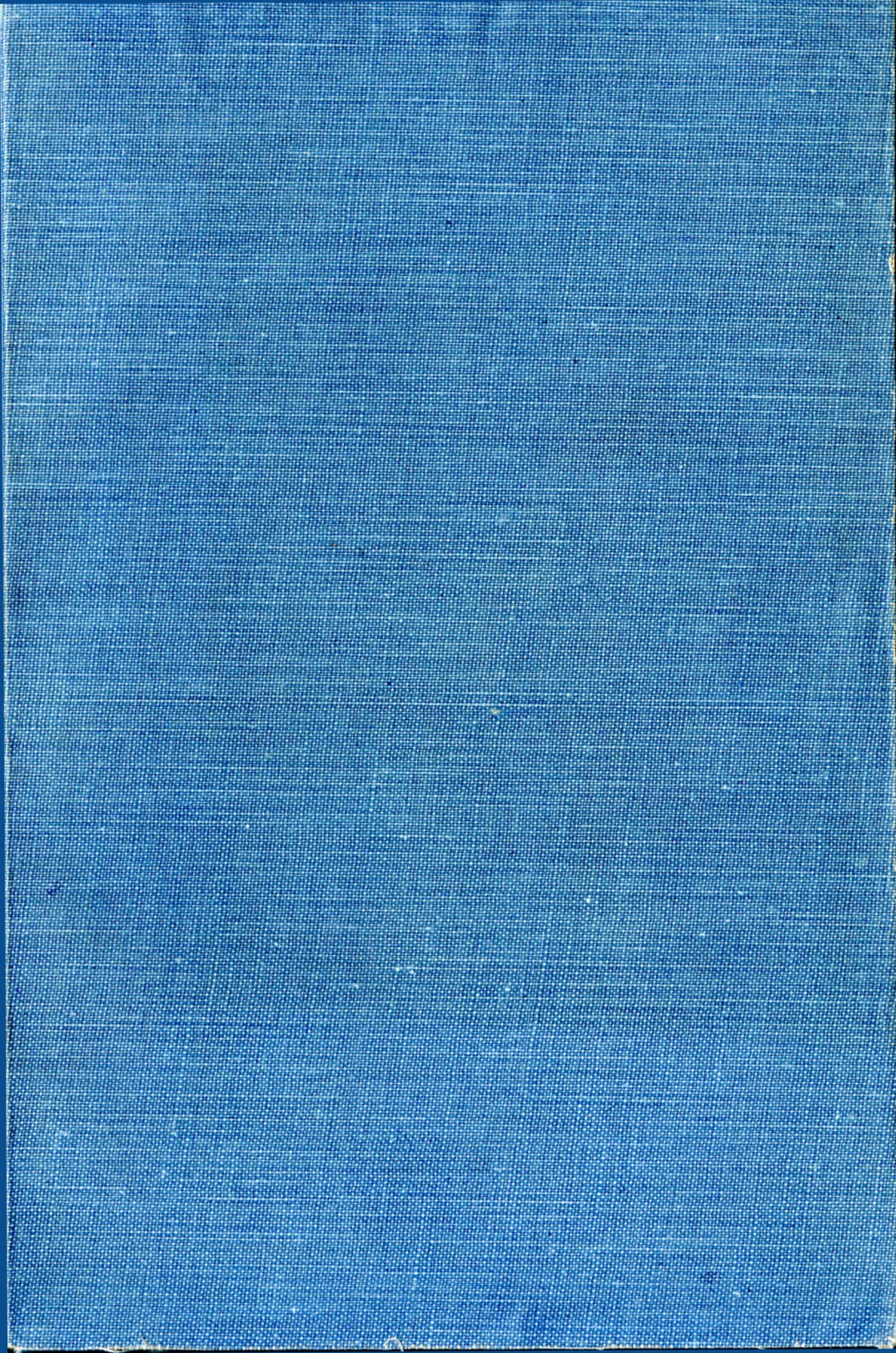




To Col. W. D. L. Wiggins
with kindest regards
from W. Plesner
Shira Camp 12. VII. 1946

TRANSFORMACJA WSPÓŁRZĘDNYCH
GEOGRAFICZNYCH I GRANICE
DOKŁADNOŚCI

Józef

Pplk. inż. WIKTOR PLESNER

[1892-1961]

Ku uczczeniu pamięci Profesorów Politechniki Lwowskiej
ś.p. Dr. L. GRABOWSKIEGO i ś.p. Dr. K. WEIGLA
pracę tę poświęcam.

PRZEDMOWA

Sieć triangulacyjna Warszawa-Toruń miała za zadanie związanie zachodnio-pruskiej sieci triangulacyjnej (1899–1900) z punktem wyjścia triangulacji polskiej „Borowa Góra”. Większa część sieci zachodnio pruskiej łącznie z punktami II, III i IV rzędu znajduje się na obszarze województwa pomorskiego (około 2000 punktów). To było główną przyczyną obliczenia tablic dla jak najprostszego przejścia ze współrzędnych geograficznych w systemie Helmertturm na współrzędne triangulacji polskiej. Ogólnie przeliczenie obejmuje obszar na północ od 53° równoleżnika, a ograniczony od zachodu i wschodu południkami $16^{\circ} 30'$ i $21^{\circ} 40'$ na wschód od Greenwich.

Wiadomo, że tego rodzaju przeliczenia są możliwe, jeżeli obie triangulacje będą na poziomie odpowiednich dokładności. Złączenie dobrej triangulacji ze słabą zepsuje tylko dobre współrzędne, a złe nie naprawi. Wogóle jakiegokolwiek przeliczenia współrzędnych jednego systemu na drugi muszą choć w małym stopniu obniżyć początkową dokładność, jednak potrzeby praktyczne zmuszają czasami do tego rodzaju przeliczeń. Wartość przeliczonych współrzędnych nie jest więc zależna od metody użytej do przeliczenia, lecz jedynie od poziomu dokładności obu triangulacji. Użycie odpowiedniej metody zdecydowane będzie rodzajem współrzędnych. Jeżeli do dyspozycji będą współrzędne płaskie, to złączenie przeprowadzi się na płaszczyźnie w odpowiednim odwzorowaniu. Przy współrzędnych geograficznych przeliczenie powinno być przeprowadzone na elipsoidzie. W razie różnych współrzędnych decydować będzie łatwość i prostota złączenia.

Ogólnie do takiego przeliczenia należy uzyskać:

- a) stałe elipsoid w wypadku dwu rozmaitych,
- b) użyte jednostki długości przy pomiarze baz i ich wzajemny stosunek,
- c) dostateczna ilość punktów wspólnych, których identyczność nie podlega żadnym wątpliwościom,
- d) w wypadku gdy przeliczeniu podlegałyby współrzędne płaskie, trzeba mieć dane charakteryzujące oba odwzorowania.

Punkty wspólne o wartości nie podlegającej dyskusji będą wtedy, gdy na tych samych punktach w terenie przeprowadzono niezależne pomiary kątów, a następnie obliczono współrzędne triangulacji.

Z porównania współrzędnych, azymutów i długości boków, można zorientować się w przybliżeniu, czy wogóle przeliczenie warto

rozpocząć, z powodu za małej dokładności dla jakichkolwiek celów pomiarowych.

Jeżeli jeden z punktów wspólnych jest wątpliwy odbija się to na zmianie różnic w porównaniu z innymi punktami.

Od początku do końca trzeba orjentować się z jaką dokładnością przeliczenie odbywa się i mieć świadomość dla jakiego celu dokładność punktów przeliczanych będzie wystarczająca.

Punkty wspólne powinny tworzyć zwartą sieć położoną blisko obszaru, dla którego trzeba będzie przeliczyć współrzędne. Jeden z tych punktów zostaje przyjęty jako zastępczy punkt wyjścia dla obu triangulacji. W teoretycznych rozważaniach tego problemu bierze się pod uwagę punkty przyłożenia elipsoidy do geoidy, jednak tego rodzaju punkty są czasami tylko symbolami wielkich triangulacji, a nie rzeczywistymi punktami wyjścia. Dzieje się to często wskutek kolejnych zmian w ciągu długich okresów czasu.

Niezależnie od tego, przyjęcie rzeczywistych punktów wyjścia dla zmiany systemu współrzędnych geograficznych zmuszałoby do obliczenia linii geodezyjnych o nadmiernej długości, dla których trzeba by dopiero uzupełniać formuły obliczeniowe. Dla takich punktów wyjścia poziom dokładności mógłby zmniejszyć się do tego stopnia, że nowe współrzędne nie przedstawiałyby praktycznej wartości. Niektóre ustępy poprzedzające faktyczne przeliczenia, a zajmujące się pozornie czysto teoretycznymi problemami, wprowadzone zostały dla ułatwienia wzajemnego zrozumienia się i uzyskania „wspólnego języka“ ze specjalistami pokrewnych działów.

Obliczenia związane z tablicami przeprowadził mjr. J. Borysowski. Obliczenia kontrolne i inne dodatkowe prace wykonali pplk. inż. S. Lechner, mjr. inż. P. Dulian i mjr. F. Serafin. Rysunki w tekście wykreślił p. B. Jaroszyński. Za tę pomoc wszystkim bardzo dziękuję.

Równocześnie miło mi podziękować Szefowi Służby Geograficznej płk. S. Gąsiewiczowi za polecenie wydrukowania tej pracy, jako kolejnego numeru „Biblioteki Służby Geograficznej“ w nawiązaniu do wydawnictwa rozpoczętego przed okresem wojennym.

EDINBURGH,
1944.

inż. WIKTOR PLESNER,
podpułkownik.

