelegten Werte.

Vom Standpunkt des Bauingenieurs aus als einem hauptsächlichsten Benutzer der Karte 1:5000 ergibt sich denn auch aus obiger Betrachtung eine wohlbegründete Berechtigung, ja sogar eine Notwendigkeit solcher höheren Genauigkeit, wenigstens im Hügelland und Gebirge.

Zum Aufsatz von Dr. Ing. Walther

### „Zur Frage der zweckmäßigen Herstellung der Deutschen Grundkarte 1:5000“.

Von Dr.-Ing. Gronwald, Berlin.

Es ist sehr zu begrüßen, daß einmal an dieser Stelle von seiten des Kartenbenutzers, insbesondere des Bauingenieurs, zu den Genauigkeitsansprüchen an die Deutsche Grundkarte 1:5000 Stellung genommen wird, und es ist sehr wünschenswert, daß weitere Beispiele der Praxis einen Einblick vermitteln, wie weit die Deutsche Grundkarte mit der für sie vorgesehenen Genauigkeit den Bedürfnissen der Wirtschaft in der Tat entspricht. Nach den Ausführungen auf der Tagung des Beirats für das Vermessungswesen im Jahre 1924 wurde die Karte 1:5000 als Wirtschaftskarte, d. h. eine möglichst genaue Karte, geplant, die die vielseitigste Verwendung im öffentlichen Leben gestattet; sie sollte u. a. bei der Wasserstraßenverwaltung die Stelle der bisherigen Stromkarte einnehmen. Es wurden damals auch schon von berufener Seite Stimmen laut, die vor zu weit gehender Genauigkeit warnten und die Fehlergrenzen keineswegs niedriger zu wählen empfahlen, als für die versuchsweise Einführung vorgeschlagen war — für die Höhenlinien ein mittlerer Fehler  $\pm (0,4 + 5 \lg \alpha)$  m. Ferner wurde vorgesehen, zahlreichen, jederzeit sicher wieder feststellbaren Punkten Höhen beizuschreiben. Im Grundkarten-Erlaß vom 1. Oktober 1941 wird nur allgemein u. a. betont, daß in den Kreisen der Kartenverbraucher das Bedürfnis besteht nach einer einheitlichen topographischen Rahmenkarte von Deutschland, die im Maßstabsverhältnis größer ist und mehr Einzelheiten bringt als die Topographische Karte 1:25 000, und die insbesondere die bodenwirtschaftlich bedeutsamen Flurformen usw. erkennen läßt, und daß diesem unabweisbar gewordenen Bedürfnis die Deutsche Grundkarte 1:5000 abhelfen soll. Aus den bisher vorliegenden zahlreichen Erfahrungen ist die im Jahre 1924 vorgeschlagene Höhenliniengenauigkeit von  $\pm (0,4 + 5 \lg \alpha)$  m als ausreichend für die mannigfaltigsten Bedürfnisse befunden worden, wie auch Regierungsvermessungsrat Schaefer auf S. 38, Jahrg. 1943, dieser Zeitschrift ausführt.



Die Deutsche Grundkarte ist als amtliche Karte durch eine allgemeine Landesaufnahme für ganz Deutschland zu erstellen. Die Arbeit ist rein flächenmäßig gesehen so ungeheuer groß, daß sie wohl kaum durch allgemeine Berücksichtigung erhöhter Genauigkeitsansprüche, die nur für schmale Streifen benötigt werden, noch vergrößert werden darf. Die für Sonderzwecke benötigten, über die allgemeinen Bedürfnisse hinausgehenden Ansprüche müssen durch Ergänzungsmessungen befriedigt werden. Als solche Sonderzwecke wären auch die endgültigen Entwürfe für die Straßenbauten III. Ordnung anzusehen, wenn die aus der allgemeinen Landesaufnahme entstandene Karte 1 : 5000 allen sonstigen von der Technik, Wirtschaft und Wissenschaft billigerweise an sie zu stellenden Ansprüchen genügt. Wenn der Bauingenieur den allgemeinen Linienzug einer Straße festgelegt hat, so ist es für die Hauptvermessungsabteilungen, die ja die Karte 1 : 5000 zu schaffen haben, eine kleine Arbeit, in steileren Gebieten (über 20° Neigung) die Punktzahl im Anschluß an die im Gelände vorhandenen und eindeutig wieder auffindbaren Höhenpunkte über das im allgemeinen ausreichende Maß hinaus für diese Streifen zu verdichten. So wichtig also der Beitrag zu der Frage: Welche Genauigkeitsansprüche stellt der Bauingenieur an Höhenlinienkarten beim Bau von Straßen III. Ordnung? ist, so können doch diese auf Grund von Einzeluntersuchungen hergeleiteten Werte für die große Linie bei der Herstellung großmaßstäblicher Landeskarten nicht ausschlaggebend sein, soll die Herstellung der Karte in wirtschaftlich und zeitlich noch tragbaren Grenzen erfolgen.

## KLEINE MITTEILUNGEN.

Nachträge zum „Amtlichen Gemeindeverzeichnis für das Deutsche Reich 1939“, 2. Auflage, Berlin 1941. Das Ministerialblatt des Reichs- und Preußischen Ministeriums des Innern (MBliV.) 1943, Nr. 27, Sp. 1069—1082 hatte in Fortführung der bisherigen Zusammenstellungen\*) wieder eine tabellarische Übersicht über Namen- und Grenzänderungen von Gemeinden und Verwaltungsbezirken veröffentlicht. Nachfolgend werden in Fortsetzung des Auszuges im vorigen Heft dieser Zeitschrift die Angaben für die Reichsgaue Niederdonau, Oberdonau, Steiermark und Sudetenland gebracht. Die Anordnung ist wie bisher:

Land bzw. Reichsgau (gesperrt), Provinz, Regierungsbezirk (soweit vorhanden), Kreis-Nr. und -name; hinter dem Doppelpunkt die Veränderung.

