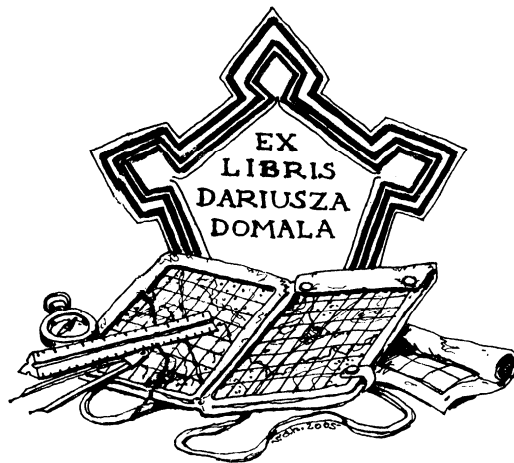


„Uzgodnienie wyników triangulacyj na obszarze Polski”

J. Słomczyński

**Biblioteka Służby Geograficznej
T11 Warszawa 1933**



Wykorzystywanie materiałów archiwalnych w celach komercyjnych (reprodukcje w wydawnictwach itp.) może nastąpić po podpisaniu stosownej umowy.

Po opublikowaniu pracy, w której wykorzystane zostały zbiory Dariusz Domala domciu@poczta.onet.pl autor zobowiązany jest złożyć jeden egzemplarz pracy do mojego archiwum.

JÓZEF SŁOMCZYŃSKI

PORUCZNIK KORPUSU GEOGRAFÓW

**UZGODNIENIE WYNIKÓW
TRIANGULACYJ NA OBSZARZE POLSKI**



DRUK WOJSKOWEGO INSTYTUTU GEOGRAFICZNEGO W WARSZAWIE

1 9 3 3

**BIBLIOTEKA
SEWZBY
GEOGRAFICZNEJ**

TOM 11

**UZGODNIENIE WYNIKÓW
TRIANGULACYJ NA OBSZARZE POLSKI**

J. SŁOMCZYŃSKI

**NAKŁADEM
SEKCJI GEOGRAFICZNEJ
TOWARZYSTWA WIEDZY
WOJSKOWEJ**

1. Wstęp.

Triangulacja Polski przeprowadzona w ubiegłym stuleciu dała w wyniku około 24 000 punktów, średnio 5—7 na 100 km², o znanych współrzędnych geograficznych lub prostokątnych płaskich pewnego systemu odwzorowania. Punkty w większej części były utrwalone w terenie i w 50% dochowane do dzisiaj.

Orientowanie się w dawnych materiałach geodezyjnych znakomicie ułatwia katalog punktów trygonometrycznych, opublikowany niedawno¹⁾, jednak niezawsze można korzystać z tych materiałów bezpośrednio, bez przeróbek.

Przyczyna leży w tem, że współrzędne punktów są odniesione do trzech różnych elipsoid (Bessela, Walbecka i wyrównującej) w 9 układach z sobą niepowiązanych, niema rozposzcznionych tablic do elipsoid wyrównującej i Walbecka, wreszcie rachunek na współrzędnych geograficznych jest niedogodny i mało znany.

Kartografia w takim stanie rzeczy cierpi szczególnie. Budowa mapy w ciągłym, jednolitem odwzorowaniu jest problematyczna bez oparcia o punkty trygonometryczne, których współrzędne odniesione byłyby do jednej powierzchni, w jednym układzie.

Podstawianie do istniejących gotowych formuł odwzorowawczych,²⁾ dostosowanych do elipsoidy Bessela, współrzędnych φ , λ wziętych z innych elipsoid, jest z gruntu błędne i niedopuszczalne tam, gdzie chodzi o odwzorowanie większej powierzchni. Błędem jest również używanie stałych zamienników liczbowych

¹⁾ J. Michałowski i T. Sikorski: Katalog punktów trygonometrycznych na obszarze R. P., Warszawa 1932, Biblioteka Służby Geograficznej, Tom 8.

²⁾ F. Biernacki i J. Słomczyński: Odwzorowanie quasistereograficzne W.I.G., Warszawa 1932, Biblioteka Służby Geograficznej, Tom 9.

długości geograficznej dla elipsoid różnych. Długość łuku jednego stopnia równoleżnika na szerokości 52°, mierzona na elipsoidzie **Bonnela**, jest krótsza od długości takiegoż łuku na elipsoidzie wyrównywującej o 56,8 m, a więc np. między Kaliszem a Pińskiem, różnica długości równoleżników na każdej z tych elipsoid wyniesie przeszło 450 m.

Prosty ten przykład wskazuje, jak znaczne błędy popełniamy, czy to przy konstrukcji siatek geograficznych, czy rachując odległości i kierunki z współrzędnych geograficznych, jeżeli nie uwzględniamy rodzaju elipsoidy odniesienia. Mapy, obejmujące granice dwóch różnych układów triangulacji, nie mają wogóle ciągłej siatki geograficznej, gdyż tam niema dostatecznych podstaw do wyznaczenia miejsca zarówno południków, jak i równoleżników. Są na obszarze Polski punkty, dla których różnica w szerokościach geograficznych, liczonych na dwóch różnych elipsoidach przekracza 4 sekundy, a zatem około 120 m.

Pomyślne rozwiązanie zagadnienia ścisłej konstrukcji map można znaleźć albo w uzgodnieniu dawnych, różnych systemów triangulacji, albo przez nowe, podstawowe i jednolite pomiary.

Badając wyniki triangulacji przedwojennych stwierdziłem, że różne współrzędne tych samych punktów, należących do dwóch sąsiadujących z sobą układów są naturalnym skutkiem przyjętych różnych powierzchni odniesienia; mogą też pochodzić z błędów określenia położenia punktów i azymutów wyjściowych, natomiast dokładność prac triangulacyjnych w każdym układzie jest najzupełniej dostateczna do prowadzenia na ich podstawie wszelkich dalszych pomiarów w terenie, a tembardziej dla kartografji.

W następnych rozdziałach przedstawię metodę, zapomoćą której różne układy triangulacyjne można będzie rachunkowo powiązać w całość, współrzędne punktów odnieść do jednej powierzchni, odwzorować tę powierzchnię na płaszczyźnie według jednego prawa i otrzymać w rezultacie jednolitą podstawę geodezyjną, która nietylko będzie służyć dla kartografji, lecz także może być przydatna dla oddziałów pomiarowych oraz przyspieszyć ukończenie nowych prac triangulacyjnych.

2. Wiernokątne odwzorowanie elipsoidy na inną elipsoidę.

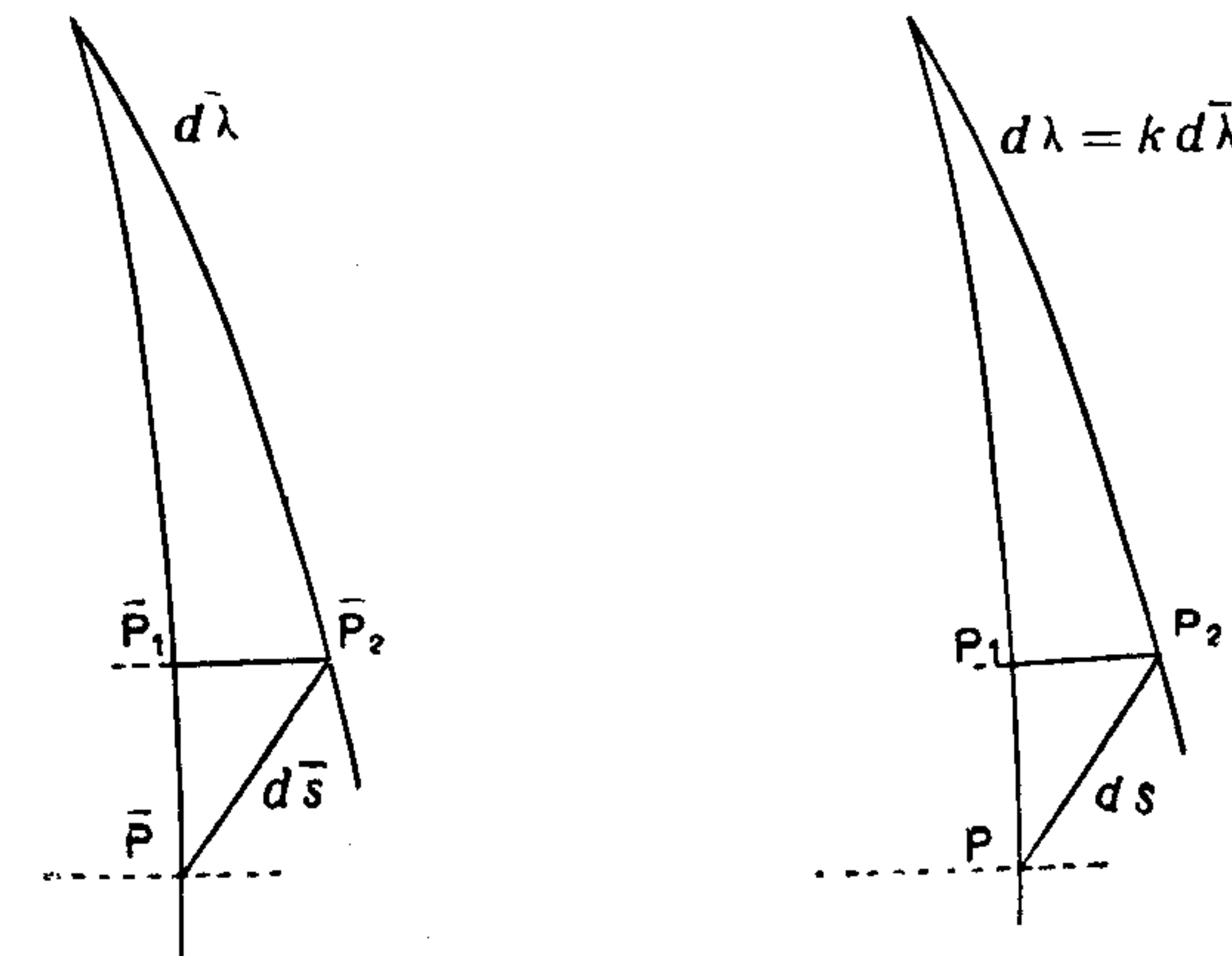
Niech będzie dana elipsoidal obrotowa \bar{E} o znanych elementach \bar{a} i \bar{e}^2 (\bar{a} oznacza pólś dużą, \bar{e}^2 ekcentryczność), oraz zbiór elipsoid obrotowych E_n o znanej ekcentryczności e^2 , ($e \neq \bar{e}$) jednakowej dla wszystkich elipsoid zbioru.¹⁾

Wyprowadźmy związki pozwalające odwzorować *wiernokątnie* pewną ograniczoną część powierzchni elipsoidy \bar{E} na powierzchnię jednej z elipsoid zbioru E_n .

¹⁾ Zbiór elipsoid podobnych.

Oznaczmy:

	Elips. \bar{E}	Elips. E
Szerokość geograficzna	$\bar{\varphi}$	φ
Różnica długości geograficznej	$\bar{\lambda}$	λ
Ekcentryczność	\bar{e}^2	e^2
Półś duża	\bar{a}	a
Promień krzywizny południka	\bar{M}	M
Promień krzywizny poprzecznej	\bar{N}	N



Rys. 1.

Z rysunku 1 mamy:

$$\begin{aligned} \bar{P}\bar{P}_1 &= \bar{M} d\bar{\varphi} & P P_1 &= M d\varphi \\ \bar{P}_1\bar{P}_2 &= \bar{N} \cos \bar{\varphi} \cdot d\bar{\lambda} & P_1 P_2 &= N \cos \varphi \cdot d\lambda \end{aligned}$$

Wiernokątne odwzorowanie otrzymamy, jeżeli będą spełnione następujące równania:¹⁾

$$(1) \quad \frac{\bar{M} d\bar{\varphi}}{M d\varphi} = \frac{\bar{N} \cos \bar{\varphi} \cdot d\bar{\lambda}}{N \cos \varphi \cdot d\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

skąd $\frac{M}{N} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi}$ i odpowiednio $\frac{\bar{M}}{\bar{N}} = \frac{1-\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2 \sin^2 \bar{\varphi}}$

oraz podstawiając $\frac{d\lambda}{d\bar{\lambda}} = k$ otrzymamy z równań (1):

$$k \cdot \frac{1-\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2 \sin^2 \bar{\varphi}} \cdot \frac{d\bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}} = \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

¹⁾ Por. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart, 1923, T. 3, str. 570.

W lewej stronie tego równania rozkładamy na części:

$$\frac{1 - \bar{e}^2}{\cos \bar{\varphi} (1 - \bar{e}^2 \sin^2 \bar{\varphi})} = \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} - \frac{\bar{e}^2 \cos \bar{\varphi}}{2(1 + \bar{e} \sin \bar{\varphi})} - \frac{\bar{e}^2 \cos \bar{\varphi}}{2(1 - \bar{e} \sin \bar{\varphi})}$$

A więc

$$k \cdot \int \frac{1 - \bar{e}^2}{\cos \bar{\varphi} (1 - \bar{e}^2 \sin^2 \bar{\varphi})} \cdot d\bar{\varphi} = k \left\{ \log \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{\bar{\varphi}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \bar{e} \log (1 + \bar{e} \sin \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \bar{e} \log (1 - \bar{e} \sin \bar{\varphi}) \right\} + \log \bar{c} = \\ = \log \left\{ \operatorname{tang}^k \left(45^\circ + \frac{\bar{\varphi}}{2} \right) \left[\frac{1 - \bar{e} \sin \bar{\varphi}}{1 + \bar{e} \sin \bar{\varphi}} \right]^{\frac{\bar{e} \cdot k}{2}} \cdot \bar{c} \right\}$$

gdzie $\log \bar{c}$ jest stałą całkowania.

Postępując podobnie z prawą stroną równania, mamy

$$\int \frac{1 - e^2}{\cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \cdot d\varphi = \log \left\{ \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left[\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right]^{\frac{e}{2}} \cdot c \right\}$$

Kładąc $\frac{c}{\bar{c}} = C$ otrzymamy:

$$(2) \quad \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{C} \operatorname{tang}^k \left(45^\circ + \frac{\bar{\varphi}}{2} \right) \cdot \frac{\left[\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right]^{\frac{e}{2}}}{\left[\frac{1 - \bar{e} \sin \bar{\varphi}}{1 + \bar{e} \sin \bar{\varphi}} \right]^{\frac{\bar{e} \cdot k}{2}}}$$

Stosunek powiększenia znajdziemy z równań (1).

$$(3) \quad \mu = k \frac{a \cos \varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \bar{\varphi} \sqrt{1 - \bar{e}^2 \sin^2 \bar{\varphi}}}$$

Aby wyznaczyć trzy stałe a , k i C w równaniach (2) i (3) należy określić trzy warunki.

Rozpatrzmy następujące przypadki:

I. Zakładamy, że stosunek powiększenia μ na szerokości θ , która odpowiada szerokości $\bar{\theta}$ na elipsoidzie \bar{E} (przyczem $\bar{\theta}$ leży w pobliżu środka odwzorowywanego obszaru), jest równy jedności. Ażeby uzyskać minimum zniekształceń na całym odwzorowywanym obszarze, warunki na wyznaczenie a , k i C będą:

$$(4) \quad \begin{aligned} 1. \quad \mu &= 1; & \log \mu &= 0 \\ 2. \quad \frac{d \log \mu}{d \varphi} &= 0 \\ 3. \quad \frac{d^2 \log \mu}{d \varphi^2} &= 0 \end{aligned}$$

II. Zakładamy, że pewien obrany równoleżnik będzie wspólny dla obu elipsoid. W tym wypadku warunki napiszemy następująco:

$$(5) \quad \begin{aligned} 1. \quad \mu &= 1 \\ 2. \quad k &= 1 \\ 3. \quad \theta &= \bar{\theta} \end{aligned}$$

gdzie θ , $\bar{\theta}$ oznacza szerokość geograficzną obranego równoleżnika.

Kładąc warunki wyszczególnione w pierwszym lub drugim przypadku, możemy dla każdego $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$ na elipsoidzie \bar{E} obliczyć z równania (2) odpowiadające φ , λ na elipsoidzie zbioru E_n i następnie z równania (3) znaleźć a i μ .

3. Wiernokątne odwzorowanie elipsoid podobnych na płaszczyznę.

Odwzorujmy wiernokątnie na płaszczyźnie, według jednego prawa, punkty pewnego ograniczonego obszaru, przedstawione na elipsoidach omawianego w poprzednim rozdziale zbioru w postaci współrzędnych geograficznych φ , λ lub łukowych s , u ; przyczem s jest to długość łuku południka od punktu do obranej szerokości φ_0 , u zaś oznacza długość łuku równoleżnika od punktu do południka λ_0 , przechodzącego przez centralny punkt odwzorowania (φ_0 , λ_0).

Współrzędne s , u , są to funkcje φ , λ , oraz elementów elipsoidy a i e :

$$(6) \quad \begin{aligned} s &= a \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1 - e^2}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \cdot d\varphi \\ u &= a \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\lambda}{\rho} \end{aligned}$$

Prawo odwzorowania dla punktów południka centralnego λ_0 niech będzie dane w postaci równania:¹⁾

$$(7) \quad X = a_{00} + a_{01} s + a_{02} s^2 + a_{03} s^3 + \dots$$

zaś formuły do wyrażenia współrzędnych prostokątnych płaskich X , Y , jako funkcji dowolnych s , u , niech mają kształt:

$$(8) \quad \begin{aligned} X &= a_{00} + a_{01} s + a_{02} s^2 + a_{03} s^3 + \dots + (a_{20} + a_{21} s + a_{22} s^2 + \\ &+ a_{23} s^3 + \dots) u^2 + (a_{40} + a_{41} s + a_{42} s^2 + \dots) u^4 + \dots \\ Y &= (a_{10} + a_{11} s + a_{12} s^2 + a_{13} s^3 + \dots) u + (a_{30} + a_{31} s + \\ &+ a_{32} s^2 + \dots) u^3 + (a_{50} + a_{51} s + a_{52} s^2 + \dots) u^5 + \dots \end{aligned}$$

gdzie a_{00} , a_{01} , ..., ogólnie $a_{n,r}$ są to współczynniki stałe odwzorowania danej elipsoidy, zależne od szerokości geograficznej (φ_0) punktu centralnego.

¹⁾ Prof. dr. L. Grabowski: O odwzorowaniach płaskich wiernokątnych elipsoidy obrotowej, w których pewien wybrany południk odwzoruje się jako linja prosta (oś x-ów). Odbitka z Czasopisma Technicznego, Lwów 1928.

Ze związków na wyznaczenie współczynników stałych $a_{n,r}^1$:

$$(-1)^{n+1} a_{n+1,r} = \frac{n}{n+1} (a_{n,0} k_r + a_{n,1} k_{r-1} + a_{n,2} k_{r-2} + \dots + a_{n,r} k_0) - \frac{r+1}{n+1} a_{n,r+1}$$

$$a_{0,r} = \Phi_1 (R_0)$$

$$k_r = \Phi_2 (N_0)$$

widzimy, że po podstawieniu

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} = a \cdot f_1 (e, \varphi_0)$$

$$N_0 = a \cdot f_2 (e, \varphi_0)$$

czynnik a w tych związkach można oddzielić i napisać ogólnie:

$$(9) \quad a_{n,r} = \frac{1}{a^{n+r-1}} \cdot F (e, \varphi_0)$$

Stąd, z obliczonych współczynników $a_{n,r}$ dla jednej z elipsoid zbioru E_n , na przykład dla elipsoidy E (porównawczej), łatwo jest otrzymać współczynniki $a'_{n,r}$ dla każdej innej, np. E' :

$$(10) \quad a'_{n,r} = a_{n,r} \cdot \frac{1}{h^{n+r-1}}$$

gdzie

$$(11) \quad h = \frac{a'}{a}$$

Na podstawie równań (6), znacząc łuki elipsoidy E przez s, u i odpowiednio przez s', u' łuki elipsoidy E' , można napisać (dla tych samych e, φ, λ):

$$(12) \quad \begin{aligned} s' &= s \cdot h \\ u' &= u \cdot h \end{aligned}$$

Podstawiając (10) i (12) w równaniach (8), będzie

$$(13) \quad a'_{n,r} \cdot s'^r \cdot u'^n = a_{n,r} \cdot s^r \cdot u^n \cdot \frac{h^{n+r}}{h^{n+r-1}} = a_{n,r} \cdot s^r \cdot u^n \cdot h$$

co sprawdza się dla każdego wyrazu szeregów (8) i przez to pozwala φ, λ punktu na jakiegokolwiek elipsoidzie zbioru przekształcić na współrzędne płaskie tak, jakby to były φ, λ punktu na elipsoidzie porównawczej; przyczem otrzymane x, y mnożymy w końcu przez odpowiedni współczynnik powiększenia h :

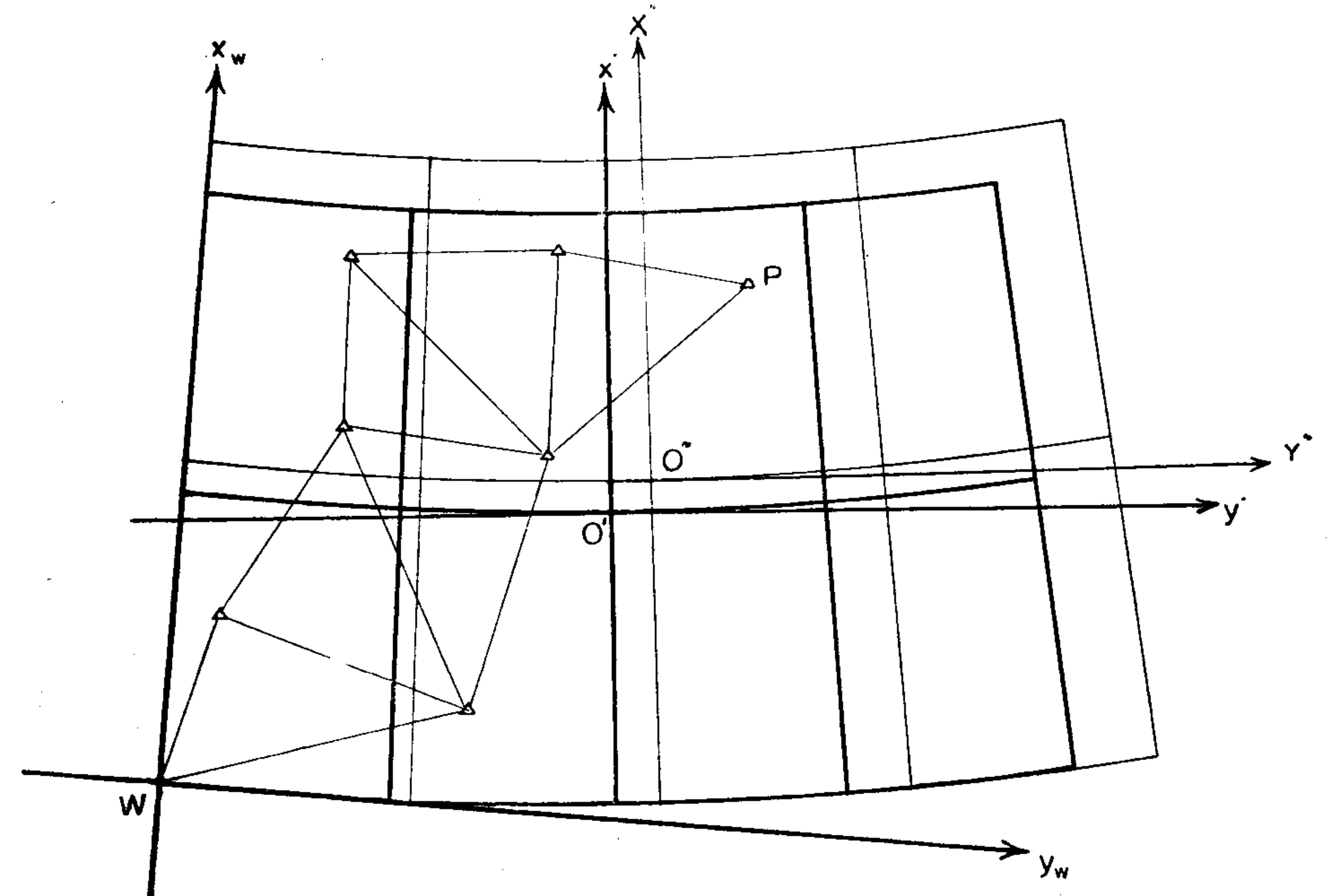
$$(14) \quad \begin{aligned} X &= x \cdot h \\ Y &= y \cdot h \end{aligned}$$

¹⁾ Patrz „Odwzorowanie”, str. XI i XVI.

4. Przekształcenie układów płaskich.

Przypuśćmy, że pewna sieć triangulacyjna jest odniesiona do kilku elipsoid, należących do zbioru E_n w taki sposób, że po odwzorowaniu każdej elipsoidy według jednego prawa na płaszczyznę, obrazy sieci będą identyczne.

W wypadku szczególnym, kiedy punkt wyjściowy triangulacji $W (\varphi_w, \lambda_w)$, (lub inny, z warunkiem, iż jego współrzędne φ, λ będą jednakowe dla każdej z uważanych elipsoid), jest zarazem środkiem odwzorowania każdej elipsoidy, wówczas obrazy sieci na wspólnej dla wszystkich elipsoid płaszczyźnie pokryją się wzajemnie i będą należeć do jednego układu współrzędnych x_w, y_w , (rys. 2).



Rys. 2.