TREŚĆ

	str.
1. Wstęp	7
2. Stosowanie odwzorowań	8
3. Geoida i elipsoida odniesienia	9
a) Redukcja pomiarów kątowych ze względu na linię geodezyjną	10
b) Redukcja pomiarów kątowych ze względu na wzniesienie celu	12
c) Wpływ odchyłki pionu na pomiary kątowe ..	13
4. Dokładność pomiarów	17
a) Siatka bazowa	18
b) Schematyczny łańcuch trójkątów	20
c) Azymuty Laplace'a	22
5. Formuły różniczkowe dla linii geodezyjnej na elipsoidzie obrotowej	25
6. Związanie współrzędnych geograficznych dwu niezależnych od siebie triangulacji	28
7. Nawiązanie triangulacji polskiej z niemiecką	30
8. Metoda wyrównania i średnie błędy niewiadomych ..	32
9. Przykład przeliczenia współrzędnych	37
10. Summary (streszczenie po angielsku)	39
11. Literatura	40
12. Tablice poprawek $d\phi$ i $d\lambda$	41
13. Sieć triangulacyjna I rz. Polski (schemat)	53

1. Wstęp.

Pomiary weszły tak głęboko w życie każdego społeczeństwa w rozmaitych jego dziedzinach, że konieczność ich rozumiana jest bez żadnych zastrzeżeń. Przy wykonywaniu ich dla potrzeb codziennych, nie zawsze ujmuje się ściśle pewne teoretyczne założenia i wypływające z nich skutki. Nie wchodząc w zakres metod pomiarowych mniej lub więcej skomplikowanych, a uzależnionych od doskonałości użytych instrumentów, trzeba uzmysłować sobie wyłącznie pewne ogólne zasady spowodowane koniecznością utrzymania żądanych dokładności dla obszarów o rozmaitych zasięgach.

Wiadomo, że opierając się na fizycznych liniach pionu, wykonuje się pomiar na powierzchni ziemi, której kształt w ogólności jest owalnym. Wyniki takich pomiarów wchodzi do obliczeń ze zmianami uwzględniającymi podstawy na jakich przeprowadza się obliczenia.

Niezależnie od potrzeb naukowych, najbardziej ściśle pomiary w ostatecznym swoim celu, mają być podstawą pomiarów gospodarczych. Z powodów czysto praktycznych, pomiary te są traktowane tak, jak gdyby odbywały się na rzeczywistej płaszczyźnie, ale kształt ziemi i potrzeba zachowania odpowiednich dokładności, zmuszają do pewnych ograniczeń.

Przy pomiarach gospodarczych zabudowanych obszarów wielkomijskich, stawia się wymagania dokładności na poziomie błędu względnego $1/10000$. Wartość ta wyprowadzona jest empirycznie dla gruntów o wysokiej cenie. Czynnikiem wskazującym dopuszczalną granicę ze względu na obszar, będzie wielkość nadmiaru sferycznego obliczonego na podstawie wzoru:

$$\epsilon = \frac{P}{r^2} \rho''$$

gdzie P jest powierzchnią trójkąta płaskiego, r jest promieniem średniej krzywizny, a $\rho'' = 206265$.

Dla trójkątów o powierzchni	1 km ²	..	..	$\epsilon = 0'' \cdot 005$
„ „ o bokach	10 km	..	..	$\epsilon < 0'' \cdot 3$
„ „ „	20 km	..	..	$\epsilon < 1''$

Jeżeli obszar pokryty jednym trójkątem ma nadmiar sferyczny o wielkości mieszczącej się w granicach dokładności pomiarów kątowych triangulacji I rz., to obliczenie takiego pomiaru można przeprowadzić na płaszczyźnie, nie uwzględniając żadnych redukcji. Można więc użyć formuł trygonometrii płaskiej do obliczenia boków, kątów i współrzędnych płaskich dowolnego układu prostokątnego i zawsze stwierdzi się zgodność z wielkościami bezpośrednio zmierzonymi w terenie na poziomie żądanej dokładności.

2. Stosowanie odwzorowań.

Dla obszarów większych stosuje się współrzędne prostokątne odpowiedniego odwzorowania, zezwalającego na obliczenie tak zwanych zniekształceń długościowych, kątowych i powierzchniowych odpowiednimi formułami matematycznymi.

Dział odwzorowań należy do kartografii, która bada je z punktu widzenia rozmaitych potrzeb, a liczba tych odwzorowań jest bardzo duża. Ilość i jakość dla potrzeb geodezji jest ograniczona ze względu na wymagania jakie stawia się odwzorowaniu dla tego celu. Geodezja wymaga takiego odwzorowania, które dałoby możliwości przeprowadzenia wszystkich obliczeń w współrzędnych płaskich prostokątnych, nie tracąc w żadnym wypadku dokładności, jaką otrzymuje się przy obserwacjach w terenie.

Najbardziej odpowiednimi okazały się odwzorowania konformne, a z pomiędzy nich odwzorowanie Gaussa, dla celów pomiarów gospodarczych jedno z lepszych, bo zezwalające na bezpośrednie nanoszenie punktów według współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie i na bezpośrednie użycie wielkości wyprowadzonych ze współrzędnych, bez uwzględnienia poprawek. Powstałe stąd niedokładności można uważać praktycznie bez znaczenia, jeżeli dane odwzorowanie spełni warunek:

„Wszystkie zniekształcenia wielkości w odwzorowaniu będą z reguły mniejsze, niż nieuniknione, a dopuszczalne błędy bezpośredniego pomiaru na gruncie”.

Zniekształcenie długościowe dla odwzorowania Gaussa można obliczyć na podstawie wzoru:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2r^2}$$

jako powiększenie w stosunku do rzeczywistości, gdzie „y” jest rzędną prostopadłą do głównego południka, przyjętego jako oś odciętych, „r” — średnim promieniem krzywizny.

Wzór ten wskazuje na to, że zniekształcenie długościowe jest zależne wyłącznie od długości rzędnej, a niezależne od odciętej i kąta kierunkowego. Na podstawie tego wzoru można obliczyć dopuszczalną szerokość pasa układu współrzędnych na wschód i zachód od głównego południka.

Przy obliczeniu zniekształcenia długości odcinka sferycznego 1000 m, położonego w odległości 100 km od głównego południka, przewiększenie jego $m = +0.123$ m, to znaczy odcinek na płaszczyźnie będzie miał długość 1000.123 m. Przyjmując błąd względny $1/10000$ (1 dm na 1 km) jako dopuszczalny dla najbardziej dokładnych pomiarów gospodarczych, możemy zastosować pasowy system układów współrzędnych o szerokości 200 km, co odpowie pasom 3° długości geograficznej.

Redukcję kierunków otrzymamy na podstawie wzoru:

$$T - t = \frac{y dx}{2r^2} = 2'' \cdot 5$$

dla $y = 100$ km, $dx = x_2 - x_1 = 10$ km.

Ta nieznaczna wielkość redukcji kierunków na odległość 100 km przy najdłuższym boku triangulacji III rz., wskazuje jak dogodnym jest to odwzorowanie dla wszelkich obliczeń pomiarowych łącznie z triangulacją III i IV rzędu, gdyż zezwala na użycie do obliczeń bezpośrednio zaobserwowanych kierunków w terenie, bez uwzględnienia jakichkolwiek poprawek i redukcji.

Ze względu na potrzeby katastru i hipoteki, należy zbadać jakim zniekształceniom ulega powierzchnia w odwzorowaniu Gaussa na odległość 100 km. Zniekształcenie to ujęte zostało wzorem:

$$\Delta P = P_0 - P = P \frac{y^2}{r^2} = 245 \text{ m}^2$$

gdzie P_0 jest powierzchnią w odwzorowaniu dla $P = 100$ ha, w szerokości geograficznej $\phi = 52^\circ$. Odchyłka ze współrzędnych jest połową błędu dopuszczalnego z miar połowych, obliczonego wzorem:

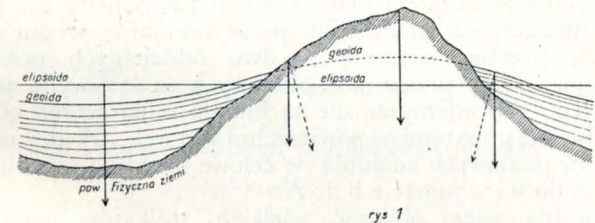
$$\Delta P = 0.2\sqrt{P} + 0.0003 P = 500 \text{ m}^2$$

w położeniu najbardziej niedogodnym dla obliczanej powierzchni. Zastosowując kilka pasów tego rodzaju, można objąć kraj dowolnej wielkości w podobne systemy płaskich współrzędnych, z tym że dla kierunków II rzędu uwzględnia się redukcję ze sferycznych na płaskie, gdyż dokładność obserwacji II rzędu jest na poziomie wielkości redukcji.

3. Geoida i elipsoida odniesienia.

Przy pomiarach geodezyjnych dla triangulacji I rz. stosuje się inne założenia.

Z teorii o figurze ziemi wiadomo, że siła ciężkości na powierzchni ziemi jest wypadkową z dwu sił: z sumy działania grawitacyjnego



całej masy ziemskiej i siły odśrodkowej powstałej wskutek obrotu ziemi.

Potencjał W siły ciężkości ma wszędzie stałą wartość ($W = \text{const.}$). Warunek ten spełnia rodzina powierzchni poziomowych posiadających tę własność, że kierunki sił ciężkości są do nich prostopadłe.

Jedną z nich jest powierzchnią poziomową zerową, zgadzającą się w przybliżeniu z powierzchnią wód oceanów, gdyby znajdowały się w spokoju. Powierzchni tej dano nazwę geoida, która jako powierzchnia jest rzeczywiście istniejąca, lecz mało znana.

Do obliczeń geodezyjnych przyjmuje się więc, jako powierzchnię

odniesienia elipsoidę obrotową, możliwie zbliżoną kształtem do tej części geoidy, dla której chcemy przeprowadzić pomiary, i jest ona drugim przybliżeniem fizycznej figury ziemi.

Te założenia zmuszają do uświadomienia sobie pewnych nieścisłości i uwzględnienia redukcji, jeżeli ich wielkość nie mieści się w granicach dokładności pomiaru. Dla uniknięcia wątpliwości, w dalszych wyjaśnieniach należy przypominać sobie krótko o pewnych właściwościach tego rodzaju powierzchni krzywej.