\*) Vgl. Nachr. a. d. RVermDienst, 1942, Nr. 1, S. 56; 1943, Nr. 1—2, S. 58 und Nr. 4, S. 211.



## 1. Namenänderungen.

Niederdonau, 29/4 Amstetten: Z von Böhlerwerk an der Ybbs und Sonntagsberg; 29/15 Melk: E von Brunn an der Erlauf in Pöchlarn, Stadt; 29/27 Zwettl: E von Döllersheim, Markt (Rest), Heinreichs [Allentsteig] (Rest) und Loibenreith (Rest).

Oberdonau, 30/5 Gmunden: E von Reitern und Straßen.

Steiermark, 31/1 Graz, Stadt: E von Thondorf (teilw.) [aus 31/6 Graz Umgebung, Land] in die Stadt Graz; 31/6 Graz Umgebung, Land: E von Thondorf (Rest) in Gössendorf.

Sudetenland\*), Aussig, 36/5 Böhmisches Leipa: E von Arnsdorf, Markt in Haida, Stadt; 36/7 Brüx: E von Bergesgrün in Oberleutensdorf, Stadt; 36/9 Deutsch Gabel: E von Böhmischdorf, Markersdorf, Groß Walten (teilw.) in Deutsch Gabel, Stadt; 36/10 Dux: Z von Schellenken und Sobrusan zu Neubergen; 36/12 Gablonz an der Neiße: Z von Großhammer, Markt, Haratitz, Markt, Plaw und Schumburg an der Desse, Stadt (teilw.) zu Großhammer (Isergebirge), Z von Schumburg an der Desse, Stadt (Rest) und Tannwald, Stadt zu Tannwald (Isergebirge), Stadt, Z von Antoniwald, Josefthal, Markt und Unter Maxdorf zu Iserwald; 36/13 Hohenelbe: E von Friedrichsthal in Spindlermühle; 36/14 Komotau: E von Sporitz in Komotau, Stadt; 36/19 Teplitz-Schönau: E von Settenz und Turnn, Stadt in Teplitz-Schönau, Stadt; 36/20 Tetschen-Bodenbach: Z von Altstadt, Bodenbach, Stadt und Tetschen, Stadt zu Tetschen-Bodenbach, Stadt, E von Nieder Kamnitz und Ober Kamnitz in Böhmisches Kamnitz, Stadt; 36/21 Trautenaue: Z von Groß Aupa I und II zu Großaupa und von Schurz Dorf und Markt zu Schurz. — Eger, 36/27 Eger: E von Schlada in Franzensbad, Stadt; 36/31 Kaaden: E von Meretitz bei Klösterle an der Eger in Klösterle an der Eger, Stadt. — Troppau, 36/51 Mährisches Trübau: E von Deschna und Schwanenberg in Deutsch Brodek, Markt; 36/52 Neu Titschein: Z von Mährisches Wolfsdorf, Schlesisches Wolfsdorf zu Wolfsdorf bei Fulnek, Z von Groß Petersdorf und Heinzendorf zu Klein Petersdorf, E von Lautsch und Neudörfel in Jogsdorf und von Klogsdorf und Weska in Freiberg, Stadt; 36/54 Sternberg: Z von Ober Langendorf und Unter Langendorf, Markt zu Markt Langendorf; 36/55 Troppau: E von Branka, Kailowitz und Podoly in Grätz; 36/56 Wagstadt: E von Polanka in Königsberg, Stadt.

\*) Für die Kreise des Reichsgaues Sudetenland ist hier, abweichend vom MBliV., noch einheitlich die lfd. Nummer 36/... beibehalten, entsprechend der Bezifferung in der 2. Auflage des Amtl. Gemeindeverzeichnisses.

**Neue Sonderhefte.** In der Reihe der vom Reichsamt für Landesaufnahme herausgegebenen Sonderhefte zu den „Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst“ sind folgende Nummern neu erschienen:

Sonderheft 24/25. E. Buchar und K. Ledersteger, Das Zirkumzenital und die astronomische Ortsbestimmung aus gleichen Sternhöhen. Mit 4 Beilagen. Berlin 1943. Preis 4,— RM.

Sonderheft 28. Martin Ohlsberg, Druckbildherstellung in der Flachdrucktechnik. Berlin 1943. Preis 2,— RM.

Die Hefte sind durch den Buchhandel zu beziehen.



## KARTENSAMMLUNG UND BÜCHEREI.

Aus den Eingängen vom 1. 9. bis 31. 10. 1943

## I. KARTENSAMMLUNG.

## Allgemeines.

- A 20/24 Dr. Alfred Oestergaard. Neue Weltkarte — Kugelkarte — 1:37 000 000. Flächentreues Kartenbild der Länder und Erdteile. Berlin-Schöneberg 1943.  
 A 20/47 Carl Bernhard Starke. C. Opitz. Die Welt 1:30 000 000. Mit 37 Nebenkärtchen. Verlag Moritz Ruhl, Leipzig 1943.

