

Hommage de l'auteur

ANTONI ŁOMNICKI

v. p. 29-31

MATEMATYCZNA ANALIZA
PROJEKCJI
MAPY MIĘDZYNARODOWEJ
W SKALI 1:1000000

WARSZAWA 1927 R.

projekcją, przyjętą przez Komitet Międzynarodowy, z rozmaitemi „urzędowymi” i „nieurzędowymi” modyfikacjami. W pierwszej części niniejszego artykułu wyprowadzam wzory matematyczne tej projekcji i obliczam tablice współrzędnych, w drugiej zaś wyprowadzam wzory na zniekształcenia i znowu ilustruję wyniki zestawieniami tabelarycznymi. Przy wykonywaniu rachunków używałem 10-cyfrowych tablic logarytmicznych J. Petersa (3 tomy r. 1919, 1922. Berlin. Preussische Landesaufnahme) i 7-cyfrowych Köhlera (16 wyd. 1898, Lipsk). Tekst instrukcji zaczerpnąłem z urzędowego źródła: Resolutions and Proceedings of the International Map Committee assembled in London, November 1909 (London, 1910), i „Proceedings of the Int. M. Committee 1910” (London, 1912).

2. Projekcja Mapy Międzynarodowej i jej wzory matematyczne.

Definicja projekcji (rzutu) przepisanej dla międzynarodowej mapy w skali 1:1,000,000 jest zawarta w instrukcji, wydanej przez Komitet Międzynarodowy w r. 1910. Brzmienie tych ustępów instrukcji, które dotyczą samej projekcji, podajemy tu w dosłownym przekładzie z języka angielskiego:

„Każdy arkusz mapy ma pokrywać powierzchnię zawierającą 4° szer. geogr. i 6° długości geogr. Odstępy skrajnych południków każdego arkusza liczy się co 6° poczynając od Greenwich, a skrajne równoleżniki mają odstęp 4 stopniowe poczynawszy od równika. Rzut ma spełniać następujące warunki:

I południki mają być liniami prostymi;

II równoleżniki mają być łukami kół, których środki leżą na przedłużeniu środkowego południka.

Wskazaniem jest użycie projekcji łatwej konstrukcyjnie i takiej, by cztery arkusze stykające się z czterema bokami każdego arkusza przylegały do nich ściśle.

Rzut wielostożkowy zmodyfikowany z prostolinjowemi południkami spełnia te dwa warunki.

Konstrukcja rzutu przedstawia się więc w sposób następujący. Każdy arkusz ma być niezależnie od innych odniesiony do swego środkowego południka. Południk środkowy przedstawia się odcinkiem linii prostej, podzielonym na stopnie. Przez tak wyznaczone punkty należy wykreślić koła, przedstawiające równoleżniki. Środki tych kół leżą na przedłużeniu środkowego południka. Promień każdego koła wynosi $N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi$, gdzie $N(\varphi)$ oznacza odcinek normalnej ograniczony osią małą, a φ jest szerokością geograficzną uważanego równoleżnika. Wzdłuż skrajnych równoleżników, t. j. wzdłuż kół tworzących północną i południową krawędź arkusza należy odciąć stopnie długości w ich prawdziwej wielkości w danej skali. Proste łączące odpowiadające sobie punkty na tych skrajnych równoleżnikach przedstawiają południki. Jako południki

zachowane wiernie w danej skali (which are true to scale) obiera się dwa południki odchylone o 2° na wschód i na zachód od środkowego południka. Aby to uzyskać, należy prawdziwą długość środkowego południka zmniejszyć o małą poprawkę, podaną w osobnej tabelce”.

Do tej instrukcji dołączone są tablice, podające: a) prawdziwe długości łuków od 0° do 4°, od 4° do 8 itd..., od 56° do 60°, poprawki wymienione w instrukcji i poprawione długości łuków; b) współrzędne prostokątne x i y punktów leżących na skrajnych równoleżnikach każdego arkusza w odstępach 1°, 2°, 3°, przyczem oś x ów brana jest jako styczna do danego koła w punkcie przecięcia z obrazem środkowego południka. Odcięte x podano w pierwotnej publikacji (w r. 1910) błędnie, a w r. 1912 wydano sprostowane wartości x . Jako długość promienia równika przyjęto $a = 6378'24$ km., a jako połówkę małej osi $b = 6356'56$ km.

Instrukcję przytoczyłem tu według tekstu angielskiego; tekst niemiecki i francuski różnią się w niektórych drobniejszych szczegółach. Nie będę się tu wdawał w krytykę samego brzmienia instrukcji, jakkolwiek niejedno w nich razić może matematyka. Instrukcja ta jest jedyną autentyczną definicją użytej projekcji i na niej musimy się oprzeć w dalszych rozważaniach.

Z powyższej instrukcji wynika, że ma być użyty rzut wielościenny, a mianowicie każda krzywa ścianka na kuli zawierająca 4° długości geograf. a 6° szerokości geogr. ma być odwzorowana na płaszczyźnie oddzielnie, z osobnym układem współrzędnych: środkowy południk każdej ścianki odtworzy się jako linia prosta, którą obierzemy za oś y ów dla uważanej sekcji.

Odwzorowanie każdej poszczególniej sekcji jest rzutem wielostożkowym amerykańskim z dwoma modyfikacjami: 1) obrazami południków są linie proste, a nie krzywe, jak w oryginalnym rzucie wielostożkowym amerykańskim; 2) odcinek środkowego południka zawarty między skrajnymi równoleżnikami mapy nie jest równy łukowi odpowiedniego południka na elipsoidzie lecz krótszy o pewną wielkość, nazwijmy ją: k .

Punkty leżące na skrajnych równoleżnikach oblicza się zatem według praw zwykłego amerykańskiego rzutu wielostożkowego, o ile przyjmujemy na razie oś x ów nie stałą lecz zmienną, zawsze styczną do obrazu każdego skrajnego równoleżnika.

Nazwijmy szerokość geograficzną dolnego równoleżnika (bliższego równika) literą φ_1 a górnego φ_2 , a literą l kąt zawarty między środkowym południkiem na elipsoidzie a dowolnym innym; współrzędne punktów równoleżnika φ_1 odniesione do osi x ów stycznej do tego równoleżnika nazwijmy x_1 i y_1 , a podobnie dla równoleżnika φ_2 literami x_2 i y_2 . Wreszcie długość odcinka normalnej do elipsoidy sięgającego od powierzchni elipsoidy do jej osi obrotu nazwijmy $N(\varphi)$. Wyraża się ona — jak wiadomo — wzorem

$$(a) \quad N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 \varphi}}$$

gdzie $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ a a i b oznaczają połówki osi głównych elipsy południkowej. Przy tych oznaczeniach spólrzędne punktów leżących na skrajnych równoleżnikach wyrażają się znanymi wzorami:

$$(1) \begin{cases} x_1 = N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin(l \sin \varphi_1) \\ y_1 = 2N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin(l \sin \varphi_2) \\ \bar{y}_2 = 2N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_2) \end{cases}$$

Dla sekcji równikowej, t. j. dla $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 4^\circ$, funkcja $\operatorname{ctg} \varphi_1$ nie jest określona; należy wtedy wzory na x_1 i y_1 zastąpić wzorami ogólniejszemi:

$$(b) \quad \begin{aligned} x_1 &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1} N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \sin(l \sin \varphi) \\ y_1 &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_1} 2N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi) \end{aligned}$$

których dla $\varphi_1 = 0$ otrzymujemy:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = al \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Dla jednej sekcji φ_1 i φ_2 są liczbami stałymi, więc spólrzędne x_1 , y_1 , $\bar{x}_2$, i $\bar{y}_2$ zależą tylko od l ; dla uwidocznienia tego będziemy pisali niekiedy: $x_1(l)$, $\bar{x}_2(l)$, $y_1(l)$, $\bar{y}_2(l)$.

Przy pomocy wzorów (1) i (2) obliczono wartości x i y zawarte w tablicach dołączonych do uchwał Komitetu. Zauważyć jednak musimy, że nawet w poprawnym wydaniu tablic z r. 1912 znajdują się oczywiście — jakkolwiek drobne — błędy. Tak n. p. dla $\varphi = 4^\circ$ i $l = 2^\circ$ podano $x = 222'105''_{mm}$, a więc wartość większą, aniżeli w pierwotnych, błędnych tablicach, gdzie znajdujemy 222'104 — jakkolwiek właśnie błąd polegał na tym, że wzięto za wielkie odcięte x , obliczając je przy pomocy mylnego wzoru:

$$N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg}(l \sin \varphi) \text{ zamiast } N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi \sin(l \sin \varphi).$$

Dokładny rachunek prowadzi do $x = 222'10369$ a więc przy zatrzymaniu trzech miejsc po kropce dziesiętnej: 222'104, jak w pierwotnych (błędnych) tablicach. Podobnie dla $\varphi = 4^\circ$ i $l = 1^\circ$ podano mylnie $x = 111'050$ zamiast 111'052.