Elipsoida ziemiska, przyjmując ją jako idealną powierzchnię ziemi dla naszych obliczeń, jest powierzchnią powstałą przez obrót elipsy naokoło jej krótszej osi. Na jej powierzchni w każdym punkcie istnieją dwa kierunki główne, wyznaczone stycznymi do elipsy południkowej i równoleżnika w danym punkcie. Dla scharakteryzowania krzywizny powierzchni w dowolnym punkcie trzeba wziąć pod uwagę krzywizny dwu przekrojów płaszczyznami normalnymi poprowadzonymi przez dwa kierunki główne. Pierwszy przekrój normalny znajdzie się w płaszczyźnie elipsy południkowej o promieniu krzywizny „M” tej elipsy. Drugim przekrojem normalnym, poprzecznym, będzie także elipsa dla której promień krzywizny oznaczymy przez „N”. Rzut promienia krzywizny N na płaszczyznę równoleżnika danego punktu, będzie promieniem krzywizny równoleżnika.

Promieniami głównych krzywizn elipsoidy w dowolnym punkcie będą więc wielkości M i N, a średnia krzywizna określona będzie promieniem $R = \sqrt{MN}$.

a) *Redukcja pomiarów katowych ze względu na linię geodezyjną.*—Jeżeli weźmie się na powierzchni elipsoidalnej dwa dowolne punkty i normalną w każdym z nich, to te dwie normalne w ogólności nie przetną się, gdyż nie znajdują się w tej samej płaszczyźnie. (Nie stosuje się ta zasada do punktów leżących na tym samym południku lub równoleżniku.)

Płaszczyzna przesunięta przez normalną w punkcie A i punkt B i druga płaszczyzna przesunięta przez normalną w punkcie B i punkt A, przetną elipsoidę w dwu oddzielnych przekrojach pionowych. Ślady przekrojów pionowych są krzywymi płaskimi, o których z góry wiemy że nie są liniami najkrótszych odległości między dwoma punktami na powierzchni krzywej. W płaszczyznach przekrojów pionowych znajdują się celowe teodolitu ustawionego w punkcie A do B i w punkcie B do A.

Nie można więc obliczać wielkich trójkątów zamkniętych przekrojami pionowymi i dlatego zastąpiono je t.zw. liniami geodezyjnymi, o których geometria analityczna stwierdza że są krzywymi o podwójnej krzywiznie, a przedstawiającymi najkrótszą odległość między dwoma punktami na powierzchni krzywej.

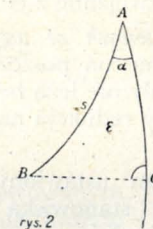
Linia geodezyjna na płaszczyźnie jest linią prostą, a na kuli — kołem wielkim.

Linie geodezyjne przy odwzorowaniu jednej powierzchni krzywej na drugą, pozostają liniami geodezyjnymi i dlatego linie najkrótsze na pierwszej powierzchni, będą liniami najkrótszemi i na drugiej powierzchni. Przy odwzorowaniu elipsoidy obrotowej na kulę o średniej krzywiznie, linie geodezyjne elipsoidy odwzorują się jako

łuki kół wielkich. Własność ta umożliwia rozwiązanie trójkątów ograniczonych liniami geodezyjnymi, sposobami dla trójkątów sferycznych.

Obserwacje kątów wykonane teodolitem odnoszą się do przekrojów pionowych, a obliczenia przeprowadza się przy pomocy linii geodezyjnych, dlatego konieczne jest zorientowanie się co do wielkości redukcji kątów przy przejściu z przekrojów pionowych na linie geodezyjne.

Dla obliczenia wielkości tej redukcji należy wziąć pod uwagę linie geodezyjne AB i BC. Linia geodezyjna BC jest prostopadłą w punkcie C do południka A.



Nadmiar sferyczny trójkąta ABC odwzorowanego na kulę o średniej krzywiznie

$$\epsilon = \frac{AB \cdot AC \sin \alpha}{2MN} \rho'' = \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2MN} \rho''$$

Następnie trzeba obliczyć nadmiar sferyczny trójkąta ABC odwzorowanego na kulę o promieniu N, styczną do elipsoidy wzdłuż równoleżnika punktu A.

Kąt przy A nie będzie w tym wypadku równy azymutowi α , lecz azymutowi α_1 dla przekroju pionowego z A do B

$$\epsilon_1 = \frac{s^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{2N^2}$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_1} = \frac{N}{M} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{1 - e^2} = (1 - e^2 \sin^2 \phi)(1 + e^2 + \dots) = 1 + e^2 \cos^2 \phi + \dots$$

Zaniedbując wyrazy czwartego rzędu można napisać:

$$\epsilon - \epsilon_1 = \epsilon e^2 \cos^2 \phi$$

$$\epsilon - \epsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha e^2 \cos^2 \phi}{MN} \rho''$$

Na podstawie twierdzenia Legendre'a przyjmując 1/3 tej różnicy na kąt trójkąta, otrzyma się:

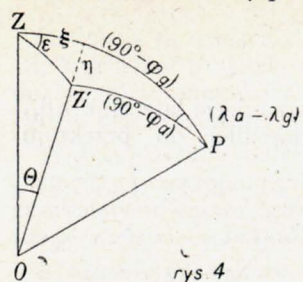
$$\alpha - \alpha_1 = \frac{1}{6} \frac{s^2 \sin \alpha \cos \alpha e^2 \cos^2 \phi}{MN} \rho''$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{1}{12} \frac{s^2 \sin 2\alpha \cos^2 \phi e^2}{MN} \rho''$$

Składowe odchyłki pionu.

Niech będzie dowolny punkt geodezyjny O,



- OP — kierunek bieguna,
- OZ — normalna elipsoidy z zenitem geodezyjnym,
- OZ' — kierunek pionu z zenitem astr. na geoidzie,
- $(90^\circ - \phi_g)$ — odległość biegunowa geodezyjna,
- $(90^\circ - \phi_a)$ — odległość biegunowa astronomiczna,
- θ — względna odchyłka pionu,
- ξ, η — składowe odchyłki pionu θ .

rys 4

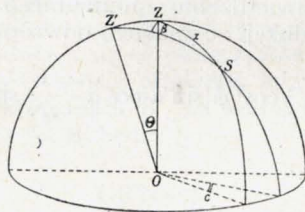
Zaniedbując wielkości niższych rzędów można napisać:

$$\xi = (90^\circ - \phi_g) - (90^\circ - \phi_a) = \phi_a - \phi_g$$

Kąt przy P będzie różnicą długości astronomicznej i geodezyjnej $(\lambda_a - \lambda_g)$.

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \sin (90^\circ - \phi) = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \phi$$

Trzeba obecnie odpowiedzieć na pytanie, jaka nastąpi zmiana azymutu astronomicznego dowolnego kierunku w punkcie O, jeżeli kierunek odniesiony do pionu OZ', odniesiemy do normalnej OZ. Podobny problem znajduje się w dziale badań błędów instrumentalnych. Jeżeli teodolit nie będzie ustawiony ściśle według libel na nim znajdujących się, wtedy oś pionowa teodolitu utworzy z pionem nieznaczący kąt θ . Wobec tego na limbusie otrzymamy odczyt, różniący się z właściwym odczytem.



rys 5

$\frac{c}{s} = \cos z, \frac{\beta}{s} = \sin z, c = \beta \cotg z^*$, gdzie „ β ” jest składową nachylenia w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny celowej, a „ z ” jest odległością zenitalną.

* Jako uzupełnienie składowych ξ i η można wyprowadzić na podstawie $c = \beta \cotg z$, wpływ odchyłki pionu w azymucie

$$\alpha_a - \alpha_g = \eta \cotg (90^\circ - \phi) = (\lambda_a - \lambda_g) \sin \phi$$

Równanie to w formie:

$$(\lambda_a - \lambda_g) \sin \phi - (\alpha_a - \alpha_g) = 0$$

znane jest pod nazwą równania Laplace'a.

14

Wpływ odchyłki pionu na pomiar kątów poziomych można porównać z wpływem nieściśłego ustawienia teodolitu do poziomu, a wielkość redukcji można otrzymać z wzoru $c = \beta \cotg z$, jako różnicę kątów pomierzonego i zredukowanego.

$$c = u' - u = \theta \sin u \tg h^*$$

$$u = \alpha - \epsilon$$

$$u' - u = \theta \tg h (\sin \alpha \cos \epsilon - \cos \alpha \sin \epsilon)$$

$$u' - u = (\xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \tg h$$

gdzie ϵ jest azymutem odchyłki pionu θ

$$\xi = \theta \cos \epsilon$$

$$\eta = \theta \sin \epsilon$$

α jest azymutem kierunku do punktu o wysokości względnej h .

Redukcja na elipsoidę będzie mała, gdyż w triangulacji I rz., nachylenia kierunków będą bardzo małe. W zasadzie każdy pomierzony kąt poziomy powinien być zredukowanym, przed ostatecznym obliczeniem trójkątów geodezyjnych. Z tego powodu trzeba by znać odchyłki pionu na każdym punkcie i przeprowadzać dwustopniowe wyrównanie sieci. Ogólnie biorąc wielkość tych redukcji mieści się w granicach dokładności pomiaru kątów triangulacji I rz., co zezwala na ich zaniedbanie. Mogą jednak wydarzyć się miejscowe anomalie, których należy się spodziewać w terenach wysokogórskich.

Żeby zbliżyć się do rzeczywistości i ująć sprawę redukcji kątów poziomych liczbowo, załączono zestawienie redukcji dla punktów I rz., dla których pomierzone zostały dodatkowo szerokość, długość i azymut astronomiczny (t.zw. punkty Laplace'a).

Należy zwrócić uwagę na ukształtowanie pionowe naszego kraju, który z wyjątkiem łańcucha górskiego Karpat nie posiada większych deniwelacji. Można więc przyjąć dla terenów płaskich, maksymalną różnicę wysokości — 200 m; a dla terenów wysokogórskich — 2000 m, biorąc jako odległość zasadniczą 30 km.

Na podstawie załączonego zestawienia, można przyjąć że dla obszaru Polski nie będzie potrzeba uwzględniać redukcji pomiarów kątów poziomych ze względu na odchyłkę pionu, z wyjątkiem terenów wysokogórskich. Jeżeli przyjmie się dla najściślejszych pomiarów kątów poziomych dokładność rzędu dziesiątych sekundy, to redukcja dla terenów wysokogórskich jest tego samego rzędu, a uwzględniając możliwość anomalii miejscowych, należy liczyć się ze zwiększeniem tej wielkości. Tymczasem redukcja dla terenów o małej deniwelacji, jest rzędu setnych sekundy, bez prawdopodobieństwa zjawienia się większych odchyłek pionu, mogących podwyższyć ich wielkość przekraczającą granicę dopuszczalną. Zamknięcia trójkątów nie są uzależnione tak od samych odchyłek pionu, jak od zmian tych wielkości.