## Europa.

- E 20/36 Richard Schwarz, Landkartenhandlung und Geogr. Verlag. Der Europäische Raum 1:6 000 000. Berlin 1943.  
 E 20/37 Eduard Gaebler's Verkehrskarte von Europa 1:3 000 000. 4 Blätter. Eduard Gaebler's Geogr. Inst. GmbH., Leipzig 1942.  
 E 20t Consociazione Turistica Italiana. Il Mediterraneo e gli stati limitrofi 1:3 000 000. Mit 1 Nebenkarte: Il Mediterraneo Romano nel II° secolo dopo Cristo 1:17 000 000. Ufficio Cartografico della C. T. I. Cartografo: P. Corbellini. Milano 1942.

## Deutschland.

- D 81 Reichsamt für Bodenforschung, Berlin. Geologische Karte des Deutschen Reiches 1:25 000. Blätter Nr.: 5565 (3244) Glatz, 5566 (3245) Königshain, 5567 (3246) Reichenstein, 5667 (3297) Landeck. 1938. Mit je einem Erläuterungsheft. Aufgenommen von L. Finckh †, E. Meister, G. Fischer und E. Bederke. Erläutert von E. Meister und G. Fischer. 1942.  
 D 350/25 Reichsstelle für das Schul- und Unterrichtsschrifttum. Deutscher Schulatlas. Heimatteil: Gau Hamburg, bearbeitet vom Nationalsozialistischen Lehrerbund Gau Hamburg. 1942. Verlag: Georg Westermann, Braunschweig, Berlin, Hamburg.  
 D 350/32 Reichswirtschaftsministerium, Hauptabteilung „Der Oberberghauptmann“. Die Sitze und Verwaltungsbezirke der Reichsbergbehörde 1:1 500 000. Stand vom 1. April 1943. Mit 2 Nebenkarten: Rheinisch-Westfälischer Steinkohlenbezirk, Oberschlesischer Steinkohlenbezirk 1:300 000. Richard Schwarz, Landkartenhandlung und Geogr. Verlag, Berlin 1943.  
 D 887 Stadtbauamt Belgard. Plan der Stadt Belgard 1:5000. Gefertigt durch Kulawik, Stadtgeometer. 1937.  
 D 888 Der Bürgermeister der Stadt Bublitz. Übersichtsplan der Stadt Bublitz 1:3000. Ohne Jahr.  
 D 889 Der Bürgermeister der Stadt Demmin. Plan von Demmin 1:5000. 1940.  
 D 1280/4 Stadtbauamt Jüterbog. Karte von Jüterbog 1:5000. Angefertigt nach katasteramtlichen Unterlagen. 1937.  
 D 1280/5 Der Bürgermeister der Stadt Kremmen. Stadt Kremmen 1:2500. Angefertigt: Arch. Kossack. 1940.  
 D 1280/6 Der Bürgermeister der Stadt Kremmen. Stadt Kremmen und Umgegend 1:10 000. Verlasser: Karl Kossack, Kremmen. 1940.



- D 1280/7 Der Bürgermeister der Stadt Beeskow. Plan des Stadtbezirks Beeskow 1:5000. Ohne Jahr.
- D 1280/8 H. Richter, Direktor der städt. Werke. Plan der Stadt Wriezen 1:10 000. Zweite Auflage. 1934.
- D 1280/9 Vermessungsbüro des Vermessungsingenieurs von Elsner-Wittenberge P. Plan der Stadt Perleberg 1:5000 und 1:8000. Mit 1 Nebenkarte: Perleberg und Umgebung 1:300 000. 1938.
- D 1280/10 Stadtbauamt Templin. Schneider, Stadtbaumeister. Plan der Kreisstadt Templin in der Uckermark 1:5000. Aufgestellt 1928, ergänzt 1932.
- D 1280/11 Stadtbauamt Pritzwalk. Lage-Plan der Stadt Pritzwalk 1:2500. 1936.
- D 1280/14 Stadtbauamt Schwedt. Plan der Stadt Schwedt mit näherer Umgebung 1:5000. 1940.
- D 1280/17 Alfred Frank. Luckenwalde 1:10 000. Gezeichnet im Auftrage der Stadtverwaltung. 1937.
- D 1280/18 Stadtbauamt Angermünde. Plan der Kreisstadt Angermünde 1:5000. Zeichnung: K. Tschammer, Hohenneuendorf. 1939.
- D 1280/19 Jul. Straube, Berlin. Stadtplan von Oderberg (Mark) 1:10 000. Ohne Jahr.
- D 1280/20 Ohne Verfasser-Angabe. Bernau, Kreis Niederbarnim 1:7500. Ohne Jahr.
- D 1280/23 Stadtbauamt Oranienburg. Oranienburg und Umgegend 1:5000. 2 Blätter. 1940.
- D 1280/24 Stadtbauamt Wittenberge. Übersichtskarte der Stadt Wittenberge und Umgebung 1:10 000. Bearb. durch Verm.-Techn. Engfer. 1940.
- D 1280/26 Vermessungsamt Rathenow. Rathenow 1:5000. Ohne Jahr.