Poprawnie obliczone spólrzędne x_1 , y_1 , $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, podajemy w tabelce I wyrażone w milimetrach dla sekcji równikowej t. j. dla $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 4^\circ$ i dla północnej sekcji mapy Polski, t. j. dla $\varphi_1 = 52^\circ$, $\varphi_2 = 56^\circ$. Na tych dwóch wybranych sekcjach będziemy i w dalszym ciągu ilustrowali liczbowo nasze rozważania teoretyczne. Wybraliśmy te właśnie sekcje dlatego, że sekcja równikowa okazuje — jak później zobaczymy — największe zniekształcenia z pośród wszystkich innych sekcji

*) UWAGA: W praktyce taka dokładność jest zbyt dużą, wystarczą bowiem aż nadto dziesiąte części milimetra. W dyskusji teoretycznej jednak — jak zobaczymy — także dalsze miejsca po kropce dziesiętnej odgrywają ważną rolę. W tablicach międzynarodowych podano 3 miejsca po kropce dziesiętnej, a więc tysięczne części milimetra.

i wymaga pewnych osobnych, dodatkowych rozważań wskutek tego, że jeden z równoleżników, a mianowicie równik przedstawia się na mapie nie jako koło, lecz jako linia prosta; sekcja zaś 52° — 56° interesuje nas dlatego, że właśnie tę sekcję wydał obecnie nasz Wojskowy Instytut Geograficzny; zobaczymy ponadto, że pewne różnice w łukach południków, słabo uwydatniające się w sekcjach bliskich równika, wystąpią wyraźnie w sekcjach odleglejszych, n. p. w sekcji 52° — 56° .

Tabl. I.

$\varphi \backslash l =$	$\pm 1^\circ$	$\pm 2^\circ$	$\pm 3^\circ$
0°	$x_1 = \pm 111'321$ $y_1 = 0$	$\pm 222'643$ 0	$\pm 333'964$ 0
4°	$\bar{x}_2 = \pm 111'052$ $\bar{y}_2 = 0'068$	$\pm 222'104$ 0'270	$\pm 333'155$ 0'608
52°	$x_1 = \pm 68'679$ $y_1 = 0'472$	$\pm 137'346$ 1'889	$\pm 205'986$ 4'250
56°	$\bar{x}_2 = \pm 62'394$ $\bar{y}_2 = 0'451$	$\pm 124'774$ 1'806	$\pm 187'128$ 4'062

Uwaga: Znaki górne należą do siebie, a dolne do siebie.

Sekcje bliskie bieguna nie interesują nas tutaj, albowiem instrukcja nie wypowiada się jasno o tych sekcjach i nie podaje spólrzędnych dla sekcji leżących na północ od $\varphi = 60^\circ$. Powiedziano tylko w instrukcji, że: „na północ od $\varphi = 60^\circ$ i na południe od $\varphi = -60^\circ$ można łączyć dwie lub więcej przyległych sekcji tej samej strefy, tak, że kombinowany arkusz pokrywa 12, 18 i t. d. stopni długości”. Nie powiedziano jednak, czy te sekcje ma się tylko mechanicznie zestawiać na jednym wspólnym arkuszu, czy też — jak sądzi Hinks (l. c. p. 57) — obrać dla nich wspólny układ spólrzędnych i przerachować wszystko na nowo, przyjmując jako południki zachowane pod względem długości nie $l = \pm 2^\circ$ lecz inne, więcej odchylone od środkowego.

Chcąc uzyskać jednolite przedstawienie dla wszystkich punktów jednej sekcji, musimy wprowadzić dla wszystkich punktów jeden wspólny układ spólrzędnych, a więc w szczególności jedną wspólną oś x ów. Niechaj tą wspólną osią x ów będzie prosta styczna do koła przedstawiającego (dolny) równoleżnik φ_1 . Wtedy wszystkie odcięte x_1 , $\bar{x}_2$ pozostaną niezmiennione, jakoteż rzędne y_1 . Natomiast rzędne $\bar{y}_2$ punktów leżących na (górnym) równoleżniku φ_2 należy powiększyć o odstęp kół φ_1 i φ_2 na mapie. Odstęp ten w oryginalnym rzucie wielostokowym amerykańskim jest równy długości łuku elipsy południkowej od φ_1 do φ_2 — oczywiście w skali 1:1,000,000. Oznaczmy

symbolem $s(\varphi)$ długość łuku południka od równika do szerokości geograficznej φ w skali 1:1,000,000, to długość łuku od φ_1 do φ_2 wyrazi się wzorem:

$$(c) \quad S_{\varphi_1}^{\varphi_2} = s(\varphi_2) - s(\varphi_1).$$

Łuki te oblicza się przy pomocy całki eliptycznej:

$$(d) \quad S(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \int_0^\varphi R(\varphi)d\varphi$$

przyczem $R(\varphi)$ oznacza promień krzywizny elipsy południkowej.

W ten sposób otrzymuje się np. dla sekcji równikowej

$$S_0^{40} = 442'27 \text{ mm} \text{ a dla północnych sekcji Polski } S_{52^0}^{56^0} = 445'226 \text{ mm.}$$

Uwaga: Przy obliczaniu tej całki posługiwałem się wzorem przybliżonym, polegającym na rozwinięciu funkcji podcałkowej na szereg postępujący według potęg $e^2 \sin^2 \varphi$ i na zatrzymaniu wyrazów aż do $e^6 \sin^6 \varphi$ włącznie.

Uwzględniając ten odstęp skrajnych równoleżników otrzymalibyśmy dla rzędnych równoleżnika φ_2 zamiast $\bar{y}_2$ wyrażenia:

$$\bar{y}_2 + s(\varphi_2) - s(\varphi_1).$$

Jednakże w myśl drugiej modyfikacji zawartej w instrukcji należy tę wielkość pomniejszyć tak, aby długość południka $l = 2^0$ w obrębie arkusza była przedstawiona wiernie.

Oznaczmy nieznany na razie odstęp obu skrajnych obrazów równoleżników mierzony wzdłuż osi y ów literą q . Żadamy, by odległość punktów (x_1, y_1) i $(x_2, q + \bar{y}_2)$ była równa prawdziwemu łukowi $S_{\varphi_1}^{\varphi_2} = s(\varphi_2) - s(\varphi_1)$; zatem musi q spełniać warunek:

$$(3) \quad (\bar{y}_2 + q - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 = (S_{\varphi_1}^{\varphi_2})^2.$$

Stąd otrzymujemy:

$$(4) \quad q = y_1 - \bar{y}_2 + \sqrt{(S_{\varphi_1}^{\varphi_2})^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Należy więc rzędne $\bar{y}_2$ powiększyć nie o całe $s(\varphi_2) - s(\varphi_1)$ lecz o q . Skrócenie wynosi więc:

$$(5) \quad k = S_{\varphi_1}^{\varphi_2} - q$$

Przy pomocy tego wzoru należało obliczać poprawki zawarte w tablicy I (A) dołączonej do uchwał Komitetu Międzynarodowego. Dla sekcji równikowej otrzymuje się $k = 0'27$ (dokładniej: $0'2708$), dla sekcji zaś od 52^0 do 56^0 jest $k = 0'09$ (dokładniej: $0'0940$). Rzędne równoleżnika $\varphi_2 = 4^0$ należy więc powiększyć o:

$$q = 442'27 \text{ mm} - 0'27 \text{ mm} = 442 \text{ mm}$$

a rzędne równoleżnika $\varphi_2 = 56^0$ o:

$$q = 445'226 \text{ mm} - 0'094 \text{ mm} = 445'132 \text{ mm.}$$

Pozostawimy jednak liczbę $445'13$ zaokrągloną do dwóch miejsc po kropce, której użyto w tablicach międzynarodowych. Wyrażenie (4) przedstawimy w postaci:

$$(6) \quad q = S_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{y_1 - \bar{y}_2 + \sqrt{(S_{\varphi_1}^{\varphi_2})^2 - (x_2 - x_1)^2}}{S_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \right) = \delta S_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

Liczba:

$$(7) \quad \delta = \frac{y_1 - \bar{y}_2 + \sqrt{(S_{\varphi_1}^{\varphi_2})^2 - (x_2 - x_1)^2}}{S_{\varphi_1}^{\varphi_2}}$$

jest w obrębie każdej sekcji liczbą stałą i oznacza stosunek pomniejszenia łuku $S_{\varphi_1}^{\varphi_2}$ wskutek zmniejszenia jego wielkości o odcinek k . Tak np. dla sekcji równikowej: $\delta = \frac{442}{442'27}$.

Teraz już możemy wypisać wzory na współrzędne punktów leżących na skrajnych równoleżnikach odnosząc je do jednego wspólnego układu współrzędnych: osią y ów jest obraz środkowego południka, a wspólną osią x ów styczna do koła przedstawiającego dolny skrajny równoleżnik φ_1 . Otrzymujemy zatem:

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin(l \sin \varphi_1) & x_2 = N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin(l \sin \varphi_2) \\ y_1 = 2N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_1) & y_2 = \delta S_{\varphi_1}^{\varphi_2} + 2N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_2) \end{cases}$$

Pamiętać jednak należy o tem, że dla $\varphi_1 = 0$ zamiast wzorów podanych tu dla x_1 i y_1 należy użyć wzorów (2) na str. 6.

Zastosowawszy to przesunięcie osi otrzymujemy zamiast liczb zawartych w tabelce I nową tabelkę II, w której zmieniono tylko rzędne $\bar{y}_2$ z tabeli I na y_2 , dodając do każdej rzędnej $\bar{y}_2$ wielkość $q = \delta S_{\varphi_1}^{\varphi_2}$.

Tabl. II.

φ	$l = 1^0$	2^0	3^0
0^0	$x_1 = 111'321$ $y_1 = 0$	$222'643$ 0	$333'964$ 0
4^0	$x_2 = 111'052$ $y_2 = 442'068$	$222'104$ $442'270$	$333'155$ $442'608$
52^0	$x_1 = 68'679$ $y_1 = 0'472$	$137'34$ $1'889$	$205'985$ $4'250$
56^0	$x_2 = 62'394$ $y_2 = 445'581$	$124'774$ $446'936$	$187'128$ $449'192$

Gdy l zmieni znak, to tylko odcięte zmieniają znaki.

Wzory (8) ujmują jedynie punkty dwóch skrajnych równoleżników. Przejdźmy do wyznaczania innych punktów mapy.