* Z równania $c = u' - u = \theta \sin u \tg h$, widać że nachylenie θ ma największy wpływ na kierunek do niego prostopadły i wtedy $c = \theta \tg h$.

15

Wpływ odchyłki pionu na pomiary katowe.

Nazwa punktu i azymutu	Szerokość geograficzna ϕ_a $\xi = \phi_a - \phi_\sigma$	Długość geograficzna λ_a $\eta = (\lambda_a - \lambda_\sigma) \cos \phi$	Azymut a_a $\eta = (a_a - a_\sigma) \cotg \phi$	$\xi \sin a_\sigma$ $\xi \sin a - \eta \cos a$	$\eta \cos a_\sigma$	(u' - u) dla tg h		Maksymalne redukcja dla kierunku prostopadłego do θ . (u' - u) = $\theta \operatorname{tg} h$
						$= 0.0667$	$= 0.0067$	
Borkowo a Serafin	$53^\circ 23' 16.97''$ $53^\circ 23' 19.7213''$ - 2.751	$21^\circ 58' 12.345''$ $21^\circ 58' 17.1542''$ - 4.809 - 2.866	$260^\circ 16' 22.0''$ $260^\circ 16' 25.860''$ - 3.86 - 2.872	$+ 2.711''$ $+ 2.711''$ $+ 2.226''$	$+ 0.485''$	$+ 0.148''$	$+ 0.015''$	$\theta = 3''.98$ $+ 0.27''$ $+ 0.03''$
Kopciówka a Ojcowo	$53^\circ 33' 14.01''$ $53^\circ 33' 16.1061''$ - 2.096	$23^\circ 53' 48.885''$ $23^\circ 53' 55.9049''$ - 7.020 - 4.170	$172^\circ 35' 54.9''$ $172^\circ 36' 0.549''$ - 5.65 - 4.172	$- 0.270''$ $- 0.270''$ $- 4''.405$	$+ 4.135''$	$- 0.295''$	$- 0.030''$	$\theta = 4''.67$ $- 0.31''$ $- 0.03''$
Skopówka a Dziatkowicz	$52^\circ 30' 42.05''$ $52^\circ 30' 44.1025''$ - 2.113	$24^\circ 35' 53.775''$ $24^\circ 36' 01.8066''$ - 8.032 - 4.888	$145^\circ 36' 15.0''$ $145^\circ 36' 21.376''$ - 6.38 - 4.893	$- 1.192''$ $- 1.192''$ $- 5''.235$	$+ 4.043''$	$- 0.351''$	$- 0.035''$	$\theta = 5''.33$ $- 0.36''$ $- 0.04''$
Omyłnice a Rozkosz	$53^\circ 18' 00.32''$ $53^\circ 18' 01.9576''$ - 1.638	$26^\circ 42' 41.475''$ $26^\circ 42' 42.3534''$ - 0.878 - 0.525	$316^\circ 10' 32.3''$ $316^\circ 10' 33.004''$ - 0.70 - 0.522	$+ 1.136''$ $+ 1.136''$ $+ 1''.514$	$- 0.378''$		$+ 0.010''$	$\theta = 1''.72$ $+ 0.12''$ $+ 0.01''$
Wółka a Prypec	$52^\circ 19' 52.12''$ $52^\circ 19' 48.9772''$ + 3.143	$27^\circ 00' 57.975''$ $27^\circ 01' 01.5471''$ - 3.572 - 2.183	$216^\circ 14' 25.5''$ $216^\circ 14' 25.328''$ - 2.83 - 2.185	$- 1.856''$ $- 1.856''$ $- 3''.617$	$+ 1.761''$			$\theta = 3''.83$ $- 0.26''$ $- 0.03''$

4. Dokładność pomiarów.

Dla otrzymania żądanych dokładności w sieciach podstawowych stosuje się pomiary baz, rozłożonych w pewien schematyczny sposób. Dokładność pomiaru bazy, jaką można uzyskać na odpowiednim terenie i przy wielkich ostrożnościach, jest znacznie wyższą, niż dokładność boku po rozwiązaniu pewnej ilości trójkątów. Dokładność ta znajduje się na poziomie rzędu 1/1000000, przy użyciu drutów inwarowych o długości 24 m, podczas gdy błąd względny dla obliczonej długości boku osiąga szybko wielkość 1/100000, w miarę oddalania się od bazy wyjściowej.

W nowszych czasach metody pomiaru zezwalają, bez znacznego zwiększenia kosztów, na pomiar większej ilości baz i przez to na zmniejszenie sieci zamkniętej między dwoma bazami. Przyjęcie szeregu baz powoduje warunki do wyrównania dla pomierzonej sieci. Dla ustawienia tego rodzaju warunków jest absolutnie koniecznym, uzyskanie tak małych błędów przy pomiarze baz, żeby można zaniedbać je, w porównaniu z błędami pomiaru kątów.

Zródła błędów przy pomiarze baz można ująć w dwie grupy:

- 1) Do pierwszej należą błędy systematyczne, o znanych przyczynach. Błędy te można wyeliminować przez odpowiednią metodę obserwacji, albo poprawić obserwacje przez obliczenie wielkości tych błędów. Błędy systematyczne, choćby najmniejsze sumują się, dlatego muszą być uwzględnione.
- 2) Do drugiej należą błędy przypadkowe, tkwiące swymi przyczynami w błędach polowych, spowodowanych niepewnością odczytów, a podlegające tylko prawu teorii rachunku prawdopodobieństwa. Błędy przypadkowe eliminują się w końcowym rezultacie pomiarów, przy większej ilości obserwacji.

Stopień dokładności jaki można osiągnąć przy pomiarze bazy jest w zasadzie ograniczony dokładnością komparacji poszczególnych przymiarów drutowych. Na podstawie doświadczeń ustalono błąd średni komparacji na ± 0.005 mm. Biorąc dodatkowo pod uwagę niepewność wyników komparacji w momencie pomiaru, z powodu wpływu zmian temperatury, należy przyjąć że dokładność względna 1/4000000 będzie granicą prawdziwej dokładności jaką można osiągnąć.

Z drugiej strony dokładność *pozorna* pochodząca z porównania pomiarów między sobą, oblicza się jako średni błąd odcinka bazy:

$$m = \pm \sqrt{\frac{(vv)}{n(n-1)}}$$

gdzie „n” jest ilością pomiarów, a „v” jest różnicą między średnią i pojedynczym pomiarem. Zaś średni błąd całej bazy będzie:

$$M = \pm \sqrt{\frac{(v_1v_1)}{n(n-1)} + \frac{(v_2v_2)}{n(n-1)} + \dots + \frac{(v_nv_n)}{n(n-1)}}$$

Wysoki stopień dokładności nie może być utrzymamy w obliczo-

ných bokach sieci. Dokładność ta stopniowo obniża się przez błędy pomiarów kątowych, w miarę jak triangulacja postępuje naprzód od pomierzonej bazy. Z tej przyczyny rozłożenie baz sieci na obszarze Polski, przyjęte zostało w takich miejscach, żeby błąd względny obliczonego boku utrzymać na poziomie 1/200000.

Wszystkie bazy zmierzone zostały z dokładnością większą niż 1/2000000, a opierając się na prawie przenoszenia się błędów można obliczyć błąd względny przeniesienia bazy na bok I rzędu.

a) *Siatka bazowa.*

Jeżeli oznaczymy przez „b” zmierzona bazę; przez „B” bok rozwinięty sieci bazowej, będący zarazem boki wyjściowym łańcucha triangulacji; przez $\phi(A, B, C \dots)$ funkcję kątów nawiązania, to wtedy będziemy mieli:

$$\log B = \log b + \phi(A, B, C, \dots)$$

a średni błąd rozwiniętego boku będzie:

$$m_B^2 = m_b^2 + m_\phi^2$$

Średni błąd funkcji kątów siatki bazowej dla najslabszego nawiązania w triangulacji polskiej był mniejszy, niż 8 jednostek siódmego miejsca logarytmów.

Zakładając że baza pomierzona została z dokładnością:

$$\frac{m_b}{b} = 1/2000000$$

i przeprowadzając obliczenie na podstawie równania dla średniego błędu rozwiniętego boku, będzie:

$$m_b = \frac{10^{-7}\mu}{2000000} = 10^{-7} \times 2.2, \quad m_\phi^2 = 10^{-14} \times 4.8$$

gdzie $\mu = 0.4342945$ (moduł log. zwyczajnych).

Przyjmując dane wyjściowe najslabszego przeniesienia bazy:

$$m_\phi = 8 \times 10^{-7}, \quad m_\phi^2 = 64 \times 10^{-14}$$

wtedy:

$$m_B^2 = 10^{-14}(4.8 \times 64), \quad m_B = 8.3 \times 10^{-7}$$

to błąd względny:

$$\frac{m_B}{B} = \frac{10^{-7} \times 8.3}{\mu} = \frac{1}{523000}$$

Bezpośredni wpływ błędu pomierzonej bazy już przy dokładności 1/2000000, zwiększa minimalnie błąd względny rozwiniętego boku, gdyż obliczony błąd funkcji kątów dla najslabszego przeniesienia wynosi

$$m_\phi = \frac{1}{543000}$$

Bazy i rozwinięte boki w triangulacji polskiej.