#### Privatindustrie.

- D 308 Ravensteins Bürokarte 1:300 000. Bl. Nr.: 48 Regierungsbezirke Mainfranken und Ober- und Mittelfranken, 49 Reg.-Bez. Niederbayern und Oberrhein. Ravensteins Geographische Verlagsanstalt. Frankfurt/Main 1943.
- D 350/27 Richard Schwarz. Karte der politischen Gliederung des Großdeutschen Reiches 1:3 000 000. Mit den Gauen der NSDAP. Stand 1. 5. 1943.
- D 350/28 Desgl. Landeswirtschaftsämter. Stand 1. 9. 1943.
- D 350/29 Desgl. Mit den Gebieten der Reichstreuhänder der Arbeit und der Landesarbeitsämter. Stand 1. 5. 1943.
- D 350/30 Desgl. Mit den Wehrkreisabgrenzungen. 1943.
- D 350/31 Desgl. Mit den Landesbauernschaften-Getreidewirtschaftsverbänden. 1943.
- D 350/35 Desgl. Mit den Gauwirtschaftskammern und Wirtschaftskammern. Stand 1. 6. 1943. Richard Schwarz, Landkartenhandlung u. Geogr. Verlag, Berlin.
- D 1470/10 Prof. Dr. Johannes Müller, Weimar. Thüringen-Atlas der Reichsarbeitsgemeinschaft für Raumerforschung 1:500 000. Lieferung XI (Schlußlieferung). Blätter Nr.: 2 u. 3. Geologische Übersicht. Bearbeiter: Prof. Dr. F. Deubel und Dr. H. J. Martini. 4. Übersichtskarte der Bodenarten Thüringens auf geologischer Grundlage. Bearb. im Reichsamt für Bodenerforschung, Zweigstelle Jena, von Dr. W. Hoppe. 5. Klima I Temperaturen. Nach Karten des Reichsamts für Wetterdienst in Berlin. Verlag Justus Perthes, Gotha 1942.

#### Protectorat Böhmen und Mähren.

- O 1661 Landesvermessungsamt Böhmen und Mähren, Prag. Kladno 1:10 000. 1943.

#### Osteuropa.

- R 67 Columbus-Karte: Europäisches Rußland. Mittlerer Maßstab 1:5 000 000. Verlag von H. Wagner & E. Debes, Leipzig und Columbus-Verlag Paul Oestergaard K.-G., Berlin-Lichterfelde 1943.

#### Kroatien.

- Bs e 476 Consociazione Turistica Italiana. Croazia 1:500 000. Milano 1942.



## II. BÜCHEREI.

## Astronomie.

- Dc 196 **Niethammer, Th.** Die simultane Bestimmung der Zeit, der Polhöhe und des Azimutes zweier Richtungen. Separatabdruck aus den Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band LIV. Basel: Buchdruckerei E. Birkhäuser & Cie 1943. 133/43
- Y 172 **Papritz, Johannes — Schmauch, Hans.** Kopernikus-Forschungen. Mit Beitr. v. Alexander Berg, Eugen Brachvogel, Kurt Forstreuter, Johannes Papritz, Hans Schmauch, Friedrich Schwarz. Aus der Reihe: „Deutschland und der Osten“, Bd. 22. Leipzig: S. Hirzel 1943. 13/41

## Mathematik. Projektionslehre.

- Bb 214 **Hensel.** Graphische Hypotenusentafeln zur Prüfung rechtwinkliger Katheten und Hypotenusen. „Sammlung Wichmann“. Berlin-Grünwald: Herbert Wichmann 1943. 114/43

## Kartographie.

- Ke 212 **Kosack, Dr. H.-P.** Die Fortschritte der Kartographie des Auslandes in den Jahren 1941 und 1942. Sonderdruck aus „Jahrbuch der Kartographie“. Leipzig: Bibliogr. Inst. 1942. 39/42
- Ke 227 **Krallert, Wilfried.** Die Planmäßigkeit auf dem Gebiet sowjetrussischer kartographischer Arbeiten. Sonderdr. aus „Deutsches Archiv für Landes- und Volksforschung“, Jahrg. VII, Heft 1/2. Leipzig: S. Hirzel 1943. 117/43
- V 165 **Praesent, Dr. Hans.** Geographie und Kartographie. Sonderdr. aus den „Jahresberichten des Literarischen Zentralblattes“. Jahrgang 19, 1942 Leipzig 1942. Kart. B 1

## Geographie, Heimatkunde, Geologie, Kolonien.

## Europa:

- Pa II 208 **Müller, Dr. Theodor.** Landeskunde des Generalgouvernements. Krakau: Burgverlag GmbH. 1943. 128/43
- Pa II 213 **Grothe, Prof. Dr. Hugo.** Das Deutsche Volkstum der Slowakei in Vergangenheit und Gegenwart. Eine volks-, siedlungs- und kulturkundliche Skizze (mit einem Verzeichnis ehem. u. heutiger deutscher Ortsnamen nebst ihrer slowak. Benennung). München-Starnberg: Selbstverlag 1943. 126/43
- Pa II 230 **Geisler, Dr. Walter.** Landschaftskunde des Warthelandes. Teil 2: Die Siedlungs- und Wirtschaftslandschaft. „Schriften der Landeskundlichen Forschungsstelle des Reichsgaues Wartheland“. Reihe I: Allg. Landeskunde, Band 2. Posen: Hirt-Reger u. v. Schroedel-Siemau Verlag 1943. 129/43
- Pa III 172 **Pauser, Franz.** Völker und Staaten am Montblanc. Berlin: Volk und Reich Verlag 1939. 130/43
- Pa III 232 **v. Gadolin, Dr. Axel.** Ostkarelien — das finnische Grenzland. München 8: Carl Röhrig-Verlag K.-G. 1943. 131/43
- Pa III 452 **Hohenstein, Dr. Hans.** Die Ostkartei. Grundriß des Neuaufbaues im Osten. Berlin: Zentralverlag der NSDAP. Franz Eher Nachf. GmbH. Lieferung Juli 1943. 63/43
- Oe 155 **Reichskommissar für die Ukraine, Abt. Innere Verwaltung.** Übersicht über die Verwaltungseinteilung des Reichskommissariats Ukraine nach dem Stand vom 1. Januar 1943. Rowno: Selbstverlag 1943. 115/43