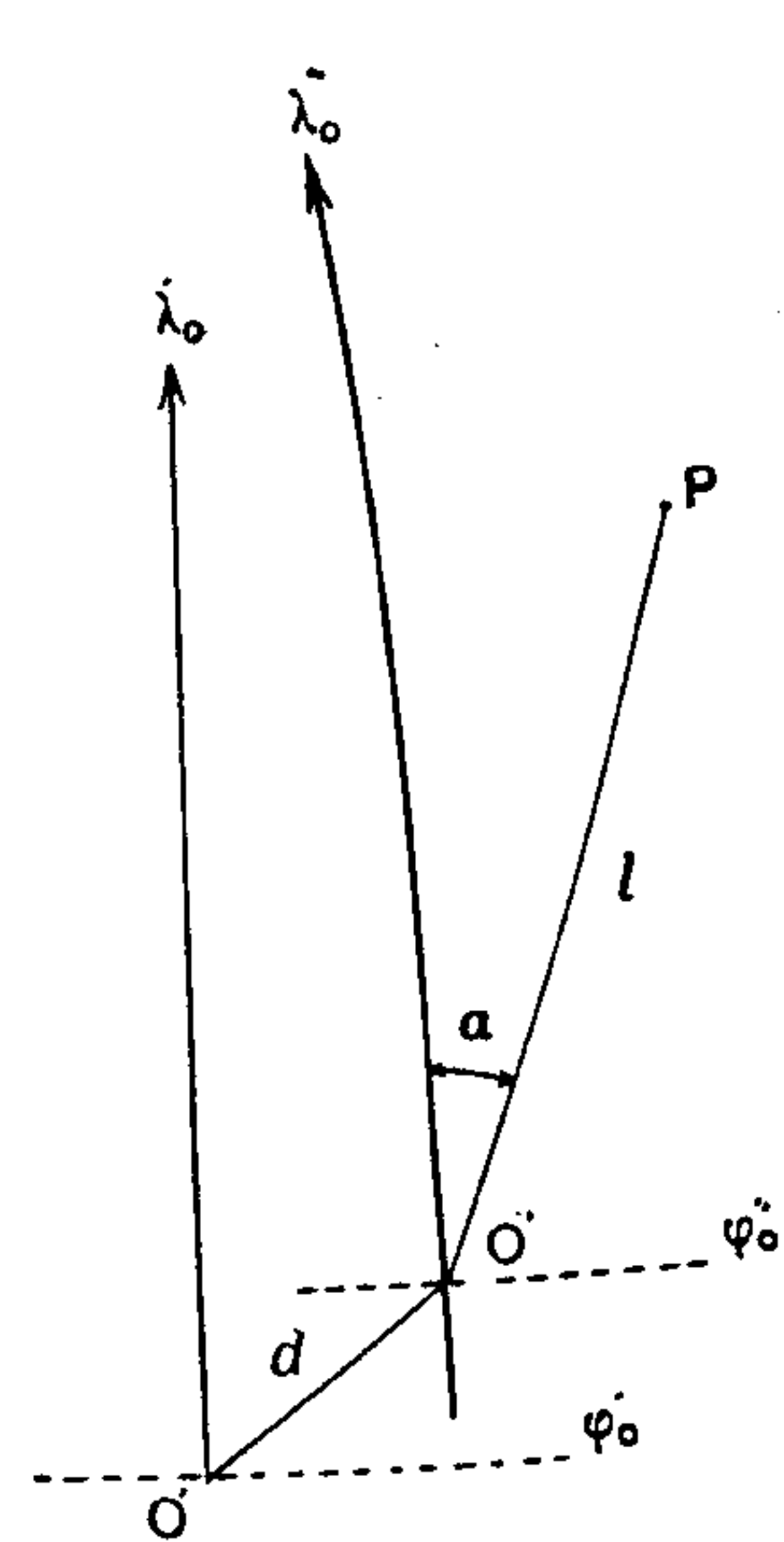
Lecz wybór środka odwzorowania naogół nie będzie zależał od punktu wyjściowego i wtedy obrazy punktów centralnych na płaszczyźnie (początki układów współrzędnych) zajmą względem obrazu punktu P sieci położenie różne dla różnych elipsoid.

Wyprowadźmy formuły na przesunięcie równoległe i skręcenie osi współrzędnych płaskich, a to w celu sprowadzenia współrzędnych punktów uważanej sieci triangulacyjnej do jednego układu.

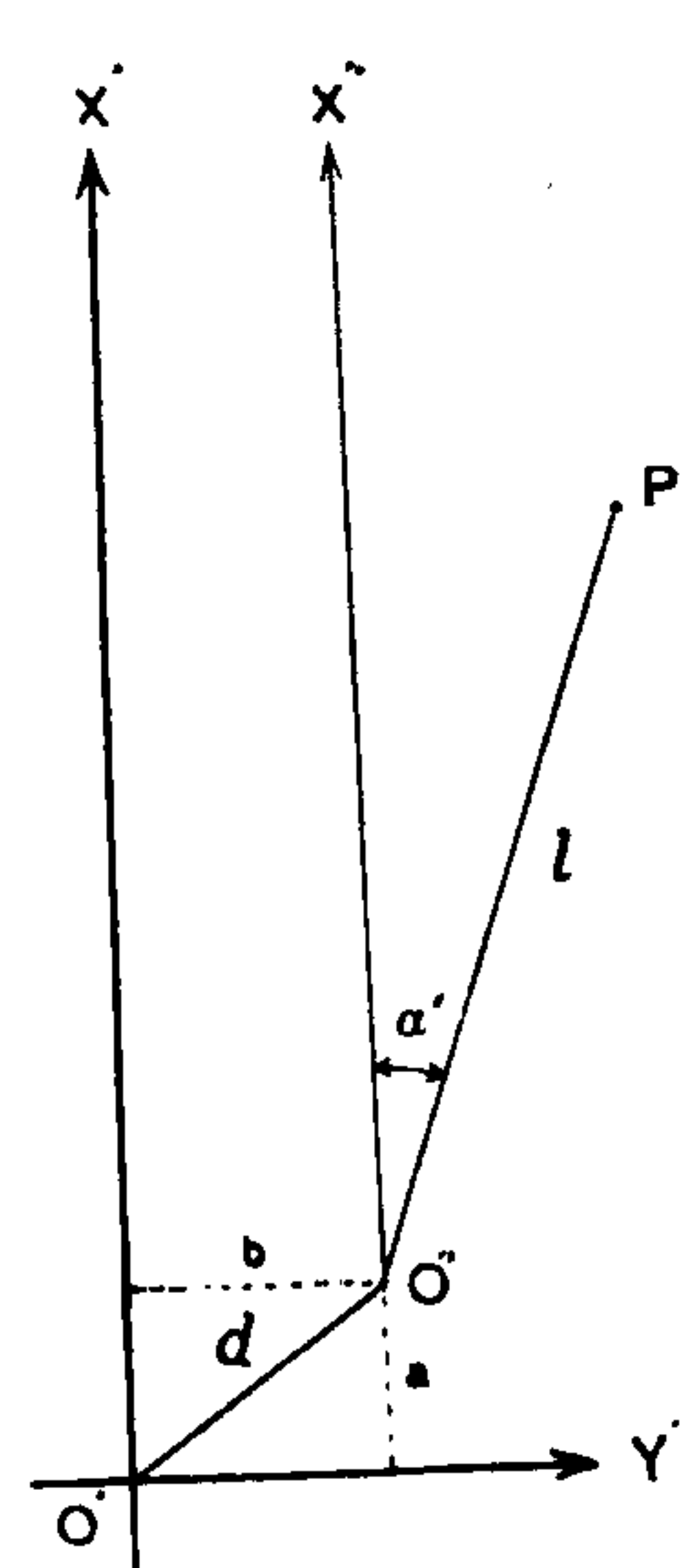
W szczególności zbadajmy wypadek przesunięcia osi stereograficznego odwzorowania elipsoidy na płaszczyznę, ponieważ przy uzgodnieniu wyników triangulacji na obszarze Polski, tem właśnie odwzorowaniem będziemy się posługiwać.

Niech na płaszczyźnie odwzorowania punkty O' i O'' będą początkami dwóch układów.

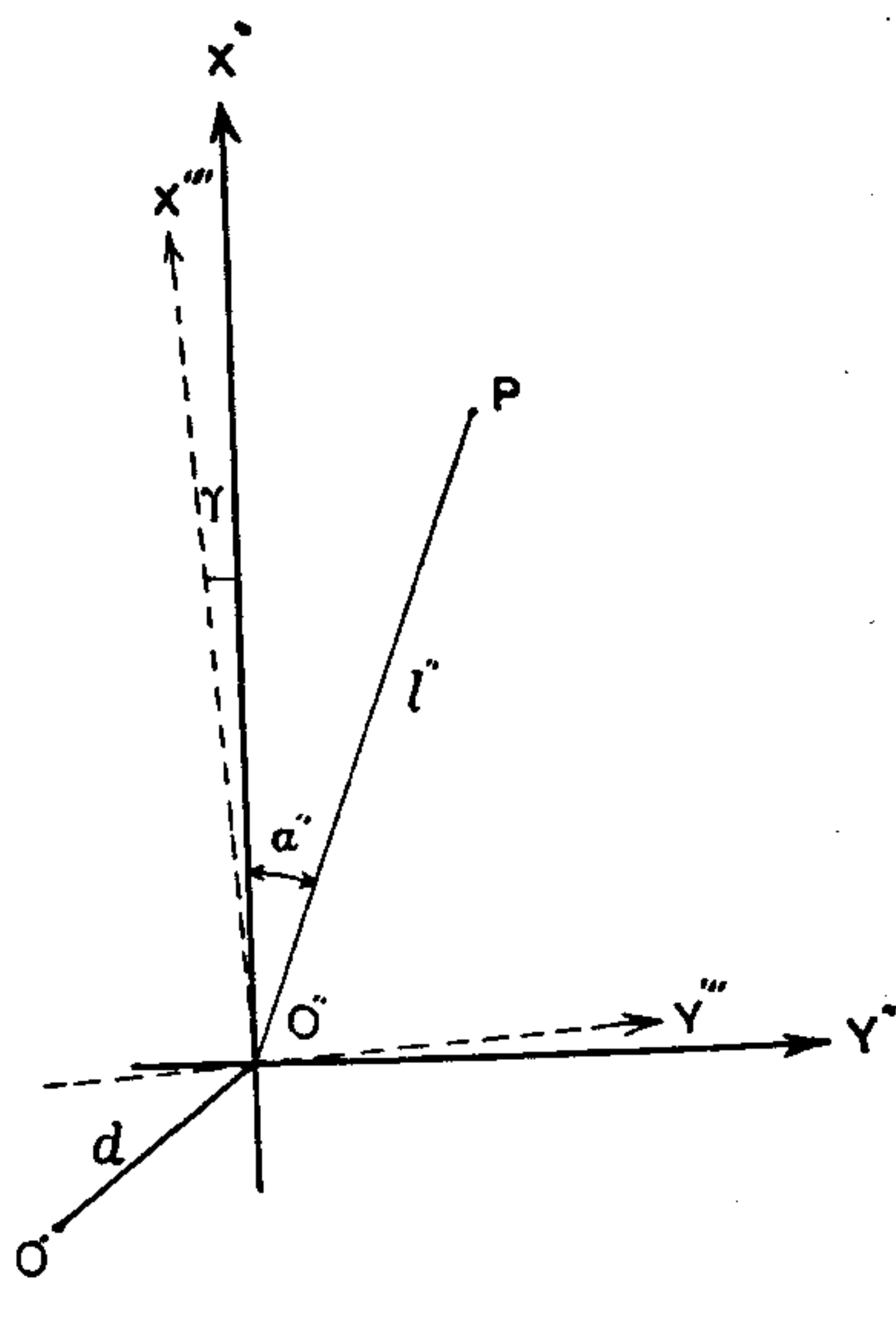
Oznaczmy:	Elipsoida E	Układ $X'O'Y'$	Układ $X''O''Y''$
Współrzędne punktu P	(φ, λ)	(x', y')	(x'', y'')
Współrzędne punktu O''	$(\varphi_0'', \lambda_0'')$	(a, b)	$(0, 0)$
Długość linii $\overline{O''P}$	l	l'	l''
Azymut kierunku $\overline{O''P}$	α	α'	$\alpha'' = \alpha$



Rys. 3a.



Rys. 3b.



Rys. 3c.

Współrzędne prostokątne płaskie jakiegokolwiek punktu, np. P, w układzie $X'O'Y'$ są (rys. 3b)

$$(15) \quad \begin{aligned} x' &= a + l' \cos \alpha' \\ y' &= b + l' \sin \alpha' \end{aligned}$$

Ale $l' = l + \Delta l$, gdzie Δl jest poprawką długości odcinków skończonych w odwzorowaniu stereograficznym¹⁾ i jest

$$(16) \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{4R_0^2} \left(d^2 - dl \cos \alpha + \frac{l^2}{3} \right),$$

następnie $\alpha' = \alpha + \beta$, gdzie β jest poprawką kątową²⁾ i jest

$$(17) \quad \beta'' = \frac{dl \sin \alpha}{4R_0^2 \sin 1''}$$

¹⁾ Patrz „Odwzorowanie”, str. XX (15).

²⁾ Tamże, str. XXI, (16).

Podstawiając w równania (15) $l' = l + \Delta l$, $\alpha' = \alpha + \beta$ i zanedbując wyrazy małe drugiego rzędu względem Δl i $\sin \beta$ mamy po rozwinięciu:

$$(18) \quad \begin{aligned} l \cos \alpha &= x' - a - \Delta l \cos \alpha + l \sin \alpha \cdot \beta \sin 1'' \\ l \sin \alpha &= y' - b - \Delta l \sin \alpha - l \cos \alpha \cdot \beta \sin 1'' \end{aligned}$$

Z prawa rzutu stereograficznego¹⁾ wynika, że długość odcinka l'' w układzie $X''O''Y''$ wyniesie:

$$(19) \quad l'' = 2R_0 \tan \frac{l}{2R_0} = l + \frac{l^3}{12R_0^2} + \frac{l^5}{120R_0^4} + \dots$$

skąd, ograniczając się do 2 wyrazów szeregu mamy

$$l = l'' - \frac{l^3}{12R_0^2}$$

co po wstawieniu do równań (18), z uwzględnieniem (16) da

$$(20) \quad \begin{aligned} l'' \cos \alpha &= x'' = x' - a - (d^2 - dl \cos \alpha) \frac{x''}{4R_0^2} + y'' \beta \sin 1'' \\ l'' \sin \alpha &= y'' = y' - b - (d^2 - dl \cos \alpha) \frac{y''}{4R_0^2} - x'' \beta \sin 1'' \end{aligned}$$

gdzie wyrazy 2-go rzędu względem Δl i $\sin \beta$ są zanedbane w dalszym ciągu.²⁾

Zmiana kierunku osi współrzędnych, przy zachowaniu początku układu, nie zależy od długości linii l ; kąt zaś między osiami pierwotnego i nowego układu pozostaje ten sam na obrazie co i na elipsoidzie. Formuły zatem do zmiany współrzędnych przy skręceniu osi, dla kątów skręcenia liczonych dodatnio w kierunku ruchu wskazówki zegara, będą: (rys. 3c)

$$(21) \quad \begin{aligned} x''' &= x'' \cos \gamma + y'' \sin \gamma \\ y''' &= y'' \cos \gamma - x'' \sin \gamma \end{aligned}$$

5. Systemy triangulacyjne na obszarze Polski.

Stan triangulacji obszaru Polski³⁾ (bez pomiarów, rozpoczętych po wojnie) przedstawia się następująco: (rys. 4).

¹⁾ Odwzorowanie, str. XVI, (8).

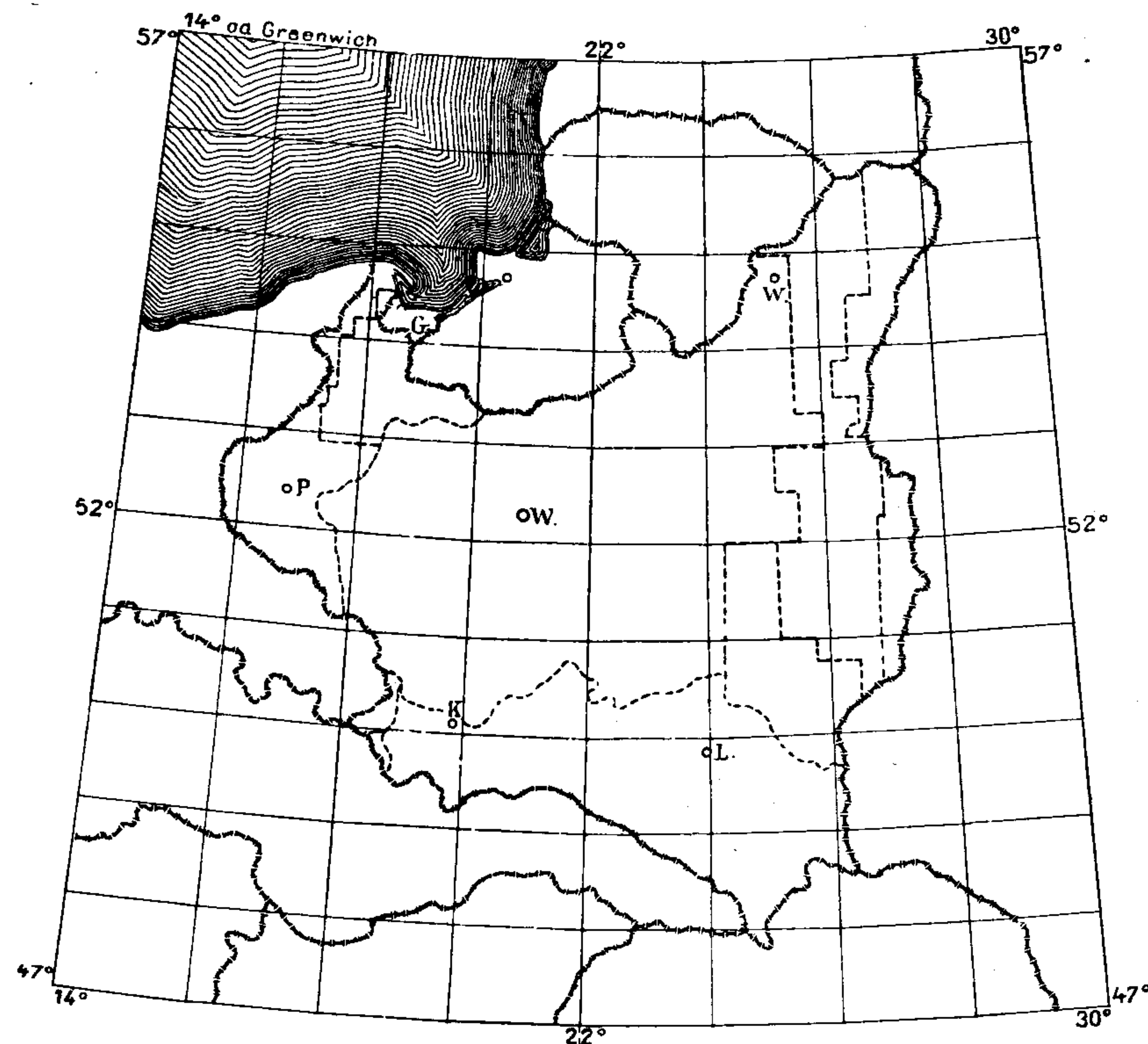
²⁾ L. Driencourt et J. Laborde. Traité des projections des cartes géographiques, Fasc. III, Paris 1932, str. 50.

³⁾ Uwagi ogólne o materiałach podstawowych do katalogu punktów trygonometrycznych.

Były zabór pruski pokrywa gęsta sieć punktów (do 15 na 100 km²) na elipsoidzie Bessela, w 2 układach: pierwszy z punktem wyjścia Rauenberg (32 000 km²), drugi z punktem Potsdam-Helmertturm (15 000 km²).

W katalogu obydwie te układy sprowadzono do jednego przez odniesienie długości geograficznych do wspólnego pierwszego południka, (Ferro niemieckie).

W zaborze rosyjskim przeciętnie wypada po 5 punktów na 100 km²; większa część sieci (176 000 km²) odniesiona jest do elip-



Rys. 4.

soidy wyrównywiającej z punktem wyjścia w Warszawie (obserwatorium astronomiczne). Północno-wschodni pas południkowy (66 000 km²) należy do elipsoidy Bessela i jest pomierzony w 2 układach: Dorpat (I) i Dorpat (II). Te ostatnie łatwo jest sprowadzić do jednego przez przesunięcie południków, jak to miało miejsce w zaborze pruskim. Pozostały obszar na południowym wschodzie zaboru rosyjskiego (20 000 km²) pomierzono na elipsoidzie Walbecka z punktem wyjścia Niemież. Długości geograficzne punktów triangulacyjnych w zaborze rosyjskim liczone są od obserwatorium w Pułkowie.

W zaborze austriackim za powierzchnię odniesienia przyjęto elipsoidę Bessela.

Punkty I rzędu (punkt wyjścia Hermannskogel), w liczbie 117 na całym obszarze Małopolski, określone są w współrzędnych geograficznych.

Punkty triangulacji szczegółowej, (średnio 5 na 100 km²), wykonanej dla katastru i z siecią I rzędu niepowiązanej, podane są w współrzędnych prostokątnych Cassini'ego¹⁾, w dwóch układach: jeden dla Małopolski, z początkiem we Lwowie (78 000 km²), drugi dla Śląska Cieszyńskiego, z początkiem w Wiedniu (1000 km²).

Pierwszy południk austriacki leży o 11'' na wschód od Ferro niemieckiego²⁾.

Przystępując do uzgodnienia wyszczególnionych wyżej systemów triangulacji, przedewszystkiem odniesiemy współrzędne punktów do powierzchni elipsoid o jednakowej ekscentryczności e^2 , równej ekscentryczności elipsoidy Bessela z roku 1841, dla której

$$\begin{aligned} \log a &= 6.804\ 6434\ 637 \\ \log e^2 &= 7.824\ 4104\ 237 - 10 \end{aligned}$$

Ta ostatnia elipsoida została przyjęta oficjalnie do wszelkich prac pomiarowych w Polsce³⁾.

Położenie punktów na elipsoidach przedstawimy w postaci współrzędnych geograficznych, z pierwszym południkiem przechodzącym o 22° na wschód od Greenwich na elipsoidzie Bessela.

Następnie wykorzystamy opracowane odwzorowanie quasistereograficzne elipsoidy Bessela na płaszczyznę.

Interpolując z istniejących dla tego odwzorowania tablic współrzędnych unikniemy długiej i uciążliwej pracy nad obliczaniem X, Y z szeregów (8), oraz potrzebnych do tego współczynników $a_{n,r}$, i łuków s, u dla różnej wielkości elipsoid. Dokładność tablicowa, wynosząca 1 dcm, wystarczy w zupełności do celów wspomnianych na wstępie.

Układem, do którego będziemy dopasowywać różnorodne systemy triangulacyjne, będzie sieć triangulacyjna niemiecka, ponieważ ta ostatnia pomierzona jest z dokładnością wyższą, oraz nowszymi metodami od pozostałych sieci na obszarze Polski.

Południki będziemy liczyć od λ_0 przyjmując, że długość geograficzna południka Ferro od Greenwich, wynosi $-17^{\circ}40'$.

Długość geograficzną Pułkowo, od centralnego punktu odwzorowania, znajdziemy osobno dla każdej z rozpatrywanych elipsoid, przyjętych w b. zaborze rosyjskim.

Mając obliczone współrzędne prostokątne punktów X, Y w jednolitym układzie płaskim, łatwo będzie znaleźć współrzędne φ, λ na elipsoidzie E , przez odwrócenie formuł odwzorowawczych.

1) Mittheilungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes, Band VI 1886.

2) Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme, 1929/30 Nr. 3.

3) Przepisy podstawowe o sporządzaniu map wojskowych, M. S. Wojsk. Warszawa 1929.

6. Wiernokątne odwzorowanie elipsoid wyrównywującej i Walbecka na elipsoidy E' i E''.

Elementy elipsoid danych są:

$$\text{Elipsoida wyrównywująca} \left\{ \begin{array}{l} \log \bar{a} = 6.804\ 8805\ 758 \\ \log \bar{e}^2 = 7.879\ 2651\ 074 - 10 \end{array} \right.$$

$$\text{Elipsoida Walbecka} \left\{ \begin{array}{l} \log \bar{a} = 6.804\ 6092\ 661 \\ \log \bar{e}^2 = 7.819\ 1850\ 492 - 10 \end{array} \right.$$

$$\text{Elipsoidy } E_n \dots \log e^2 = 7.824\ 4104\ 237 - 10$$

Współczynniki stałe odwzorowania znajdziemy z warunków (5):

$$\mu = 1, \quad k = 1, \quad \theta = \bar{\theta},$$

rachunkowo prostszych od warunków w przypadku I.

Równoleżnik $\bar{\theta}$ dla elipsoidy wyrównywującej niech przechodzi przez obserwatorium w Warszawie:

$$\bar{\theta}' = 52^\circ 13' 04''.954$$

które leży w pobliżu środka odwzorowywanego obszaru i zarazem jest punktem wyjścia triangulacji na tej elipsoidzie.