L.p.	Nazwa i rok pomiaru	Długość bazy w metrach	Błąd względny	Błąd na 1 km w m/m	Bok rozwinięty	Długość w metrach	Błąd względny	Błąd na 1 km w m/m	Całkowity błąd rozw. boku z u- wzgl. błędu bazy
1	Grodno 1927	10894.574	1:7000000	± 0.5	Kopciówka-Nowosiółki	51021.296	1:600000	± 11.9	± 11.9 m/m
2	Kobryń 1929	17162.418	1:3300000	± 1.2	Skopówka-Działkowice	27513.812	1:2000000	± 2.6	± 2.8 „
3	Kolomyja 1929	8470.886	1:4800000	± 0.6	Zadobowce-Waratek		brak danych		
4	Łomża 1930	8525.647	1:3300000	± 0.9	Serafin-Borkowo	21509.890	1:1100000	± 4.2	± 4.3 „
5	Warszawa 1930	14337.449	1:5200000	± 0.7	Białuty-Warszawa	27460.532	1:900000	± 5.9	± 5.9 „
6	Łuniniec 1932	9687.308	1:7500000	± 0.4	Wólka-Prypeć	25687.830	1:1000000	± 5.2	± 5.2 „
7	Mir 1932	11214.738	1:12000000	± 0.3	Rozkosz-Onyńce	35731.333	1:500000	± 12.0	± 12.0 „
8	Brasław 1933	9188.802	1:2900000	± 1.1	Dziedzinka-Dworne Siolo	19244.836	1:900000	± 4.8	± 4.8 „
9	Opatów 1933	8270.257	1:2000000	± 1.5			niedokończona		
10	Hrubieszów 1934	15852.216	1:2100000	± 1.9	Zubowice-Paromów	39668.803	1:1400000	± 4.5	± 4.9 „
11	Stryj 1934	12388.872	1:2500000	± 1.4	Jaworzycze-Paraszka		niedokończona		
12	Równe 1935	10111.643	1:3700000	± 0.9	Samostraża-Półko		brak danych		
13	Szubin 1902 z triangulacji niemieckiej	5119.115	1:7600000	± 0.3	Dębogóra-Zalachowo	27075.169	1:1000000	± 5.2	± 5.2 „

b) *Schematyczny łańcuch trójkątów.*

Z poprzedniego rozważania wiadomo, że przy najbardziej nieprzychylnych warunkach dokładność przeniesionego boku

znajdzie się na poziomie $\frac{m_B}{B} = 1/500000$. W miarę oddalania się od bezpośrednio zmierzonej bazy dokładność ta będzie maleć.

Należy obecnie obliczyć dla jakiej odległości zachodzić będzie konieczność założenia nowej bazy, żeby nie dopuścić do niepożądanego obniżenia dokładności liniowej łańcucha triangulacyjnego.

Biorąc pod uwagę pojedynczy trójkąt, to rozwiązanie jego nastąpi przez podział odchyłki zamknięcia trójkąta na trzy kąty. Kąt płaski γ' wchodzący do obliczenia będzie miał wartość:

$$I' = (I) - \frac{(I) + (2) + (3) - 180^\circ}{3} = \frac{2}{3}(I) - \frac{1}{3}(2) - \frac{1}{3}(3) + 60^\circ$$

Z góry zakładamy, że wagi kątów obserwowanych (1), (2), (3) są równe. Na podstawie formuły na błąd średni funkcji wielkości wyrównanych:

$$m_F^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial (1)} \right]^2 d^2(1) + \left[\frac{\partial F}{\partial (2)} \right]^2 d^2(2) + \dots + \left[\frac{\partial F}{\partial (n)} \right]^2 d^2(n)$$

$$\frac{\partial 1'}{\partial (1)} = +\frac{2}{3} \quad \frac{\partial 1'}{\partial (2)} = -\frac{1}{3} \quad \frac{\partial 1'}{\partial (3)} = -\frac{1}{3}$$

Określając przez m_0 jednostkowy błąd średni kąta, to

$$m_{1'} = \sqrt{\frac{4}{9}m_0^2 + \frac{1}{9}m_0^2 + \frac{1}{9}m_0^2} = \pm m_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = m_2' = m_3'$$

Obecnie można obliczyć średni błąd boku „B“, z równania:

$$B = b \frac{\sin 2'}{\sin 3'}$$

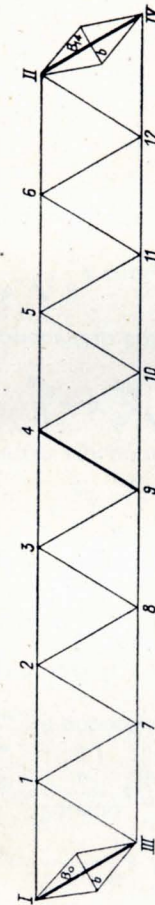
pod założeniem, że „ b “ jest bezbłędne.

$$m_B = \pm m_0 \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial (1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial (2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial (3)}\right)^2}$$

B jest funkcją wielkości $2'$ i $3'$, a kąty płaskie $2'$ i $3'$ są funkcjami kątów obserwowanych (1), (2), (3). Opierając się na wzorze, funkcji z funkcji, będzie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial(1)} &= \frac{\partial B}{\partial 2'} \frac{\partial 2'}{\partial(1)} + \frac{\partial B}{\partial 3'} \frac{\partial 3'}{\partial(1)} \\ \frac{\partial B}{\partial(2)} &= \frac{\partial B}{\partial 2'} \frac{\partial 2'}{\partial(2)} + \frac{\partial B}{\partial 3'} \frac{\partial 3'}{\partial(2)} \\ \frac{\partial B}{\partial(3)} &= \frac{\partial B}{\partial 2'} \frac{\partial 2'}{\partial(3)} + \frac{\partial B}{\partial 3'} \frac{\partial 3'}{\partial(3)}\end{aligned}$$

Przenoszenie się błędów
w schematycznym łańcuchu triangulacji Irzędu



Założenie: Średni błąd kąta obserwowanego $m_o = 0.5''$

$$I-II = 210 \text{ km}$$

b	$=$	10 km	$\text{z błędem względnym}$	$1: 2\,000\,000$	$m_b = \pm 5 \text{ m/m}$	$= \frac{m_b}{\sqrt{1050^2 \text{ km}}} =$	$\pm 2 \text{ m/m}$
B_0	$=$	30 km	— — — — —	$1: 500\,000$	$m_{B_0} = \pm 60 \text{ m/m}$	$=$	$\pm 11 \text{ m/m}$
$4-9$	$=$	30 km	— — — — —	$1: 190\,000$	$m_{4-9} = \pm 158 \text{ m/m}$	$=$	$\pm 29 \text{ m/m}$
$II-IV$	$=$	30 km	— — — — —	$1: 135\,000$	$m_{II-IV} = \pm 222 \text{ m/m}$	$=$	$\pm 40 \text{ m/m}$

Zař. Nr 2

$$\text{gdzie } \frac{\partial 2'}{\partial(1)} = \frac{\partial 2'}{\partial(3)} = \frac{\partial 3'}{\partial(1)} = \frac{\partial 3'}{\partial(2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial 2'}{\partial(2)} = \frac{\partial 3'}{\partial(3)} = +\frac{2}{3}$$

$$\text{Różniczkując } B = b \frac{\sin 2'}{\sin 3'}, \text{ będzie: } \frac{\partial B}{\partial 2'} = B \cotg 2', \frac{\partial B}{\partial 3'} = -B \cotg 3'$$

$$\frac{\partial B}{\partial(1)} = +\frac{B}{3}(\cotg 3' - \cotg 2')$$

$$\frac{\partial B}{\partial(2)} = +\frac{B}{3}(2 \cotg 2' + \cotg 3')$$

$$\frac{\partial B}{\partial(3)} = -\frac{B}{3}(2 \cotg 3' + \cotg 2')$$

Więc błąd względny boku B:

$$\frac{m_B}{B} = \pm \frac{m_0}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{\cotg^2 2' + \cotg^2 3' + \cotg 2' \cotg 3'}}$$

$$\text{w trójkącie równobocznym } \cotg 60^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{m_B}{B} = \pm \frac{m_0}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.000004 m_0$$

w łańcuchu trójkątów równobocznych:

$$\frac{m_B}{B_n} = \pm \frac{m_0}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{n} = 0.000004 m_0 \sqrt{n}$$

na zasadzie, że średni błąd rośnie z pierwiastkiem kwadratowym obliczonych boków.

Zakładając jednostkowy błąd średni kąta obserwowanego $m_0 = \pm 0''.5$, gdyż z taką przeciętną dokładnością mierzone były kąty w polskiej triangulacji I rzędu, otrzyma się wartości:

$$\frac{m_{Bn}}{B_n} = 0.000004 \times 0.5 \times \sqrt{n} = \frac{1}{500000} \sqrt{n}$$

$$\frac{m_{B_7}}{B_7} = \frac{1}{500000} \sqrt{7} = \frac{1}{190000}$$

$$\frac{m_{B_{14}}}{B_{14}} = \frac{1}{500000} \sqrt{14} = \frac{1}{135000}$$

Ponieważ dokładność boku wyjściowego zaczyna zmniejszać się gwałtownie i już przy boku 7-mym ma wartość $1/190000$, więc po przejściu 14 trójkątów należy założyć nową bazę. Wtedy dokładność liniowa podniesie się z powrotem do wartości boku wyjściowego, a w środku łańcucha będzie mogła utrzymać się na poziomie $1/200000$.

W zestawieniu baz i rozwiniętych boków widzi się, że prawie wszystkie bazy pomierzone są z większą dokładnością, niż $1/200000$. Dokładność boków rozwiniętych znajduje się tylko w dwu wypadkach na poziomie $1/500000$, reszta osiąga dokładność znacznie większą.

Mniejsza dokładność boku Kopciówka-Nowosiółki (siatka bazowa Grodno) spowodowana została kształtem podwójnego rombu i wskutek tego, nastąpiło zmniejszenie dokładności funkcji kątów przeniesienia. Bok rozwinięty Rozkosz - Omłyńce (siatka bazowa Mir) powstał z pojedynczego rombu, jednak kąty decydujące o rozwinięciu są za ostre, co musiało obniżyć ich wartość. W zasięgu polskiej triangulacji znajduje się jako 13-ta siatka bazowa (Szubin) z triangulacji niemieckiej. Baza pomierzona zostało w roku 1902 latami sztywnymi z dokładnością $1/7600000$, a przeniesienie boku Dębogóra-Zalachowo otrzymano z błędem względnym $1/1000000$ t.jn.dokładność wszystkich rozwiniętych boków znajduje się na poziomie tego samego rzędu.