- Y 172 Krannhals, Detlef. Danzig und der Weichselhandel in seiner Blütezeit vom 16. zum 17. Jahrhundert. Aus der Reihe: „Deutschland und der Osten“, Bd. 19. Leipzig: S. Hirzel 1942. 13/41

#### Außereuropa:

- Pa IV 266 Bohner, Theodor. Afrika, Erdteil europäischer Verheißung. Leipzig: Felix Meiner-Verlag 1941. 132/43
- Pa IV 707 Hafemann, Dr. Dietrich. Niederschlag, Regenfeldbau und künstliche Bewässerung in der Südafrikanischen Union. „Forschungen zur Kolonialfrage“, Bd. 12. Würzburg: Konrad Triltsch 1943. 127/43

#### Statistik. Ortsverzeichnisse. Staatshandbücher.

- Ob 51 Reichs- und Preußisches Ministerium des Innern. Namen- und Grenzänderungen von Gemeinden und Verwaltungsbezirken. I. Festsetzung von besonderen Bezeichnungen, Namenänderungen von Gemeinden u. Gemeindeteilen u. Grenzänderungen von Gemeinden. Sonderdruck a. d. „Ministerialblatt des Reichs- u. Pr. Min. d. I.“, Jahrg. 1943, Nr. 27. 1943. 113/43
- Od 27 Verordnungs- und Amtsblatt des Chefs der Zivilverwaltung in der Untersteiermark. Nr. 24, ausgegeben in Graz am 26. 8. 43. Verordnung über die Namen der Gemeinden, Katastralgemeinden und Ortschaften in der Untersteiermark vom 4. Juni 1943. 134/43
- Oe 137 Generalpostkommissar Ostland. Verzeichnis der Postorte im Ostland. Teil II: Generalbezirk Lettland, Juli 1943. Riga: Selbstverlag. 240/42

#### Tätigkeitsberichte, Jahrbücher, Kataloge. (Vgl. auch die Sachgebiete.)

- Dc 183 Comité National Français de Géodésie et Géophysique. Années 1939 et 1940. Compte rendu publié par le Secrétaire Général G. Perrier et le Secrétaire-Adjoint P. Tardi. Au Secrétariat Général du Comité Français, Paris. 150/38
- Kf 200 Heinz Denckler-Verlag. Auskunftsbuch für das Graphische Gewerbe in Berlin und der Mark Brandenburg. 34. Jahrgang 1943/44. Berlin 1943. 122/43
- Q 103 Kgl. Ung. Palatin-Joseph-Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, Fakultät für Berg-, Hütten- und Forstwesen zu Sopron. Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abt. Band XIV. Sopron. Selbstverlag 1942. 101/29

#### Verschiedenes.

#### (Recht, Verwaltung, Sprachen, Persönliches.)

- T 180 Löffström, K. Saksalais-suomalainen fotogrammetrian sanasto. (Deutsch-finnisches photogrammetrisches Wörterverzeichnis.) Sonderdruck aus „Maanmittaustieteiden seuran julkaisu“ Nr. 5. Helsinki 1943.
- V 143 Krabbe, Dr. Wilhelm. Bibliographie. Ein Hilfsbuch für Bibliothekspraktikanten. 5. Aufl. Leipzig: Einkaufshaus für Büchereien GmbH. 1943. 123/43
- W 123 Schroeder, Max. Beihilfen- und Unterstützungs-Bestimmungen für Behördenangehörige und Soldaten der alten und neuen Wehrmacht unter besonderer Berücksichtigung der Fürsorge-Bestimmungen für Kriegs- und Einsatzbeschädigte. 5. Aufl. München—Berlin: C. H. Beck 1943. 59b/33
- W 246 Pfundtner, Hans — Rüdiger, Hans. Die Bücher der Verwaltung. Bd. 18: Dr. W. Scheerbarth, Abgabenrecht. Berlin—Wien: Industrieverlag Spaeth & Linde 1943. 178/42
- W 258 Hauptamt für Technik der NSDAP., der Deutschen Arbeitsfront und der Reichswirtschaftskammer. Taschenbuch für Erfinderbetreuer. München: Verlag der Deutschen Technik GmbH. 1943. 116/43