Dla elipsoidy Walbecka niech będzie

$$\bar{\theta}'' = 51^\circ 00' 00''$$

Stałą całkowania C , oraz półosią dużą a znajdziemy, podstawiając wartości $e, \bar{e}, \bar{\theta}$ w następujące równania, utworzone na podstawie (2) i (3)

$$C = \frac{\left(\frac{1 - \bar{e} \sin \bar{\theta}}{1 + \bar{e} \sin \bar{\theta}} \right)^{\frac{e}{2}}}{\left(\frac{1 - e \sin \theta}{1 + e \sin \theta} \right)^{\frac{e}{2}}}, \quad a = a \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \bar{\theta}}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}$$

Dla elipsoidy wyrównywującej otrzymamy:

$$\log C' = 9.999\ 6906\ 499 - 10$$

$$(22) \quad E' \left\{ \begin{array}{l} \log a' = 6.805\ 0030\ 047 \\ \log e^2 = 7.824\ 4104\ 237 - 10 \end{array} \right.$$

dla elipsoidy Walbecka

$$\log C'' = 0.000\ 0270\ 133$$

$$(23) \quad E'' \left\{ \begin{array}{l} \log a'' = 6.804\ 5987\ 559 \\ \log e^2 = 7.824\ 4104\ 237 - 10 \end{array} \right.$$

Następnie, z formuł (2) i (3) metodą kolejnych przybliżeń znajdziemy poprawki $(\varphi - \bar{\varphi})$ i stosunek powiększenia μ dla dowolnych danych szerokości geograficznych $\bar{\varphi}$.

Poniższe tabelki zawierają wyniki obliczeń.

(24) Elipsoida wyrównywująca.

$\bar{\varphi}$	$\varphi - \bar{\varphi}$	μ	$\bar{\varphi}$	$\varphi - \bar{\varphi}$	μ
50°00'	+ 2''.928	Δ 234	52°30'	- 0''.343	Δ 200
10'	+ 2''.694	232	40'	- 0''.543	197
20'	+ 2''.462	230	50'	- 0''.740	195
30'	+ 2''.232	227	53°00'	- 0''.935	193
40'	+ 2''.005	225	10'	- 1''.128	190
50'	+ 1''.780	223	20'	- 1''.318	188
51°00'	+ 1''.557	220	30'	- 1''.506	186
10'	+ 1''.337	218	40'	- 1''.692	184
20'	+ 1''.119	216	50'	- 1''.876	181
30'	+ 0''.903	213	54°00'	- 2''.057	179
40'	+ 0''.690	211	10'	- 2''.236	177
50'	+ 0''.479	209	20'	- 2''.413	174
52°00'	+ 0''.270	207	30'	- 2''.587	172
10'	+ 0''.063	204	40'	- 2''.759	170
20'	- 0''.141	202	50'	- 2''.929	168
30'	- 0''.343	1,000 0000	55°00'	- 3''.097	1,000 0004

(25) Elipsoida Walbecka.

$\bar{\varphi}$	$\varphi - \bar{\varphi}$	μ	$\bar{\varphi}$	$\varphi - \bar{\varphi}$	μ
49°30'	- 0''.180	Δ 21	51°00'	0''.000	Δ 19
40'	- 0''.159	20	10'	+ 0''.019	19
50'	- 0''.139	21	20'	+ 0''.038	19
50°00'	- 0''.118	20	51°30'	+ 0''.057	18
10'	- 0''.098	20	40'	+ 0''.075	18
20'	- 0''.078	20	50'	+ 0''.093	19
50°30'	- 0''.058	19	52°00'	+ 0''.112	18
40'	- 0''.039	20	10'	+ 0''.130	17
50'	- 0''.019	19	20'	+ 0''.147	17
51°00'	0''.000	1,000 0000	52°30'	+ 0''.164	1,000 0000

Położenie geograficzne punktu na elipsoidach E' względnie E'' wyznaczmy, dodając algebraicznie do szerokości φ poprawkę $\varphi - \bar{\varphi}$ i zachowując $\lambda = \bar{\lambda}$.

Zniekształcenia $(\mu - 1)$ w obydwu wypadkach nie wpłyną na zmniejszenie założonej dokładności, można je więc zaniedbać.

7. Quasi-stereograficzne odwzorowanie elipsoid E, E', E'' na płaszczyznę.

Współczynniki $a_{n,r}$ odwzorowania oraz długości łuków dla elipsoidy E bierzemy z „Odwzorowania”. Tam też mamy tablice współrzędnych prostokątnych Y, X , punktów siatki geograficznej co $5'$ szerokości i co $10'$ długości geograficznej.¹⁾

Współczynniki h powiększenia elipsoid E', E'' względem E (Bessela), na podstawie (11) będą:

$$(26) \quad \begin{array}{ll} \text{dla elipsoidy } E \dots & h = 1 \\ \text{„ „ } E' \dots & h' = 1,000\,82822 \\ \text{„ „ } E'' \dots & h'' = 0,999\,89706 \end{array}$$

Centralny punkt odwzorowania dla wszystkich elipsoid leży na szerokości 52° .

Centralny południk odwzorowania na elipsoidzie Bessela, przechodzi według umowy o 22° na wschód od Greenwich.

Zamiennik Ferro-Greenwich przyjmujemy $-17^\circ 40'$, stąd długość geogr. Ferro od λ_0 wyniesie

$$(27) \quad l = -17^\circ 40' - 22^\circ = -39^\circ 40'$$

Długość Pułkowo od południka centralnego punktu odwzorowania na elipsoidzie E' (lub E'') znajdziemy z następujących rozważań.

Przypuśćmy, że do sieci triangulacyjnej odwzorowywanego obszaru wchodzi punkty P_1, P_2, \dots , które zostały odniesione do obydwu elipsoid, E i E' .²⁾

Zakładamy, że łuk równoleżnika u od punktu P do λ_0 jest jednakowej długości na elipsoidzie E i E' . Stąd, znając długość geograficzną λ punktu od λ_0 na elipsoidzie E oraz stosu-

¹⁾ Tablice współrzędnych prostokątnych dają wartości X, Y dla elipsoidy Bessela, zredukowanej o $\frac{1}{2000}$, w celu zmniejszenia wartości bezwzględnej zniekształceń.

²⁾ Punkty łączne, według prof. dr. K. Weigla („Projekt połączenia sieci triangulacyjnych większego kontynentu”, Lwów 1931, odbitka z Czasopisma Technicznego) lub punkty dostosowania, według inż. K. Marszałka, (Przegląd Mierniczy Nr. 6—7 z r. 1932).

nek wielkości elipsoid h' , łatwo znajdziemy długość geograficzną λ' tego punktu, liczoną od λ_0 na elipsoidzie E' , z równania

$$(28) \quad \lambda' = \frac{\lambda}{h'}$$

W rachunku tym zaniedbujemy dla uproszczenia okoliczność, że łuk u może należeć do różnych szerokości na elipsoidach E i E' , lecz zaniedbanie to nie wprowadzi w naszych przykładach błędów większych od $0''01$ długości geograficznej.

Długość geograficzną Pułkowo od λ_0 (nazwijmy ją l') otrzymamy, odejmując od λ' długość geogr. punktu P od Pułkowo (podaną w katalogu).

8. Przykłady uzgodnienia.

1. Układ warszawski.

Dane są dwa punkty na elipsoidzie Bessela¹⁾

$$\begin{array}{ll} \text{I. (Górzno kościół)} & \varphi = 53^\circ 11' 59'',953 \\ & \lambda = -2^\circ 21' 14'',970 \text{ od } \lambda_0 = -8474'',970 \\ \text{II. (Grodziec kościół)} & \varphi = 50^\circ 21' 08'',931 \\ & \lambda = -2^\circ 53' 52'',931 \text{ od } \lambda_0 = -10432'',931 \end{array}$$

i te same punkty na elipsoidzie wyrównywującej

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \bar{\varphi} = & 53^\circ 11' 57'',710 \\ & \bar{\lambda} = -10^\circ 40' 50'',700 \text{ od Pułkowo} \\ \text{II. } \bar{\varphi} = & 50^\circ 21' 11'',500 \\ & \bar{\lambda} = -11^\circ 13' 26'',260 \text{ od Pułkowo} \end{array}$$

Położenie geograficzne punktów I i II na elipsoidzie E' po wprowadzeniu poprawki szerokości $(\varphi' - \bar{\varphi})$ z tabelki (24) będzie:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \varphi' = & 53^\circ 11' 56'',545 \\ & \lambda' = \bar{\lambda} + l' \\ \text{II. } \varphi' = & 50^\circ 21' 13'',936 \\ & \lambda' = \bar{\lambda} + l' \end{array}$$

Długość geograficzna danych punktów od λ_0 na elipsoidzie E' będzie:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{\lambda}{h'} = & \frac{-8474,970}{1,000\,82822} = -8467'',957 = -2^\circ 21' 07'',957 \\ \text{II. } \frac{\lambda}{h'} = & \frac{-10432,931}{1,000\,82822} = -10424'',298 = -2^\circ 53' 44'',298 \end{array}$$

¹⁾ Katalog, str. 150, 151, 469.

$$l'_I = -2^\circ 21' 07'',957 + 10^\circ 40' 50'',700 = +8^\circ 19' 42'',743 \quad \Delta = 0'',781$$

$$l'_{II} = -2^\circ 53' 44'',298 + 11^\circ 13' 26'',260 = +8^\circ 19' 41'',962$$

Na podstawie znanych szerokości geograficznych φ' punktów I i II, znajdujemy ich odległość s od równoleżnika φ_0 :

$$s_I = +133,5 \text{ km}$$

$$s_{II} = -183,5 \text{ km}$$

$$s_I - s_{II} = 317,0 \text{ km}$$

Długość geograficzną l' południka Pułkowo od λ_0 na szerokości punktu centralnego otrzymamy z interpolacji:

$$0'',781 \frac{183,5}{317} = 0'',45$$

$$l' = +8^\circ 19' 41'',96 + 0'',45 = +8^\circ 19' 42'',41$$

Średnia długość l' wyprowadzona dla kilkunastu punktów jest:

$$(29) \quad l' = +8^\circ 19' 42'',35$$

a więc ostatecznie $\lambda'_I = -2^\circ 21' 08'',35$, $\lambda'_{II} = -2^\circ 53' 43'',91$

Z rachunku powyższego jest widocznym, że kierunek południka λ_0 na elipsoidzie Bessela w stosunku do sieci triangulacyjnej jest inny od kierunku tego południka na elipsoidzie wyrównującej. Na różnicę kierunków (kąć skręcenia γ) składają się: różnice w wymiarach elipsoid oraz błąd względny wyznaczenia azymutu wyjściowego; zresztą pochodzenie różnicy kierunków nie wpływa na sposób jej wyeliminowania.

Kąć skręcenia obliczymy w następujący sposób:

Weźmy dwa punkty, I i II, położenie których na E i E' zostało podane w poprzednim przykładzie.

Linia geodezyjna I—II na elipsoidzie E wynosi 319 001,7 m i jej azymut α na średniej szerokości równa się $186^\circ 45' 25'',76$.

Linia geodezyjna między temi punktami na elipsoidzie E' wynosi 319 002,0 m, azymut zaś $\alpha' = 186^\circ 45' 15'',86$; Stąd różnica

$$\alpha' - \alpha = -9'',90$$

Zakładając, że kąć skręcenia = 0 otrzymalibyśmy różnicę azymutów $\alpha' - \alpha$ równą różnicy zbieżności południków na płaszczyźnie odwzorowania w danych punktach.

Różnica ta w punkcie I wyniesie ¹⁾:

$$(Zb) \text{ dla } E' = -1^\circ 52' 07'',1$$

$$-(Zb) \text{ dla } E = -1^\circ 52' 12'',6$$

$$\Delta (Zb) = +5'',5$$

¹⁾ Patrz „Odwzorowanie”, str. XXII (17).

Kąć skręcenia południków centralnych γ' otrzymamy z różnicy

$$(30) \quad \begin{aligned} (\alpha' - \alpha) &= -9'',9 \\ \Delta (Zb) &= +5'',5 \\ \gamma' &= -15'',4 \end{aligned}$$

W podobny sposób można obliczyć kąć między południkami przechodzącymi przez punkt wyjściowy triangulacji rosyjskiej (błąd względny azymutu wyjściowego), oraz znaleźć wzajemnie pokrywające się południki.

Punkt wyjściowy (obserwatorium Warszawskie) na elipsoidzie wyrównującej ma współrzędne

$$\bar{\varphi} = 52^\circ 13' 04'',954$$

$$\bar{\lambda} = -9^\circ 17' 48'',885 \text{ od Pułkowo}$$

Długość tego punktu od λ_0 na elipsoidzie E' będzie

$$-9^\circ 17' 48'',885$$

$$+8^\circ 19' 42'',350$$

$$\lambda' = 0^\circ 58' 06'',535$$

i na E, również od λ_0 :

$$\lambda = -0^\circ 58' 06'',535 \times 1,000 82822 = -0^\circ 58' 09'',422$$

Zbieżność południków, liczona dla λ' jest $-45' 50'',9$ i dla $\lambda = -45' 53'',1$, skąd $\Delta (Zb) = +2'',2$.

Błąd względny azymutu wyjściowego da suma

$$\gamma + \Delta (Zb) = -15'',4 + 2'',2 = -13'',2.$$

Długość geograficzną południków pokrywających się otrzymamy z równania:

$$\Delta (Zb) = h' \cdot (Zb) - (Zb); \text{ przyczem } \Delta (Zb) = \gamma$$

$$(Zb) = -\frac{15,4}{0,000 8282} = -5^\circ 09' 55''$$

Wartości powyższej odpowiada zbieżność południka na szerokości 52° i długości geograficznej

$$\lambda = -6^\circ 33' 8'' \text{ od } \lambda_0.$$

Odwzorujemy na płaszczyźnie, na podstawie wywodów i formuł wyprowadzonych powyżej, dane dwa punkty: I) — kościół w Górznie i II) — kościół w Grodźcu, drogą interpolacji z tablic.¹⁾

¹⁾ Odwzorowanie, str. XXIX.

A. Elipsoida E.

$$\begin{array}{l}
 \text{I. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 53^{\circ} 11' 59'',953 \\ \lambda = -2^{\circ} 21' 14'',970 \text{ od } \lambda_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,399 843 \\ n_1 = + 0,124 950 \\ n_2 = - 0,0547 \\ n_1 n_1 = + 0,0500 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_x = + 9 266,1 \\ \Delta_1 x = + 373,2 \\ \Delta_2 x = + 25,8 \\ \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{0,0} = + 132 272,0 \\ \bar{n}_1 \Delta_x = + 3 705,0 \\ n_1 \Delta_1 x = + 46,6 \\ n_2 \Delta_2 x = - 1,4 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,0 \\ \hline X = + 136 022,2 \text{ m} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_y = + 299,9 \\ \Delta_1 y = - 11 136,2 \\ \Delta_2 y = + 0,6 \\ \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 21,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_{0,0} = - 155 949,4 \\ \bar{n}_1 \Delta_y = + 119,9 \\ n_1 \Delta_1 y = - 1 391,5 \\ n_2 \Delta_2 y = - 0,0 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 1,1 \\ \hline Y = - 157 219,9 \text{ m} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{II. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 50^{\circ} 21' 08'',931 \\ \lambda = -2^{\circ} 53' 52'',931 \text{ od } \lambda_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,229 770 \\ n_1 = + 0,388 218 \\ n_2 = - 0,1187 \\ n_1 n_1 = + 0,0892 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_x = + 9 261,3 \\ \Delta_1 x = + 470,4 \\ \Delta_2 x = + 26,8 \\ \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{0,0} = - 181 434,2 \\ \bar{n}_1 \Delta_x = + 2 128,0 \\ n_1 \Delta_1 x = + 182,6 \\ n_2 \Delta_2 x = - 3,2 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,0 \\ \hline X = - 179 126,8 \text{ m} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_y = + 357,1 \\ \Delta_1 y = - 11 855,2 \\ \Delta_2 y = + 0,6 \\ \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 20,9 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_{0,0} = - 201 613,4 \\ \bar{n}_1 \Delta_y = + 82,1 \\ n_1 \Delta_1 y = - 4 602,4 \\ n_2 \Delta_2 y = - 0,1 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 1,9 \\ \hline Y = - 206 131,9 \text{ m} \end{array}
 \end{array}$$

B. Elipsoida E'.

$$\begin{array}{l}
 \text{I. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 53^{\circ} 11' 56'',545 \\ \lambda' = -2^{\circ} 21' 08'',35 \text{ od } \lambda_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,388 483 \\ n_1 = + 0,113 917 \\ n_2 = - 0,0505 \\ n_1 n_1 = + 0,0443 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_x = + 9 266,1 \\ \Delta_1 x = + 373,2 \\ \Delta_2 x = + 25,8 \\ \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{0,0} = + 132 272,0 \\ \bar{n}_1 \Delta_x = + 3 599,7 \\ n_1 \Delta_1 x = + 42,5 \\ n_2 \Delta_2 x = - 1,3 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,0 \\ \hline x' = + 135 912,9 \\ h' x' = 1,000 8282 x' = + 136 025,5 \text{ m} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_y = + 299,9 \\ \Delta_1 y = - 11 136,2 \\ \Delta_2 y = + 0,6 \\ \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 21,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_{0,0} = - 155 949,4 \\ \bar{n}_1 \Delta_y = + 116,5 \\ n_1 \Delta_1 y = - 1 268,6 \\ n_2 \Delta_2 y = - 0,0 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 1,0 \\ \hline y' = - 157 100,5 \\ h' y' = 1,000 8282 y' = - 157 230,6 \text{ m} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{II. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 50^{\circ} 21' 13'',936 \\ \lambda' = -2^{\circ} 53' 43'',91 \text{ od } \lambda_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,246 453 \\ n_1 = + 0,373 183 \\ n_2 = - 0,1169 \\ n_1 n_1 = + 0,0920 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_x = + 9 261,3 \\ \Delta_1 x = + 470,4 \\ \Delta_2 x = + 26,8 \\ \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,6 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{0,0} = - 181 434,2 \\ \bar{n}_1 \Delta_x = + 2 282,5 \\ n_1 \Delta_1 x = + 175,5 \\ n_2 \Delta_2 x = - 3,1 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,1 \\ \hline x' = - 178 979,4 \\ h' x' = 1,000 8282 x' = - 179 127,6 \text{ m} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \Delta_y = + 357,1 \\ \Delta_1 y = - 11 855,2 \\ \Delta_2 y = + 0,6 \\ \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 20,9 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_{0,0} = - 201 613,4 \\ \bar{n}_1 \Delta_y = + 88,0 \\ n_1 \Delta_1 y = - 4 424,2 \\ n_2 \Delta_2 y = - 0,1 \\ n_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = + 1,9 \\ \hline y' = - 205 947,8 \\ h' y' = 1,000 8282 y' = - 206 118,4 \text{ m} \end{array}
 \end{array}$$

Poprzednio ustaliliśmy, że osie współrzędnych (południk λ_0 jest na obrazie osią x -ów) w odwzorowaniu E i E' tworzą kąt $\gamma' = -15'',4$; funkcje jego:

$$(31) \quad \begin{aligned} \sin(-15'',4) &= -0,000\,0746 \\ \cos(-15'',4) &= +1 \end{aligned}$$

Podstawiając do wzoru (21) wartości na $h'x'$, $h'y'$, $\sin \gamma'$, $\cos \gamma'$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \begin{cases} x = +136\,025,5 + 11,7 = +136\,037,2 \text{ m} \\ y = -157\,230,6 + 10,2 = -157\,220,4 \text{ m} \end{cases} \\ \text{II.} \quad & \begin{cases} x = -179\,127,6 + 15,4 = -179\,112,2 \text{ m} \\ y = -206\,118,4 - 13,4 = -206\,131,8 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

Porównanie ostatnich współrzędnych z X , Y da następujące różnice:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad X - x &= -15,0 \text{ m} & Y - y &= +0,5 \text{ m} \\ \text{II.} \quad X - x &= -14,6 \text{ m} & Y - y &= -0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

Średnia z obliczeń współrzędnych kilkunastu punktów wyniesie:

$$(32) \quad \begin{aligned} X - x &= -15,1 \text{ m} = a' \\ Y - y &= -0,8 \text{ m} = b' \end{aligned}$$

Liczby ostatnie (a' , b') przyjmujemy, jako współrzędne początku układu $X''O''Y''$. Przesunięcie skuteczny według równań (20), w których odrzucamy znikomo małe wyrazy z $\frac{1}{4R_0^2}$ i z $\beta \sin 1''$.

Ostatecznie, współrzędne X , Y , odwzorowania elipsoidy E' na płaszczyznę otrzymamy, dodając do $h'x'$, $h'y'$ poprawki

$$(33) \quad \begin{aligned} \xi' &= h'y' \sin \gamma' + a' \\ \eta' &= h'x' \sin \gamma' + b' \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie poprawek jak wyżej, wzory przekształcające będą:

$$\begin{aligned} X &= h'x' + \xi' \\ Y &= h'y' + \eta' \end{aligned}$$

Przy obliczeniach większej ilości punktów, korzystnym będzie sporządzić tabelkę lub wykres, gdzie w określonych odstępach umieści się poprawki ξ i η .

Tabelkę taką dla odstępów stopniowych szerokości i długości geograficznej podaję na stronie następnej.

(34) Elipsoida E' . Tabelka poprawek ξ' w metrach

φ/λ	-4°	-3°	-2°	-1°	0°	$+1^\circ$	$+2^\circ$	$+3^\circ$	$+4^\circ$	$+5^\circ$	λ/φ
50°	+6,3	+1,0	-4,4	-9,8	-15,1	-20,4	-25,8	-31,1	-36,5	-41,8	50°
51°	+5,8	+0,6	-4,6	-9,9	-15,1	-20,3	-25,6	-30,8	-36,1	-41,3	51°
52°	+5,4	+0,3	-4,9	-10,0	-15,1	-20,2	-25,4	-30,5	-35,6	-40,7	52°
53°	+4,9	+0,0	-5,1	-10,1	-15,1	-20,1	-25,1	-30,1	-35,1	-40,1	53°
54°	+4,4	-0,4	-5,3	-10,2	-15,1	-20,0	-24,9	-29,8	-34,7	-39,6	54°
55°	+4,0	-0,8	-5,6	-10,4	-15,1	-19,9	-24,7	-29,4	-34,2	-39,0	55°

(34a) Elipsoida E' . Tabelka poprawek η' w metrach

φ/λ	-4°	-3°	-2°	-1°	0°	$+1^\circ$	$+2^\circ$	$+3^\circ$	$+4^\circ$	$+5^\circ$	λ/φ
50°	-16,8	-17,1	-17,3	-17,4	-17,4	-17,4	-17,3	-17,1	-16,8	-16,5	50°
51°	-8,5	-8,8	-9,0	-9,1	-9,1	-9,1	-9,0	-8,8	-8,5	-8,2	51°
52°	-0,2	-0,5	-0,7	-0,8	-0,8	-0,8	-0,7	-0,5	-0,2	+0,1	52°
53°	+8,1	+7,8	+7,6	+7,5	+7,5	+7,5	+7,6	+7,8	+8,1	+8,4	53°
54°	+16,4	+16,1	+16,0	+15,9	+15,8	+15,9	+16,0	+16,1	+16,4	+16,7	54°
55°	+24,7	+24,4	+24,3	+24,2	+24,1	+24,2	+24,3	+24,4	+24,7	+25,0	55°

Katalog z roku 1932 zawiera kilkanaście punktów trygonometrycznych z dawnego pasa granicznego rosyjsko-niemieckiego, dla których istnieją współrzędne w dwóch układach: w warszawskim i w jednym z niemieckich.

Współrzędne geograficzne takich punktów, co do których nie było wątpliwości, że są identyczne w obydwóch układach, np. wieże kościołów, przekształciliśmy na płaskie jednolitego układu sposobem wyłożonym wyżej.

Współrzędne X , Y , otrzymane dla tego samego punktu, na ogół nie różnią się od siebie więcej od 1 metra. Źródło różnic leży przede wszystkim w błędach pomiarów, gdyż są to punkty 2 lub 3 rzędu, wyznaczone prawdopodobnie sposobem wcięcia wprzód w niezawsze korzystnych warunkach.

Zakładając, że dokładność określania położenia punktów była większa po stronie państwa, na terenie którego punkty te znajdowały się, przyjmujemy ostatecznie za podstawę naszych obliczeń współrzędne φ , λ w układzie tego właśnie państwa.

Wyniki obliczeń podane są na następnej stronie.