Środkowy południk należy podzielić — w myśl instrukcji — „na stopnie”, to znaczy na części proporcjonalne do jednostopniowych łuków południka na elipsoidzie, o ile chodzi o równoleżniki w odstępach jednostopniowych od skrajnych i od siebie. Ogólnie zaś, chcąc znaleźć punkt przecięcia równoleżnika φ z południkiem środkowym, należy odciąć na osi $y^{\text{ów}}$ od początku układu odcinek $s(\varphi) - s(\varphi_1)$ pomniejszony w stosunku δ , to znaczy w tym samym stosunku, w jakim został pomniejszony cały łuk: $s(\varphi_2) - s(\varphi_1)$ środkowego południka. Koła, przedstawiające równoleżniki φ , przecinają więc oś $y^{\text{ów}}$ w odstępach $\delta[s(\varphi) - s(\varphi_1)]$ od początku układu. Promienie tych kół są — w myśl instrukcji — $N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi$, jak w zwyczajnym rzucie wielostokowym a środki ich leżą na prostej przedstawiającej południk środkowy, t. j. na osi $y^{\text{ów}}$.

Równanie każdego takiego koła ma więc postać:

$$(9) \quad x^2 + [y - \delta[s(\varphi) - s(\varphi_1)] - N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi]^2 = N^2(\varphi) \operatorname{ctg}^2 \varphi$$

Uwaga: Nie można zmienić wszystkich rzędnych w tym samym stosunku, albowiem wtedy koła zamieniłyby się na elipsy. odstąpiłobyśmy więc od zasadniczego postulatu instrukcji, że obrazami równoleżników mają być koła. Zmniejszamy wszystkie rzędne jednego koła o tę samą wielkość, czyli przesuwamy całe koło: wskutek tego jednak jedne rzędne tego koła zmieniają się w innym stosunku a drugie w innym. Do każdego koła stosuje się inne przesunięcie, a mianowicie te przesunięcia są proporcjonalne do odpowiednich łuków środkowego południka.

Z każdego z tych kół potrzebne nam jest tylko dolne półkoło (zwrócone wypukłością w stronę osi $x^{\text{ów}}$), górne bowiem wypada bardzo daleko poza obręb sekcji. Aby otrzymać równanie dolnego półkoła, rozwiązujemy równanie (9) według zmiennej y i zatrzymujemy tylko ujemną wartość pierwiastka. Po łatwych przekształceniach otrzymujemy wtedy:

$$(10) \quad y = \delta[s(\varphi) - s(\varphi_1)] + \frac{x^2 \operatorname{tg} \varphi}{N(\varphi) + \sqrt{N^2(\varphi) - x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

Równanie to przedstawia gromadę wszystkich równoleżników, nie wyłączając i równika.

O wiele prościej przedstawia się równanie gromady wszystkich południków, są one bowiem liniami prostymi, łączącymi odpowiadające sobie (t. j. o tem samym l) punkty obu skrajnych równoleżników: (x_1, y_1) i (x_2, y_2) .

Otrzymujemy więc od razu równanie wszystkich południków, nie wyłączając średniego południka — jako równanie prostych łączących dwa znane punkty:

$$(11) \quad (y - y_1(l)) \cdot (x_2(l) - x_1(l)) = (x - x_1(l)) (y_2(l) - y_1(l)).$$

Wartości $x_1(l)$, $x_2(l)$, $y_1(l)$, $y_2(l)$ należy tu wstawić z wzorów (8) lub (2) i (8).

Przy pomocy tych dwóch wzorów (10) i (11) możemy już do każdego punktu elipsoidy, t. j. do każdej pary wartości (φ, l) znaleźć odpowiadający mu punkt (x, y) na płaszczyźnie mapy. Równania te charakteryzują zatem zupełnie cały rzut mapy międzynarodowej, mogą więc zastąpić definicję tego rzutu.

Wzory te są dość skomplikowane, ponieważ $x_1(l)$, $x_2(l)$, $y_1(l)$, $y_2(l)$ wyrażają się dość złożonymi wzorami (8) a ponadto do obliczenia stałej δ trzeba sięgnąć do wzorów (7) i (1).

Możnaby z łatwością wyrazić z wzorów (10) i (11) współrzędne x i y wprost jako wyraźne funkcje zmiennych φ i l , rozwiązując ten układ równań, jednakże forma uwikłana lepiej się tu nadaje do dalszej dyskusji. Przy liczbowych rachunkach jednak rozwiązanie tego układu jest nieuniknione i prowadzi do bardzo uciążliwych obliczeń. Tą drogą otrzymałem liczby zawarte w tabelkach III i IV, które podają współrzędne punktów węzłowych siatki południków i równoleżników w odstępach 1° dla sekcji równikowej i sekcji 52° do 56° .

Tabl. III.

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	$x = 0$ $y = 0$	111'321 0	222'643 0	333'964 0
1°	$x = 0$ $y = 110'499$	111'254 110'516	222'508 110'568	333'762 110'652
2°	$x = 0$ $y = 220'998$	111'187 221'032	222'373 221'133	333'559 221'302
3°	$x = 0$ $y = 331'499$	111'119 331'549	222'238 331'701	333'357 331'955
4°	$x = 0$ $y = 442$	111'052 442'068	222'104 442'270	333'155 442'608

Tabl. IV.

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
52°	$x = 0$ $y = 0$	68'679 0'472	137'345 1'889	205'985 4'250
53°	$x = 0$ $y = 111'254$	67'108 111'721	134'203 113'124	201'272 115'461
54°	$x = 0$ $y = 222'527$	65'537 222'990	131'061 224'377	196'558 226'688
55°	$x = 0$ $y = 333'819$	63'966 334'276	127'917 335'647	191'843 337'932
56°	$x = 0$ $y = 445'130$	62'394 445'581	124'774 446'936	187'128 449'192

Przy obliczaniu współrzędnych należy zacząć od obliczenia rzędnych y , wzrastają one bowiem o wiele szybciej aniżeli odcięte, a więc mały błąd popełniony przy obliczeniu x wywołuje znaczne błędy wartości y ; tak np. w sekcji równikowej błąd 0'001 mm odciętej x wywołuje błąd rzędnej y około 1 mm. Ponieważ współczynniki równań (10) i (11) są liczbami wielocyfrowymi, przeto wskazaniem jest rozwiązywanie tych równań metodą trygonometryczną i użycie tablic wielocyfrowych np. 10-cyfrowych.

Ponieważ tablice wydane przez Komitet międzynarodowy nie zawierają współrzędnych dla pośrednich równoleżników np. dla $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ lub dla $\varphi = 53^\circ, 54^\circ, 55^\circ$ a obliczenie tych współrzędnych jest bardzo uciążliwe, przeto musimy tu wyrazić wątpliwość, czy ktokolwiek dotychczas użył do konstrukcji mapy tych ściśle wyliczonych współrzędnych. Natomiast stwierdzamy, że sami twórcy projekcji Mapy Międzynarodowej: A. Hinks i C. Lallemant proponują wykreślanie pośrednich równoleżników według zupełnie odmiennych zasad, odbiegających od uchwał Komitetu Międzynarodowego. I tak Hinks dzieli po prostu wszystkie południki na równe części, aby uzyskać obrazy równoleżników leżących w równych odstępach stopniowych na elipsoidzie. Linje łączące odpowiadające sobie punkty podziału na poszczególnych południkach tworzą wtedy na mapie nie koła, jak tego żądają uchwały Komitetu Międzynarodowego, lecz epicykloidy skrócone lub cykloidy wydłużone, jak to w dalszym ciągu okażemy. Takie uproszczenie konstrukcji a zarazem definicji rzutu Międzynarodowego będziemy nazywali **modyfikacją Hinksa**.

Modyfikację bardziej zbliżoną do właściwego rzutu uchwalonego przez Komitet otrzymamy, dzieląc południki na części nierówne, lecz proporcjonalne do odpowiednich łuków elipsy. Wtedy również otrzymujemy zamiast kół bardzo do nich zbliżone epicykloidy i cykloidy skrócone lub wydłużone. Tę modyfikację będę nazywał: podziałem południków na części proporcjonalne do łuków.

Lallemant zatrzymuje kołowe równoleżniki, wyznacza je jednak inaczej, aniżeli tego żądają uchwały Komitetu, a mianowicie dzieli obrazy środkowego południka i dwóch skrajnych na części równe, a koła wyznaczone przez każdą trójkę odpowiednich punktów uważa za obrazy równoleżników. Modyfikacja ta nie upraszcza jednak konstrukcji, bo promienie tych kół są olbrzymie, np. dla sekcji równikowej przekraczają 91 m. Trzeba więc koniecznie obliczać współrzędne, co prowadzi do wzorów jeszcze zawilszych aniżeli (10) i (11). Dlatego to w dalszym ciągu nie będziemy się zajmowali tą modyfikacją Lallemanta, natomiast omówimy modyfikację Hinksa i drugą powyżej wymienioną, które prowadzą do łatwych wzorów matematycznych i są niewątpliwie stosowane przez wszystkich wykonawców Mapy Międzynarodowej.