W projekcie sieci polskiej przewidziane jest uzupełnienie pomiaru dwoma dodatkowymi bazami, z których jedna będzie na wybrzeżu, a druga w południowej części województwa poznańskiego.

c) *Azymuty Laplace'a*. Przy badaniu dokładności w sieciach geodezyjnych, dochodzi się szybko do wniosku, że przyczyną jej utraty są pomiary kątowe, na podstawie których obliczamy później azymuty geodezyjne.

Podwyższenie ścisłości pomiarów kątowych może nastąpić przez ulepszenie konstrukcji nowych typów instrumentów, bardziej precyzyjnych, zastosowanie lepszych metod przy wykonywaniu pomiarów i dobór obserwatorów. Jeżeli chodzi o możliwości konstrukcyjne i ulepszenia metod, znajdujemy się prawdopodobnie u schyłku.

Niezależnie od małych dokładności pomiarów kątowych na pojedynczych stanowiskach, nagromadzenie się błędów kątowych w triangulacji i tendencja, żeby część ich działała jako systematyczne powoduje ogólny skręt łańcucha triangulacyjnego.

Tego rodzaju niekorzystna sytuacja, szczególnie przy pojedynczych łańcuchach na wielkich obszarach, zmusza do wprowadzenia t.zw. azymutów Laplace'a. Azymut taki znajduje się na normalnym punkcie triangulacji I rz., gdzie obok zwykłych pomiarów geodezyjnych, wyznaczono astronomicznie długość i azymut. Do tych wyznaczeń astronomicznych stosuje się metody maksymalnej precyzji. Dla uzyskania zupełnej pewności i odpowiedniego poziomu dokładności, wykonuje się dodatkowo pomiar zwrotny na punkcie celu, poczem wyprowadza się z obu pomiarów średnią arytmetyczną. Punkt geodezyjny, na którym wykonano wszystkie pomiary określa się jako punkt Laplace'a.

Azymut Laplace'a jest azymutem astronomicznym poprawionym ze względu na odchyłkę pionu. Poprawka ujęta jest równaniem:

$$(\lambda_a - \lambda_g) \sin \phi - (a_a - a_g) = 0$$

gdzie

 α_a jest azymutem astronomicznym,

a_g „ „ geodezyjnym,

 λ_a „długością astronomiczną,

λ_g „ „ „ geodezyjną,

 ϕ „ szerokością.

Żeby równanie Laplace'a sprawdziło się muszą być wyznaczenia astronomiczne na punkcie wyjściowym (Borowa Góra) i od-

powiednich punktach Laplace'a, bardzo ściśle. Z drugiej strony pomiary kątowe o małej dokładności mogą też spowodować nie sprawdzenie równania, gdyż kąty obserwowane w sieci wpływają bezpośrednio na tworzone azymuty geodezyjne. Błędy tych kątów skupią się w „ α_g ” i pośrednio wpłyną na obliczenie współrzędnych geograficznych, a ujemny ich wpływ da się odczuć w części $\lambda_g \sin \phi$.

Dla obliczenia redukcji trzeba przeprowadzić wstępne wyrównanie.* W tej części wyrównania bez azymutów Laplace'a, należy doprowadzić do obliczenia współrzędnych geograficznych, przy pomocy których ustawia się następnie równania redukcyjne. Po przeprowadzonej redukcji azymutów astronomicznych na geodezyjne, wprowadza się je do ponownego wyrównania sieci, jako ostateczne dane.

Obliczenia składowych odchyłki pionu wschód-zachód z długości i azymutów, dają przybliżone możliwości kontroli, czy tego rodzaju decyzja wprowadzenia azymutów Laplace'a, jako bezbłędnych, jest słuszną.

Z porównania niezależnie obliczonych poprzecznych składowych odchylek pionu

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \phi$$

$$\eta = (a_a - a_g) \cotg \phi$$

widać, że azymuty astronomiczne po redukcji na geodezyjne znajdują się na poziomie dokładności rzędu dziesiątych sekundy.

Jeżeli średni błąd kąta z wyrównania sieci jest znacznie większy od błędu kąta obserwowanego w sieci, występuje wtedy zjawisko odchyłek trójkątowych tego samego znaku, na dużych obszarach triangulacji I. rz. Wskazuje to na istnienie błędów działających systematycznie, których źródłem jest przypuszczalnie refrakcja boczna.

Refrakcja boczna może być uważana jako skutek nierównomiernej temperatury i nierównomiernego ciśnienia powietrza. Okazało się, że stopniowo zmieniająca się temperatura i ciśnienie powietrza, przy przejściu od jednego punktu triangulacyjnego do drugiego, powoduje powstawanie pól refrakcji bocznej, pociągającej za sobą zmianę wartości rachunkowych położenia punktów triangulacyjnych.

Sieć triangulacyjna pod wpływem refrakcji bocznej ulega pewnym zniekształceniom, które są ledwie uchwytne w równaniach warunkowych, a to z powodu konformności zniekształconej sieci. Liczyć się jednak należy z dużymi odchyleniami w azymucie całej sieci, co wyraża się w równaniach Laplace'a.

Na wyprowadzenie azymutów Laplace'a jako bezbłędnych do wyrównania sieci może być postawiony zarzut, że jeżeli jest mowa o wpływie refrakcji bocznej na kierunki geodezyjne, to ten sam wpływ istnieje na pomiary astronomiczne.

Do równania Laplace'a wchodzą tylko wyznaczenia długości i pomiary azymutalne. Pomiary te ulegają wpływom składowej refrakcji bocznej działającej w kierunku wschód-zachód. Wpływ

* Wyrównanie wieńca I (Warszawa—Grodno) przeprowadzone było metodą kolejnych rozwinieć Boltz'a, a ostatnia grupa włączona do wyrównania składała się ze zredukowanych azymutów Laplace'a.

Sprawdzenie składowej η odchyłek pionu.

Nazwa punktu	Długość		Azymut	$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \phi$	$\eta = (\alpha_a - \alpha_g) \cotg \phi$
	astronomiczna	geodezyjna	astronomiczny	geodezyjny	
Borkowo ..	$1^h 24^m 38.808$ ± 0.009 $21^\circ 58' 12'' 345$	$17'' 1542$	Serafin $260^\circ 16' 22'' 0$ ± 0.5	$25'' 860$	$-2'' 872$
Kopciówka ..	$1^h 35^m 35.259$ ± 0.013 $23^\circ 53' 48'' 885$	$55'' 9049$	Ojcowo $172^\circ 35' 54'' 9$ ± 0.3	$36'' 00'' 549$	$-4'' 172$
Skopówka ..	$1^h 38^m 23.585$ ± 0.011 $24^\circ 35' 53'' 775$	$36'' 01'' 8066$	Dziatkowicze $145^\circ 36' 15'' 0$ ± 0.4	$21'' 376$	$-4'' 893$
Omłyńce ..	$1^h 46^m 50.765$ ± 0.011 $26^\circ 42' 41'' 475$	$42'' 3534$	Rozkosz $316^\circ 10' 32'' 3$ ± 0.3	$33'' 004$	$-0'' 525$
Wólka ..	$1^h 48^m 3.865$ ± 0.009 $23^\circ 00' 57'' 975$	$01'' 01'' 5471$	Prypeć $216^\circ 14' 22'' 5$ ± 0.2	$25'' 328$	$-2'' 183$

tej składowej jest mały, co stwierdzono doświadczalnie. Następnie promień świetlny, idąc od jakiegokolwiek gwiazdy przechodzi tylko na krótkiej drodze przez atmosferę w sensie poziomym, w porównaniu z kierunkami geodezyjnymi i ulega minimalnie ujemnym wpływom refrakcji bocznej.

Istnieją więc przyczyny, które krzywią promień świetlny w kierunku poziomym, zmieniające się w natężeniu od miejsca do miejsca, stale i stopniowo. Trzeba wyraźnie zaznaczyć, że ani warunki trójkątowe, ani też warunki sinusowe w sieci triangulacyjnej, nie dają możliwości wykrycia wpływów refrakcji bocznej, a tym bardziej jej wielkości. Przyczyną jest to, że zniekształcenia te jako konforemne nie wpływają prawie na zmianę warunków trójkątowych i sinusowych.

Żeby więc częściowo uwolnić sieć triangulacyjną od wpływu skumulowanych błędów kątowych i błędów spowodowanych refrakcją boczną na obliczane azymuty geodezyjne, wprowadzone zostały do wyrównań sieci polskich azymuty Laplace'a, jako bezbłędne. Rozmieszczenie azymutów zostało przyjęte podobnie, jak rozmieszczenie siatek bazowych. Redukcję azymutów astronomicznych na geodezyjne przy pomocy współrzędnych przybliżonych i z ostatecznego wyrównania nie przekraczają różnicy $0'' 003$.

Borkowo — Serafin	$a_I = 260^\circ 16' 25.860$ $a_{II} = 260^\circ 16' 25.860$	$+0.000$
Kopciówka — Ojcowo	$a_I = 172^\circ 36' 00.549$ $a_{II} = 172^\circ 36' 00.547$	$+0.002$
Skopówka — Dziatkowicze	$a_I = 145^\circ 36' 21.376$ $a_{II} = 145^\circ 36' 21.373$	$+0.003$
Omłyńce — Rozkosz	$a_I = 316^\circ 10' 33.004$ $a_{II} = 316^\circ 10' 33.004$	$+0.000$
Wólka — Prypeć	$a_I = 216^\circ 14' 25.328$ $a_{II} = 216^\circ 14' 25.327$	$+0.001$

5. Formuły różniczkowe dla linii geodezyjnej na elipsoidzie obrotowej.

Dwa końcowe punkty linii geodezyjnej mają współrzędne geograficzne $P_1(\phi_1, \lambda_1)$, $P_2(\phi_2, \lambda_2)$.

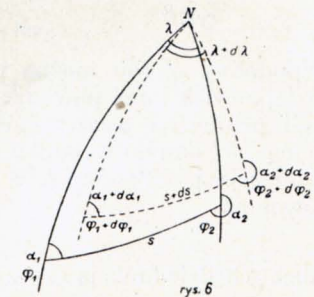
Różnica długości $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, azymuty obu końców linii będą: a_1, a_2 , a jej długość s .