L.	PUNKT	Katalog str.	Układ Rauenberg	Układ warszawski
1	Górzno, kościół ewangelicki	150,151	$\varphi = 53^{\circ} 11' 59'',9527$ $\lambda = 37^{\circ} 18' 45'',0300$ $X = + 136 022,2$ $Y = - 157 219,9$	$\varphi = 53^{\circ} 11' 57'',71$ $\lambda = - 10^{\circ} 40' 50'',70$ $X = + 136 022,1$ $Y = - 157 221,2$
2	Świdziebna, kościół	151,151	$\varphi = 53^{\circ} 09' 13'',6053$ $\lambda = 37^{\circ} 13' 23'',2199$ $X = + 131 083,0$ $Y = - 163 362,4$	$\varphi = 53^{\circ} 09' 11'',44$ $\lambda = - 10^{\circ} 46' 12'',19$ $X = + 131 083,0$ $Y = + 163 363,2$
3	Golub, trygon.	148,149	$\varphi = 53^{\circ} 07' 13'',8928$ $\lambda = 36^{\circ} 42' 02'',2095$ $X = + 128 696,4$ $Y = - 198 433,4$	$\varphi = 53^{\circ} 07' 11'',78$ $\lambda = - 11^{\circ} 17' 31'',58$ $X = + 128 697,7$ $Y = - 198 433,8$
4	Raciążek, trygon.	187,188	$\varphi = 52^{\circ} 51' 28'',1717$ $\lambda = 36^{\circ} 28' 17'',1099$ $X = + 100 152,2$ $Y = - 215 052,9$	$\varphi = 52^{\circ} 51' 26'',52$ $\lambda = - 11^{\circ} 31' 15'',86$ $X = + 100 153,5$ $Y = - 215 052,2$
5	Dąbrowa, kościół	187,188	$\varphi = 52^{\circ} 46' 53'',121$ $\lambda = 36^{\circ} 13' 13'',522$ $X = + 92 437,7$ $Y = - 232 342,2$	$\varphi = 52^{\circ} 46' 51'',58$ $\lambda = - 11^{\circ} 46' 18'',64$ $X = + 92 438,8$ $Y = - 232 341,0$
6	Chełmce, kościół	224,224	$\varphi = 52^{\circ} 36' 53'',668$ $\lambda = 36^{\circ} 07' 10'',998$ $X = + 74 262,6$ $Y = - 240 035,4$	$\varphi = 52^{\circ} 36' 52'',43$ $\lambda = - 11^{\circ} 52' 20'',90$ $X = + 74 264,1$ $Y = - 240 035,5$
7	Siedlimowo, kościół	259,260	$\varphi = 52^{\circ} 29' 22'',218$ $\lambda = 35^{\circ} 53' 35'',245$ $X = + 61 105,0$ $Y = - 256 087,3$	$\varphi = 52^{\circ} 29' 21'',24$ $\lambda = - 12^{\circ} 05' 55'',93$ $X = + 61 108,2$ $Y = - 256 087,1$
8	Powidz, kościół	259,260	$\varphi = 52^{\circ} 24' 47'',166$ $\lambda = 35^{\circ} 35' 15'',716$ $X = + 53 741,2$ $Y = - 277 278,1$	$\varphi = 52^{\circ} 24' 46'',23$ $\lambda = - 12^{\circ} 24' 14'',53$ $X = + 53 742,0$ $Y = - 277 277,9$
9	Kościelna Wieś kościół	326,327	$\varphi = 51^{\circ} 47' 12'',23$ $\lambda = 35^{\circ} 40' 57'',25$ $X = - 16 198,2$ $Y = - 274 653,3$	$\varphi = 51^{\circ} 47' 12'',34$ $\lambda = - 12^{\circ} 18' 33'',15$ $X = - 16 198,7$ $Y = - 274 652,8$

L.	PUNKT	Katalog str.	Układ Rauenberg	Układ warszawski
10	Dobrzec, kościół	326,327	$\varphi = 51^{\circ} 45' 21'',21$ $\lambda = 35^{\circ} 42' 42'',90$ $X = - 19 734,2$ $Y = - 272 817,8$	$\varphi = 51^{\circ} 45' 21'',37$ $\lambda = - 12^{\circ} 16' 47'',55$ $X = - 19 734,8$ $Y = - 272 816,7$
11	Grabów, kościół	357,357	$\varphi = 51^{\circ} 30' 32'',5970$ $\lambda = 35^{\circ} 47' 07'',0088$ $X = - 47 426,2$ $Y = - 269 221,7$	$\varphi = 51^{\circ} 30' 33'',09$ $\lambda = - 12^{\circ} 12' 23'',69$ $X = - 47 429,0$ $Y = - 269 222,3$
12	Łysiec, trygon.	447,448	$\varphi = 50^{\circ} 41' 26'',8589$ $\lambda = 36^{\circ} 44' 30'',8445$ $X = - 141 454,9$ $Y = - 206 534,4$	$\varphi = 50^{\circ} 41' 28'',84$ $\lambda = - 11^{\circ} 15' 02'',49$ $X = - 141 456,7$ $Y = - 206 535,0$
13	Grodziec, kościół	—,469	$\varphi = 50^{\circ} 21' 08'',9312$ $\lambda = 36^{\circ} 46' 07'',0689$ $X = - 179 126,8$ $Y = - 206 131,9$	$\varphi = 50^{\circ} 21' 11'',50$ $\lambda = - 11^{\circ} 13' 26'',26$ $X = - 179 127,3$ $Y = - 206 132,6$
14	Grodziec, trygon.	467,469	$\varphi = 50^{\circ} 21' 10'',2075$ $\lambda = 36^{\circ} 46' 04'',9009$ $X = - 179 085,8$ $Y = - 206 173,2$	$\varphi = 50^{\circ} 21' 12'',80$ $\lambda = - 11^{\circ} 13' 28'',45$ $X = - 179 085,6$ $Y = - 206 174,1$

2. Układy wschodnie (Elips. Bessela i Walbecka).¹⁾

Punkty trygonometryczne na elipsoidzie Walbecka (układ Niemiec, rys. 4) odwzorujemy na płaszczyznę sposobem wyłożonym poprzednio, jeśli ich położenie geograficzne $\varphi'' \lambda''$ na elipsoidzie E'' będzie znane.

Szerokość φ'' otrzymamy z równania (2), względnie drogą interpolacji z tabelki (25).

Długość geograficzną λ'' , liczoną od centralnego południka λ_0 obliczymy przez dodanie do długości geograficznej katalogowej — długości południka Pułkowo (nazwijmy ją l'') od λ_0 na elipsoidzie Walbecka lub E'' .

Długość geograficzna l'' na szerokości punktu trygonometrycznego Górniki (Katalog, str. 371) wyniesie

$$+ 8^{\circ} 19' 49'',824.$$

¹⁾ W przykładzie tym oparłem się na współrzędnych φ, λ tylko takich punktów, wspólnych dla dwóch układów, jakie znalazłem w katalogu z r. 1932. Dokładniejsze elementy do uzgodnienia układów wschodnich, oparte na większej ilości punktów, podaję w przykładach następnych.

Liczba powyższa została obliczona w podobny sposób, jak liczba l dla punktów I i II na elipsoidzie wyrównywującej, gdyż punkt Górniki, należy jak i tamte, do dwóch układów stykających się, z których jeden już włączyliśmy do systemu jednolitego.

Obliczając współrzędne prostokątne płaskie punktu Górniki z geograficznych φ', λ' i φ'', λ'' , danych dla jednej i drugiej elipsoidy, otrzymaliśmy następujące wyniki:

Układ jednolity $X = - 28\,410,2 \text{ m}$ $Y = + 171\,038,2 \text{ m}$		$X - h''x'' = + 96,0 \text{ m} = \xi''$ $Y - h''y'' = + 15,4 \text{ m} = \eta''$
Układ Niemież $h''x'' = - 28\,506,2 \text{ m}$ $h''y'' = + 171\,022,8 \text{ m}$		

Wartości ξ, η (patrz (33)) dla dowolnego punktu w układzie Niemież określimy, jeżeli będzie znana wartość przesunięcia równoległego osi współrzędnych a'' i b'' oraz kąt skreślenia γ'' .

W poprzednim wypadku (str. 287) skorzystaliśmy ze znanego położenia drugiego punktu, wspólnego dla obu układów, w celu wyznaczenia a, b i γ . Lecz poszukiwania w katalogu z 1932 roku drugiego punktu wspólnego dla układów Niemież i Warszawa — nie dały rezultatu.

Podobną sytuację znajdziemy, badając sąsiednią sieć na elipsoidzie Bessela (E'') z punktem wyjścia Dorpat (I). Tam również tylko jeden punkt wspólny jest z układem warszawskim, mianowicie Liczuny (Katalog, str. 7 i 8).

Na szerokości geograficznej tego punktu, długość l''' Pułkowo od λ_0 wyniesie

$$+ 8^{\circ} 19' 49'',407.$$

Współrzędne prostokątne punktu Liczuny są:

Układ jednolity $X = + 341\,218,2 \text{ m}$ $Y = + 214\,494,1 \text{ m}$		$X - x''' = + 79,1 \text{ m} = \xi'''$ $Y - y''' = + 33,4 \text{ m} = \eta'''$
Układ Dorpat (I) $x''' = + 341\,139,1 \text{ m}$ $y''' = + 214\,460,7 \text{ m}$		

Ale sieci w układach Niemież i Dorpat (I) także zawierają punkt wspólny: Hoszcza (Katalog, str. 464), który łącznie z poprzednimi tworzy trójkąt, o wierzchołkach, przynależnych parami do wszystkich trzech układów.

Współrzędne punktu Hoszcza są:

Układ Niemież $h''x'' = - 145\,918,8 \text{ m}$ $h''y'' = + 333\,543,5 \text{ m}$	Układ Dorpat (I) $x''' = - 145\,899,3 \text{ m}$ $y''' = + 333\,541,2 \text{ m}$
---	--

Poprawki ξ, η nie wpłyną na zmianę odległości d między wierzchołkami trójkąta na płaszczyźnie odwzorowania.

Mając zaś boki trójkąta płaskiego łatwo jest obliczyć kąty między niemi, jak też kąty kierunkowe α .

Z rachunku otrzymamy:

Bok Górniki — Liczuny ...	$d_1 = 372\,174,3 \text{ m} \dots \alpha_1 = 6^{\circ} 42' 19'',001$
Bok Liczuny — Hoszcza ...	$d_2 = 501\,384,6 \text{ m} \dots \alpha_2 = 166^{\circ} 15' 38'',815$
Bok Hoszcza — Górniki ...	$d_3 = 200\,496,0 \text{ m} \dots \alpha_3 = 305^{\circ} 50' 45'',999$

zaś kąty wewnętrzne:

Górniki	$119^{\circ} 08' 28'',711$
Liczuny	$20^{\circ} 26' 33'',130$
Hoszcza	$40^{\circ} 24' 58'',159$
	$180^{\circ} 00' 00''$

Bok Górniki — Liczuny i jego kąt kierunkowy, obliczone z współrzędnych układu jednolitego, pozostaną niezmienione. Dodając do kąta kierunkowego tego boku odpowiednie kąty wewnętrzne, otrzymamy dla boków Liczuny — Hoszcza i Hoszcza — Górniki nowe kąty kierunkowe, tym razem w układzie jednolitym:

Liczuny — Hoszcza	$\alpha'_2 = 166^{\circ} 15' 45'',871$
Hoszcza — Górniki	$\alpha'_3 = 305^{\circ} 50' 47'',712$

Różnica $\alpha_3 - \alpha'_3$ i $\alpha_2 - \alpha'_2$ da kąt skreślenia γ'' i γ''' układów Niemież i Dorpat (I), względem układu jednolitego.

$$\gamma'' = - 1'',713 \quad \sin \gamma'' = - 0,0000\,083, \quad \cos \gamma'' = + 1$$

$$\gamma''' = - 7'',056 \quad \sin \gamma''' = - 0,0000\,342, \quad \cos \gamma''' = + 1.$$

Obracając układy według (21) mamy:

Górniki:	$x = - 28\,506,2 - 1,4 = - 28\,507,6 \text{ m}$ $y = + 171\,022,8 - 0,2 = + 171\,022,6 \text{ m}$
----------	--

Liczuny:	$x = + 341\,139,1 - 7,3 = + 341\,131,8 \text{ m}$ $y = + 214\,460,7 + 11,7 = + 214\,472,4 \text{ m}$
----------	---

Porównanie z X, Y tych punktów w układzie jednolitym da wielkość a'', b'', a''', b''' , przesunięcia równoległego osi układów Niemież i Dorpat (I):

$a'' = + 97,4 \text{ m}$	$a''' = + 86,4 \text{ m}$
$b'' = + 15,6 \text{ m}$	$b''' = + 21,7 \text{ m}$

Uwzględniając powyższe, rezultaty obliczeń będą następujące:

PUNKT	WSPÓŁRZĘDNE KATALOGOWE	Współrzędne płaskie w układzie jednolitym
Górniki	Układ Warszawa $\varphi = 51^{\circ} 43' 07'',25 \lambda = -5^{\circ} 51' 13'',08$	$X = - 28 410,2 \text{ m}$
	Układ Niemieź $\varphi = 51^{\circ} 43' 02'',79 \lambda = -5^{\circ} 51' 13'',44$	$Y = + 171 038,2 \text{ m}$
Liczony	Układ Warszawa $\varphi = 55^{\circ} 01' 13'',22 \lambda = -4^{\circ} 58' 39'',13$	$X = + 341 218,2 \text{ m}$
	Układ Dorpat (I) $\varphi = 55^{\circ} 01' 15'',42 \lambda = -4^{\circ} 58' 36'',20$	$Y = + 214 494,1 \text{ m}$
Hoszcza	Układ Niemieź $\varphi = 50^{\circ} 35' 28'',18 \lambda = -3^{\circ} 36' 55'',39$	$X = - 145 824,2 \text{ m}$
	Układ Dorpat (I) $\varphi = 50^{\circ} 35' 29'',32 \lambda = -3^{\circ} 36' 56'',72$	$Y = + 333 557,9 \text{ m}$

3. Układy dorpackie.

W katalogu rosyjskim Sippki, wydania Wojenno-Topograficzeskawo Uprawlenija Sztaba R.-K. K. A. na stronach 6—14 i 29—46 znajdują się punkty triangulacyjne I rzędu o współrzędnych geograficznych, odniesionych do dwóch z pomiędzy elipsoid Bessela, wyrównywującej i Walbecka.

Współrzędne punktów na elipsoidzie Bessela (p. wyjścia obserwatorium w Dorpacie) pochodzą albo z pomiarów trygonometrycznych, rozpoczętych po 1897 roku, albo z obliczeń gen. Szarnhorsta, opartych na dawnych współrzędnych na elipsoidzie Walbecka.¹⁾

Z porównania z sobą współrzędnych większości punktów, należących jednocześnie do dwóch układów, stwierdzamy, że w różnicach szerokości i długości geograficznych zachodzi pewna ciągłość.

Opierając się na tych ostatnich punktach, określimy położenie rosyjskich układów triangulacyjnych względem siebie.

Weźmy z katalogu dwa punkty, np. Niemieź i Osownica, współrzędne których dane są na elipsoidach wyrównywującej i Bessela.

Najpierw ustalmy różnicę długości geograficznej między południkiem centralnym λ_0 a południkiem Pułkowo, mierzona

¹⁾ Obliczenia te nie są opublikowane (Gieodezist, Nr. 6/27). Innych źródeł, wskazujących jakimi wzorami posługiwał się gen. Szarnhorst nie znamy.

na elipsoidzie Bessela, na szerokości 52° . Postępując podobnie jak w przykładzie 1, znajdujemy, że różnica ta wyniesie

$$(35) \quad + 8^{\circ} 19' 50'',38 \quad (\text{Dorpat I})$$

$$(36) \quad + 8^{\circ} 19' 50'',61 \quad (\text{Dorpat II})$$

Następnie, drogą interpolacji z tablic odwzorowania znajdziemy współrzędne prostokątne płaskie danych punktów, przyczem współrzędne w układzie warszawskim odrazu sprowadzamy do układu jednolitego.

A. Elipsoida wyrównywująca.

$$\begin{array}{l} \text{p. Niemieź} \\ (\text{Katalog, str. 7}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 54^{\circ} 39' 01'',617 - 2'',733 \\ \lambda' = + 3^{\circ} 19' 02'',285 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,796 280 \\ n_1 = + 0,903 808 \\ \bar{n}_2 = - 0,0434 \\ n_1 n_1 = + 0,7197 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta_x = + 9 268,9 \\ \Delta_1 x = + 490,2 \\ \Delta_2 x = + 25,1 \\ \{ (\Delta_x) - \Delta_x \} = - 0,7 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{0,0} = + 291 911,9 \\ n_1 \Delta_x = + 7 380,6 \\ n_1 \Delta_1 x = + 443,1 \\ n_2 \Delta_2 x = - 1,1 \\ n_1 n_1 \{ (\Delta_x) - \Delta_x \} = - 0,5 \\ \hline x' = + 299 734,0 \\ h' x' = 1,000 82822 x' = + 299 982,3 \\ \zeta' = - 31,1 \\ \hline X = + 299 951,2 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta_y = - 411,2 \\ \Delta_1 y = + 10 766,6 \\ \Delta_2 y = + 0,8 \\ \{ (\Delta_y) - \Delta_y \} = - 21,6 \end{array} \quad \begin{array}{l} y_{0,0} = + 204 670,6 \\ n_1 \Delta_y = - 327,4 \\ n_1 \Delta_1 y = + 9 730,9 \\ n_2 \Delta_2 y = + 0,0 \\ n_1 n_1 \{ (\Delta_y) - \Delta_y \} = - 15,5 \\ \hline y' = + 214 058,6 \\ h' y' = 1,000 82822 y' = + 214 235,9 \\ \eta' = + 21,6 \\ \hline Y = + 214 257,5 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{p. Osownica} \\ (\text{Katalog, str. 10}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 53^{\circ} 17' 26'',483 - 0'',089 \\ \lambda' = + 3^{\circ} 39' 00'',544 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \bar{n}_1 = + 0,487 980 \\ n_1 = + 0,900 907 \\ \bar{n}_2 = - 0,0446 \\ n_1 n_1 = + 0,4396 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= + 9259,6 \\ \Delta_1 x &= + 561,6 \\ \Delta_2 x &= + 26,1 \\ \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{0,0} &= + 33560,0 \\ \bar{n}_1 \Delta x &= + 4518,5 \\ n_1 \Delta_1 x &= + 506,0 \\ n_2 \Delta_2 x &= - 1,2 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,3 \\ \hline x' &= + 38583,0 \\ h' x' = 1,0008282 x' &= + 38614,9 \\ \zeta' &= - 33,7 \\ \hline x &= + 38581,2 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= - 447,0 \\ \Delta_1 y &= + 11365,8 \\ \Delta_2 y &= - 1,0 \\ \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 21,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{0,0} &= + 238819,6 \\ \bar{n}_1 \Delta y &= - 218,1 \\ n_1 \Delta_1 y &= + 10239,5 \\ n_2 \Delta_2 y &= + 0,1 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 9,4 \\ \hline y' &= + 248831,7 \\ h' y' = 1,00082822 y' &= + 249037,8 \\ \eta' &= + 2,1 \\ \hline y &= + 249039,9 \text{ m} \end{aligned}$$

B. Elipsoida Bessela.

$$\begin{aligned} \text{p. Niemież} & \left\{ \begin{aligned} \varphi &= 54^\circ 39' 03'',559 \\ \lambda &= + 3^\circ 19' 13'',122 \end{aligned} \right. \\ \text{(kat. str. 7)} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= + 0,811863 \\ n_1 &= + 0,921870 \\ n_2 &= - 0,0360 \\ n_1 n_1 &= + 0,7486 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= + 9268,9 \\ \Delta_1 x &= + 490,2 \\ \Delta_2 x &= + 25,1 \\ \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{0,0} &= + 291911,9 \\ \bar{n}_1 \Delta x &= + 7525,1 \\ n_1 \Delta_1 x &= + 451,9 \\ n_2 \Delta_2 x &= - 0,9 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,5 \\ \hline x' &= + 299887,5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= - 411,2 \\ \Delta_1 y &= + 10766,2 \\ \Delta_2 y &= - 0,8 \\ \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 21,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{0,0} &= + 204670,6 \\ \bar{n}_1 \Delta y &= - 333,8 \\ n_1 \Delta_1 y &= + 9925,4 \\ n_2 \Delta_2 y &= + 0,0 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 16,2 \\ \hline y &= + 214246,0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{p. Osownica} & \left\{ \begin{aligned} \varphi &= 52^\circ 17' 23'',983 \\ \lambda &= + 3^\circ 39' 11'',259 \end{aligned} \right. \\ \text{(Katalog. str. 10)} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= + 0,479943 \\ n_1 &= + 0,918776 \\ n_2 &= - 0,0372 \\ n_1 n_1 &= + 0,4410 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= + 9259,6 \\ \Delta_1 x &= + 561,6 \\ \Delta_2 x &= + 26,1 \\ \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{0,0} &= + 33560,0 \\ \bar{n}_1 \Delta x &= + 4444,1 \\ n_1 \Delta_1 x &= + 516,0 \\ n_2 \Delta_2 x &= - 1,0 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta x) - \Delta x\} &= - 0,3 \\ \hline x &= + 38518,8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= - 447,0 \\ \Delta_1 y &= + 11365,8 \\ \Delta_2 y &= - 1,0 \\ \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 21,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{0,0} &= + 238819,6 \\ \bar{n}_1 \Delta y &= - 214,5 \\ n_1 \Delta_1 y &= + 10442,5 \\ n_2 \Delta_2 y &= + 0,0 \\ n_1 \bar{n}_1 \{(\Delta y) - \Delta y\} &= - 9,4 \\ \hline y &= + 249038,2 \text{ m} \end{aligned}$$

Z współrzędnych prostokątnych punktów Niemież i Osownica znajdziemy długość odcinka prostej, łączącej punkty oraz kąt kierunkowy tej prostej.

W układzie jednolitym poszukiwana długość wyniesie 263 674,1 m i kąt $\alpha = 7^\circ 34' 48'',809$, zaś w układzie dorpackim długość będzie 263 674,2 m i kąt $\alpha' = 7^\circ 34' 56'',764$. Stąd natychmiast mamy kąt skrócenia układu dorpackiego:

$$\begin{aligned} (37) \quad \gamma''' &= \alpha - \alpha' = - 7'',955 \\ \sin \gamma''' &= - 0,0000386, \quad \cos \gamma''' = + 1 \end{aligned}$$

Przekształcając współrzędne punktów w układzie dorpackim według wzoru (21) otrzymamy nowe współrzędne:

$$\begin{aligned} \text{p. Niemież} & \left\{ \begin{aligned} x &= + 299887,5 - 8,3 = + 299879,2 \text{ m} \\ y &= + 214246,0 + 11,6 = + 214257,6 \text{ m} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$p. \text{ Osownica} \begin{cases} x = + 38\,518,8 - 9,6 = + 38\,509,2 \text{ m} \\ y = + 249\,038,2 + 1,5 = + 249\,039,7 \text{ m} \end{cases}$$

Różnice między temi ostatnimi współrzędnymi, a odpowiednimi współrzędnymi w układzie jednolitym dadzą elementy przesunięcia a''' i b''' układu dorpaczkiego względem jednolitego. Średnia z obliczeń 9 punktów, wspólnych dla obydwóch układów da:

$$(38) \quad \begin{aligned} a''' &= + 71,9 \text{ m} \\ b''' &= 0 \end{aligned}$$

Poprawki na przesunięcie i skrócenie układu dorpaczkiego możemy połączyć, podobnie, jak to zrobiliśmy w przykładzie 1 i ułożyć w tabelkę, dla odstępów jednostopniowych szerokości i długości geograficznej:

$$\begin{aligned} \xi''' &= y \sin \gamma''' + a''' \\ \eta''' &= -x \sin \gamma''' + b''' \end{aligned}$$

(39) Poprawki ξ''' w metrach.

(39a) Poprawki η''' w metrach.

φ/λ	+3°	+4°	+5°	+6°	+7°	+3°	+4°	+5°	+6°	+7°	λ/φ
50°	+63,6	+60,8	+58,0	+55,3	+52,5	- 8,4	- 8,3	- 8,1	- 7,9	- 7,7	50°
51°	+63,8	+61,0	+58,3	+55,6	+52,9	- 4,1	- 4,0	- 3,8	- 3,6	- 3,4	51°
52°	+63,9	+61,3	+58,6	+56,0	+53,3	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,7	+ 0,9	52°
53°	+64,1	+61,5	+58,9	+56,4	+53,8	+ 4,4	+ 4,6	+ 4,7	+ 4,9	+ 5,2	53°
54°	+64,3	+61,8	+59,2	+56,7	+54,2	+ 8,7	+ 8,9	+ 9,0	+ 9,2	+ 9,4	54°
55°	+64,5	+62,0	+59,5	+57,1	+54,6	+13,0	+13,1	+13,3	+13,5	+13,7	55°
56°	+64,7	+62,2	+59,8	+57,4	+55,0	+17,3	+17,5	+17,6	+17,8	+18,0	56°

Stosując poprawki, wzięte z powyższej tabelki otrzymujemy następujące rezultaty obliczeń współrzędnych prostokątnych punktów trygonometrycznych, wspólnych dla układów warszawskiego i dorpaczkiego.