3. Rzut Międzynarodowy z modyfikacją Hinksa.

Skrajne równoleżniki i południki pozostawiamy te same, jak w właściwym Rzucie Międzynarodowym. Natomiast pozostałe równoleżniki otrzymujemy dzieląc każdy południk na części proporcjonalne do

kątowych odstępów każdego równoleżnika od równoleżników skrajnych. Chcąc więc w sekcji od φ_1 do φ_2 znaleźć obraz równoleżnika φ należy podzielić odcinek każdego południka (zawarty między skrajnymi równoleżnikami mapy) w stosunku:

$$(12) \quad m = \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

Obraz x, y dowolnego punktu elipsoidy, danego za pomocą φ i l , otrzymamy więc dzieląc odstęp punktów: $(x_1(l), y_1(l))$ i $(x_2(l), y_2(l))$ w stosunku $(\varphi - \varphi_1) : (\varphi_2 - \varphi_1)$. Stąd na podstawie znanych wzorów:

$$x = \frac{x_1 + m x_2}{1 + m} \text{ i } y = \frac{y_1 + m y_2}{1 + m}$$

otrzymujemy na współrzędne dowolnego punktu mapy proste, symetryczne wzory:

$$(13) \quad \begin{cases} x = \frac{(\varphi_2 - \varphi) x_1(l) + (\varphi - \varphi_1) x_2(l)}{\varphi_2 - \varphi_1} \\ y = \frac{(\varphi_2 - \varphi) y_1(l) + (\varphi - \varphi_1) y_2(l)}{\varphi_2 - \varphi_1} \end{cases}$$

Za $x_1(l), x_2(l), y_1(l)$ i $y_2(l)$ należy podstawić te same wartości (8), których używaliśmy w właściwym rzucie Międzynarodowym. Rachunkowo przedstawia się sprawa bardzo prosto: trzeba tylko podzielić na równe części różnice odpowiednich współrzędnych wziętych z tablicy II. W ten sposób otrzymujemy tablice V i VI, zawierające współrzędne rzutu Międzynarodowego z modyfikacją Hinksa. Porównując je z tablicami III i IV spostrzegamy zadziwiającą zgodność zwłaszcza dla sekcji równikowej: odpowiadające sobie wartości nie różnią się tam nigdzie więcej, jak o 0'002 mm.

Dla północnej sekcji Polski spostrzegamy już większe odchylenia, dochodzące do 0'036 mm, co jednak oczywiście przy praktycznej konstrukcji nie odgrywa żadnej roli.

Tabl. V.

φ	$l =$	0°	1°	2°	3°
0°	$x =$	0	111'321	222'643	333'964
	$y =$	0	0	0	0
1°	$x =$	0	111'254	222'508	333'762
	$y =$	110'5	110'517	110'568	110'652
2°	$x =$	0	111'187	222'373	333'559
	$y =$	221	221'034	221'135	221'304
3°	$x =$	0	111'119	222'238	333'357
	$y =$	331'5	331'551	331'703	331'956
4°	$x =$	0	111'052	222'104	333'155
	$y =$	442	442'068	442'270	442'608

Tabl. VI.

φ	$l =$	0°	1°	2°	3°
52°	$x =$	0	68'679	137'345	205'985
	$y =$	0	0'472	1'889	4'250
53°	$x =$	0	67'108	134'202	201'271
	$y =$	111'283	111'749	113'151	115'486
54°	$x =$	0	65'537	131'060	196'557
	$y =$	222'565	223'027	224'413	226'721
55°	$x =$	0	63'965	127'917	191'842
	$y =$	333'848	334'304	335'674	337'957
56°	$x =$	0	62'394	124'774	187'128
	$y =$	445'130	445'581	446'936	449'192

Fakt, że odchylenia są tu większe aniżeli w sekcji równikowej, wynika stąd, że przy równiku łuki jednostopniowe południka wzrastają znacznie powolniej, aniżeli w wyższych szerokościach geograficznych. Tak np. w obrębie sekcji od $0^\circ - 4^\circ$ jednostopniowe łuki wynoszą poczynając od równika 110'566, 110'567, 110'568, 110'570, podczas gdy w obrębie sekcji od 52° do 56° otrzymujemy kolejno łuki: 111'278, 111'297, 111'316 i 111'335. Początkowy południk dzieli się przy modyfikacji Hinksa na części równe, a w pierwotnym rzucie Międzynarodowym na części ściśle proporcjonalne do łuków. Już sam ten fakt wystarczy do wywołania odchylen 0'036 w północnej sekcji polskiej. W następnym rozdziale omówimy nową modyfikację, usuwającą odchylenia, pochodzące z przyczyny, którąśmy tu właśnie omówili.

W każdym razie musimy tu stwierdzić, że modyfikacja Hinksa upraszcza znacznie konstrukcję i rachunki a daje wyniki „praktycznie zgodne” z właściwym rzutem Międzynarodowym, bo odchylenia 0'036 mm nie można uwzględnić przy konstrukcji map.

Dopiero stwierdzenie tego faktu uprawnia nas do zastąpienia właściwego rzutu Międzynarodowego modyfikacją Hinksa, o ile chodzi o konstrukcję praktyczną.

Zajmijmy się jeszcze pokrótce zbadaniem, jakimi linjami są obrazy równoleżników po wprowadzeniu modyfikacji Hinksa. Weźmy najpierw pod uwagę dowolną sekcję mapy, nie zawierającą równika ani bieguna. Obraz równoleżnika φ otrzymamy z wzorów (13), uważając φ za liczbę stałą a l za zmienną. Zbadajmy np. równoleżnik środkowy, to φ będzie średnią arytmetyczną liczb φ_1 i φ_2 , a zatem:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

czyli wyraźnie według wzorów (8) i (7):

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin(l \sin \varphi_1) + N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin(l \sin \varphi_2)] \\ y &= \frac{1}{2} [2N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_1) + q + 2N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2 \sin^2 \frac{1}{2}(l \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Oznaczmy dla skrócenia stałe liczby $N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1$ i $N(\varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi_2$ literami r_1 i r_2 , to po łatwej przeróbce otrzymamy:

$$x = \frac{1}{2} [r_1 \sin(l \sin \varphi_1) + r_2 \sin(l \sin \varphi_2)]$$

$$y = \frac{1}{2} (q + r_1 + r_2) = -\frac{1}{2} [r_1 \cos(l \sin \varphi_1) + r_2 \cos(l \sin \varphi_2)]$$

Oznaczmy $l \sin \varphi_1$ literą t , a stałą $\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} = n$, to

$$(15) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} r_1 \sin t + \frac{1}{2} r_2 \sin nt \\ \frac{1}{2} (q + r_1 + r_2) - y = \frac{1}{2} r_1 \cos t + \frac{1}{2} r_2 \cos nt \end{cases}$$

Z postaci tych równań łatwo odczytać, że przedstawiają one epicykloide skróconą. Gdy się zmienia l , a zatem i t , to punkt (x, y) zakreśla epicykloide skróconą, powstałą przez toczenie się koła o promieniu $\frac{r_1}{2} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$ po kole o promieniu $\frac{r_1}{2} \left(1 - \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}\right)$; środek koła stałego leży nad osią x ów w punkcie o współrzędnych $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{2} [q + r_1 + r_2]$. Punkt zakreślający epicykloide skróconą leży w odległości $\frac{1}{2} r_2$ od środka koła ruchomego i dla $t = 0$ leży na osi y ów pod środkiem koła ruchomego (zatem w odległości $\frac{1}{2} q$ nad osią x ów). W zupełnie podobny sposób okazuje się, że i inne równoleżniki — prócz obu skrajnych — przedstawiają się na mapie jako epicykloidy skrócone. Tak np. dla sekcji od $\varphi_1 = 52^\circ$ do $\varphi_2 = 56^\circ$ jest:

$$r_1 = r(52^\circ) = 4993'76 \text{ mm}, \quad r_2 = r(56^\circ) = 4312'25 \text{ mm}, \quad q = 445'13 \text{ mm}.$$

Wobec tego środek koła nieruchomego leży w punkcie: $\xi = 0$, $\eta = 4875'6 \text{ mm}$ a jego promień jest stosunkowo mały: 123'8 mm; koło toczące się ma promień 2373'1 mm a punkt zakreślający epicykloide leży w odległości 2156'1 mm od jego środka, pod nim dla $t = 0$, czyli ponad osią x ów w odstępnie 222'6 mm.

Dla sekcji równikowej należy za $x_1(l)$ i $y_1(l)$ obrać wartości z wzorów (1). Wtedy dla środkowego równoleżnika $\varphi = 2^\circ$ otrzymujemy jako jego obraz linję przedstawioną równaniami:

$$x = \frac{1}{2} [al + r_2 \sin(l \sin \varphi_2)]$$

$$y = \frac{1}{2} [q + r_2 - r_2 \cos(l \sin \varphi_2)].$$

Kładąc tu $l \sin \varphi_2 = t$, otrzymujemy:

$$(16) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2 \sin \varphi_2} t + \frac{r_2}{2} \sin t \\ \frac{a}{2 \sin \varphi_2} + \frac{q + r_2}{2} - y = \frac{a}{2 \sin \varphi_2} + \frac{r_2}{2} \cos t \end{cases}$$

Te równania przedstawiają cykloide wydłużoną; powstaje ona przez toczenie się koła o promieniu $\frac{a}{2 \sin \varphi_2}$ po prostej (od spodu) równoległej do osi x ów w odstępnie $\frac{a}{2 \sin \varphi_2} + \frac{q + r_2}{2}$; punkt zakreślający tę cykloide leży w odstępnie $\frac{1}{2} r_2$ od środka koła toczącego się. Dla $t = 0$ punkt

5. Zniekształcenia w zmodyfikowanym rzucie Mapy Międzynarodowej.

Zniekształcenia wywołane projekcją Mapy Międzynarodowej badano dotychczas jedynie za pomocą przybliżonych nieściśłych rozważań. Nie opierano się przytem na wzorach określających to odwzorowanie ani też nie stosowano klasycznej teorii Tissota. Zobaczymy, że teorię tę można zastosować zarówno do oryginalnego rzutu Międzynarodowego, jak i do obydwu omówionych powyżej modyfikacji.