Jeżeli dla tej linii przesunie się punkt początkowy po południku o $d\phi_1$, zwiększy się azymut a_1 o da_1 i przedłuży się linię geodezyjną o ds , wtedy punkt P_1 będzie miał wartości:

$$\begin{aligned} \phi_1 + d\phi_1 \\ a_1 + da_1 \\ s + ds \end{aligned}$$

Na skutek tego punkt P_2 otrzyma także nowe wartości:

$$\begin{aligned} \phi_2 + d\phi_2 \\ \lambda_2 + d\lambda_2 \\ a_2 + da_2 \end{aligned}$$



Należy teraz wyprowadzić związki między $d\phi_1$, da_1 , ds , a odpowiednimi przyrostami $d\phi_2$, $d\lambda$, da_2 , dla których wyjdzie się z równań różniczkowych linii geodezyjnej.

W pierwszym przybliżeniu można odczytać:

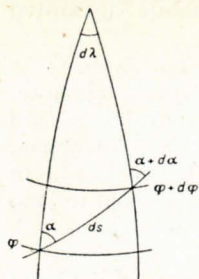
$$ds \cos \alpha = M d\phi$$

$$ds \sin \alpha = N \cos \phi d\lambda$$

skąd

$$d\phi = \frac{1}{M} \cos \alpha ds$$

$$d\lambda = \frac{1}{N} \frac{\sin \alpha}{\cos \phi} ds$$



rys. 7

a) Przy zmianie s o ds i przy założeniu że ϕ_1 i α_1 pozostają bez zmiany, będzie:

$$d\phi_2 = -\frac{1}{M_2} \cos \alpha_2 ds$$

$$d\lambda = -\frac{1}{N_2} \frac{\sin \alpha_2}{\cos \phi_2} ds$$

wstawiając

$$\alpha = \alpha_2 - 180^\circ$$

b) Przy skrócie linii geodezyjnej w punkcie P_1 o da_1 , przy niezmienionej długości s , punkt końcowy P_2 opisze element łuku $m da_1$, gdzie m będzie zredukowaną długością linii geodezyjnej. Ponieważ element tego łuku jest prostym kątem do linii geodezyjnej w punkcie P_2 , więc azymut będzie $\alpha_2 - 90^\circ$.

W płaskim systemie współrzędnych biegunowych: $dp = s da_1$.

W sferycznym systemie współrzędnych biegunowych dla kuli o promieniu R , s — zastąpimy łukiem koła wielkiego o kącie centralnym σ , przesunięcie punktu P_2 będzie

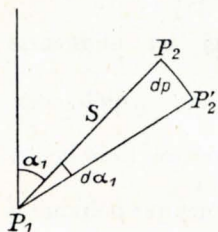
$$dp = R \sin \sigma da_1$$

wstawiając

$$R \sin \sigma = m$$

dla powierzchni kuli będzie

$$dp = m da_1$$



rys. 8

W podobny sposób można podejść do powierzchni elipsoidy, czy jakiegokolwiek innej powierzchni matematycznej, dla której zamiast linii prostej na płaszczyźnie weźmie się pod uwagę linię geodezyjną. W danym wypadku α_1 będzie azymutem, a s długością linii geodezyjnej. Przesunięcie punktu P_2 wyrazi się przy pomocy równania

$$ds = m da_1$$

gdzie m będzie funkcją s i α_1 , jak i też położenia punktu P_1 . Funkcję

tę nazywa się zredukowaną długością linii geodezyjnej, wyrażoną w formie

$$\frac{m}{r} = \sin \frac{s}{r}$$

lub rozwiniętą w szereg:

$$m = s \left(1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{120} \frac{s^4}{r^4} + \dots \right)$$

W zasadniczych równaniach różniczkowych ds zastąpimy przez $m da_1$, a przez $\alpha_2 - 90^\circ$ i wtedy zmiana wyrazi się:

$$d\phi_2 = +\frac{m}{M_2} \sin \alpha_2 da_1$$

$$d\lambda = -\frac{m}{N_2} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \phi_2} da_1$$

c) Przesunięcie punktu P_1 o $d\phi_1$.

Bardziej skomplikowane jest wyznaczenie wpływu zmiany ϕ_1 , przy niezmienionej długości s i niezmienionym azymucie α_1 , przy czym punkt P_1 porusza się po południku, jak na rys. 9. Całkowitą zmianę położenia linii geodezyjnej, można rozłożyć na poszczególne ruchy.

Niech linia P_1P_2 obróci się w punkcie P_2 tak, że punkt P_1 znajdzie się w P'_1 , przecinając południk w Q_1 . Następnie przesuwając ją z położenia P'_1P_2 do Q_1Q_2 i obrót w punkcie Q_1 dla osiągnięcia azymutu α_1 , wtedy Q_2 znajdzie się w P'_2 . Ruchy te można wyrazić w formie matematycznej i wtedy będzie:

$$da_1 = \frac{1}{m} \sin \alpha_1 \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 P_1Q_1 = \frac{M_1}{m} \sin \alpha_1 \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 d\phi_1$$

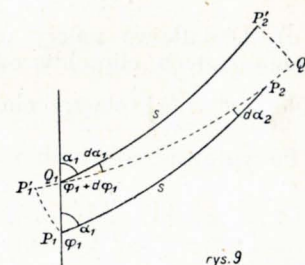
(Wskaźnik przy pochodnej $\left(\frac{dm}{ds} \right)_2$ oznacza, że odnosi się do punktu P_2 .)

$$\text{Przesunięcie } P_2Q_2 = P'_1Q_1 = M_1 \cos \alpha_1 d\phi_1.$$

$$Q_2P'_2 = m da_1 = M_1 \sin \alpha_1 \left(\frac{dm}{ds} \right)_2 d\phi_1$$

gdzie $\frac{dm}{ds} = \cos \frac{s}{r} + \dots$, po rozwinięciu na szereg

$$\frac{dm}{ds} = 1 - \frac{s^2}{2r^2} + \frac{s^4}{24r^4} + \dots$$



Po wprowadzeniu uproszczeń otrzyma się ostatecznie wpływ zmiany w położeniu punktu P_1 o $d\phi_1$ na położenie punktu P_2 :

$$d\phi_2 = + \frac{M_1}{M_2} \cos \lambda d\phi_1$$

$$d\lambda = + \frac{M_1}{N_2} \sin \lambda \operatorname{tg} \phi_2 d\phi_1$$

d) Zestawienie formuł różniczkowych dla linii geodezyjnej, uwzględniających wszystkie zmiany równocześnie:

$$\begin{aligned} d\phi_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} d\phi_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial s} ds + \frac{\partial \phi_2}{\partial a_1} da_1 \\ &= \frac{M_1}{M_2} \cos \lambda d\phi_1 - \frac{\rho}{M_2} \cos a_2 ds + \frac{m}{M_2} \sin a_2 da_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\partial \lambda}{\partial \phi_1} d\phi_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial s} ds + \frac{\partial \lambda}{\partial a_1} da_1 \\ &= \frac{M_1}{N_2} \frac{\sin \lambda}{\operatorname{ctg} \phi_2} d\phi_1 - \frac{\rho}{N_2} \frac{\sin a_2}{\cos \phi_2} ds - \frac{m \cos a_2}{N_2 \cos \phi_2} da_1. \end{aligned}$$

e) Dodatkowo należy uzupełnić powyższe formuły wpływem zmian stałych elipsoidy odniesienia, a mianowicie dla wielkiej półosi „ a ” o da i spłaszczenia $p = \frac{a-b}{a}$ o dp .

Po wprowadzeniu zmian:

$$\frac{d\phi_2}{da}, \quad \frac{d\phi_2}{dp}, \quad \frac{d\lambda}{da}, \quad \frac{d\lambda}{dp}$$

będzie:

$$\begin{aligned} d\phi_2 &= + \frac{\rho}{aM_2} s \cos a_2 da + \left(2(\phi_2 - \phi_1) - 3(\phi_2 - \phi_1) \sin^2 \phi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{2\rho} \sin^3 \phi \cos \phi \right) dp \end{aligned}$$

$$d\lambda = + \frac{\rho}{aN_2} \frac{s \sin a_2}{\cos \phi_2} da - \lambda \sin^2 \phi_1 \frac{\cos \phi_1}{\cos \phi_2} dp, \quad \text{gdzie } \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}.$$

6. Związanie współrzędnych geograficznych dwu niezależnych od siebie triangulacji.

Pomiary geodezyjne wykonywane były na rozmaitych elipsoidach odniesienia, zależnie od czasu i kraju. Obliczone wyniki tych pomiarów, otrzymywały współrzędne geograficzne o nierównych wartościach dla tych samych punktów.

Dla umożliwienia wspólnego wykorzystania, trzeba tego rodzaju współrzędne przeliczyć na jeden system. Zadanie to będzie można wykonać na płaszczyźnie geometrii elipsoidy, mniej lub więcej dobrze, zależnie od dokładności danych triangulacji.

Załóżmy, że dwie elipsoidy różnią się: wielkością, kształtem, położeniem i orientacją. Wielkość i kształt, scharakteryzowane będą przez wielką półos „ a ” i spłaszczenie $\frac{a-b}{a}$, gdzie „ b ” jest małą

półosią. Położenie i orientacja określone będą przez podanie miejsca przyłożenia elipsoidy do geoidy i azymut jakiegoś kierunku. Dane te uzyska się z wyznaczeń astronomicznych: szerokość ϕ_0 , długość λ_0 i azymut a_0 , który będzie kątem zawartym między północnym ramieniem południka przechodzącego przez punkt przyłożenia i bokiem łączącym ten punkt z jakimkolwiek innym na powierzchni ziemi. Położenie i orientacja obu elipsoid pomyślane jest w ten sposób, że osie małe mają być równoległe do osi obrotu ziemi, jednak różnice odchyłek pionu w punktach przyłożenia i nie równe dokładności wyznaczeń astronomicznych powodują, że zasada równoległości nie będzie zachowaną, a środki elipsoid nie będą w jednym punkcie.

Mając obecnie pojęcie, jak obie elipsoidy leżą w przestrzeni, weźmy pod uwagę szereg punktów na fizycznej powierzchni ziemi, które będą miały współrzędne geograficzne odniesione do obu elipsoid.