## III. ZEITSCHRIFTEN-AUSLESE.

## Abkürzungen:

A. d. G.	Annales de Géographie	M. D. G. Ph.	Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie
A. d. H.	Annalen der Hydrographie	N. A. G.	Tijdschrift van het Kon. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap, Amsterdam
Afr. Rdsch.	Afrika-Rundschau	O.	Ostland
Arch. E. W.	Archiv für Eisenbahnwesen	Ph. K.	Photographische Korrespondenz
A. Schweiz.	Allgemeine Schweizerische Militär-Zeitung	P. M.	Petermanns Mitteilungen
B. d. Ph.	Bulletin de Photogrammétrie	R. d. C.	Rivista del Catasto e dei Servizi tecnici erariali
Boll. Geod.	Bollettino Geodetico (Beilage zu U.)	R. R.	Raumforschung und Raumordnung
Boll. S. G. I.	Bollettino della R. Società Geografica Italiana	Schweiz. Z. f. V.	Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen u. Kulturtechnik
D. Arch. L. u. V.	Deutsches Archiv für Landes- und Volksforschung	St.	Die Straße
D. B.	Deutsches Buchgewerbe	S. W.	Süddeutsche Wasserstraßen
D. Dr.	Das deutsche Druckgewerbe	U.	L'Universo
G. A.	Geographischer Anzeiger	Vjpl.	Der Vierjahresplan
G. G. W.	Mitteilungen der Geographischen Gesellschaft, Wien	W. M.	Wehrtechnische Monatshefte
Gl.	Globen	W. u. St.	Wirtschaft und Statistik
Gp.	Geopolitik	Z. d. V. M. E.	Zeitung des Vereins Mitteleuropäischer Eisenbahnverwaltungen
Gr. N.	Graphische Nachrichten	Zeiß-N.	Zeiß-Nachrichten
G. T.	Geografisk Tidsskrift	Z. f. E.	Zeitschrift für Erdkunde
G. Z.	Geographische Zeitschrift	Z. f. Geoph.	Zeitschrift für Geophysik
I. A. A.	Ibero Amerikanisches Archiv	Z. f. I.	Zeitschrift für Instrumentenkunde
Jbg.	Jomsburg	Z. f. K. u. H.	Zeitschrift für Karst- und Höhlenkunde
J. d. G. et T.	Journal des Géomètres experts et Topographes français	Z. f. V.	Zeitschrift für Vermessungswesen
K. e. L.	Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde	Z. G. f. E.	Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin
Lpz. Vs.	Leipziger Vierteljahrsschrift für Südosteuropa	O. Zem.	Zememirsky Obzor
M.	Maanmittaus		
M. a. M.	Mitteilungen a. d. Markscheidewes.		

## Astronomie.

Killian, K. Verfahren zur Bestimmung des astronomischen Meridians aus Sonnenbeobachtungen. Ph. 4/42.

## Mathematik. Projektionslehre.

Friedrich, K. Zwei aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitete Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate usw. Z. f. V. 5—6/43. — Hauer, F. Entwicklung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene bis einschließlich Glieder 4. Ordnung. Z. f. V. 9/43. — Hunger, F. Die ebene, konforme und formtreue Abbildung eines geodätischen Strahlenbüschels. Z. f. V. 8/43. — Kamela, Cz. Die Lösung der Normalgleichungen nach der Methode von Prof. Dr. T. Banachiewicz (sogen. „Krakovianenmethode“). Schweiz. Z. f. V. 9 u. 10/43. — Leemann, W. Über eine praktische Anwendung der Regula Falsi. Schweiz. Z. f. V. 10/43. — Leemann, W. Verschiedenartige Auflösungen einer Minimumsaufgabe. Schweiz. Z. f. V. 9/43. — Lindinger, E. Über die ausgleichende Gerade. Z. f. V. 7/43. — Töpfer, G. Teilung eines Dreiecks nach Determinanten. Z. f. V. 8/43.

## Vermessungskunde.

Wittke, H. Ein Vordruck im Hochformat für Winkelmessung. Z. f. V. 9/43.

## Höhere Geodäsie. Triangulation.

Buchwalder, A. J. Geodätische Grundlagen der Vermessungen im Kanton Bern. Schweiz. Z. f. V. 8, 9, 10/43. — Näbauer, Prof. Dr. M. Beziehungen am Meridian des Erdellipsoids. Z. f. V. 7/43. — Wittke, H. Reihenentwicklungen für die isometrische Breite. Z. f. V. 7/43.



## Photogrammetrie.

Bachmann, W. Ch. Note sur l'article „La solution dite numérique du problème fondamental de la photogrammétrie“. Schweiz. Z. f. V. 9/43. — Hubeny, K. Photogrammetrische Aufnahmen mit geteilter Eintrittspupille. Ph. 4/42. — Nowatzky, F. Bildtriangulation in festpunktarmen Gebieten. Ph. 4/42.

## Instrumentenkunde.

Kilchling, K. Ein dynamisch-elastischer Schweremesser. Z. f. Geoph. 1—2/43. — Vogg, A. Die Genauigkeit des Zielens mit Fernrohren. Z. f. V. 9/43.

## Kartographie.

Baumgart, G. Zur Normung unserer Kartenwerke. Z. f. V. 5—6/43. — Breitfuß, Prof. Dr. L. Die neueste Karte Antarktikas. P. M. 9—10/43. — Carlberg, B. Die neuen Kartenwerke der Sowjets. P. M. 9—10/43. — Carlberg, Dr. B. Zeichnen kartographischer Raumbilder. P. M. 9—10/43. — Tank, R. Die Orts- und Flurnamen auf den amtlichen Landeskarten der Schweiz. Schweiz. Z. f. V. 9 u. 10/43. — Voorbeijtel Cannenburg, W. Tasman's kaart van zijn Australische ontdekkingen. N. A. G. 5/43.