L.	PUNKT	Katalog Sippki str.	Układ warszawski Elips. wyrównująca	Układ dorpaczki Elips. Bessela
1	Chorażyszki	7	$\varphi = 54^{\circ} 51' 42'',983$ $\lambda = -4^{\circ} 41' 57'',015$ $X = + 324\,462,4 \text{ m}$ $Y = + 233\,196,1 \text{ m}$	$\varphi = 54^{\circ} 51' 45'',289$ $\lambda = -4^{\circ} 41' 53'',365$ $X = + 324\,463,1 \text{ m}$ $Y = + 233\,196,3 \text{ m}$
2	Niemież	7	$\varphi = 54^{\circ} 39' 01'',617$ $\lambda = -5^{\circ} 00' 40'',065$ $X = + 299\,951,2 \text{ m}$ $Y = + 214\,257,5 \text{ m}$	$\varphi = 54^{\circ} 39' 03'',559$ $\lambda = -5^{\circ} 00' 37'',492$ $X = + 299\,951,1 \text{ m}$ $Y = + 214\,257,6 \text{ m}$
3	Widnopol ¹⁾	8,37	$\varphi = 54^{\circ} 07' 25'',400$ $\lambda = -4^{\circ} 27' 24'',184$ $X = + 243\,162,0 \text{ m}$ $Y = + 253\,208,4 \text{ m}$	$\varphi = 54^{\circ} 07' 26'',23$ $\lambda = -4^{\circ} 27' 19'',94$ $X = + 243\,160,6 \text{ m}$ $Y = + 253\,208,5 \text{ m}$
4	Daukny	8	$\varphi = 54^{\circ} 02' 52'',530$ $\lambda = -4^{\circ} 53' 05'',525$ $X = + 233\,301,2 \text{ m}$ $Y = + 255\,630,6 \text{ m}$	$\varphi = 54^{\circ} 02' 53'',289$ $\lambda = -4^{\circ} 53' 02'',859$ $X = + 233\,301,9 \text{ m}$ $Y = + 255\,630,6 \text{ m}$
5	Pucewicze ¹⁾	37	$\varphi = 53^{\circ} 36' 08'',77$ $\lambda = -4^{\circ} 33' 16'',65$ $X = + 184\,846,2 \text{ m}$ $Y = + 249\,856,2 \text{ m}$	$\varphi = 53^{\circ} 36' 08'',63$ $\lambda = -4^{\circ} 33' 12'',97$ $X = + 184\,845,8 \text{ m}$ $Y = + 249\,856,2 \text{ m}$
6	Łopaty	9	$\varphi = 53^{\circ} 33' 40'',095$ $\lambda = -5^{\circ} 27' 27'',849$ $X = + 177\,493,2 \text{ m}$ $Y = + 190\,275,1 \text{ m}$	$\varphi = 53^{\circ} 33' 40'',029$ $\lambda = -5^{\circ} 27' 27'',155$ $X = + 177\,493,2 \text{ m}$ $Y = + 190\,275,0 \text{ m}$
7	Tarasowce ¹⁾	38	$\varphi = 53^{\circ} 25' 17'',74$ $\lambda = -4^{\circ} 53' 03'',54$ $X = + 163\,639,5 \text{ m}$ $Y = + 229\,003,3 \text{ m}$	$\varphi = 53^{\circ} 25' 17'',32$ $\lambda = -4^{\circ} 53' 00'',94$ $X = + 163\,639,5 \text{ m}$ $Y = + 229\,003,6 \text{ m}$
8	Bronna	9	$\varphi = 52^{\circ} 36' 02'',296$ $\lambda = -5^{\circ} 14' 27'',772$ $X = + 71\,265,2 \text{ m}$ $Y = + 209\,195,2 \text{ m}$	$\varphi = 52^{\circ} 36' 00'',441$ $\lambda = -5^{\circ} 14' 26'',841$ $X = + 71\,265,2 \text{ m}$ $Y = + 209\,195,0 \text{ m}$
9	Osownica ¹⁾	10,38	$\varphi = 52^{\circ} 17' 26'',483$ $\lambda = -4^{\circ} 40' 41'',806$ $X = + 38\,581,2 \text{ m}$ $Y = + 249\,039,9 \text{ m}$	$\varphi = 52^{\circ} 17' 23'',983$ $\lambda = -4^{\circ} 40' 39'',355$ $X = + 38\,581,1 \text{ m}$ $Y = + 249\,039,7 \text{ m}$

¹⁾ Dorpat II.

4. Układ niemieski.

Sieć triangulacyjną na elipsoidzie Walbecka (patrz str. 14) włączymy w układ jednolity znanym z poprzednich przykładów sposobem, mianowicie przez odwzorowanie punktów łącznych na płaszczyznę i dopasowanie do siebie otrzymanych układów płaskich.

Katalog Sippki zawiera na stronach 6—14 współrzędne punktów łańcucha południkowego Tennera z lat 1816—37, odniesione do elipsoidy Walbecka obok współrzędnych tychże punktów na elipsoidzie Bessela, pochodzących z pomiarów późniejszych. Z pośród tych punktów weźmy pod uwagę następujące (w pierwszym wierszu współrzędne na elipsoidzie Walbecka, w drugim na elipsoidzie Bessela, w trzecim różnice):

1. Bielin	$\varphi = 52^{\circ} 02' 39'' 47$ <u>$52^{\circ} 02' 40'' 68$</u> - 1",21	$\lambda = -5^{\circ} 06' 34'' 12$ <u>$-5^{\circ} 06' 35'' 21$</u> + 1",09
2. Czerewiszczce	$\varphi = 51^{\circ} 34' 54'' 78$ <u>$51^{\circ} 34' 56'' 13$</u> - 1",35	$\lambda = -4^{\circ} 54' 44'' 44$ <u>$-4^{\circ} 54' 45'' 53$</u> + 1",09
3. Czeremoszno ¹⁾	$\varphi = 51^{\circ} 20' 10'' 51$ <u>$51^{\circ} 20' 11'' 88$</u> - 1" 37	$\lambda = -5^{\circ} 15' 43'' 84$ <u>$-5^{\circ} 15' 44'' 57$</u> + 0" 73
4. Hołoby ¹⁾	$\varphi = 51^{\circ} 06' 49'' 65$ <u>$51^{\circ} 06' 51'' 08$</u> - 1" 47	$\lambda = -5^{\circ} 19' 51'' 28$ <u>$-5^{\circ} 19' 51'' 95$</u> + 0" 67
5. Krupy	$\varphi = 50^{\circ} 41' 03'' 67$ <u>$50^{\circ} 41' 05'' 26$</u> - 1" 59	$\lambda = -4^{\circ} 54' 51'' 70$ <u>$-4^{\circ} 54' 52'' 66$</u> + 0" 96
6. Górniki	$\varphi = 50^{\circ} 23' 04'' 35$ <u>$50^{\circ} 23' 06'' 07$</u> - 1" 72	$\lambda = -4^{\circ} 28' 56'' 62$ <u>$-4^{\circ} 28' 57'' 56$</u> + 0" 94
7. Mosty	$\varphi = 50^{\circ} 11' 48'' 39$ <u>$50^{\circ} 11' 50'' 16$</u> - 1" 77	$\lambda = -4^{\circ} 19' 33'' 81$ <u>$-4^{\circ} 19' 34'' 78$</u> + 0" 97

Odwzorujemy punkty powyższe z elipsoidy Walbecka na elipsoidę E'', dodając poprawki szerokości (25) i stosując zamiennik długości λ_0 — Pułkowo, obliczony podobnie jak w przykładach poprzednich. Zamiennik ten będzie:

$$(40) \quad l'' = +8^{\circ} 19' 50'',70.$$

Zamienniki długości geograficznej na elipsoidzie Bessela pozostaną z poprzedniego przykładu (35, 36).

¹⁾ Dorpat I.

Otrzymujemy:

1. Bielin	$\varphi = 52^{\circ} 02' 39'' 59$ <u>$52^{\circ} 02' 40'' 68$</u> - 1" 09	$\lambda = +3^{\circ} 13' 16'' 58$ <u>$+3^{\circ} 13' 15'' 40$</u> + 1" 18
2. Czerewiszczce	$\varphi = 51^{\circ} 34' 54'' 85$ <u>$51^{\circ} 34' 56'' 13$</u> - 1" 28	$\lambda = +3^{\circ} 25' 06'' 26$ <u>$+3^{\circ} 25' 05'' 08$</u> + 1" 18
3. Czeremoszno	$\varphi = 51^{\circ} 20' 10'' 55$ <u>$51^{\circ} 20' 11'' 88$</u> - 1" 33	$\lambda = +3^{\circ} 04' 06'' 86$ <u>$+3^{\circ} 04' 05'' 81$</u> + 1" 05
4. Hołoby	$\varphi = 51^{\circ} 06' 49'' 66$ <u>$51^{\circ} 06' 51'' 08$</u> - 1" 42	$\lambda = +2^{\circ} 59' 59'' 42$ <u>$+2^{\circ} 59' 58'' 43$</u> + 0" 99
5. Krupy	$\varphi = 50^{\circ} 41' 03'' 63$ <u>$50^{\circ} 41' 05'' 26$</u> - 1" 63	$\lambda = +3^{\circ} 24' 59'' 10$ <u>$+3^{\circ} 24' 57'' 95$</u> + 1" 15
6. Górniki	$\varphi = 50^{\circ} 23' 04'' 28$ <u>$50^{\circ} 23' 06'' 07$</u> - 1" 79	$\lambda = +3^{\circ} 50' 54'' 08$ <u>$+3^{\circ} 50' 53'' 05$</u> + 1" 03
7. Mosty	$\varphi = 50^{\circ} 11' 48'' 30$ <u>$50^{\circ} 11' 50'' 16$</u> - 1" 86	$\lambda = +4^{\circ} 00' 16'' 89$ <u>$+4^{\circ} 00' 15'' 83$</u> + 1" 06

Obliczmy współrzędne prostokątne płaskie odwzorowania W. I. G. dla dwóch punktów skrajnych, przyczem rezultaty obliczeń w układzie dorpackim sprowadzamy do układu jednolitego.

A. Elipsoida Bessela.

p. Bielin	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 52^{\circ} 02' 40'',68 \\ \lambda = +3^{\circ} 13' 15'',40 \end{array} \right.$	$\bar{n}_1 = +0,535\ 600$
		$n_1 = +0,325\ 667$
		$\bar{n}_2 = -0,1098$
		$\bar{n}_1 n_1 = +0,1744$

$\Delta_x = +9\ 260,5$	$x_{0,0} = +4\ 733,1$
$\Delta_1 x = +511,4$	$\bar{n}_1 \Delta_x = +4\ 959,9$
$\Delta_2 x = +26,2$	$n_1 \Delta_1 x = +166,5$
$\{(\Delta_x) - \Delta_x\} = -0,7$	$n_2 \Delta_2 x = -2,9$
	$\bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = -0,1$
	$+9\ 856,5$
	$\xi = +63,4$
	$X = +9\ 919,9\text{ m}$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_y = - 403,8 \\
 \Delta_1 y = + 11\,431,3 \\
 \Delta_2 y = - 0,9 \\
 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 21,3 \\
 \hline
 y_{0,0} = + 217\,297,4 \\
 \bar{n}_1 \Delta_y = - 216,3 \\
 n_1 \Delta_1 y = + 3\,722,7 \\
 n_2 \Delta_2 y = + 0,1 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 3,7 \\
 \hline
 + 220\,800,2 \\
 \eta = + 0,4 \\
 \hline
 Y = + 220\,800,6 \text{ m}
 \end{array}$$

$$\text{p. Mosty} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 50^\circ 11' 50'',16 \\ \lambda = + 4^\circ 00' 15'',83 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \bar{n}_1 = + 0,367\,200 \\
 n_1 = + 0,026\,383 \\
 n_2 = - 0,0127 \\
 \bar{n}_1 n_1 = + 0,0097
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_x = + 9\,256,8 \\
 \Delta_1 x = + 660,2 \\
 \Delta_2 x = + 27,1 \\
 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,8 \\
 \hline
 x_{0,0} = - 196\,089,8 \\
 \bar{n}_1 \Delta_x = + 3\,399,1 \\
 n_1 \Delta_1 x = + 17,4 \\
 n_2 \Delta_2 x = - 0,3 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,0 \\
 \hline
 - 192\,673,6 \\
 \xi = + 60,9 \\
 \hline
 X = - 192\,612,7 \text{ m}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_y = - 503,7 \\
 \Delta_1 y = + 11\,891,2 \\
 \Delta_2 y = - 1,0 \\
 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 20,9 \\
 \hline
 y_{0,0} = + 285\,590,9 \\
 \bar{n}_1 \Delta_y = - 184,9 \\
 n_1 \Delta_1 y = + 313,7 \\
 n_2 \Delta_2 y = + 0,0 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 0,2 \\
 \hline
 + 285\,719,5 \\
 \eta = - 7,4 \\
 \hline
 Y = + 285\,712,1 \text{ m}
 \end{array}$$

B. Elipsoida E''.

$$\text{p. Bielin} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 52^\circ 02' 39'',59 \\ \lambda = + 3^\circ 13' 16'',58 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \bar{n}_1 = + 0,531\,967 \\
 n_1 = + 0,327\,633 \\
 n_2 = - 0,1101 \\
 \bar{n}_1 n_1 = + 0,1743
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_x = + 9\,260,5 \\
 \Delta_1 x = + 511,4 \\
 \Delta_2 x = + 26,2 \\
 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,7 \\
 \hline
 x_{0,0} = + 4\,733,1 \\
 \bar{n}_1 \Delta_x = + 167,6 \\
 n_1 \Delta_1 x = + 2,9 \\
 n_2 \Delta_2 x = - 0,1 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - , \\
 \hline
 x'' = + 9\,824,0 \\
 h'' x'' = + 9\,823,0 \text{ m}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_y = - 403,8 \\
 \Delta_1 y = + 11\,431,3 \\
 \Delta_2 y = - 0,9 \\
 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 21,3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y_{0,0} = + 217\,297,4 \\
 \bar{n}_1 \Delta_y = - 214,8 \\
 n_1 \Delta_1 y = + 3\,745,3 \\
 n_2 \Delta_2 y = + 0,1 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 3,7 \\
 \hline
 y'' = + 220\,824,3 \\
 h'' y'' = + 220\,801,6 \text{ m}
 \end{array}$$

$$\text{p. Mosty} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 51^\circ 11' 48'',30 \\ \lambda = + 4^\circ 00' 16'',89 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \bar{n}_1 = + 0,361\,000 \\
 n_1 = + 0,028\,150 \\
 n_2 = - 0,0136 \\
 \bar{n}_1 n_1 = + 0,0102
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_x = + 9\,256,8 \\
 \Delta_1 x = + 660,2 \\
 \Delta_2 x = + 27,1 \\
 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x_{0,0} = - 196\,089,8 \\
 \bar{n}_1 \Delta_x = + 3\,341,7 \\
 n_1 \Delta_1 x = + 18,6 \\
 n_2 \Delta_2 x = - 0,4 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_x) - \Delta_x\} = - 0,0 \\
 \hline
 x'' = - 192\,729,9 \\
 h'' x'' = - 192\,710,1 \text{ m}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \Delta_y = - 503,7 \\
 \Delta_1 y = + 11\,891,2 \\
 \Delta_2 y = - 1,0 \\
 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 20,9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 y_{00} = + 285\,590,9 \\
 \bar{n}_1 \Delta_y = - 181,8 \\
 n_1 \Delta_1 y = + 334,7 \\
 n_2 \Delta_2 y = + 0,0 \\
 \bar{n}_1 n_1 \{(\Delta_y) - \Delta_y\} = - 0,2 \\
 \hline
 y'' = + 285\,743,6 \\
 h'' y'' = + 285\,714,2 \text{ m}
 \end{array}$$

Długość prostej Bielin - Mosty na płaszczyźnie odwzorowania oraz jej kąt kierunkowy, obliczony z współrzędnych prostokątnych A i B będzie:

$$\begin{array}{ll}
 \text{A) } d = 212\,680,5 \text{ m} & \alpha = 17^\circ 46' 14'',544 \\
 \text{B) } d = 212\,681,2 \text{ m} & \alpha = 17^\circ 46' 15'',043
 \end{array}$$

Różnica kątów kierunkowych da nam kąt skręcenia układu B (niemieckiego) w stosunku do A:

$$(41) \quad \begin{aligned} \gamma'' &= -0'',499 \\ \sin \gamma'' &= -0,000\,0029 \\ \cos \gamma'' &= +1,000\,0000 \end{aligned}$$

Skrecając układ B według (21) i porównywując rezultaty z współzrzednymi układu A otrzymujemy elementy przesunięcia układu B. Średnia arytmetyczna dla siedmiu wziętych punktów daje:

$$(42) \quad \begin{aligned} a'' &= +97,9 \text{ m} \\ b'' &= -1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Poprawki na skręcenie i przesunięcie układu B, wzięte razem będą następujące: (ξ'' dla x-ów, η'' dla y-ów):

(43) Poprawki ξ'' w metrach. (43a) Poprawki η'' w metrach.

φ/λ	+2°30'	+3°	+3°30'	+4°	+4°30'	+2°30'	+3°	+3°30'	+4°	+4°30'	λ/φ
50°	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-2,1	-2,1	-2,1	-2,1	-2,1	50°
50°30'	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-2,0	-2,0	-2,0	-2,0	-2,0	50°30'
51°	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	51°
51°30'	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-1,6	-1,6	-1,6	-1,6	-1,6	51°30'
52°	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	-1,5	52°
52°30'	+97,4	+97,3	+97,2	+97,1	+97,0	-1,3	-1,3	-1,3	-1,3	-1,3	52°30'

Mamy więc wszystkie elementy do sprowadzenia współzrzednych punktów, danych na elipsoidzie Walbecka, do jednolitego układu prostokątnego, w jednolitym odwzorowaniu W.I.G.

Wyniki obliczeń współzrzednych punktów, wziętych w tym przykładzie są następujące:

L.	PUNKT	Układ dorpcki	Układ niemiecki
1	Bielin	$\varphi = 52^{\circ} 02' 40'',68$ $\lambda = -5^{\circ} 06' 35'',21$ X = + 9 919,9 m Y = + 220 800,6 m	$\varphi = 52^{\circ} 02' 39'',47$ $\lambda = -5^{\circ} 06' 34'',12$ X = + 9 920,2 m Y = + 220 800,1 m
2	Czerewiszczce	$\varphi = 51^{\circ} 34' 56'',13$ $\lambda = -4^{\circ} 54' 45'',53$ X = - 40 838,4 m Y = + 236 720,0 m	$\varphi = 51^{\circ} 34' 54'',78$ $\lambda = -4^{\circ} 54' 44'',44$ X = - 40 838,3 m Y = + 236 720,1 m

L.	PUNKT	Układ dorpcki	Układ niemiecki
3	Czeremoszno	$\varphi = 51^{\circ} 20' 11'',88$ $\lambda = -5^{\circ} 15' 44'',57$ X = - 69 210,2 m Y = + 213 652,2 m	$\varphi = 51^{\circ} 20' 10'',51$ $\lambda = -5^{\circ} 15' 43'',84$ X = - 69 209,9 m Y = + 213 653,2 m
4	Hołoby	$\varphi = 51^{\circ} 06' 51'',08$ $\lambda = -5^{\circ} 19' 51'',95$ X = - 94 128,0 m Y = + 209 883,1 m	$\varphi = 51^{\circ} 06' 49'',65$ $\lambda = -5^{\circ} 19' 51'',28$ X = - 94 127,9 m Y = + 209 884,3 m
5	Krupy	$\varphi = 50^{\circ} 41' 05'',26$ $\lambda = -4^{\circ} 54' 52'',66$ X = - 140 559,2 m Y = + 241 240,0 m	$\varphi = 50^{\circ} 41' 03'',67$ $\lambda = -4^{\circ} 54' 51'',87$ X = - 140 559,5 m Y = + 241 238,4 m
6	Górniki	$\varphi = 50^{\circ} 23' 06'',07$ $\lambda = -4^{\circ} 28' 57'',56$ X = - 172 350,6 m Y = + 273 473,3 m	$\varphi = 50^{\circ} 23' 04'',35$ $\lambda = -4^{\circ} 28' 56'',62$ X = - 172 350,8 m Y = + 273 473,2 m
7	Mosty	$\varphi = 50^{\circ} 11' 50'',16$ $\lambda = -4^{\circ} 19' 34'',78$ X = - 192 612,7 m Y = + 285 712,1 m	$\varphi = 50^{\circ} 11' 48'',39$ $\lambda = -4^{\circ} 19' 33'',81$ X = - 192 613,0 m Y = + 285 712,1 m

5. Austriacka sieć triangulacyjna I rzędu.

W Katalogu z r. 1932 mamy 4 punkty triangulacyjne¹⁾, należące jednocześnie do sieci austriackiej I rzędu i do jednego z układów, które uzgodniliśmy w przykładach poprzednich. Punkty te są następujące:

1. Ráj A) $\varphi = 49^{\circ} 51' 09'',5940$ $\lambda = 36^{\circ} 15' 01'',4815$ w ukł. niemieckim
 B) $\varphi = 49^{\circ} 51' 08'',0236$ $\lambda = 36^{\circ} 14' 58'',4874$ w ukł. austriackim
2. Ojców A) $\varphi = 50^{\circ} 12' 04'',96$ $\lambda = -10^{\circ} 30' 01'',46$ w ukł. warszaw.
 B) $\varphi = 50^{\circ} 12' 00'',3250$ $\lambda = 37^{\circ} 29' 31'',0521$ w ukł. austriack.
3. Smordwa A) $\varphi = 50^{\circ} 25' 19'',368$ $\lambda = -4^{\circ} 48' 42'',739$ w ukł. dorpckim
 B) $\varphi = 50^{\circ} 25' 20'',425$ $\lambda = 43^{\circ} 11' 04'',612$ w ukł. austriackim
4. Górniki A) $\varphi = 50^{\circ} 23' 06'',066$ $\lambda = -4^{\circ} 28' 57'',564$ w ukł. dorpckim
 B) $\varphi = 50^{\circ} 23' 07'',091$ $\lambda = 48^{\circ} 30' 49'',804$ w ukł. austriackim

¹⁾ Katalog z r. 1932, str. 510, 494, 483, 484. Współzrzedne austriackie punktów Smordwa i Górniki pochodzą z dowiązania sieci austriackiej do rosyjskiej, w układzie dorpckim, wykonanego w r. 1926 przez Wydział Triangulacyjny Wojskowego Instytutu Geograficznego. Punkt Roy, po czesku Ráj, leży po stronie czeskosłowackiej w odległości około 250 m od naszej granicy.

Współrzędne geograficzne niemieckie i rosyjskie (A) przeliczamy na prostokątne płaskie jednolitego układu (uzgodnionego); następnie odwzorujemy na płaszczyznę punkty według argumentów (B), np. sposobem interpolacji z tablic. Zamiennik liczbowy do przejścia od południka austriackiego Ferro do południka centralnego $\lambda_0 = 22^\circ$ od Greenwich niech będzie $39^\circ 39' 49''{,}00$, zgodnie z wartością, podaną na str. XV katalogu punktów z r. 1932.

Otrzymujemy następujące rezultaty (w pierwszym wierszu współrzędne uzgodnione, w drugim współrzędne z przeliczenia φ, λ austriackich, w trzecim różnice):

Ráj	A)	$X = -233\,079,9$ m	$Y = -245\,552,7$ m
	B)	$X = -233\,135,7$ + 55,8	$Y = -245\,400,0$ - 152,7
Ojców	A)	$X = -197\,789,2$	$Y = -155\,137,9$
	B)	$X = -197\,847,5$ + 58,3	$Y = -154\,977,6$ - 160,3
Smordwa	A)	$X = -169\,408,6$	$Y = +249\,891,8$
	B)	$X = -169\,430,9$ + 22,3	$Y = +250\,049,6$ - 157,8
Górniki	A)	$X = -172\,350,6$	$Y = +273\,473,3$
	B)	$X = -172\,372,2$ 21,6	$Y = +273\,631,5$ - 158,2

Znaczne przesunięcie układu B w kierunku Y-ów wynika z przyjęcia niewłaściwego zamiennika liczbowego długości geograficznej „Ferro austriackie” — południk centralny λ_0 . Właściwy zamiennik otrzymamy w następujący sposób: obliczamy kąt między jakąkolwiek prostą, np. Ráj — Górniki w układzie A, a tą samą prostą w układzie B; skręcamy układ B o znaleziony kąt i otrzymaną średnią różnicę Y-ów traktujemy jako odcinek łuku równoleżnika na szerokości środka odwzorowania (52°). Odcinek łuku, wyrażony w mierze katowej da poprawkę zamiennika liczbowego długości. Zamiennik, w ten sposób otrzymany jest:

$$(44) \quad l = -39^\circ 39' 56''{,}72$$

Obliczamy raz jeszcze współrzędne prostokątne z φ, λ austriackich, tym razem z zamiennikiem l .