Dla jasności zestawimy tu najważniejsze wzory Tissota w zastosowaniu do elipsoidy obrotowej. Jeżeli równanie elipsoidy obrotowej przedstawimy w formie parametrowej, używając jako parametrów szerokości geograficznej φ i długości geograficznej l liczonej od dowolnego południka (np. od środkowego południka badanej sekcji mapy) to na współrzędne prostokątne otrzymamy wzory:

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a \cos \varphi \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \bar{y} &= \frac{a \cos \varphi \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ \bar{z} &= \frac{b^2 \sin \varphi}{a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Element łuku dowolnej linii krzywej leżącej na elipsoidzie wyrazi się wzorem:

$$(20) \quad ds^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3} d\varphi^2 + \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} dl^2$$

$$\text{czyli:} \quad ds^2 = R^2(\varphi) d\varphi^2 + \rho^2(\varphi) dl^2$$

gdzie $R(\varphi)$ oznacza promień krzywizny elipsy a $\rho(\varphi)$ promień równoleżnika φ .

Wprowadźmy na współczynniki przy $d\varphi^2$, $dl \cdot d\varphi$, dl^2 używane zwykle w teorii powierzchni skrócenia: E , F , G . A więc:

$$(20a) \quad \begin{cases} E = R^2(\varphi) \\ G = \rho^2(\varphi). \end{cases}$$

Oczywiście w naszym przypadku $F = 0$.

Jeżeli tę elipsoidę odwzorowujemy na płaszczyznę przy pomocy dwóch funkcji $x(\varphi, l)$, $y(\varphi, l)$, to równanie tej płaszczyzny przy użyciu tych samych parametrów φ i l co przy elipsoidzie przedstawi się w postaci:

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= x(\varphi, l) \\ y &= y(\varphi, l) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy na element łuku dowolnej linii leżącej na tej płaszczyźnie wyrażenie:

$$(22) \quad ds'^2 = E' d\varphi^2 + 2F' d\varphi \cdot dl + G' dl^2$$

przyczem E' , F' , G' oznaczają:

$$(23) \quad \begin{cases} E' = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 \\ F' = x_\varphi x_l + y_\varphi y_l \\ G' = x_l^2 + y_l^2 \end{cases}$$

a x_φ , y_φ , x_l i y_l są to cząstkowe pochodne funkcji $x(\varphi, l)$ i $y(\varphi, l)$ według zmiennych φ lub l . Stosunek wydłużenia wzdłuż południków przedstawia się wzorem:

$$(24) \quad h = \sqrt{\frac{E'}{E}}$$

który otrzymujemy ze stosunku $\frac{ds'}{ds}$ kładąc $l = \text{const.}$; podobnie na stosunek wydłużenia wzdłuż równoleżników otrzymuje się:

$$(25) \quad k = \sqrt{\frac{G'}{G}}$$

Kąt prosty zawarty między południkiem a równoleżnikiem na elipsoidzie zamienia się w ogólności na kąt inny, nazwijmy go ϑ i na ten kąt otrzymujemy wzór:

$$(26) \quad \sin \vartheta = \frac{F'}{\sqrt{E' G'}}$$

Wielkości h i k nie dają jednak w ogólności maksymalnego i minimalnego zniekształcenia długości. Maksymalny i minimalny stosunek wydłużenia, nazwijmy je $\bar{a}$ i $\bar{b}$, są związane z wielkościami h i k za pomocą wzorów:

$$(27) \quad \begin{cases} \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = h^2 + k^2 \\ \bar{a} \cdot \bar{b} = h \cdot k \cdot \sin \vartheta \end{cases}$$

Maksymalne zniekształcenie kątów oblicza się następnie z wzoru:

$$(28) \quad \sin \omega = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} + \bar{b}}$$

i równa się 2ω . Wielkości $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są połówkami osi elipsy wyznaczającej (Tissota), a h i k połówkami średnic sprzężonych.

Zastosujmy tę ogólną teorię najpierw do modyfikacji Hinksa, przy której wzory na współrzędne x i y są bardzo proste (wzory (13) na

str. 13). Pochodne cząstkowe $x_\varphi, y_\varphi, x_l, y_l$ oblicza się tu bardzo łatwo. Tworząc $x_\varphi^2 + y_\varphi^2$, i t. d. otrzymamy według wzorów (23):

$$(29) \left\{ \begin{aligned} E' &= \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \\ G' &= \frac{(\varphi_2 - \varphi)^2(x_1'^2 + y_1'^2) + (\varphi - \varphi_1)^2(x_2'^2 + y_2'^2) + 2(\varphi_2 - \varphi)(\varphi - \varphi_1)(x_1'x_2' + y_1'y_2')}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \\ F' &= \frac{(\varphi_2 - \varphi)[x_1'(x_2 - x_1) + y_1'(y_2 - y_1)] + (\varphi - \varphi_1)[x_2'(x_2 - x_1) + y_2'(y_2 - y_1)]}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2} \end{aligned} \right.$$

Pochodne x_1', x_2', y_1', y_2' — według zmiennej l — oblicza się z łatwością z wzorów (8) na str. 9 i otrzymuje się:

$$x_1' = N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \cos(l \sin \varphi_1) \cdot \sin \varphi = N(\varphi_1) \cdot \cos \varphi_1 \cos(l \sin \varphi_1)$$

Ale iloczyn $N(\varphi_1) \cos \varphi_1$ przedstawia promień równoleżnika φ_1 ; nazwalimy go $\rho(\varphi_1)$, więc:

$$(a) \quad x_1' = \rho(\varphi_1) \cos(l \sin \varphi_1)$$

Podobnie okazuje się, że:

$$(b) \quad y_1' = \rho(\varphi_1) \sin(l \sin \varphi_1)$$

i analogicznie dla x_2', y_2' . Wobec tego $x_1'^2 + y_1'^2 = \rho^2(\varphi_1)$, $x_1'x_2' + y_1'y_2' = \rho(\varphi_1)\rho(\varphi_2) \cdot \cos[(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)l]$. Licznik wyrażenia E' przedstawia odległość dwóch punktów leżących na obrazie tego samego południka l , na skrajnych równoleżnikach; nazwijmy tę odległość $d(l)$. Z wzorów (29), (20 a), (24), (25) i (26) otrzymujemy na zniekształcenia h, k i na kąt ϑ wartości:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} h &= \sqrt{\frac{E'}{E}} = \frac{d(l)}{(\varphi_2 - \varphi_1) R(\varphi)} \\ k &= \sqrt{\frac{G'}{G}} = \frac{l}{\rho(\varphi)(\varphi_2 - \varphi_1)} \sqrt{(\varphi_2 - \varphi)^2 \rho^2(\varphi_1) + (\varphi - \varphi_1)^2 \rho^2(\varphi_2) + 2(\varphi_2 - \varphi)(\varphi - \varphi_1) \rho(\varphi_1)\rho(\varphi_2) \cos[(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)l]} \\ \sin \vartheta &= \frac{(\varphi_2 - \varphi)[x_1'(x_2 - x_1) + y_1'(y_2 - y_1)] + (\varphi - \varphi_1)[x_2'(x_2 - x_1) + y_2'(y_2 - y_1)]}{d(l) \cdot \sqrt{(\varphi_2 - \varphi)^2 \rho^2(\varphi_1) + (\varphi - \varphi_1)^2 \rho^2(\varphi_2) + 2(\varphi_2 - \varphi)(\varphi - \varphi_1) \rho(\varphi_1)\rho(\varphi_2) \cos[(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)l]}} \end{aligned} \right.$$

We wzorze na $\sin \vartheta$ można też wszystko wyrazić wprost w zależności od φ i l , podstawiając za $x_1, x_1', \dots$ wartości z wzorów (8) na str. 9 i z wzorów (a), (b). We wzorze na h należy używać dla kąta φ_1 i φ_2 miary łukowej, co też wyraźnie zaznaczyliśmy pisząc $\widehat{\varphi}_1$ i $\widehat{\varphi}_2$; w pozostałych wzorach można używać dla kątów dowolnej miary.

Wartości obliczone z tych wzorów dla sekcji równikowej zestawiliśmy w tabelkach IX a, b, c. Ograniczyliśmy się tu do sekcji równikowej, ponieważ w niej wstępują największe zniekształcenia. Tabela IX a podaje nie sam stosunek wydłużenia h , lecz tak zwane wydłużenie względne, t. j. stosunek $(h-1):1$, wyrażone „pro mille”; są to więc wartości wyrażenia: $1000(h-1)$. Podobnie tabela IX b podaje nie samo k lecz $1000(k-1)$. Wreszcie tabela IX c podaje nie kąt ϑ , lecz jego odchylenie od 90° , t. j. wartość $\vartheta' = 90^\circ - \vartheta$.

Tabl. IX a (h)

φ	l	0°	1°	2°	3°
0°		— 0'593	— 0'435	+ 0'018	+ 0'788
1°		— 0'596	— 0'438	+ 0'015	+ 0'785
2°		— 0'606	— 0'448	+ 0'005	+ 0'775
3°		— 0'621	— 0'463	— 0'010	+ 0'760
4°		— 0'643	— 0'485	— 0'032	+ 0'738

Tabl. IX b (k)

φ	l	0°	1°	2°	3°
0°		0	0	0	0
1°		— 0'454	— 0'454	— 0'454	— 0'455
2°		— 0'605	— 0'605	— 0'606	— 0'606
3°		— 0'454	— 0'454	— 0'455	— 0'455
4°		0	0	0	0

Tabl. IX c (ϑ')

φ	l	0°	1°	2°	3°
0°		0	— 2'10"	— 4'15"	— 6'20"
1°		0	— 1'8"	— 2'10"	— 3'12"
2°		0	— 0'5"	— 0'4"	— 0'4"
3°		0	+ 0'58"	+ 2'2"	+ 3'5"
4°		0	+ 2'1"	+ 4'7"	+ 6'17"

Widzimy z tych tabel, że wydłużenie względne osiąga dla sekcji równikowej w kierunku południków wartość $0'788''_{00}$, a w kierunku równoleżników — $0'606''_{00}$ (skrócenie!), zmiana zaś kąta prostego utworzonego przez południki i równoleżniki dochodzi do $6'20''$.