## Reproduktionswesen.

von Biehler, Dr. A. Die moderne Vervielfältigungstechnik von Schriftstücken, Zeichnungen und Druckschriften. Ph. K. 9—10/43. — H. E. H. Die Behandlung glattgeschliffener Druckplatten für die Zinkdruck- und Offsetkopie. Graph. Nachr. 7—9/43. — Odin, Dr. A. Antiqua als Weltschrift. D. B. 3—4/43. — Schmitt, L. Geräte für die Photokopie und die Reproduktion im Vermessungswesen. Z. f. V. 7/43. — Schr., M. Technik und Ausdrucksmittel der manuellen graphischen Verfahren. Graph. Nachr. 7—9/43.

## Außerdeutsche Landesaufnahme.

Rainesalo, A. Die Aufnahme des Boulder Dammes in U. S. A. (finn.). T. 3—4/42.

## Kataster, Landeskultur, Markscheidewesen.

Günzler. Zur Neugestaltung der Umlegungsverfahren. Z. f. V. 8/43. — Kunde, G. Wirtschaftlichkeit bei Fortführungsmessungen. Z. f. V. 9/43. — Tichy, Dr. Al. Zur Teilung von trapezförmigen Grundstücken. Z. f. V. 8/43.

## Geophysik und Erdmagnetismus. Magnetische Landesaufnahme.

Berth, A. Numerische Werte der Masse und Dichte der Erde sowie ihrer Hauptträgheitsmomente. Z. f. Geoph. 1—2/43. — Fanslau, G. Vorläufige Ergebnisse der erdmagnetischen Beobachtungen in Niemegk in den Jahren 1941 und 1942. Z. f. Geoph. 1—2/43. — Haalck, H. Zur Kuhn-Rittmannschen Theorie über die Beschaffenheit des Erdinneren. Z. f. Geoph. 1—2/43.

## Geographie, Heimatkunde, Geologie, Kolonien.

Auer, V. Über die Bedeutung der Forschungstätigkeit der finnischen Forscher in Kola, Ostkarelien und Ingermanland (finn.). T. 1—2/42. — Bartz, Dr. F. Alaska, Randland Nordamerikas. Z. f. E. 8—9/43. — Finsterwalder, R. Über die wissenschaftlichen und fliegerischen Ergebnisse der Deutschen Antarktischen Expedition 1938—1939. Ph. 4/42. — Fugmann, E. R. Das Generalgouvernement. Ein landeskundlicher Abriß. G. A. 15—18/43. — Ilvessalo, Y. Die durchschnittliche Bewaldung der Landschaften in den verschiedenen Gewässergebieten Finnlands (finn.). T. 1—2/42. — Irvola, S. Über die geographischen Grenzen von Turku (finn.). T. 1—2/42. — Jaeger, Prof. Dr. F. Die Atlasländer. Z. f. E. 8—9/43. — Krebs, Prof. Dr. N. Die Wege von Indien nach China. Z. f. E. 8—9/43. — Kriechbaum, E. Der Reichsgau



Oberdonau. G. A. 15—18/43. — Prillinger, F. Das Salzkammergut. G. A. 15—18/43. — De Roever, J. G. Gemeentegrenzen in Westfriesland. N. A. G. 5/43. — Schorta, Dr. A. Ziele der Ortsnamenkunde in der Schweiz. Schweiz. Z. f. V. 8/43. — Schultz, Prof. Dr. A. Das pazifische Rußland. Z. f. E. 8—9/43. — Tammekann, A. Die geographischen Großräume Europas (finn.). T. 1—2/42. — Thom, Dr. R. Marokko im großeuropäischen Vorfelde. Z. f. E. 8—9/43.

#### Verschiedenes.

Schmehl, H. Friedrich Robert Helmert, zum 100. Geburtstag des Meisters der Geodäsie. Z. f. V. 7/43. — Soyka, Th. Das Urheberrecht an Werken der Vermessungstechnik. Z. f. V. 8/43. — Speidel. Reg.- und Steuerrat a. D. Hans Lotz, \* 5. Mai 1861, † 7. Juli 1943, zum ehrenden Gedächtnis. Z. f. V. 9/43.

## BESPRECHUNGEN.

Prokeš, Ant. Tachymetertafeln „TATA 100“ zur Berechnung der Horizontalentfernungen und Höhenunterschiede von tachymetrisch bestimmten Punkten für zentesimale Teilung. 109 Seiten, Format 17 × 24 cm. Berlin-Grunewald: Verlag Herbert Wichmann 1943. Preis kart. 7,50 RM.

Für die Tachymetrie mit Instrumenten neuer Kreisteilung liegen eine Reihe numerischer, mechanischer und graphischer Rechenhilfsmittel vor. In Heft 4/1940 dieser Zeitschrift sind die ausführlichen und umfangreichen Tachymetertafeln von Reger und in Heft 5/1942 die tachymetrische Hilfstafel von Rohrer besprochen worden. Für den Feldgebrauch werden wohl die graphischen Tafeln und vor allem der Rechenschieber bevorzugt, die bei geringem Umfang und großer Übersichtlichkeit hinreichend genaue Ergebnisse liefern, während die umfangreicheren Zahlentafeln und die mechanischen Hilfsmittel in der Hauptsache für die häusliche Berechnung bestimmt sind; zum Teil ist für den Gebrauch der Zahlentafeln die Benutzung der Rechenmaschine vorausgesetzt. Derartige Tafeln hat der Autor der hier zu besprechenden Tafeln bereits 1929 hergestellt. Bei der Schaffung der vorliegenden Tafeln war es sein Bestreben, Tafeln von kleinstem Format und einer solchen Winkelspanne anzulegen, daß sie in jedem praktisch möglichen Falle zu gebrauchen sind.