Ráj	$X = -233\,128,6$ m	$Y = -245\,549,6$ m
Ojców	$X = -197\,843,0$	$Y = -155\,130,7$
Smordwa	$X = -169\,438,3$	$Y = +249\,897,3$
Górniki	$X = -172\,380,4$	$Y = +273\,479,1$

Obliczamy z tych współrzędnych kąt skręcenia układu austriackiego:

$$(45) \quad \begin{aligned} \gamma &= -7''{,}34 \\ \sin \gamma &= -0,000\,0356 \\ \cos \gamma &= +1,000\,0000 \end{aligned}$$

Wreszcie znajdujemy elementy przesunięcia układu austriackiego w stosunku do jednolitego:

$$(46) \quad \begin{aligned} a &= +39,4 \text{ m} \\ b &= 0,0 \text{ m} \end{aligned}$$

i układamy tabelkę poprawek ξ, η :

(47) **Poprawki ξ w metrach.**

φ/λ	-4°	-3°	-2°	-1°	0°	$+1^\circ$	$+2^\circ$	$+3^\circ$	$+4^\circ$	λ/φ
48°	+50,0	+47,4	+44,7	+42,1	+39,4	+36,7	+34,1	+31,4	+28,8	48°
49°	+49,8	+47,2	+44,6	+42,0	+39,4	+36,8	+34,2	+31,6	+29,0	49°
50°	+49,6	+47,0	+44,5	+41,9	+39,4	+36,8	+34,3	+31,8	+29,2	50°
51°	+49,4	+46,9	+44,4	+41,9	+39,4	+36,9	+34,4	+31,9	+29,4	51°

(47a) **Poprawki η w metrach.**

φ/λ	-4°	-3°	-2°	-1°	0°	$+1^\circ$	$+2^\circ$	$+3^\circ$	$+4^\circ$	λ/φ
48°	-15,6	-15,7	-15,8	-15,8	-15,8	-15,8	-15,8	-15,7	-15,6	48°
49°	-11,6	-11,7	-11,8	-11,9	-11,9	-11,9	-11,8	-11,7	-11,6	49°
50°	-7,6	-7,7	-7,8	-7,9	-7,9	-7,9	-7,8	-7,7	-7,6	50°
51°	-3,7	-3,8	-3,9	-3,9	-4,0	-3,9	-3,9	-3,8	-3,7	51°

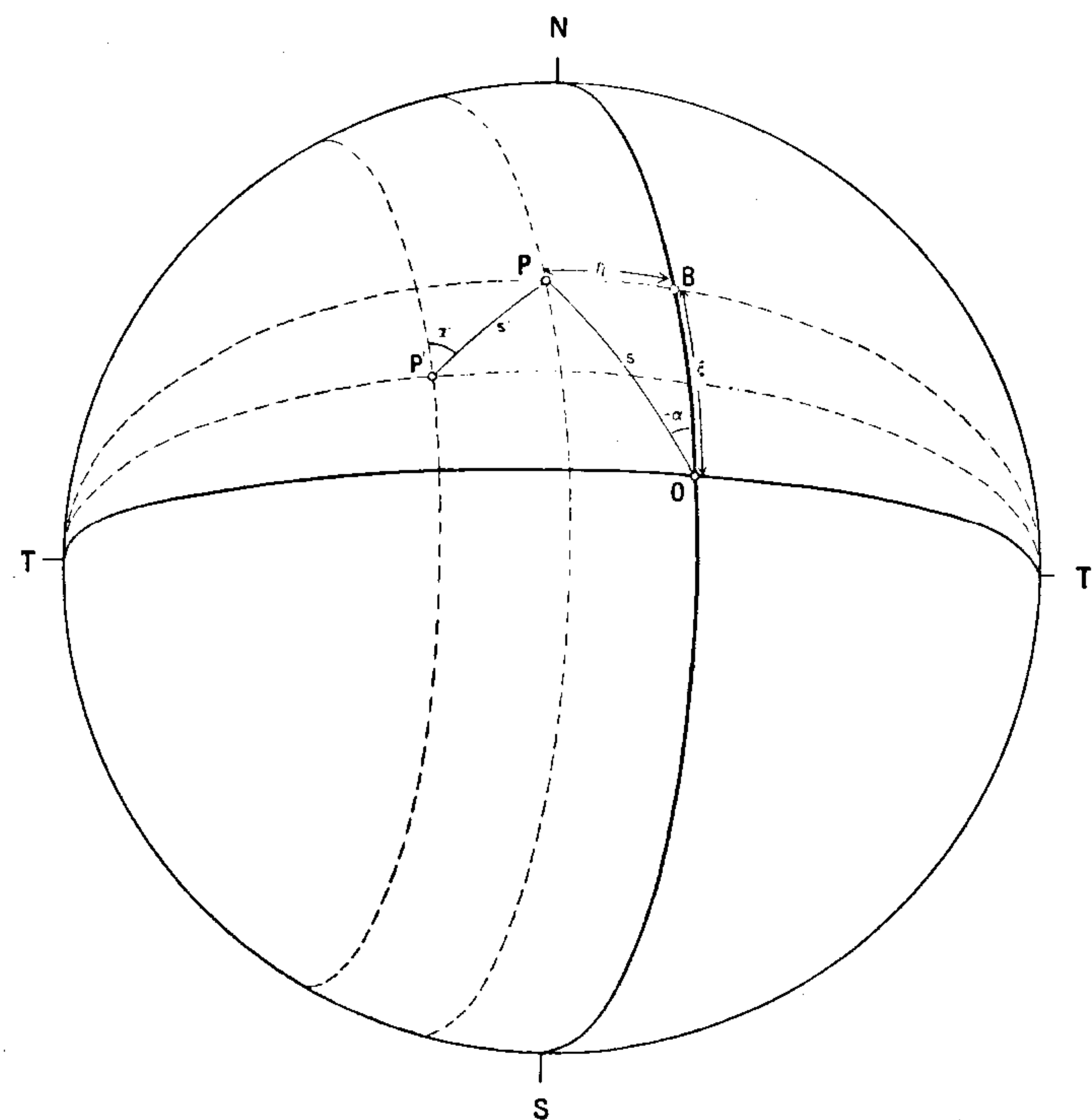
Po uwzględnieniu poprawek ξ i η współrzędne prostokątne X, Y rozpatrywanych punktów będą:

Ráj	A)	$X = -233\,079,9$ m	$Y = -245\,552,7$ m
	B)	$X = -233\,080,5$ + 0,6	$Y = -245\,557,9$ - 5,2

Ojców	A) $X = -197\,789,2$ m	$Y = -155\,137,9$ m
	B) $X = -197\,798,1$ + 8,9	$Y = -155\,137,7$ - 0,2
Smordwa	A) $X = -169\,408,6$ m	$Y = +249\,891,8$ m
	B) $X = -169\,407,8$ - 0,8	$Y = +249\,891,3$ + 0,5
Górniki	A) $X = -172\,350,6$ m	$Y = +273\,473,3$ m
	B) $X = -172\,350,7$ + 0,1	$Y = +273\,473,0$ + 0,3

6. Austrjacka sieć katastralna.

Uzgodnienie austrjackiej triangulacji szczegółowej, t. zw. katastralnej z układem jednolitym w zasadzie będzie polegać na 1) przeliczeniu współrzędnych płaskich Cassini'ego na



Rys. 5.

geograficzne i 2) przeliczeniu otrzymanych współrzędnych geograficznych na prostokątne płaskie odwzorowania W. I. G.

Sprawa rzutu, w jakim obliczone są współrzędne katastralne na terenie b. Austrii w swoim czasie była przedmiotem

dyskusji¹⁾ i wymaga pewnych objaśnień, dotyczących jego powstania.

Jedną z pierwszych triangulacji większego obszaru, jak wiadomo, wykonana była pod kierunkiem C. Cassini'ego (1714—1784) we Francji. Cassini w pomiarach swych zastosował pomysł współrzędnych sferycznych prostokątnych, polegający na tym, że jeżeli przez dany punkt O (początek układu) na kuli o promieniu r poprowadzimy koło wielkie TT', prostopadłe do południka w tym punkcie, to położenie jakiegokolwiek punktu P będzie wyznaczone w stosunku do O przez współrzędne ξ, η , gdzie ξ jest długością odcinka południka NOS (rys. 5) od punktu O do przecięcia się z kołem wielkiem TP'T' (odcinek OB), a η jest odległością PB.

Układ sferyczny prostokątny można odwzorować na płaszczyznę w ten sposób, że $\xi = x, \eta = y$; będzie to znany rzut walcowy poprzeczny równoodległy. W rzucie tym południk NOS będzie osią x-ów, koło wielkie TOT' osią y-ów, wszystkie koła wielkie, prostopadłe do NOS odwzorują się na proste równoległe, a zniekształcenia długościowe w dowolnym kierunku α , dla dowolnego odcinka $(x_1 y_1, x_2 y_2)$ będą:

$$(\mu - 1) = \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{6 r^2} \cos \alpha.$$

Położenie punktu P w współrzędnych ξ, η lub x, y wyznacza się z bezpośrednio pomierzonej odległości $OP = s$ i kąta kierunkowego α za pomocą formuł²⁾

$$(48) \quad y = s \sin \alpha - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6 r^2}$$

$$x = s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha}{2 r^2} \left(y^2 - \frac{s^2 \sin^2 \alpha}{3} \right)$$

Jeżeli s i α mierzone są nie od początku układu O, a od punktu $P_1 (x_1, y_1)$, to formuły do znalezienia x, y będą:

$$(49) \quad y = y_1 + s \sin \alpha - \frac{s^2 \cos^2 \alpha y_1}{2 r^2} - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6 r^2}$$

$$x = x_1 + s \cos \alpha + \frac{s \cos \alpha y_1^2}{2 r^2} - \frac{s^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}{6 r^2}$$

Dla obszarów niezbyt wielkich lub rozciągniętych wzdłuż jednej z osi współrzędnych można przyjąć $r = \infty$ i wówczas będzie

$$(50) \quad y = y_1 + s \sin \alpha$$

$$x = x_1 + s \cos \alpha$$

¹⁾ Przegląd Mierniczy Nr. 10 z 1932 r. i Wiadomości Służby Geograficznej, Nr. 4 z 1932 r.

²⁾ Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, Tom 3, str. 268.

Soldner, w triangulacji królestwa Bawarii w 1809 roku zastosował do znalezienia x, y formuły (49); sposób ten następnie rozpowszechniono w innych krajach i stąd często używana, zwłaszcza w Niemczech, nazwa „współrzędnych Soldnera”, chociaż z prawa pierwszeństwa powinna być związana z nazwiskiem Cassini'ego.

Cassini w swoich pracach przyjął formuły (50), prawdopodobnie dla ułatwienia obliczeń; te same względy skłoniły austriackie władze pomiarowe do zastosowania prostszych formuł Cassini'ego¹⁾. Aby nie wprowadzać zbyt dużych zniekształceń z powodu zaniedbania wyrazów 3 rzędu w formułach (49) obszar Austrii podzielono na kilka rejonów, z osobnym początkiem układu dla każdego. W granicach Polski leżą dwa takie układy: jeden w b. Galicji, z początkiem we Lwowie, drugi Śląski, z początkiem w Wiedniu.

Współrzędne Cassini'ego (austriackie) możemy zawsze zamienić na współrzędne Soldnera przez dodanie wyrazów 3 rzędu we wzorach (48). Kładąc

$$s \sin \alpha = \bar{y}$$

$$s \cos \alpha = x$$

otrzymamy z dostatecznym przybliżeniem

$$(51) \quad y = \bar{y} - y x^2 \cdot \frac{1}{6 r^2}$$

$$x = \bar{x} + x y^2 \cdot \frac{1}{3 r^2}$$

Współrzędne Soldnera otrzymamy po podstawieniu w równaniach (51) danych współrzędnych katastralnych zamiast \bar{x}, \bar{y} , a zamiast r wartość średniego promienia krzywizny na szerokości początku układu.

Wartość liczbowa współczynników stałych z r — dla szerokości $49^{\circ} 50' 55''$ (początek układu lwowskiego) będzie:

$$\log \frac{1}{6 r^2} = 5.612077 - 20$$

$$\log \frac{1}{3 r^2} = 5.913106 - 20$$

Dla zobrazowania różnicy Cassini — Soldner podaję niżej tabelkę poprawek, które należy dodać do austriackich współrzędnych (Cassini'ego) aby otrzymać soldnerowskie.

¹⁾ H. Hartl, Die Projectionen..., Mittheilungen des k. k. m.-geogr. Institutes, B. VI, 1886.

Poprawki \bar{X} -ów w metrach:

\bar{x}/\bar{y}	-400 km	-300	-200	-100	0	+100	+200	\bar{y}/\bar{x}
+100 km	+131,0	+73,7	+32,8	+8,2	0	+8,2	+32,8	+100 km
+50	+65,5	+36,8	+16,4	+4,1	0	+4,1	+16,4	+50
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-50	-65,5	-36,8	-16,4	-4,1	0	-4,1	-16,4	-50
-100	-131,0	-73,7	-32,8	-8,2	0	-8,2	-32,8	-100
-150	-196,5	-110,5	-49,1	-12,3	0	-12,3	-49,1	-150
-200	-262,0	-147,4	-65,5	-16,4	0	-16,4	-65,5	-200
-250	-327,5	-184,2	-81,9	-20,5	0	-20,5	-81,9	-250

Poprawki \bar{Y} -ów w metrach:

\bar{x}/\bar{y}	-400 km	-300	-200	-100	0	+100	+200	\bar{y}/\bar{x}
+100 km	+16,4	+12,3	+8,2	+4,1	0	-4,1	-8,2	+100 km
+50	+4,1	+3,1	+2,0	+1,0	0	-1,0	-2,0	+50
0	0	0	0	0	0	0	0	0
-50	+4,1	+3,1	+2,0	+1,0	0	-1,0	-2,0	-50
-100	+16,4	+12,3	+8,2	+4,1	0	-4,1	-8,2	-100
-150	+36,8	+27,6	+18,5	+9,2	0	-9,2	-18,5	-150
-200	+65,5	+49,1	+32,8	+16,4	0	-16,4	-32,8	-200
-250	+127,9	+76,9	+51,2	+25,6	0	-25,6	-51,2	-250

Formuły rachunkowe do zamiany współrzędnych płaskich Cassini—Soldner na geograficzne mają według Bohnenbergera ¹⁾ następujący kształt:

$$m'' = AM, \quad p'' = AP$$

$$\lambda = L \pm Bm'' \pm C \sin m \cos (2L \pm m); \quad \pm \text{dla } \begin{matrix} \text{północnej} \\ \text{południowej} \end{matrix} \text{ odciętej } M$$

$$\psi = p'' - D \sin^2 \lambda (p \pm E \sin 2p)$$

$\sin \varphi = \sin \lambda \cos \psi$, gdzie φ = poszukiwanej szerokości

$$\text{tang } Z = \frac{\text{tang } \psi}{\cos \lambda}, \quad \text{gdzie } Z \text{ oznacza poszukiwany azymut}$$

$$u = Z - F \psi'' \cos \lambda = \text{różnicy długości.}$$

Liczba M oznacza odcięta, P — rzędną, L = szerokości geograficznej początku układu, liczby A, B, C, D, E, F są to współczynniki stałe, zależne od przyjętej elipsoidy i szerokości geograficznej początku układu.

Formuły Bohnenbergera stosowane były w Austrii do wyznaczenia na mapach katastralnych siatki geograficznej. Elementy przyjętej elipsoidy były:

$$a = 3\,362\,328 \text{ klafrów wiedeńskich}$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{324}$$

Do przeliczenia współrzędnych soldnerowskich dogodniej jest przyjąć wzory Jordana ²⁾ podane w formie szeregów:

$$\varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi = ax + bx^2 + cy^2 + dy^2x + ex^3 + fy^2x^2 + gy^4$$

$$\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = hy + iyx + kyx^2 + ly^3 + my^3x + nyx^3.$$

gdzie φ, λ oznaczają współrzędne poszukiwane, φ_0, λ_0 — współrzędne początku układu, x, y — współrzędne soldnerowskie punktu, położenie geograficzne którego szukamy, a, b, c, d, \dots, m, n są to współczynniki stałe, zależne od elipsoidy oraz od φ_0 .

¹⁾ H. Hartl, Mittheilungen B. VI. 1886, str. 150—151.

²⁾ Jordan, Handbuch der Vermessungskunde B. 3., str. 492.

Wartość liczbowa współczynników a, b, \dots, m, n dla układu lwowskiego ($\varphi_0 = 49^\circ 50' 55'', 243$) jest:

(52)	$\log a = 8.510\,14489 - 10$	$\log h = 8.699\,50251 - 10$
	$\log b = 9.400\,7828_n - 20$	$\log i = 1.967\,86883 - 10$
	$\log c = 1.477\,4812_n - 10$	$\log k = 5.368\,7613 - 20$
	$\log d = 4.977\,64_n - 20$	$\log l = 4.759\,1139_n - 20$
	$\log e = 1.652\,40 - 20$	$\log m = 8.673\,1931_n - 30$
	$\log f = 8.247\,636_n - 30$	$\log n = 8.706\,843 - 30$
	$\log g = 7.504\,603 - 30$	

Do przeliczenia współrzędnych geograficznych na prostokątne Soldnera służą wzory:

$$X = A\Delta\varphi + B\Delta\varphi^2 + C\Delta\lambda^2 + D\Delta\varphi\Delta\lambda^2 + E\Delta\varphi^3 + F\Delta\varphi^2\Delta\lambda^2 + G\Delta\lambda^4$$

$$Y = H\Delta\lambda + I\Delta\varphi\Delta\lambda + K\Delta\varphi^2\Delta\lambda + L\Delta\lambda^3 + M\Delta\varphi\Delta\lambda^3 + N\Delta\varphi^3\Delta\lambda$$

w których liczby A, B, C, \dots, M, N są dla danej szerokości początku układu stałe. Wartość ich dla układu lwowskiego będzie

(53)	$\log A = 1.489\,8551\,127$	$\log H = 1.300\,4974\,855$
	$\log B = 3.870\,348 - 10$	$\log I = 6.058\,7190_n - 10$
	$\log C = 5.568\,3398 - 10$	$\log K = 0.374\,476_n - 10$
	$\log D = 9.783\,417_n - 20$	$\log L = 9.660\,073_n - 20$
	$\log E = 7.591\,020_n - 20$	$\log M = 4.044\,99_n - 20$
	$\log F = 5.240\,52_n - 20$	$\log N = 4.649\,30 - 20$
	$\log G = 4.034\,85 - 20$	

Położenie geograficzne początku układu lwowskiego (Löwenburg) według austriackiej instrukcji z 1845 r. wyznaczają współrzędne

$$\varphi = 49^\circ 50' 57'',00$$

$$\lambda = 41^\circ 42' 32'',19 \text{ od Ferro,}$$

odniesione do elipsoidy austriackiej z 1810 roku ($a = 3\,362\,328$ kl., spłaszczenie $\frac{1}{324}$).

Centr na Kopcu Unji we Lwowie, którego

$$\varphi = 49^\circ 50' 55'',2429$$

$$\lambda = 41^\circ 42' 29'',5684 \text{ od Ferro austr.}$$

błędnie jest podany w katalogu z 1932 r. za początek układu lwowskiego. Te ostatnie współrzędne wzięte są z „Die Ergebnisse der Triangulierungen des k. k. Militär-Geographisches

Institutes, Wien 1902", gdzie w opisie punktu czytamy notatkę, że pierwotny centr zaginął w 1875 r. podczas sypania Kopca Unji.

Odszukaniem pierwotnego położenia punktu katastralnego ($x=0$, $y=0$), drogą wcięcia wstecz do centrów istniejących, zajął się c. k. geometra A. Lewicki i wynik swej pracy ogłosił w „Oesterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen”, rocznik 1905, str. 6 i 31. Według Lewickiego, początek układu lwowskiego powinien znajdować się o 1,26 m na północ i 5,13 m na wschód od centru istniejącego. Zauważmy, że współrzędne punktów, na których w swej pracy opierał się Lewicki różnią się nieco od danych katalogu, np.

Kościół św. Jura . . . $x = 1060,31$, $y = 1893,23$ wg Lewickiego
1060,35 1893,90 wg katalogu.

Ratusz $x = 707,69$, $y = 573,13$ wg Lewickiego
707,70 573,04 wg katalogu.

Niektóre punkty lwowskiej sieci katastralnej weszły do łańcuchów austriackich I rzędu i mają określone współrzędne geograficzne na elipsoidzie Bessela. „Die Ergebnisse der Triangulierung” zawierają współrzędne 46 punktów, położonych w Polsce, obok których umieszczona jest notatka, czy dany punkt ma związek z siecią katastralną („der Punkt ist genau über dem aufgefundenen Catastersteine”, lub „der alte Catasterpunkt, Stein mit Bezeichnung K. V. wurde vorgefunden”).

Punkty, należące jednocześnie do obydwóch, niezależnych od siebie systemów triangulacyjnych pozwolą wyjaśnić pewną osobliwość austriackiego katastru, a mianowicie, jeżeli przeliczymy współrzędne punktów, wspólnych obydwom systemom, na współrzędne Soldnera, to stwierdzimy niezgodności, które nie tłumaczą się ani przesunięciem, ani skróceniem wzajemnym układów.

Spostrzegamy natomiast, że odległość między dwoma jakiegokolwiek punktami, obliczona z danych układu katastralnego jest zawsze większa od odległości między temiż punktami w układzie I rzędu.

Fakt ten nasuwa przypuszczenie, że istnieje jakaś niezgodność w miarach długości, używanych do pomiarów baz w dawnej Austrii. Boki trójkątów w triangulacji I rzędu „die Ergebnisse” podają w metrach. Poprzedni przykład niniejszej pracy wskazuje, że różnice w odległościach austriackich pomiarów, a uzgodnionych niemiecko-rosyjskich nie przekraczają $\frac{1}{100\,000}$, z czego wnioskujemy, że bazy austriackiej triangulacji I rzędu mierzono miarą dobrą z dostatecznie wysoką dokładnością.

Współrzędne katastralne w oryginale są skatalogowane w klaftach wiedeńskich i bazy tej triangulacji prawdopodobnie mierzono również w klaftach. Przy tej sposobności

warto zaznaczyć, że kierunek dodatni osi x-ów w austriackim katastrze biegł od zera na południe a kierunek osi y-ów od zera na zachód.

Katalog polski z 1932 r. podaje współrzędne katastralne w metrach, w układzie prawoskrętnym normalnym, t. j. z dodatnim kierunkiem osi x-ów na północ. Klaftry w tym katalogu zamienione są na metry, a stosunek klafta do metra, wzięty z austriackiej instrukcji katastralnej z 1887 r. jest

$$1 \text{ klafter} = 1,896484 \text{ metra}$$

Liczba ta zapewne pochodzi z austriackiego wydawnictwa urzędowego „Gesetze und Verordnungen über die neue Mass- und Gewichts-Ordnung (Metrisches System), Wien 1871” na stronie 4 którego jest¹⁾

$$1 \text{ metr} = 0,5272916 \text{ klaftów wiedeńskich}$$

$$1 \text{ metr} = 3 \text{ stopy, } 1 \text{ cal, } 11,580 \text{ linii}$$

$$1 \text{ klafter} = 1,896484 \text{ metra.}$$

U Schödl’a na str. 87 czytamy następującą notatkę o pochodzeniu stosunku klafter wiedeński — metr:

„Um den Rechnungen der im vorliegenden Werke veröffentlichten Tabellen eine sichere Grundlage zu geben, wurden genaue Voruntersuchungen zu dem Zwecke eingeleitet, um das richtige Verhältniss, welches zwischen der metrischen Einheit und jener der österreichischen Klafter besteht, zu ermitteln, und man fand sich bestimmt, jene Ziffern dieses Verhältnisses als die richtigen anzunehmen, welche die Wiener k. k. Akademie der Wissenschaften am 13 Juni 1861 durch die „Wiener Zeitung” veröffentlichten liess.

Der Inhalt dieser Veröffentlichung folgt nachstehend hier:

„Herr Director Littrow überreicht eine Abhandlung des ausländischen Ehrenmitgliedes der Akademie, Hrn. Struve, über das Verhältniss der wiener Maasse zu mehreren auf der kaiserlich russischen Hauptsternwarte zu Pulkowa befindlichen Maasseinheiten.

Diese Abhandlung enthält das Detail jener vorläufigen Vergleichen, deren Ergebniss bei der in den Jahren 1847—1851 ausgeführten Verbindung der österreichischen und russischen Landesvermessung in Rechnung gezogen wurde. Staatsrath Struve ermächtigt zugleich den Vortragenden, die definitiven Resultate jener Bestimmungen bekannt zu machen, wonach sich: 1 Wiener Klafter = 1.8964838 Meter, somit 0,081 Pariser Linien von den bisherigen Annahmen verschieden ergab, welche über alle Erwartung grosse Abweichung durch die Struve’sche Vergleichung ihre Erklärung in der Unrichtigkeit des französischen Etalons fand, dessen man sich zu Wien bei früheren Bestimmungen des fraglichen Verhältnisses hauptsächlich bedient hatte. Der Vortragende weist nach, dass die ausserordentlich schöne Uebereinstimmung in der den beiden Landesvermessungen gemeinschaftlichen Dreieck-

¹⁾ Według „Handbuch ausführlicher metrischer Tabellen, welches sowohl die Umrechnung der Zahlenwerte der metrischen Längen-, Flächen- und Körper-Maasse, sowie der Gewichte und Münzen, auf die österreichischen Maasse u.s.w. von Franz Schödl, ingénieur der Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien 1870”. Ustawę tę cytuję także Jordan (Handbuch d. Verm. T. 2, str. [47] i dodaje, że według „Die astron.-geod. Arbeiten des k. k. mil.-geogr. Institutes in Wien, I Band 1871” do prac trygonometrycznych przyjęto 1 kl. = 1.896 483 840 m.

Seiten, welche sich schon mit dem provisorischen Struve'schen Verhältnisse herausgestellt hatte, sich auch bei den neuen Zahlen behauptet und so, nicht nur für die Genauigkeit der geodätischen Operationen, sondern auch für die Richtigkeit obigen Verhältnisses der dabei gebrauchten Maasseinheiten, höchst rühmliches Zeugnis gibt. Eine Diskordanz der beiderseitigen Landesvermessungen von einer Toise ist erst bei der Länge von etwa fünfzig geographischen Meilen zu erwarten".

Dalej czytamy w przypisku, że

„Ungeachtet der Bekanntmachung dieser Correction hat sich bis auf den heutigen Tag in den meisten mathematischen und anderen Werken das Verhältniss $1^0 = 1,896\,614$ m behauptet, welches jedoch bei solchen Kalkulationen, die einigermaßen strenge Bestimmungen fordern, nicht mehr in Anwendung kommen sollte".

Mamy więc dwie liczby na zamianę klafta wiedeńskiego na metry: jedna określona i sprawdzona przez porównanie boków triangulacji austriackiej I rzędu i rosyjskiej przez Struve'go w Pułkowie, w 1861 roku i druga, starszej daty, o której poza Schödlem znajdujemy informacje w wartościowych polskich tablicach Juljusza Kolberga¹⁾ z 1838 roku. W tych tablicach podane są następujące stosunki:

1 m = 443,295 936 linii paryskich starych
 1 m = 39,370 79 cali angielskich
 1 m = 1,093 6332 yarda ang.

1 sażeń n. polski = 0,911 097 klafta wiedeńskiego
 1 " " = 1,889 798 yarda ang.
 1 sażeń rosyjski²⁾ = 2,133 561 455 metra
 1 " " = 1,124 931 klafta wiedeńskiego
 1 " " = 2,333 333 yarda ang.

Stąd łatwo wyprowadzić, że

$$\underline{1 \text{ klafter wiedeński} = 1,896\,615 \text{ metra}}$$

Według Kolberga „zasadą miar i wag przez Rząd w Austrii zaprowadzonych, są wzory dokładnie sporządzone za panowania Maryi Teresy w r. 1756, zachowane w Magistracie wiedeńskim. Opisanie tych wzorów znajduje się w tomie II dzieła: *Neueste Münz-Mass- und Gewichtskunde von J. Jaeckel, Wien 1828*".