Ponieważ kąt zawarty między obrazem południka a obrazem równoleżnika tak mało się różni od kąta prostego, zdawaćby się mogło, że wydłużenia h i k bardzo nieznacznie się różnią od maksymalnych wydłużeń $\bar{a}$ i $\bar{b}$, które — w myśl teorii Tissota — zachodzą w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach, będących obrazami także prostopadłych do siebie kierunków. Tymczasem rachunek — według wzorów (27) — prowadzi nas tu do zgoła odmiennego, nieoczekiwanego rezultatu. Oto maksymalne wydłużenie względne, t.j. $\bar{a}-1$ osiąga w narożnikach mapy wartości prawie dwa razy większe, aniżeli wydłużenie względne $h-1$ zachodzące wzdłuż południków, a mianowicie wartości: $1'395''_{00}$ i $1'347''_{00}$. Kierunek, w którym zachodzi to maksymalne wydłużenie jest silnie odchylony od kierunku skrajnego południka, a mianowicie o kąt $u = 26^{\circ}55'47''$ obliczony z wzoru

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{\frac{\bar{a}^2 - h^2}{h^2 - \bar{b}^2}}$$

Wartości $\bar{a}-1$, $\bar{b}-1$, wyrażone w „pro mille” i kąty 2ω zestawiliśmy w tabelkach Xa, Xb i Xc.

Tabl. Xa ($\bar{a}$)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	0	+ 0'17	+ 0'63	+ 1'40
1°	— 0'45	— 0'28	+ 0'18	+ 0'94
2°	— 0'61	— 0'45	+ 0'01	+ 0'78
3°	— 0'45	— 0'32	+ 0'12	+ 0'91
4°	0	+ 0'14	+ 0'58	+ 1'35

Tabl. Xb ($\bar{b}$)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	— 0'59	— 0'60	— 0'61	— 0'61
1°	— 0'60	— 0'61	— 0'61	— 0'61
2°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61
3°	— 0'62	— 0'61	— 0'62	— 0'61
4°	— 0'64	— 0'62	— 0'62	— 0'61

¹⁾ Zob. np. Tissot—Hammer: Die Netzentwürfe geographischer Karten. Stuttgart. 1887. Str. 14.

Tabl. Xc (2ω)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	2'2"	2'38"	4'15"	6'53"
1°	0'29"	1'8"	2'42"	5'20"
2°	0'0"	0'33"	2'6"	4'45"
3°	0'34"	0'58"	2'32"	5'12"
4°	2'13"	2'37"	4'7"	6'44"

Lallemant¹⁾ przeoczył widocznie tę okoliczność, że maksymalne wydłużenia mogą się tak znacznie różnić od wydłużeń zachodzących w kierunku południków. Podał on liczby: $\frac{1}{1270}$, $\frac{1}{1640}$ i 6', zbliżone do skrajnych wartości h , k i φ' zawartych w tabelkach IX i na tej podstawie oceniał naukową wartość całej projekcji.

Nasz rezultat obniża tę „naukową” wartość projekcji prawie dwukrotnie, otrzymalibyśmy bowiem prawie dwa razy większą liczbę $1'395''_{00}$ jako prawdziwe, ściśle obliczone maksymalne wydłużenie względne. Jeżeli jeszcze zwrócimy uwagę na to, że w kierunku prostopadłym do kierunku dającego $\bar{a}$ zachodzi skurczenie w stosunku $-0'61''_{00}$, to widzimy, że dwie wielkości równe na elipsoidzie przedstawiają się w tych kierunkach jako różne, a ich stosunek różni się od jednostki o $2''_{00}$! Tak znaczne zniekształcenie budzi wątpliwość, czy należy nadal tę projekcję zatrzymać, wobec innych, prostszych projekcji, dających kilkakrotnie mniejsze wydłużenia maksymalne.

Wyniki uzyskane przez nas dotychczas odnoszą się tylko do uproszczonej projekcji mapy międzynarodowej, a mianowicie do modyfikacji Hinksa. Mają one jednak znaczenie praktyczne, ponieważ niewątpliwie wszyscy kartografowie posługują się tą modyfikacją przy faktycznej konstrukcji mapy.

Okazuje się jednak, że nie osiągniemy lepszych wyników ani przez zastosowanie modyfikacji właściwszej, bardziej zbliżonej do projekcji uchwalonej przez Komitet Międzynarodowy, ani też trzymając się oryginalnego brzmienia instrukcji wydanej przez Komitet.

Zastosujmy w tym celu ogólną teorię zniekształceń do rzutu określonego wzorami (18) na str. 16. W tym celu trzeba obliczyć cząstkowe pochodne funkcji x i y według zmiennych φ i l . Pamiętając o tem, że pochodną łuku $s(\varphi)$ jest promień krzywizny $R(\varphi)$, otrzymujemy po łatwych przeróbkach na E' wzór:

$$(31) \quad E' = \frac{R^2(\varphi) d(l)^2}{(s_{\varphi_1}^{\varphi_2})^2}$$

¹⁾ Sur les déformations résultant du mode de construction de la Carte internationale du monde au millionième. Comptes Rendus r. 1911 p. 559—567.

Wzorów na G' , F' nie będziemy tu wypisywali; różnią się one bowiem od odpowiednich wzorów (29) tylko tem, że wszędzie zamiast różnic kątów $\varphi_2 - \varphi$, $\varphi - \varphi_1$, $\varphi_2 - \varphi_1$ występują różnice łuków: $s(\varphi_2) - s(\varphi)$, $s(\varphi) - s(\varphi_1)$, $s(\varphi_2) - s(\varphi_1)$.

Podstawiając te wartości we wzory (24), (25), (26), otrzymujemy dla k i $\sin \vartheta$ wzory zupełnie podobne do wzorów (30) a dla h otrzymujemy:

$$(32) \quad h = \frac{d(l)}{s_{\varphi_1}^{\varphi_2}}$$

Wzór ten jest prostszy od odpowiedniego wzoru na h (wzór (30) str. 20) przy modyfikacji Hinksa; okazuje się, że teraz stosunek wydłużenia wzdłuż południków nie zależy wcale od szerokości geograficznej φ , jest więc jednakowy wzdłuż całego południka. Własność tę można było od razu wywnioskować z samej definicji naszego rzutu, dzieliliśmy bowiem południki na części proporcjonalne do rzeczywistych łuków.

Przy pomocy wzoru (32) i odpowiednich wzorów na k i ϑ obliczyłem te zniekształcenia dla sekcji równikowej, okazało się jednak, że wartości k i ϑ są tu tak bardzo zbliżone do odpowiednich wartości zawartych w tabelkach IX b i IX c, że różnice nie uwydatniają się jeszcze nawet w końcowych cyfrach liczb figurujących w tych tabelkach. Wobec tego nie powtarzamy tu tych tabel. Natomiast wartości h są teraz zasadniczo różne, jakkolwiek i te różnice nie są wielkie; wartości h są tu rozmieszczone równomiernie, jak to widzimy z tabelki XI, podającej wydłużenia względne wzdłuż południków wyrażone w promille, t. j. liczby 1000 ($h - l$).

Tabl. XI.

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	— 0'612	— 0'451	0	+ 0'765
1°	— 0'612	— 0'451	0	+ 0'765
2°	— 0'612	— 0'451	0	+ 0'765
3°	— 0'612	— 0'451	0	+ 0'765
4°	— 0'612	— 0'451	0	+ 0'765

Obliczając przy pomocy tych wartości h , k i ϑ odpowiednie wartości $\bar{a}$, $\bar{b}$ i 2ω — z wzorów (27) i (28), tak jak w poprzednim przypadku — otrzymuje się wartości różniące się bardzo nieznacznie od liczb zawartych w tabelkach X a, b, c.

Wszystkie podane w tym ustępie wzory można uważać za przybliżone wzory obliczania zniekształceń dla właściwego, niezmodyfikowanego rzutu Mapy Międzynarodowej. Jaki jest ten stopień przybliżenia, ocenimy jednak dopiero wtedy, gdy zbadamy ściśle prawa zniekształceń także dla właściwego rzutu Mapy Międzynarodowej. Do tej kwestji przystępujemy w następnym rozdziale.