Die bekannte Näherungsformel für die Entfernung  $E = kl \cos^2 \alpha$  ist umgeformt in  $E = kl - kl(1 - \cos^2 \alpha) = kl - kl \sin^2 \alpha$ , womit für die am häufigsten vorkommenden kleinen Höhen- und Tiefenwinkel sehr kleine Tafelwerte erreicht wurden. In den Tafeln sind zwei nebeneinander liegende Seiten für jeden Grad von  $0^\circ$  bis  $49^\circ$  bestimmt; die linke Seite enthält die Entfernungsreduktion  $kl \sin^2 \alpha$ , die rechte Seite den Höhenunterschied  $kl \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , und zwar für Winkel von  $2^\circ$  zu  $2^\circ$ . Die Tafelwerte sind für  $kl = 10, 20, 30 \dots 100$  in cm angegeben; die übrigen Vielfachen errechnen sich durch Verschiebung des Kommas und Addition der einzelnen Teilwerte. Wo ausnahmsweise größere Höhen- und Tiefenwinkel als  $50^\circ$  auftreten, können die Tafeln auf Grund der angepaßten Formeln  $E = kl(1 - \cos^2(100^\circ - \alpha)) = kl \sin^2(100^\circ - \alpha)$  und  $h = kl \frac{1}{2} \sin^2(100^\circ - \alpha)$  verwendet werden, so daß alle Entfernungen und Höhen von  $0^\circ$  bis  $100^\circ$  berechnet werden können. Für Instrumente mit Additionskonstante  $c$  des Fernrohrs sind auf Seite 108 und 109 Hilfstafeln  $c \cdot \cos \alpha$  und  $c \cdot \sin \alpha$  angefügt, und zwar für  $c = 0,10$  bis  $0,55$  m.

Die Anordnung der Tafeln muß als sehr zweckmäßig bezeichnet werden. Papier und Druck sind vorzüglich. Die handlichen Tafeln werden sich zweifellos viele Freunde erwerben.

Dr. Gronwald.



Hristow, Dr. Wl. K. Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. VI, 80 Seiten, mit 9 Abbildungen im Text. Leipzig—Berlin: Verlag und Druck B. G. Teubner 1943.

Das vorliegende Buch des Chefs des Astronomischen Dienstes des Militär-geographischen Instituts zu Sofia füllt eine fühlbare Lücke auf dem Markt der geodätischen Fachliteratur. Die grundlegenden Werke über die Gauß-Krügerschen Koordinaten waren seit Jahrzehnten vergriffen. Wenn auch die neuen Lehrbücher dieses Kapitel ziemlich eingehend darstellen — es sei nur auf die neueste Ausgabe des Handbuches für das Vermessungswesen von Jordan, III. Band, 2. Halbband, bearbeitet von Professor Dr. Eggert verwiesen —, so übersteigt doch der Umfang der Materie den Rahmen eines allgemeinen Lehrbuches. Der Verfasser hat bereits in mehrfachen Aufsätzen in der Zeitschrift für Vermessungswesen die meisten Kapitel seines Buches behandelt. Für den Studierenden sowohl wie für den Praktiker ist es aber in hohem Maße erwünscht, das gesamte Formelmateriale in handlicher Form zur Verfügung zu haben, und der Verfasser hat auch den Wünschen des Praktikers besonders Rechnung getragen, indem er den praktischen Teil mit zahlreichen Beispielen versah und dadurch das Buch zu einem unentbehrlichen Ratgeber bei allen geodätischen Rechnern machen wird. Im ersten theoretischen Teil behandelt Verfasser zunächst die sphärischen geographischen, Soldnerschen, Mercator- und Gauß-Krügerschen Koordinaten, geht sodann zum Ellipsoid über und behandelt dort die gleichen Koordinaten. Es folgen Transformationsformeln, Potenzreihen zwischen den Gauß-Krügerschen und den geographischen Koordinaten und Reihenentwicklungen für Meridiankonvergenz und Vergrößerungsverhältnis, die Lösung der ersten und zweiten geodätischen Hauptaufgabe und schließlich Richtungs- und Entfernungsreduktionen und Transformationsformeln zwischen zwei benachbarten Koordinatensystemen. Der praktische Teil enthält Formelzusammenstellungen und Tabellen, die sich im allgemeinen auf den Bereich zwischen  $47^\circ$  und  $55^\circ$ , teilweise auch nur wegen Platzmangels auf  $50^\circ$  bis  $51^\circ$  nördlicher Breite beziehen. Ausführliche Zahlenbeispiele runden die Darstellung ab, die durch die klaren Ausführungen ein zusammenfassendes Bild über die Gauß-Krügerschen Koordinaten vermittelt.

Mehrfach weist Verfasser auf die Weltbedeutung der Gauß-Krügerschen Koordinaten hin. Er zeigt die Verbreitung im letzten Jahrhundert und das ständige Wachsen ihrer Beliebtheit, so daß er zu dem Schluß kommt, daß die Gauß-Krüger-Koordinaten die Weltkoordinaten, die einzigen internationalen Koordinaten seien. Die Entwicklung der letzten Jahre hat diesen Vermutungen Rechnung getragen, und es ist daher wohl anzunehmen, daß dieses Büchlein besonders viele Freunde in der gesamten Welt finden wird, was im Hinblick auf die klare und dabei gedrängte übersichtliche und zuverlässige Darstellung nur gewünscht werden kann. G i g a s.