Istnieją dwie kopje klafta wiedeńskiego: medjolańska i pułkowska, porównane przez A. R. Clarke'a³⁾ w Southamp-

¹⁾ Porównanie miar i wag teraźniejszych i dawniejszych w Królestwie Polskiem używanych z zagranicznymi, przez Juljusza Kołobrzeg-Kolberga, doktora filozofii itd. Wydanie wtóre. Przerobił i powiększył Wilhelm Kolberg. Warszawa 1838.

²⁾ T. zw. sażeń konwencjonalny (usłowny), o którym szczegółowo w czasopiśmie „Gieodezist” Nr. 7 z 1927 roku.

³⁾ A. R. Clarke. „Comparisons of the Standards of Length.” London 1866. Cyt. na str. 196 „Geodezji” Witkowskiego, Petersburg 1898.

tonie w 1865 roku z angielskim yardem normalnym. Kopja medjolańska ma podział na górnej powierzchni pręta ($K_{1,3}$) i na dolnej ($K_{1,II}$). Długość $K_{1,3}$ wynosi 2,074 01462 yarda, $K_{1,II}$ — 2,074 02990 yarda i kopji pułkowskiej 2,074 03658 yarda.

Przyjmując 1 metr = 1,093 62311 yarda otrzymamy:

$$\begin{aligned} K_{1,3} & \dots\dots = 1,896\,462 \text{ m} \\ K_{1,II} & \dots\dots = 1,896\,477 \text{ m} \\ K_{\text{pułkowska}} & \dots\dots = 1,896\,482 \text{ m} \end{aligned}$$

Weźmy z „die Ergebnisse der Triangulierungen” parę punktów I rzędu, należących zarazem do sieci katastralnej¹⁾ i obliczmy odległości między punktami w obydwóch układach. Niech będą dwa punkty:

1. Ożomla $\varphi = 49^{\circ} 51' 01'' .1152$ $\lambda = 41^{\circ} 04' 56'' .6021$
 $x = + 197,527^{\circ}$ $y = - 23\,728,253^{\circ}$
2. Wysoki Obicz $\varphi = 48^{\circ} 24' 58'' .4864$ $\lambda = 43^{\circ} 06' 24'' .3760$
 $x = - 83\,509,847^{\circ}$ $y = + 54\,569,654^{\circ}$

Odległość między punktami 1—2, liczona po najkrótszej linii jest:

z współrzędnych geograficznych 217 352,95 m
 „ prostokątnych 114 618,89⁰

Iloraz $\frac{217\,352,95}{114\,618,89} = 1,896\,310$ jest stosunkiem klafta do metra. Ra-

chunek na współrzędnych innych punktów daje zbliżone rezultaty i tą drogą dochodzimy do wniosku, że bazy triangulacji katastralnej w b. Galicji mierzono klaftrem, który tak się ma do metra, jak średnia tych rezultatów, mianowicie 1:1,896 315. Dzieląc 1,896 315 przez 1,896 484 otrzymamy współczynnik, przez który należy pomnożyć współrzędne x, y z katalogu wydania 1932 r., aby otrzymać zgodność boków trójkątów triangulacji katastralnej z bokami I rzędu. Współczynnik ten będzie:

$$(54) \quad \underline{k = 0,999911.}$$

Na przewiększoną skalę sieci katastralnej do pewnego stopnia mógł wpłynąć pomiar baz bez redukcji do poziomu morza. Przypuśćmy, że bazy mierzono na wysokości + 300 m; dla krzywizny o promieniu $r = 6\,382\,000$ m i odpowiednio $r_1 = 6\,382\,300$ m redukcja $\frac{r}{r_1} = 0,999\,529$, czyli że klafter katastralny w tym wypadku powinien równać się $1,896\,315 : 0,999\,529 =$

¹⁾ Archiwum W. I. G. posiada odpisy austriackich współrzędnych, w klaftach i w metrach, sporządzone w Wiedniu w 1908 r. przez Kreutzera, uzupełnione w 1922—23 r. przez Dolnickiego i sprawdzone przez Herfortha. Przeliczenia na metry wykonano do 1891 roku, o czym w „Mittheilungen des k. k. m.-geogr. Institutes, B. XI., 1891. Stosunek klafta do metra przyjęto tak jak w Instrukcji katastralnej z 1887 r., t. j. 1,896 484.

= 1,896 404 metra. Widzimy, że tego rodzaju założenie nie daje jeszcze dostatecznego rozwiązania sprawy stosunku starego kłaftra do metra ¹⁾.

Wracając do uzgodnienia austriackiej sieci katastralnej z triangulacją I rzędu pozostaje zbadać skręcenie i przesunięcie wzajemne obydwóch układów. Po pomnożeniu współrzędnych katastralnych (wziętych z katalogu w metrach) przez wyprowadzony wyżej współczynnik $k = 0,999\,911$ i po dodaniu poprawek (51) stwierdzamy różnice w kątach kierunkowych dowolnych prostych, wziętych w obydwóch układach, o zbliżonej wielkości w każdym wypadku. Wyrównanie wyników dało następujący kąt skręcenia układu katastralnego w stosunku do układu I rzędu:

$$(55) \quad \begin{aligned} \gamma &= +41'',32 \\ \sin \gamma &= +0,000\,200 \\ \cos \gamma &= +1 \end{aligned}$$

Elementy przesunięcia początku układu znamy już z pracy A. Lewickiego i przyjmujemy je za miarodajne:

$$(56) \quad \begin{aligned} a &= -1,25 \text{ m} \\ b &= -5,13 \text{ m} \end{aligned}$$

mimo iż nieco większe liczby ($a = -4,2$, $b = -8,3$) dałyby lepszą dla całości zgodność.

Mamy zatem następujące czynniki do uzgodnienia austriackich współrzędnych katastralnych z siecią I rzędu:

1. Współczynnik zmniejszenia k
2. Poprawkę rzutu $(+xy^2 \frac{1}{3r^2})$, $(-x^2y \frac{1}{6r^2})$

¹⁾ Interesujący wynik da zestawienie austriackiej elipsoidy z 1810 r. z elipsoidą Delambre'a (1806) i Bessela (1841):

Długość ćwiartki południka elipsoidy austriackiej = 5 273 384,9 kl
 Delambre'a = 10 000 000,0 m
 Bessela = 10 000 855,8 m

$\frac{10\,000\,000,0}{5\,273\,384,9} = 1,896\,315$, czyli stosunkowi kłaftra, użytego do pomiaru baz w katastrze, do metra

$\frac{10\,000\,855,8}{5\,273\,384,9} = 1,896\,477$, czyli stosunkowi kłaftra medjolańskiego $K_{I,II}$ do metra, ustalonemu przez Clarke'a.

Może to być przypadek, lub też jednostki długości, używane w austriackich triangulacjach sporządzone były według zgóry określonego stosunku do metra, względnie do tuaza, przyczem za podstawę tego stosunku brano długość ćwiartki południka stosowanej w danym czasie elipsoidy do liczby stałej. Druga ewentualność jest mało prawdopodobna; zestawienie powyższe liczb notuję jako szczególnego rodzaju przypadek.

Zauważmy nadto, że ustalony w niniejszej pracy stosunek pierwotnego kłaftra (1,896 315) do metra różni się w jednej cyfrze od stosunku oficjalnego (1,896 615), który przetrwał w Austrii aż do roku 1861.

3. Kąt skręcenia układu γ
4. Współrzędne początku układu a, b .

Po podstawieniu wartości liczbowych, układamy dla przekształcenia współrzędnych katalogowych x, y na soldnerowskie \bar{x}, \bar{y} , zgodne z siecią I rzędu, następujące wzory:

$$(57) \quad \begin{aligned} x &= \bar{x} - 0,000\,089 \bar{x} + \bar{x} \bar{y}^2 [5.91\,311] + 0,0002 \bar{y} - 1,26 \\ y &= \bar{y} - 0,000\,089 \bar{y} - \bar{y} \bar{x}^2 [5.61\,208] - 0,0002 \bar{x} - 5,13 \end{aligned}$$

gdzie liczby w klamrach oznaczają logarytmy liczb, a współrzędne i poprawki a, b dane są w metrach.

Różnice $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$, obliczone w odstępach 50 kilometrowych dajemy w poniższej tabelce; może ona służyć do znalezienia sumarycznych poprawek drogą interpolacji.

(58) Poprawki \bar{X} -ów w metrach.

\bar{y}/\bar{x} km	-300	-250	-200	-150	-100	-50	0	+50	+100	+150	\bar{y}/\bar{x}
+100	+ 3,5	- 9,0	-17,4	-21,7	-22,0	-18,1	-10,2	+ 1,9	+18,0	+38,3	+100
+ 50	- 28,9	- 30,1	-29,3	-26,5	-21,6	-14,7	- 5,7	+ 5,3	+18,4	+33,5	+ 50
- 0	- 61,3	- 51,3	-41,3	-31,3	-21,3	-11,3	- 1,3	+ 8,7	+18,7	+28,7	0
- 50	- 93,4	- 72,4	-53,2	-36,0	-20,9	- 7,8	+ 3,2	+12,2	+19,1	+24,0	- 50
-100	-126,0	- 93,5	-65,1	-40,8	-20,6	- 4,4	+ 7,6	+15,6	+19,5	+19,2	-100
-150	-158,2	-114,7	-76,8	-45,3	-20,0	- 0,8	+12,3	+19,2	+20,0	+14,7	-150
-200	-190,8	-136,0	-89,0	-50,3	-19,8	+ 2,4	+16,5	+22,4	+20,2	+ 9,7	-200

(58a) Poprawki \bar{Y} -ów w metrach.

\bar{y}/\bar{x} km	-300	-250	-200	-150	-100	- 50	0	+ 50	+100	+150	\bar{y}/\bar{x}
+100	+ 13,8	+ 7,4	+ 0,9	- 5,4	-12,1	-18,6	-25,1	-31,6	-38,1	-44,8	+100
+ 50	+ 14,6	+ 9,7	+ 4,8	- 0,0	- 5,2	-10,2	-15,1	-20,1	-25,1	-30,2	+ 50
0	+ 21,6	+17,1	+12,7	+ 8,3	+ 3,8	- 0,7	- 5,1	- 9,6	-14,1	-18,7	0
- 50	+ 34,6	+29,7	+24,7	+19,9	+14,8	+ 9,8	+ 4,9	- 0,1	- 5,0	-10,2	- 50
-100	+ 53,8	+47,4	+40,9	+34,6	+27,9	+21,4	+14,9	+ 8,4	+ 1,9	- 4,8	-100
-150	+ 79,2	+70,1	+61,1	+52,2	+44,0	+33,9	+24,9	+15,8	+ 5,8	- 2,5	-150
-200	+110,7	+98,1	+85,4	+73,0	+61,1	+47,5	+34,9	+22,2	+ 8,6	- 3,2	-200

Obliczmy współrzędne geograficzne kilkunastu punktów sieci katastralnej, dla których mamy dane z triangulacji I-go rzędu. Współrzędne \bar{x} , \bar{y} wzięte z katalogu najpierw przekształcimy na soldnerowskie według formuł (57), potem te ostatnie zamienimy na φ, λ i porównamy z współrzędnymi wziętymi z „die Ergebnisse”.

Przekształcenie \bar{x}, \bar{y} katastralnych na soldnerowskie x, y .

L. p.	Nazwa punktu	\bar{x} \bar{y}	$\begin{matrix} \times \\ - \\ 0,000089 \end{matrix}$ $\begin{matrix} y \\ + \\ 0,000089 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ - \\ [5,91311] \times y^2 \\ [5,61208] \times^2 y \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ - \\ 0,0002 \ y \\ 0,0002 \ x \end{matrix}$	a b	x y
1	Hrobacza Łąka	+ 8 639,6 - 350 517,9	- 0,8 + 31,2	+ 8,7 + 0,1	- 70,1 - 1,7	- 1,3 - 5,1	+ 8 576,1 - 350 493,4
2	Wysoka	+ 17 064,0 - 320 068,2	- 1,5 + 28,5	+ 14,3 + 0,4	- 64,0 - 3,4	- 1,3 - 5,1	+ 17 011,5 - 320 047,8
3	Kawki	+ 21 358,9 - 276 454,8	- 1,9 + 24,6	+ 13,4 + 0,5	- 55,3 - 4,3	- 1,3 - 5,1	+ 21 313,8 - 276 439,1
4	Mogilnica	- 14 568,9 - 271 588,0	+ 1,3 + 24,2	- 8,8 + 0,2	- 54,3 + 2,9	- 1,3 - 5,1	- 14 632,0 - 271 565,8
5	Jaworze	- 25 626,0 - 226 070,8	+ 2,3 + 20,1	- 10,7 + 0,6	- 45,2 + 5,1	- 1,3 - 5,1	- 25 680,9 - 226 050,1
6	Kamieniec	+ 16 077,0 - 184 854,9	- 1,4 + 16,4	+ 4,5 + 0,2	- 37,0 - 3,2	- 1,3 - 5,1	+ 16 041,8 - 184 846,6
7	Gwoźnica	+ 951,9 - 145 260,4	- 0,1 + 12,9	+ 0,2 + 0,0	- 29,0 - 0,2	- 1,3 - 5,1	+ 921,7 - 145 252,8
8	Husów	+ 16 882,8 - 128 177,0	- 1,5 + 11,4	+ 2,3 + 0,2	- 25,6 - 3,4	- 1,3 - 5,1	+ 16 856,7 - 128 173,9
9	Kamienna Ławoda	- 43 266,4 - 106 664,8	+ 3,8 + 9,5	- 4,0 + 0,8	- 21,3 + 8,6	- 1,3 - 5,1	- 43 289,2 - 106 651,0
10	Buczki	- 970,9 - 68 594,1	+ 0,1 + 6,1	- 0,0 + 0,0	- 13,7 + 0,2	- 1,3 - 5,1	- 985,8 - 68 592,9
11	Ozomla	+ 374,6 - 45 000,2	- 0,0 + 4,0	+ 0,0 + 0,0	- 9,0 - 0,0	- 1,3 - 5,1	+ 364,3 - 45 001,3
12	Fedorów Garb.	+ 6 197,1 - 24 314,7	- 0,6 + 2,2	+ 0,0 + 0,0	- 4,9 - 1,2	- 1,3 - 5,1	+ 6 190,3 - 24 318,8
13	Einsiedel	- 19 478,7 - 15 933,7	+ 1,7 + 1,4	- 0,0 + 0,0	- 3,2 + 3,9	- 1,3 - 5,1	- 19 481,5 - 15 933,5

L. p.	Nazwa punktu	\bar{x} \bar{y}	$\begin{matrix} \times \\ - \\ 0,000089 \end{matrix}$ $\begin{matrix} y \\ + \\ 0,000089 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ - \\ [5,91311] \times y^2 \\ [5,61208] \times^2 y \end{matrix}$	$\begin{matrix} + \\ - \\ 0,0002 \ y \\ 0,0002 \ x \end{matrix}$	a b	x y
14	Wysoki Kamień	+ 10 196,1 + 81 110,3	- 0,9 - 7,2	+ 0,6 - 0,0	+ 16,2 - 2,0	- 1,3 - 5,1	+ 10 210,7 + 81 096,0
15	Petlikowce	- 78 266,1 + 98 694,3	+ 7,0 - 8,8	- 6,2 - 2,5	+ 19,7 + 15,6	- 1,3 - 5,1	- 78 246,9 + 98 693,5
16	Wysoki Obicz	- 158 375,1 + 103 490,5	+ 14,1 - 9,2	- 13,9 - 10,6	+ 20,7 + 31,7	- 1,3 - 5,1	- 158 355,5 + 103 497,3

Współrzędne geograficzne (dane I rz. w pierwszym wierszu).

1. Hrobacza Łąka	$\varphi = 49^{\circ} 49' 23'',79$ <u>23,49</u> + 0'',30	$\lambda = 36^{\circ} 50' 0'',23$ <u>0,32</u> - 0'',09
2. Wysoka	$\varphi = 49^{\circ} 54' 57'',24$ <u>57,03</u> + 0'',21	$\lambda = 37^{\circ} 14' 55'',93$ <u>55,86</u> + 0'',07
3. Kawki	$\varphi = 49^{\circ} 58' 34'',23$ <u>34,35</u> - 0'',12	$\lambda = 37^{\circ} 51' 08'',05$ <u>07,99</u> + 0'',06
4. Mogilnica	$\varphi = 49^{\circ} 39' 20'',94$ <u>21,37</u> - 0'',43	$\lambda = 37^{\circ} 56' 42'',54$ <u>42,74</u> - 0'',20
5. Jaworze	$\varphi = 49^{\circ} 34' 31'',23$ <u>31,83</u> - 0'',60	$\lambda = 38^{\circ} 34' 53'',0$ <u>53,25</u> - 0'',21
6. Kamieniec	$\varphi = 49^{\circ} 57' 51'',18$ <u>51,44</u> - 0'',26	$\lambda = 39^{\circ} 07' 51'',52$ <u>51,92</u> - 0'',40
7. Gwoźnica	$\varphi = 49^{\circ} 50' 21'',49$ <u>21,73</u> - 0'',24	$\lambda = 39^{\circ} 41' 18'',17$ <u>18,53</u> - 0'',36
8. Husów	$\varphi = 49^{\circ} 59' 11'',16$ <u>11,31</u> - 0'',15	$\lambda = 39^{\circ} 55' 13'',56$ <u>14,09</u> - 0'',53

9. Kamienna Ławoda	$\varphi = 49^{\circ} 27' 0'',02$ <u>0,23</u> - 0'',21	$\lambda = 40^{\circ} 14' 13'',33$ <u>13,56</u> - 0'',22
10. Buczki	$\varphi = 49^{\circ} 50' 09'',36$ <u>09,21</u> + 0'',15	$\lambda = 40^{\circ} 45' 16'',24$ <u>16,53</u> - 0'',29
11. Ożomla	$\varphi = 49^{\circ} 51' 01'',12$ <u>0,95</u> + 0'',17	$\lambda = 41^{\circ} 04' 56'',60$ <u>56,64</u> - 0'',04
12. Fedorów Garb	$\varphi = 49^{\circ} 54' 14'',04$ <u>13,84</u> + 0'',20	$\lambda = 41^{\circ} 22' 10'',89$ <u>10,74</u> + 0'',15
13. Einsiedel	$\varphi = 49^{\circ} 40' 23'',89$ <u>23,86</u> + 0'',03	$\lambda = 41^{\circ} 29' 14'',82$ <u>14,79</u> + 0'',03
14. Wysoki Kamień	$\varphi = 49^{\circ} 56' 05'',83$ <u>05,95</u> - 0'',12	$\lambda = 42^{\circ} 50' 16'',45$ <u>16,74</u> - 0'',29
15. Petlikowce	$\varphi = 49^{\circ} 08' 13'',93$ <u>13,70</u> + 0'',23	$\lambda = 43^{\circ} 03' 39'',40$ <u>39,45</u> - 0'',05
16. Wysoki Obicz	$\varphi = 48^{\circ} 24' 58'',49$ <u>58,02</u> + 0'',47	$\lambda = 43^{\circ} 06' 24'',38$ <u>23,88</u> + 0'',50

W katalogu z 1932 r. znajdujemy współrzędne kilku punktów (kościółów), które należą do austriackiej sieci katastralnej i zarazem do rosyjskiego układu na elipsoidzie wyrównywującej. Weźmy jeden z nich, np. Opatowiec (str. 496) i sprowadźmy do układu jednolitego.

Współrzędne ros.: $\varphi = 50^{\circ} 14' 32'',36$ $\lambda = -9^{\circ} 35' 58'',83$ od Pułk.

„ austr.: $\bar{x} = +48\,944,39$ m $\bar{y} = -236\,368,34$ m

Współrzędne rosyjskie po przeliczeniu na prostokątne jednolitego układu dadzą:

$$x = -194\,737,9 \text{ m} \quad y = -90\,734,6 \text{ m}$$

Współrzędne austriackie po wprowadzeniu poprawek z tabel (58) zamienia się na soldnerowskie w układzie lwowskim:

$$x = +48\,913,9 \text{ m} \quad y = -236\,359,9 \text{ m}$$

Te ostatnie przeliczamy wzorami (52) na geograficzne austriackie w układzie I-go rzędu.

$ax = +1583'',356$	$hy = -11832'',494$
$bx^2 = -0'',060$	$ixy = -107'',368$
$cy^2 = -167'',737$	$kxy^2 = -1'',322$
$dy^2x = -2'',595$	$ly^3 = +7'',583$
$ex^3 = +0'',000$	$my^3x = +0'',304$
$fx^2y^2 = -0'',024$	$nx^3y = -0'',014$
$gy^4 = +0'',100$	
$\Delta\varphi = +1413'',040 = +23'33'',040$	$\Delta\lambda = -11933'',311 = -3^{\circ}18'53'',311$
$\varphi_0 = +49^{\circ}50'55'',243$	$\lambda_0 = +41^{\circ}42'29'',568$
$\varphi = 50^{\circ}14'28'',283$	$\lambda = 38^{\circ}23'36'',257$

Następnie, drogą interpolacji znajdujemy x, y jednolitego układu, postępując jak w przykładzie 5. Wynik będzie:

$$x = -194\,736,9 \text{ m} \quad y = -90\,733,7 \text{ m}$$

Podobne obliczenie dla 6 punktów wspólnych dla austriackiego katastru i rosyjskiej sieci dały następujące wyniki (w pierwszym wierszu x, y z φ, λ rosyjskich).

1. Przemyków, kościół	$x = -200\,662,6$ m <u>- 200 663,7</u> m + 1,1 m	$y = -96\,302,6$ m <u>- 96 310,9</u> m + 8,3 m
2. Opatowiec, kościół	$x = -194\,737,9$ m <u>- 194 736,9</u> m - 1,0 m	$y = -90\,734,6$ m <u>- 90 733,7</u> m - 0,9 m
3. Bolesław, kościół	$x = -191\,156,0$ m <u>- 191 152,5</u> m - 3,5 m	$y = -78\,340,2$ m <u>- 78 343,6</u> m + 3,4 m
4. Sandomierz, kościół Bernardynów	$x = -146\,377,3$ m <u>- 146 380,4</u> m + 3,1 m	$y = -17\,665,2$ m <u>- 17 664,4</u> m - 0,8 m
5. Krzeszów, kościół	$x = -176\,993,3$ m <u>- 176 993,6</u> m + 0,3 m	$y = +24\,887,7$ m <u>+ 24 885,3</u> m - 2,4 m
6. Potok, kościół	$x = -179\,285,6$ m <u>- 179 288,4</u> m + 2,8 m	$y = +39\,964,9$ m <u>+ 39 964,5</u> m - 0,4 m

7. Układy lokalne.

Istniejące w Polsce lokalne układy triangulacyjne były do-
wiązywane do jednej z większych sieci państwowych, wobec
czego można je traktować jako fragmenty tych sieci i do włą-
czenia w układ jednolity posługiwać się znanymi z przykładów
1—6 sposobami.

Zazwyczaj położenie punktów lokalnych triangulacji dane
jest w współrzędnych prostokątnych odwzorowania Gaussa-Krü-
gera lub Soldnera (dla niewielkich obszarów, np. w promieniu
20 km rezultaty tych odwzorowań nie różnią się), z początkiem
układu na jednym z punktów starej, państwowej sieci. Do prze-
liczenia lokalnych \bar{x} , \bar{y} na geograficzne możemy zastosować for-
muły:¹⁾

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \frac{\bar{x}}{M} \cdot \rho \\ (59) \quad \varphi &= \varphi_1 - \frac{V_1^2 y^2}{2 N_1^2} \cdot \rho \operatorname{tang} \varphi_1 \\ \Delta \lambda &= \frac{\bar{y} \rho}{N_1 \cos \varphi_1} - \frac{\bar{y}^3 \rho \operatorname{tang}^2 \varphi_1}{3 N_1^3 \cos \varphi_1} \end{aligned}$$

gdzie M_1 , N_1 oznaczają promienie krzywizny elipsoidy na szeroko-
kości φ_1 , $V_1^2 = \frac{N_1^2}{M_1}$. Przy obliczaniu M , N należy wziąć pod
uwagę rodzaj elipsoidy, do której jest odniesiona dana sieć
państwowa.

Sieci lokalne, niepołączone z którąkolwiek triangulacją pań-
stwową, a które zechcemy mieć w układzie jednolitym, należy
dowiązać do pary punktów sieci państwowej, aby otrzymać φ , λ
początku i azymut osi układu.

W wypadku, gdy obszar lokalnej sieci mieści się w kole
o promieniu do 20 km, wówczas można uniknąć obliczenia
współrzędnych geograficznych i otrzymać współrzędne x , y ukła-
du jednolitego bez pośrednio, przez skrócenie i przesunięcie
osi układu lokalnego, uwzględniając przy tem skalę poszczególną μ
jednolitego odwzorowania dla środka sieci lokalnej.

Formuła na określenie skali poszczególniej w odwzorowaniu
quasistereograficznym W. I. G. jest następująca:

$$(60) \quad \mu = 0,9995 + [15.788\ 171] (x^2 + y^2)$$

gdzie liczba w klamrach oznacza logarytm współczynnika sta-
łego $\frac{1}{3,998 R_0^2}$, a x , y są to współrzędne środka sieci lokalnej
w układzie jednolitym.