6. Zniekształcenia w (właściwym) rzucie Mapy Międzynarodowej.

Podaliśmy na str. 10 wzory (10) i (11) określające w zupełności prawo rzutu Mapy Międzynarodowej ściśle według brzmienia instrukcji. Spółrzędne x i y są wprawdzie podane w tych wzorach w formie uwikłanej, jednakże możemy obliczyć cząstkowe pochodne x_φ , y_φ , x_l , y_l — potrzebne do badania zniekształceń — bez rozwikływania tych równań, co, jak już wspomnieliśmy, prowadziłoby do bardzo rozwlekłych wzorów. W tym celu trzeba zróżniczkować cząstkowo obydwie strony równań (10) i (11) raz według zmiennej φ a drugi raz według zmiennej l i z czterech tak otrzymanych równań obliczyć x_φ , y_φ , x_l , y_l . Tak np. celem obliczenia x_φ i y_φ napiszmy równania (10) i (11) w postaci:

$$x^2 + y^2 - 2C(\varphi)y + D(\varphi) = 0$$

$$(y - y_1(l))(x_2(l) - x_1(l)) = (x - x_1(l))(y_2(l) - y_1(l))$$

gdzie dla skrócenia oznaczyliśmy:

$$(33) \quad \begin{cases} \delta s_{\varphi_1}^\varphi + N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi = C(\varphi) \\ \delta s_{\varphi_1}^\varphi (\delta s_{\varphi_1}^\varphi + 2N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi) = D(\varphi). \end{cases}$$

Różniczkując wszystko według zmiennej φ otrzymujemy:

$$2xx_\varphi + 2yy_\varphi + 2C'(\varphi)y + D'(\varphi) = 0$$

$$y_\varphi(x_2 - x_1) = x_\varphi(y_2 - y_1)$$

Z drugiego równania obliczamy y_φ i wstawiamy w pierwsze, to z pierwszego równania otrzymuje się:

$$x_\varphi = \frac{2yC'(\varphi) - D'(\varphi)}{2x + 2y \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - 2C(\varphi) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Wobec tego:

$$E' = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = \left[1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 \right] \left(\frac{2yC'(\varphi) - D'(\varphi)}{2x + 2y \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - 2C(\varphi) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \right)^2$$

a stąd:

$$h = \sqrt{\frac{E'}{E}} = \sqrt{\frac{E'}{R^2(\varphi)}} = \frac{2yC'(\varphi) - D'(\varphi)}{R(\varphi) \cdot (2x + 2y \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - 2C(\varphi) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2}$$

Podstawiając tu wartości za $C(\varphi)$ i za pochodne $C'(\varphi)$, $D'(\varphi)$, które się łatwo oblicza z wzorów (33), tudzież mnożąc licznik i mianownik przez $x_2 - x_1$ dochodzimy ostatecznie do następującego wzoru na obliczenie wydłużenia h w kierunku południków:

$$(34) \quad h = \frac{d(l) \left\{ \delta N(\varphi) + (y - \delta s_{\varphi_1}^{\varphi}) (1 - \delta) \operatorname{tg} \varphi + \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2} \cdot \frac{y - \delta s_{\varphi_1}^{\varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} \right\}}{\operatorname{tg} \varphi [x(x_1 - x_2) + (y - \delta s_{\varphi_1}^{\varphi}) (y_1 - y_2)] + N(\varphi) (y_2 - y_1)}$$

Chcąc ten wzór stosować także do równika, t. j. do $\varphi = 0$, należy zastąpić ostatni ułamek w liczniku wyrażeniem:

$$(10a) \quad \frac{y - \delta s_{\varphi_1}^{\varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{x^2}{N(\varphi) + \sqrt{N^2(\varphi) - x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

otrzymanem z wzoru (10).

Nazwijmy mianownik wzoru (34): $M(\varphi, l)$.

Wykonując podobne obliczenie dla pochodnych x_l i y_l otrzymujemy przy pomocy (25) następujący wzór na zniekształcenie k w kierunku równoleżników:

$$(35) \quad k = \frac{(y - y_1)(x'_2 - x'_1) - (x - x_1)(y'_2 - y'_1) + (y_2 - y_1)x'_1 - (x_2 - x_1)y'_1}{\cos \varphi \cdot M(\varphi, l)}$$

przyczem x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 oznaczają pochodne funkcji określonych wzorami (8) według zmiennej l . Tak np.

$$x'_1 = N(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \cos(l \sin \varphi_1) \cdot \sin \varphi_1 = \rho(\varphi_1) \cos(l \sin \varphi_1)$$

i podobnie inne pochodne.

Celem obliczenia kąta ϑ zawartego między obrazem południka a równoleżnika nie trzeba tu sięgać do ogólnej teorii Tissota; znamy bowiem spadek każdej prostej przedstawiającej południk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a spadek stycznej do koła przedstawiającego równoleżnik znajdujemy z łatwością przy pomocy prostej łączącej dany punkt $P(x, y)$ z środkiem odpowiedniego koła równoleżnikowego: $S(0, \delta s_{\varphi_1}^{\varphi} + N(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi)$. W ten sposób otrzymujemy następujący wzór służący do wyznaczenia kąta ϑ :

$$(36) \quad \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{[x(y_2 - y_1) - (y - \delta s_{\varphi_1}^{\varphi})(x_2 - x_1)] \operatorname{tg} \varphi + (x_2 - x_1) N(\varphi)}{M(\varphi, l)}$$

Przy pomocy tych dość zawiłych wzorów (34), (35) i (36) można obliczać zniekształcenia dla wszystkich punktów, których współrzędne są podane. Rachunki są wprawdzie bardzo mozolne, nie nastęrczają jednak żadnych zasadniczych trudności. Używając liczb zawartych w tabl. III obliczyliśmy te zniekształcenia dla wszystkich punktów węzłowych w odstępach jednostopniowych w sekcji równikowej i zestawiliśmy je w tabl. XII a, b, c.

Tabl. XII a (h)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	— 0'612	— 0'459	+ 0'002	+ 0'770
1°	— 0'612	— 0'459	+ 0'000	+ 0'767
2°	— 0'612	— 0'459	— 0'001	+ 0'765
3°	— 0'612	— 0'458	— 0'001	+ 0'764
4°	— 0'612	— 0'458	— 0'001	+ 0'763

Tabl. XII b (k)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	0	0	0	0
1°	— 0'454	— 0'454	— 0'454	— 0'454
2°	— 0'605	— 0'605	— 0'606	— 0'607
3°	— 0'454	— 0'454	— 0'455	— 0'455
4°	0	0	0	0

Tabl. XII c (ϑ')

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	0	— 2'6"	— 4'11"	— 6'17"
1°	0	— 1'3"	— 2'6"	— 3'9"
2°	0	+ 0'0"	— 0'0"	— 0'1"
3°	0	+ 1'3"	+ 2'5"	+ 3'8"
4°	0	+ 2'6"	+ 4'11"	+ 6'16"

Tabelki XII a i XII b zawierają nie same stosunki wydłużenia h i k , lecz wydłużenia względne t. j. $h-1$, $k-1$ wyrażone w „pro mille”, t. zn. 1000 ($h-1$) i 1000 ($k-1$). Tabelka XII c zawiera nie sam kąt ϑ , lecz różnicę $\vartheta' = 90^\circ - \vartheta$. Z tych liczb łatwo już dochodzi się do wyznaczenia osi elipsy Tissota, t. zn. do liczb $\bar{a}$ i $\bar{b}$ podających maksymalny i minimalny stosunek wydłużenia; trzeba tylko zastosować wzory (27) na str. 19. Maksymalne zniekształcenie kąta t. j. 2ω otrzymuje się następnie z wzoru (28) str. 19. Obliczone w ten sposób wielkości $\bar{a}$, $\bar{b}$ i 2ω zestawiliśmy w tabelkach XIII a, XIII b i XIII c dla sekcji równikowej:

Tabl. XIII a ($\bar{a}$)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	0	+ 0'15	+ 0'61	+ 1'38
1°	— 0'45	— 0'30	+ 0'15	+ 0'92
2°	— 0'61	— 0'46	— 0'00	+ 0'77
3°	— 0'45	— 0'30	+ 0'15	+ 0'92
4°	0	+ 0'15	+ 0'61	+ 1'37

Tabl. XIII b ($\bar{b}$)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61
1°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61
2°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61
3°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61
4°	— 0'61	— 0'61	— 0'61	— 0'61

Tabl. XIII c (2ω)

$\varphi \backslash l$	0°	1°	2°	3°
0°	2' 6"	2' 38"	4' 11"	6' 49"
1°	0' 33"	1' 3"	2' 37"	5' 15"
2°	0' 1"	0' 30"	2' 5"	4' 43"
3°	0' 33"	1' 3"	2' 36"	5' 14"
4°	2' 6"	2' 38"	4' 11"	6' 48"

Porównując te wartości, odnoszące się do prawdziwego rzutu Mapy Międzynarodowej, z wartościami zawartymi w tabelkach X a, b, c, odnoszącymi się do zmodyfikowanego rzutu, spostrzegamy bardzo dobrą zgodność. W ten sposób uzasadniliśmy wypowiedziane na str. 24 przypuszczenie, że badanie zniekształceń właściwego rzutu Międzynarodowego można zastąpić z dostatecznym przybliżeniem badaniem uproszczonego rzutu.

W szczególności zwróćmy raz jeszcze uwagę na zniekształcenia maksymalne, zachodzące w narożnikach map. Otrzymaliśmy przy

zastosowaniu ścisłej teorii zniekształceń $a = 1'001381$ jako maksymalne zniekształcenie w dolnym narożniku sekcji równikowej, to zn. wydłużenie względne $1'381'_{00}$ a więc wartość prawie 2 razy większą od liczby $\frac{1}{1270} = 0'00079$ czyli $0'79'_{00}$, otrzymanej przez Lallemanda. Wynik ten dowodzi, że projekcja obrana przez Komitet Międzynarodowy jest bardzo niekorzystna pod względem zniekształceń w porównaniu z innymi bardzo prostymi rzutami, które okazują cztery razy mniejsze wydłużenie względne, jak to np. stwierdziłem dla rzutu stożkowego równoodległościowego (De l'Isle'a), wiernopowierzchniowego (Albersa) i wiernokątnego (Lamberta).

Rozważania te wykraczają jednak poza ramy tego artykułu, którego celem było ujęcie prawa rzutu Mapy Międzynarodowej i jego modyfikacji we wzory matematyczne i ścisłe zbadanie zniekształceń wywołanych przez te metody rzutowania.