Zbadajmy przykład (najmniej korzystny, ze względu na
szybką zmienność skali poszczególniej) układu lokalnego na pół-

¹⁾ Jordan, Tom 3, str. 321.

nocy, z początkiem w punkcie trygonometrycznym Brzeźniaki.
Siecią państwową, do której jest dowiązany ten układ, jest ro-
syjska sieć triangulacyjna na elipsoidzie Bessela w układzie dor-
packim.

$$\begin{aligned} \text{Brzeźniaki} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 54^\circ 38' 06'',292 \\ \bar{x} = 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -4^\circ 53' 53'',230 \text{ od Pułkowa} \\ \bar{y} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Chorażyszki} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 54^\circ 51' 45'',288 \\ \bar{x} = +25\ 340,32 \text{ m} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -4^\circ 41' 53'',366 \\ \bar{y} = +12\ 838,53 \text{ m} \end{array} \right. \\ \text{Mieszkańce} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 54^\circ 55' 53'',855 \\ \bar{x} = +33\ 013,24 \text{ m} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -5^\circ 00' 37'',538 \\ \bar{y} = -7\ 198,37 \text{ m} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Środek trójkąta, utworzonego przez te trzy punkty ma przy-
bliżone współrzędne geograficzne

$$\begin{aligned} \varphi &= 54^\circ 49' \\ \lambda &= -4^\circ 52' \text{ od Pułkowa albo } +3^\circ 22' \text{ od } \lambda_0 \end{aligned}$$

którym odpowiadają współrzędne jednolitego układu

$$\begin{aligned} x &= +318,0 \text{ km} \\ y &= +225,5 \text{ km} \end{aligned}$$

Podstawiając x , y do wzoru (60) mamy

$$\mu = 0,9995 + [15.788\ 171] (318,0^2 + 225,5^2) = 1,000\ 429$$

Mnożąc przez μ współrzędne lokalne \bar{x} , \bar{y} , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Brzeźniaki:} & \quad \mu \bar{x} = 0 & \quad \mu \bar{y} = 0 \\ \text{Chorażyszki:} & \quad \mu \bar{x} = +25\ 351,19 & \quad \mu \bar{y} = +12\ 844,04 \\ \text{Mieszkańce:} & \quad \mu \bar{x} = +33\ 027,40 & \quad \mu \bar{y} = -7\ 201,46 \end{aligned}$$

Kąt skrócenia układu lokalnego, którego oś x -ów jest po-
łudnikiem w punkcie \bar{x}_0 , \bar{y}_0 , będzie się równać konwergencji po-
łudnikowej (Zb) dla początku układu lokalnego. Wartość na
(Zb) znajdziemy z wzoru:¹⁾

$$(61) \quad \operatorname{tg} (Zb) = \frac{\sin \varphi_0 + \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cdot \cos \lambda + \cos \lambda'}$$

co dla punktu Brzeźniaki (\bar{x}_0 , \bar{y}_0) daje

$$(Zb) = +2^\circ 45' 17''$$

¹⁾ Odwzorowanie, część I, str. XXII.

a że układ dorpcki, do którego Brzeźniaki wchodzą, jest skrecony w stosunku do jednolitego¹⁾ o kąt $\gamma''' = -8''$, więc kąt skreconia γ rozpatrywanego układu lokalnego będzie sumą

$$\gamma = +2^{\circ} 45' 17'' - 8'' = +2^{\circ} 45' 09''$$

$$\sin \gamma = 0,048022, \quad \cos \gamma = 0,998847$$

Znacząc współrzędne układu lokalnego przez \bar{x}, \bar{y} , układu zaś jednolitego przez x, y (początek układu lokalnego: x_0, y_0), napiszemy ogólny wzór przekształcający:

$$(62) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \mu \bar{x} \cos \gamma + \mu \bar{y} \sin \gamma \\ y &= y_0 + \mu \bar{y} \cos \gamma - \mu \bar{x} \sin \gamma \end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzoru wartości liczbowych z przykładu otrzymamy:

Brzeźniaki: $x_0 = +298\,524,5 \text{ m} \quad y_0 = +221\,584,5 \text{ m}$

Chorażyszki $\begin{cases} x = +298\,524,5 + 25\,321,9 + 616,8 = +324\,463,2 \text{ m} \\ y = +221\,584,5 + 12\,829,2 - 1\,217,4 = +233\,196,3 \text{ m} \end{cases}$

Mieszkańce $\begin{cases} x = +298\,524,5 + 32\,989,3 - 345,8 = +331\,168,0 \text{ m} \\ y = +221\,584,5 - 7\,193,2 - 1\,586,1 = +212\,805,2 \text{ m} \end{cases}$

Porównajmy otrzymane w ten sposób rezultaty z x, y obliczonymi z współrzędnych geograficznych (w pierwszym wierszu):

Chorażyszki	$x = +324\,463,1$	$y = +233\,196,3$
	$+324\,463,2$	$+233\,196,3$
	- 0,1	0,0
Mieszkańce	$x = +332\,166,3$	$y = +212\,804,0$
	$+331\,168,0$	$+212\,805,2$
	- 1,7	- 1,2

Wyniki przekształcenia współrzędnych lokalnych układów, położonych bliżej środka jednolitego odwzorowania ($\varphi_0 = 52^{\circ}$, $\lambda_0 = +22^{\circ}$ od Greenwich) będą niewątpliwie zgodniejsze, lecz nawet tak duże różnice, jak w tym przykładzie, dopuszczają stosowanie bezpośredniego przejścia z x, y na \bar{x}, \bar{y} w wielu wypadkach, nie wymagających dokładności powyżej 1 metra. Za stosowaniem tego sposobu przemawia nade wszystko prostota formuł rachunkowych.

¹⁾ Przykład 3, (37).

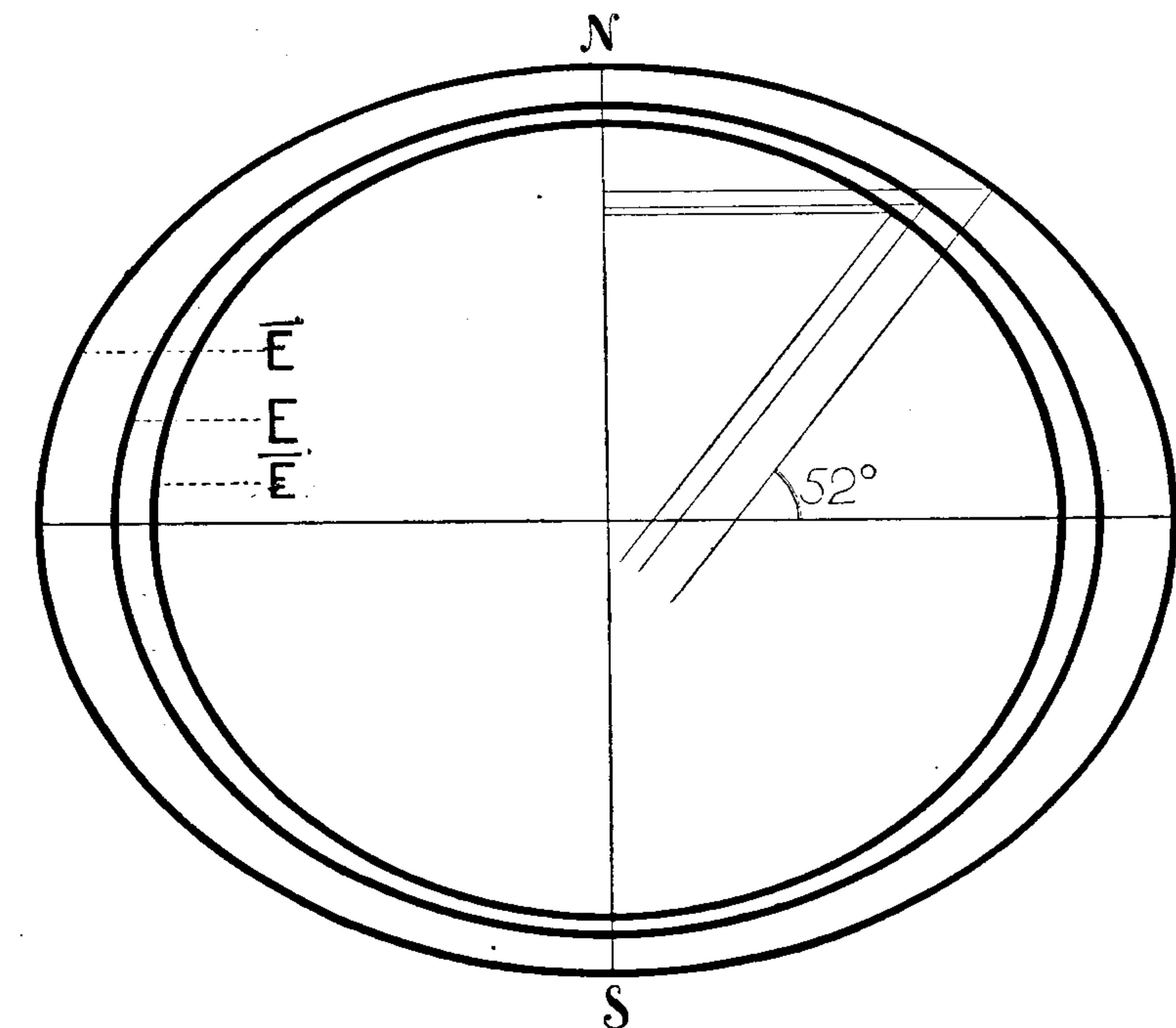
9. ZAKOŃCZENIE.

Wspomniane na wstępie przyczyny niezgodności różnych układów triangulacyjnych potwierdziły się na przykładach: okazuje się, że na niezgodność najwięcej wpłynęły przyjęte dla poszczególnych układów elipsoidy odniesienia, bo wtem kształt ziemi na obszarze Polski nie odpowiada ani powierzchni elipsoidy wyrównywującej ($a = 6\,380\,879,979 \text{ m}$, $b = 6\,356\,673,017 \text{ m}$, spłaszczenie $\frac{1}{263,59}$), ani Bessela ($a = 6\,377\,397,15500 \text{ m}$,

$b = 6\,356\,078,06\,325 \text{ m}$, spłaszczenie $\frac{1}{299,1528}$) ani tembardziej

Walbecka ($a = 6\,376\,895,0 \text{ m}$, $b = 6\,355\,834,0 \text{ m}$, spłaszczenie $\frac{1}{302,78}$).

(Rys. 6, elipsoidy E'', E i E').



Rys. 6

Niedopasowanie powierzchni matematycznej do powierzchni fizycznej pociągnęło za sobą rozbieżność między współrzędnymi geograficznymi punktu, wyznaczonymi astronomicznie, a współrzędnymi z rachunków geodezyjnych, wychodzących z oddalonego punktu wyjścia.

Różnice w azymutach boków mają to samo źródło; widzieliśmy w przykładach, że południki na elipsoidzie Bessela, przechodzące przez punkt, który należał do dwóch układów o róż-

nych punktach wyjścia (Rauenberg, Hermannskogel, Dorpat) nie nakładają się wzajemnie, a tworzą kąt do 16''.

Zagadnienie przejścia z jednej elipsoidy (E) na drugą (E') rozwiązywano u nas zapomocą przybliżonych wzorów:¹⁾

$$I = \frac{a - a'}{a} - (2 - 3 \sin^2 \varphi_0) \left(\frac{a - b}{a} - \frac{a' - b'}{a'} \right)$$

$$II = \frac{a - a'}{a} + \sin^2 \varphi_0 \left(\frac{a - b}{a} - \frac{a' - b'}{a'} \right)$$

$$\varphi' = \varphi - I \cdot \Delta \varphi$$

$$\lambda' = \lambda - II \cdot \Delta \lambda$$

gdzie φ_0 jest szerokością punktu wyjścia, jednakową na obydwóch elipsoidach, $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$, $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$.

Do wyznaczenia poprawek położenia geogr. przy przejściu z układu U_1 na układ U , na jednej elipsoidzie, istnieją następujące formuły²⁾:

$$\Delta \varphi = \cos \lambda_1 \Delta \varphi_0 \frac{[1]_1}{[1]_0}$$

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_0 + \tan \varphi_1 \sin \lambda_1 \Delta \varphi_0 \frac{[2]_1}{[1]_0}$$

gdzie φ_1 i λ_1 oznaczają szerokość i długość w układzie U_1 (długość liczona od początku układu U) punktu, dla którego poszukuje się poprawek, a $\Delta \varphi_0$ i $\Delta \lambda_0$ są to poprawki stałe do przejścia z współrzędnych geodezyjnych początku układu U (φ_0 , λ_0) na astronomiczne.

Obydwa powyższe sposoby nie są przydatne do rozwiązania naszego zagadnienia, ponieważ w żadnym wypadku nie znamy położenia geograficznego punktów wyjścia (Rauenberg, Helmersturm, Hermannskogel, Warszawa, Dorpat, Niemież), danego jednocześnie w dwóch niezależnych układach.

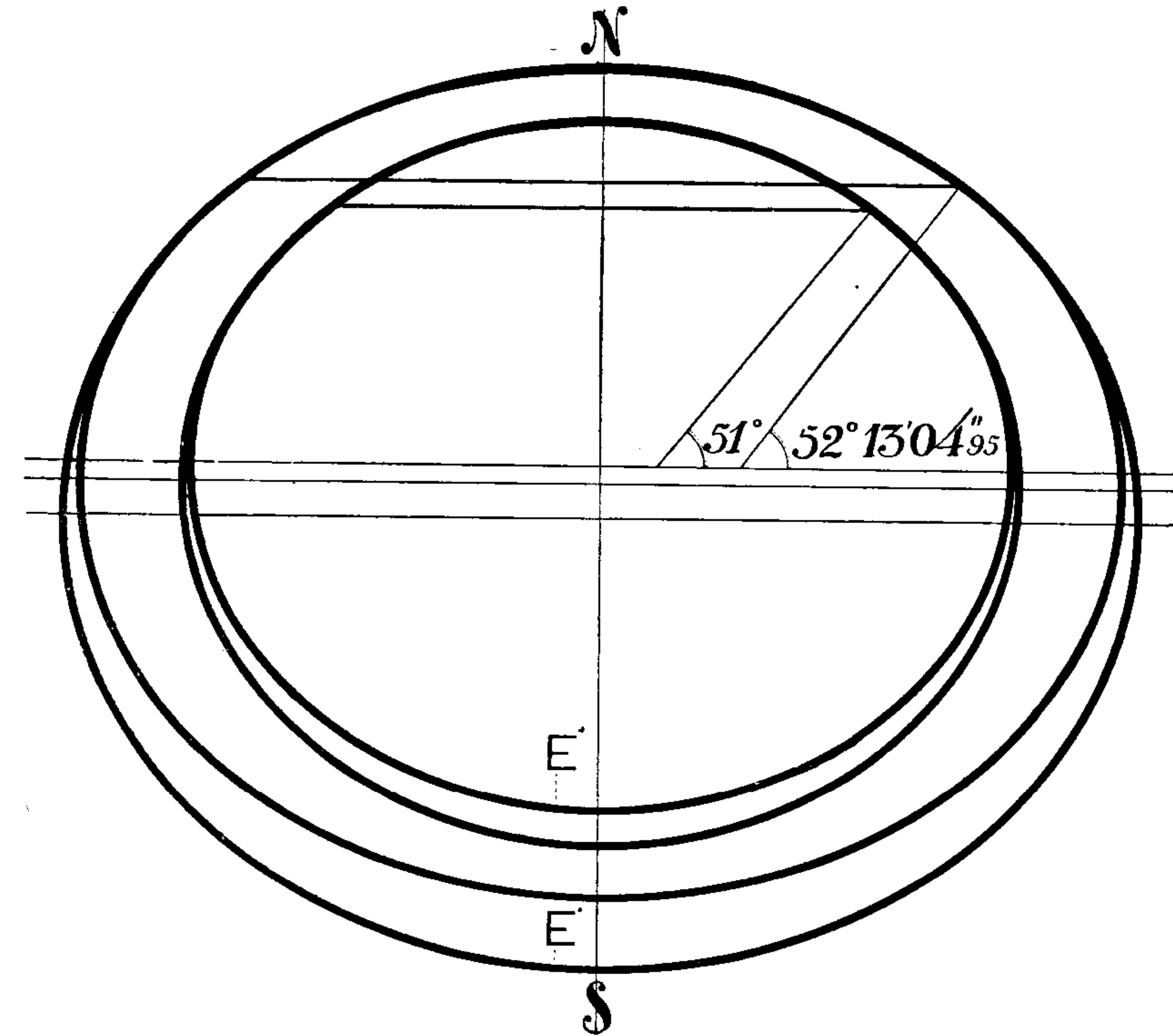
Uzgodnienie różnych układów triangulacyjnych za pośrednictwem odwzorowania płaskiego przyjąłem, wychodząc z założenia, że dwa obrazy płaskie tej samej sieci trójkątów, odniesione do dwóch różnych elipsoid, w granicach do 600 km od środka sieci, pozostaną niezmiennione (przy dokładności decymetra), jeżeli do odwzorowania użyjemy jednego prawa. Naprzykład w wypadku skrajnym, łuk południka s , długości 600 km na elipsoidzie Bessela, liczony na północ od 52° szerokości odwzoruje się według Roussilhe'owskiego prawa na $x = 600\,442,2$ m,

¹⁾ Napisane w innej postaci znajdują się m. innymi w „Geodezji” Witkowskiego, str. 531.

²⁾ S. Fel, Staraja i nowaja triangulaciji, Geodezist Nr. 6/1927. Formuły, tam podane, uogólniłem.

a tensam łuk na elipsoidzie wyrównywującej, da $x = 600\,441,7$ m. W miarę przybliżania się do środka rzutu różnica szybko zmniejsza się i dla łuku 400 km nie przekracza 1 dm.

Dalej wziąłem pod uwagę tę własność odwzorowań płaskich, że obrazy powierzchni podobnych różnią się jedynie skalą główną. Przez wiernokątne odwzorowania elipsoid wyrównywującej i Walbecka na inne, o temsamem spłaszczeniu co elipsoida Bessela, lecz różnej wielkości (rys. 7, elipsa zewnętrzna i wewnętrzna), uniknąłem żmudnej pracy obliczania rzutów płaskich dla każdej elipsoidy z osobna.



Rys. 7

W ten sposób we wszystkich wypadkach mogłem korzystać z opracowanych dla elipsoidy Bessela tablic odwzorowania do nieskomplikowanej interpolacji z pomocą arytmetru.

Każdy z układów triangulacyjnych na obszarze Polski zawiera po kilka punktów, należących jednocześnie do układu sąsiedniego. Z współrzędnych pary takich punktów (przy większej ilości punktów wspólnych stosowałem wyrównanie) znalazłem elementy przesunięcia i skręcenia dwu przylegających układów płaskich; przy tej sposobności stwierdziłem, że przyjęte ogólnie stałe zamienniki liczbowe długości geograficznej wynikają z błędnych założeń.

Stosunki wzajemne jednostek miar długości, używanych do pomiaru baz w poszczególnych układach okazały się bardzo dokładne. Tak np. bok o długości 319 002,0 m w układzie rosyjskim jest dłuższy zaledwie o 0,3 m od tegoż boku w układzie niemieckim, bok 263 674,1 m w układzie warszawskim różni się o 0,1 m od boku w układzie dorpacim i t. d. Wyjątek stanowi austriacka sieć katastralna, której dokładność jest dużo niższa od pozostałych sieci, jednak jest wystarczająca do konstrukcji dla całej Polski jednolitej siatki geograficznej oraz do pomiarów topograficznych w skali 1:10 000 i mniejszych.

Przekształcenia pierwotnych współrzędnych punktów na nowe, sposobami użytymi w przykładach nie zmieniły w granicach wymaganej dokładności elementów sieci triangulacyjnych, dały natomiast ciągłość sieci na całym obszarze przez nie objętym.

Otrzymane współrzędne prostokątne jednolitego odwzorowania można zamienić na geograficzne, odniesione do jednej elipsoidy, w jednym układzie. Jeżeli w polskich pomiarach triangulacyjnych I rzędu będzie ustalone położenie geograficzne kilku punktów, należących zarazem do jednej z sieci przedwojennych, wówczas wszystkie stare triangulacje na obszarze Polski wystarczy przeliczyć metodą wyłożoną w tej pracy, aby tworzyły całość z naszym nowym układem. Cel przeliczenia jest oczywisty: zużytkowanie stuletniego dorobku geodezyjnego do nowych pomiarów topograficznych i do budowy dokładnej, jednolitej mapy.

R É S U M É

ESSAI D'UNE UNIFICATION APPROCHÉE DES RÉSULTATS DES ANCIENNES TRIANGULATIONS, EFFECTUÉES SUR LE TERRITOIRE DE LA POLOGNE

Par J. Słomczyński.

Au cours du XIX s. les puissances copartageantes ont effectué des grands travaux géodésiques sur le territoire de la Pologne. Les résultats de ces travaux nous ont été donnés par les coordonnées géographiques à peu près de 24 000 points trigonométriques, réunis en systèmes de triangles indépendants.

Le réseau, mesuré par les russes est le plus important quant à son étendue. Il a été calculé primitivement sur l'ellipsoïde de Walbeck. Après qu'on eût constaté une grande discordance entre les coordonnées calculées sur cet ellipsoïde et les coordonnées, astronomiques observées, ont repris tous ces calculs sur un ellipsoïde qui a été calculé à nouveau et qui est connu sous le nom de „l'ellipsoïde concordant”.

Le point de départ du réseau, fixé sur l'ellipsoïde de Walbeck — c'est le point astronomique de Niemież; pour l'ellipsoïde concordant — le point géodésique de l'Observatoire de Varsovie. Les mesures ultérieures, effectuées par les russes, ont été rapportées à l'ellipsoïde de Bessel; elles comportent les travaux géodésiques entrepris dans la partie nord-est de la Pologne et pour lesquelles le point de départ est situé à l'observatoire astronomique de Dorpat. (Tartu).

Les travaux autrichiens comportent une triangulation de I ordre sur l'ellipsoïde de Bessel avec le point initial situé sur le Hermannskogel. Dans la partie de la Pologne, qui avait appartenu à l'Autriche, indépendamment de la triangulation du I ordre, existent aussi les réseaux assez denses, appartenant au cadastre, en coordonnées de Cassini. Les travaux allemands comprennent deux systèmes de coordonnées, situées sur l'ellipsoïde de Bessel, avec les points initiaux de Rauenberg et de Helmersturm (Potsdam); et aussi des opérations plus récentes, qui ont donné une série de réseaux locaux, rattachés aux mêmes points initiaux.

Ces réseaux sont rattachés aux systèmes voisins sur 4 à 20 stations de jonction; les coordonnées des points de jonction prises dans les deux systèmes, donnent des écarts jusqu'à 4" en latitude et 8" en longitude géographique. Ces écarts produisent dans les zones limitrophes des deux systèmes des discordances entre les coordonnées, qui rendent difficile l'utilisation des résultats des anciennes triangulations.

On peut constater que les longueurs de géodésiques entre les points de jonctions de deux systèmes de triangulations sont à peu près égales avec des écarts ne dépassant pas 1:100 000. Ce qui prouve la grande exactitude obtenue dans la mesure des bases, et la précision de la comparaison des différents étalons métriques, ayant servi dans ces opérations, à savoir le sagène, le klafter, le toise, et le mètre.

Nous avons trouvé cependant que la triangulation cadastrale autrichienne fait une exception et ne se rapporte pas à l'étalon précédent; pour obtenir l'égalité des distances entre les points de I ordre de la triangulation autrichienne (point initial Hermannskogel) et la triangulation cadastrale, il faut diminuer les longueurs du système cadastral en les multipliant par un coefficient $k = 0.999\ 911$.

Le calcul de tous les réseaux sur un ellipsoïde unique est très difficile à cause du manque des données nécessaires; c'est plus facile de suivre une voie moins simple, en utilisant une représentation plane des systèmes considérés suivant une loi commune, fixée a priori. Pour l'appliquer, nous considérons que pour un territoire de l'étendue de la Pologne les images planes d'un réseau de triangulation, rattaché à n'importe quel ellipsoïde considéré, au point de vue pratique du moins, ne sont pas altérés à la condition d'employer une loi unique pour la représentation. P. ex. une géodésique d'une longueur de 600 000 m sur l'ellipsoïde de Bessel diffère en représentation plane stéréographique d'une géodésique de la même longueur sur l'ellipsoïde concordant, à peine de 0,5 m, ce qui est suffisant pour les besoins de la topographie et de la cartographie.

Le calcul de la représentation pour chaque ellipsoïde séparé est assez long et onéreux; on peut l'abrégé en utilisant la représentation conforme double, qui consiste dans:

- 1) la représentation des ellipsoïdes considérés sur des ellipsoïdes, ayant un aplatissement constant, et
- 2) la représentation de ces dernières ellipsoïdes sur le plan.

Les conditions de la représentation (1) sont suivantes: les déformations des longueurs doivent être minimum et les longitudes ne changent pas. Comme résultat nous obtenons des corrections des latitudes pour des points, situés sur l'ellipsoïde concordant et sur celui de Walbeck (tables 24 et 25). Nous considérons dans ces calculs l'ellipsoïde de Bessel comme ellipsoïde initial. Ensuite nous calculons la représentation plane sur cet ellipsoïde. Les images planes des ellipsoïdes E_n ,

ayant e^2 constant, diffèrent dans chaque représentation par leur échelle $h = \frac{a_n}{a}$,

où a est le demi grand axe de l'ellipsoïde initial. Pour l'ellipsoïde de Bessel nous avons déjà calculé la représentation quasi-stéréographique (Bibl. Służby Geogr. t. 9); dans ces tables les valeurs nécessaires sont calculées dans des intervalles qui permettent d'obtenir par une simple interpolation toutes les valeurs cherchées.

La représentation plane d'un point donné en coordonnées géographiques sur n'importe quel ellipsoïde considéré, consiste dans les opérations suivantes:

- 1) il faut appliquer une correction à la latitude géographique,