L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DE LA PROJECTION DE LA CARTE DU MONDE AU MILLIONIÈME (RÉSUMÉ).

L'objet de ce mémoire est la représentation de la loi de la projection de la Carte Internationale du Monde par des formules mathématiques et l'analyse précise des déformations de cette projection. La définition de la projection discutée dérive des instructions renfermées dans les „Resolutions of the International Map Committee, London 1909”.

D'après ma connaissance on n'a pas jusqu'à présent exprimé cette définition en formules mathématiques, qui permettraient de calculer les coordonnées de chaque point de la carte et de faire une analyse précise de la projection. M. Lallemand se borne dans ses travaux aux formules approximatives et M. Hinks donne des formules seulement pour les deux parallèles extrêmes de chaque section; pour les points intermédiaires il propose un mode simplifié de construction, lequel cependant n'est pas d'accord avec la définition contenue dans les instructions officielles. Je m'appuie sur les formules connues de la projection polyconique américaine (form. (1) du texte) et j'introduis la modification, contenue dans les instructions, au moyen de laquelle la longueur du méridien $l = 2^\circ$ de la carte devient égale à la longueur de l'arc correspondant de l'ellipsoïde terrestre. Dans ce but il faut raccourcir l'image du méridien $l = 2^\circ$, contenu entre les parallèles extrêmes, d'une grandeur q , déterminée par la formule (4); les ordonnées sur le méridien $l = 0^\circ$ seront donc plus petites de la grandeur δ , donnée par la formule (7). Pour les coordonnées des points sur les parallèles extrêmes nous trouvons alors les formules (8). Les coordonnées d'un point quelconque de chacune des sections sont ensuite déterminées par les formules (9) et (11) ou (10) et (11). Les méridiens sont représentés par des droites et les parallèles par des cercles. A l'aide de ces formules j'ai calculé les tables III et IV pour la section équatoriale (de $\varphi = 0^\circ$ à $\varphi = 4^\circ$) et pour la section de $\varphi = 52^\circ$ à $\varphi = 56^\circ$, qui comprend la partie septentrionale de la Pologne. Ces calculs sont assez pénibles et exigent l'usage

des tables de logarithmes à plusieurs chiffres. Je considère ensuite la simplification de la construction proposée par *M. Hinks*. On divise les secteurs, qui représentent les méridiens sur la carte, en parties égales pour avoir les représentations des parallèles, qui ont des distances angulaires égales. Cette nouvelle modification s'exprime par les formules (13), les fonctions $x_1(l)$, $x_2(l)$, $y_1(l)$, $y_2(l)$ étant définies par les formules (8). Les tables V et VI contiennent les coordonnées calculées à l'aide de ces formules. Les valeurs trouvées ne diffèrent pas des valeurs contenues dans les tables III et IV, que du dernier chiffre, c'est à dire de moins, que de 0'01 mm; les deux projections sont donc pratiquement identiques. Je démontre, que cette projection donne pour les représentations des parallèles non plus des cercles, mais des épicycloïdes et des cycloïdes; par ex.: l'équation du parallèle central devient (16) pour la section équatoriale et (17) pour les autres sections. J'introduis ensuite une autre modification, qui diffère moins de la projection officielle, en divisant les méridiens de la carte non plus en parties égales, mais en parties qui sont proportionnelles aux arcs, comme dans la projection ordinaire polyconique. Les formules de cette projection sont (18), le fonction $s(\varphi)$ signifiant le longueur d'arc du méridien, comptée de l'équateur. Les tables VII et VIII donnent les coordonnées calculées pour cette nouvelle modification; ici encore les différences entre les nombres obtenus pour la projection internationale sont pratiquement négligeables.

Les chapitres suivants renferment l'analyse des déformations de ces trois projections à l'aide de la théorie classique de *Tissot*. Je commence par la démonstration des formules des déformations pour la modification de *M. Hinks*; les formules (30) donnent des déformations linéaires h et k dans les directions des méridiens et des parallèles et l'angle ϑ formé par le méridien et le parallèle de la carte. Les tables IX a , b et c contiennent les valeurs numériques $(h-1) \cdot 1000$, $(k-1) \cdot 1000$, c'est à dire les déformations relatives (exprimées en promille) et $\vartheta' = \vartheta - 90^\circ$ pour la section équatoriale. Les formules connues (27) et (28) donnent ensuite des déformations maxima et minima de la longueur et de l'angle: $\bar{a}$, $\bar{b}$ et 2ω ; $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont les demi-axes de l'ellipse indicatrice de *Tissot*. Les tables X a , b , c donnent ces valeurs relatives, c'est à dire $(\bar{a}-1) \cdot 1000$, $(\bar{b}-1) \cdot 1000$ et 2ω . Les formules pour la seconde modification (voir la formule (32) pour h) sont démontrées d'une manière analogue. Je déduis enfin les formules pour h , k , et ϑ pour la projection internationale officielle, sans aucune modification supplémentaire. On trouve les formules (34), (35) et (36) qui sont assez compliquées et conduisent à des calculs pénibles. Les tables XII a , b et c contiennent les grandeurs $(h-1) \cdot 1000$, $(k-1) \cdot 1000$ et $\vartheta' = \vartheta - 90^\circ$ calculées pour la section équatoriale. Les tables XIII a , b et c enfin contiennent les déformations maxima: $\bar{a}$, $\bar{b}$ et 2ω .

M. Lallemand a trouvé par une méthode d'approximation le nombre $\frac{1}{1270} = 0'71''_{00}$ comme déformation maximum de la longueur. Nos tables fournissent cependant le nombre 1'00138, c'est à dire 1'38''₀₀, pour la déformation relative maximum, un nombre, qui est presque deux fois plus grand! On peut démontrer (v. mon mémoire: „International Map Projection 1/M.” *Przegląd Kartograficzny* 1927 Lwów) que l'on peut choisir les projections coniques ordinaires, sans aucune modification, d'une telle

manière, que la déformation maximum pour la carte du Monde au millionième devient quatre fois plus faible notamment 0'33''₀₀. On voit donc, que la projection choisie par le Comité International est moins avantageuse que les projections coniques ordinaires, et dont la construction ainsi que les calculs numériques sont plus simples. Il apparaît aussi, que ces projections sont pratiquement identiques avec la projection internationale, si l'on se borne à une section de la carte. L'assemblage de quelques sections dans un plan est plus avantageux pour les projections coniques parce qu'il offre des lacunes moins étendues, que dans la projection internationale.

The first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the
the fourth is the fact that the
the fifth is the fact that the
the sixth is the fact that the
the seventh is the fact that the
the eighth is the fact that the
the ninth is the fact that the
the tenth is the fact that the
the eleventh is the fact that the
the twelfth is the fact that the
the thirteenth is the fact that the
the fourteenth is the fact that the
the fifteenth is the fact that the
the sixteenth is the fact that the
the seventeenth is the fact that the
the eighteenth is the fact that the
the nineteenth is the fact that the
the twentieth is the fact that the
the twenty-first is the fact that the
the twenty-second is the fact that the
the twenty-third is the fact that the
the twenty-fourth is the fact that the
the twenty-fifth is the fact that the
the twenty-sixth is the fact that the
the twenty-seventh is the fact that the
the twenty-eighth is the fact that the
the twenty-ninth is the fact that the
the thirtieth is the fact that the
the thirty-first is the fact that the
the thirty-second is the fact that the
the thirty-third is the fact that the
the thirty-fourth is the fact that the
the thirty-fifth is the fact that the
the thirty-sixth is the fact that the
the thirty-seventh is the fact that the
the thirty-eighth is the fact that the
the thirty-ninth is the fact that the
the fortieth is the fact that the
the forty-first is the fact that the
the forty-second is the fact that the
the forty-third is the fact that the
the forty-fourth is the fact that the
the forty-fifth is the fact that the
the forty-sixth is the fact that the
the forty-seventh is the fact that the
the forty-eighth is the fact that the
the forty-ninth is the fact that the
the fiftieth is the fact that the
the fifty-first is the fact that the
the fifty-second is the fact that the
the fifty-third is the fact that the
the fifty-fourth is the fact that the
the fifty-fifth is the fact that the
the fifty-sixth is the fact that the
the fifty-seventh is the fact that the
the fifty-eighth is the fact that the
the fifty-ninth is the fact that the
the sixtieth is the fact that the
the sixty-first is the fact that the
the sixty-second is the fact that the
the sixty-third is the fact that the
the sixty-fourth is the fact that the
the sixty-fifth is the fact that the
the sixty-sixth is the fact that the
the sixty-seventh is the fact that the
the sixty-eighth is the fact that the
the sixty-ninth is the fact that the
the seventieth is the fact that the
the seventy-first is the fact that the
the seventy-second is the fact that the
the seventy-third is the fact that the
the seventy-fourth is the fact that the
the seventy-fifth is the fact that the
the seventy-sixth is the fact that the
the seventy-seventh is the fact that the
the seventy-eighth is the fact that the
the seventy-ninth is the fact that the
the eightieth is the fact that the
the eighty-first is the fact that the
the eighty-second is the fact that the
the eighty-third is the fact that the
the eighty-fourth is the fact that the
the eighty-fifth is the fact that the
the eighty-sixth is the fact that the
the eighty-seventh is the fact that the
the eighty-eighth is the fact that the
the eighty-ninth is the fact that the
the ninetieth is the fact that the
the ninety-first is the fact that the
the ninety-second is the fact that the
the ninety-third is the fact that the
the ninety-fourth is the fact that the
the ninety-fifth is the fact that the
the ninety-sixth is the fact that the
the ninety-seventh is the fact that the
the ninety-eighth is the fact that the
the ninety-ninth is the fact that the
the hundredth is the fact that the