Ogólnie na różnicę współrzędnych punktów wspólnych składają się następujące przyczyny:

- Przyjęcie jako podstawy obliczeń rozmaitych elipsoid.
- Oddzielne punkty przyłożenia i orientacji, obciążone rozmaitymi odchyłkami pionu.
- Na ostatnim miejscu mają wpływ na wielkość różnic, pomiary o nierównej dokładności i przyjęte oddzielne metody wyrównania sieci geodezyjnych.

Przeliczenie ściśle jest zadaniem skomplikowanym, gdyż należałoby uwzględnić wszystkie wyżej wymienione przyczyny, łącznie z poprawieniem danych wyjściowych ze względu na odchyłkę pionu. Tego rodzaju ujednastajnienie współrzędnych geograficznych należy do wyrównania astronomiczno-geodezyjnego sieci, przy równoczesnym obliczeniu danych nowej elipsoidy odniesienia.

W zadaniu uproszczonym dąży się do przeliczenia jednej sieci na drugą przez odniesienie do jednej elipsoidy i jednego punktu wyjścia. Trzeba jednak zdać sobie sprawę, co pociąga za sobą takie rozwiązanie. Przez samo uzgodnienie matematyczne dochodzi się do jednolitości współrzędnych, przy równoczesnym pogorszeniu się wartości wewnętrznych sieci przeliczanej. Jednak ze względów praktycznych jednolitość jest konieczną i należy rozwiązać to zadanie pod założeniem, że suma kwadratów pozostałych odchyłek współrzędnych punktów wspólnych, będzie minimum.

Geometrycznie można ująć, że osiągnięcie minimum może nastąpić przez przesunięcie, skręt i zmianę skali jednej sieci względem drugiej. Minimalne zniekształcenia wewnętrzne sieci uzyska się przez wprowadzenie do przeliczeń możliwie dużej ilości punktów wspólnych, odpowiednio rozłożonych i ograniczenie zasięgu przeliczeń w miarę oddalania się od strefy punktów wspólnych.

7. Nawiązanie triangulacji polskiej z niemiecką.

Sieć powierzchniowa rejonu VII (zał. w r. 1933/34) należy do systemu polskiej triangulacji o punkcie wyjściowym Borowa Góra:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 52^\circ 28' 32'' \cdot 85 \pm 0'' \cdot 04 \\ \lambda_0 &= 1^h 24^m 8^s \cdot 808 \pm 0^s \cdot 009 = 21^\circ 02' 12'' \cdot 12 \text{ Gr.} \\ \alpha_{\text{Modlin}} &= 261^\circ 53' 15'' \cdot 9 \pm 0'' \cdot 3.\end{aligned}$$

Powierzchnia pokryta przez tą sieć jest zamknięta: od wschodu linią Warszawa-Mława, od południa rzeką Wisłą, od zachodu linią Toruń - Grudziądz i od północy granicą państwową.

Sieć ta obejmuje 28 punktów i 61 boków, tworzących 38 trójkątów. Kąty zaobserwowano metodą Schreibera. Do wyrównania zastosowano metodę spostrzeżeń zawarunkowanych. W części wschodniej, sieć oparto na punktach wieńca I: Białuty, Modlin, Ostrzyniewo, Koziczyn i Lipowiec.

Do wyrównania weszło 53 warunków, na co złożyły się:

warunki zamknięcia trójkątów	38
„ sinusowe	12
„ baz	3

Ostatnie spowodowane zostały przymusem nawiązania.

Przez wprowadzenie do obliczeń od samego początku poprawek z poprzedniego wyrównania, dla kierunków wspólnych sieci powierzchniowej i wieńca I, uniknięto wprowadzenia przymusu nawiązania katowego.

W skład sieci weszło 7 punktów, z których Chorągiewka, Golub, Swierczyny i Prioma należą do zasadniczej sieci niemieckiej I rz., a punkty Chelmża, Łopatki i Kurzętnik są punktami wypełniającymi I rz. W sieci polskiej punkty te zostały na nowo zaobserwowane i wyrównane, jako punkty I rz.

Średni błąd kierunku obserwowanego według wzoru Ferrero:

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sum E}{3N}}$$

gdzie E jest błędem zamknięcia każdego trójkąta, a N jest liczbą trójkątów sieci.

$$\begin{aligned}\text{Dla sieci polskiej} \quad m_1 &= \pm 0'' \cdot 37 \\ \text{„ „ niemieckiej} \quad m_2 &= \pm 0'' \cdot 17\end{aligned}$$

$$\text{Średni błąd kierunku z wyrównania: } M = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2}{r}}, \text{ gdzie „} v^2 \text{,}$$

jest poprawką kierunku, a „r“ ilością równań warunkowych.

$$\begin{aligned}\text{Dla sieci polskiej} \quad M_1 &= \pm 0'' \cdot 47 \text{ z przymusem nawiązania.} \\ \text{„ „ niemieckiej} \quad M_2 &= \pm 0'' \cdot 33^*) \text{ bez przymusu nawiązania.}\end{aligned}$$

Przymus nawiązania podwyższa średni błąd, można więc w tym wypadku przyjąć, że wartości średnich błędów dla obu sieci są równe.

*) Die Preussische Landesvermessung Hauptdreiecke, Neue Folge, Erster Teil, 1925.

Poniżej podane zestawienie daje wyniki obliczonych współrzędnych geograficznych punktów wspólnych i ich różnice.

Nazwa punktu	ϕ z obl. polsk. „ niem.	$\Delta\phi$	λ z obl. polsk. „ niem.	$\Delta\lambda$	log. boku z obliczeń polsk. „ niem.	Δlg	Błąd wzgl.	Błąd liniowy na 1 km.
Chorągiewka (Fahrenberg)	$52^\circ 56' 25'' \cdot 4718$ $28 \cdot 1883$	$2 \cdot 6665$	$18^\circ 30' 41'' \cdot 8437$ $42 \cdot 8703$	$+ 1 \cdot 0266$	Chelmża Golub	0 +22	1 197000	0 m/m ± 32 „
Chelmża (Kulmsee)	$53^\circ 11' 13'' \cdot 5915$ $16 \cdot 2430$	$+ 2 \cdot 6515$	$18^\circ 36' 58'' \cdot 1844$ $59 \cdot 2323$	$+ 1 \cdot 0479$	Golub Chorągiewka	+19 0	1 229000	± 23 „ 0 „
Golub (Golau)	$53^\circ 07' 11'' \cdot 2463$ $13 \cdot 8928$	$+ 2 \cdot 6465$	$19^\circ 02' 01'' \cdot 0343$ $02 \cdot 0911$	$+ 1 \cdot 0568$	Swierczyny Chorągiewka	+22 +22	1 197000	± 28 „ ± 32 „
Łopatki (Lopaten)	$53^\circ 20' 52'' \cdot 4849$ $55 \cdot 8928$	$+ 2 \cdot 6401$	$19^\circ 00' 14'' \cdot 7632$ $15 \cdot 8275$	$+ 1 \cdot 0643$	Chelmża Łopatki	+19 +22	1 229000	± 23 „ ± 26 „
Swierczyny (Fichtenberg)	$53^\circ 13' 28'' \cdot 5494$ $31 \cdot 1841$	$+ 2 \cdot 6347$	$19^\circ 28' 42'' \cdot 1851$ $43 \cdot 2615$	$+ 1 \cdot 0764$	Golub	+22	1 197000	± 26 „
Kurzętnik (Kamernick)	$53^\circ 23' 19'' \cdot 0070$ $21 \cdot 6340$	$+ 2 \cdot 6270$	$19^\circ 35' 51'' \cdot 9611$ $53 \cdot 0441$	$+ 1 \cdot 0830$	Kurzętnik	+9	1 197000	± 9 „
Prioma (Priom)	$53^\circ 15' 16'' \cdot 8986$ $19 \cdot 5248$	$+ 2 \cdot 6262$	$20^\circ 03' 12'' \cdot 4844$ $13 \cdot 5763$	$+ 1 \cdot 0919$	Prioma Golub	+14 +22	1 483000 1 310000 1 197000	± 20 „ ± 28 „

W obu wypadkach jako powierzchnia odniesienia użyta została elipsoida Bessela; jednostką długości dla boków w sieci polskiej jest metr międzynarodowy, a boki w sieci niemieckiej wyrażone są w metrze pruskim, różniącym się od międzynarodowego o wielkość $+0.000013355$ m.

To znaczy wszystkie liczby podające długości boków niemieckich są za małe i przy rachunku logarytmicznym należy dodać $+58$ jednostek 7-mego miejsca logarytmów. W ten sposób otrzyma się wszystkie boki wyrażone w metrach międzynarodowych, co zostało wykonane dla zestawienia wyników obliczeń.

Mając dane współrzędne geograficzne punktów wspólnych, należy przy ich pomocy umożliwić przeliczenie paru tysięcy punktów triangulacji niemieckiej (I, II, III i IV rz.) na system współrzędnych geograficznych z punktem wyjścia Borowa Góra.

Przeliczenie to będzie można przeprowadzić na podstawie podanych formuł różniczkowych, a rozpatrywać się będzie przypadek w którym elipsoida zostanie nie zmieniona, natomiast zmienia ona swoje położenie i orientację.

Formuły różniczkowe określające $d\phi_2$ i $d\lambda$ dla każdej pary punktów, stanowią rozwiązanie zadania. Dla przeliczenia jakiegokolwiek punktu ze systemu jednej triangulacji na drugi, należy poprzednio obliczyć dla punktu wyjścia, najbardziej prawdopodobne przyrosty $d\phi_1$, ds , da_1 . W danym wypadku punkt wspólny Golub będzie zastępczym punktem wyjścia dla obu triangulacji. Punkt ten z 6-ma innymi da 12 równań błędów. Po obliczeniu współczynników i rozwiązaniu równań normalnych, otrzyma się wartości na zmianę: szerokości „ $d\phi_1$ “, długości linii geodezyjnej na 1 km „ ds “ i azymutu „ da_1 “.

Ze względu na to, że obie triangulacje związane są elipsoidą Bessela, zmiana spłaszczenia $dp=0$, a zmiana wielkości półosi elipsoidy jest wiadoma z góry, jako różnica między metrem pruskim i międzynarodowym, $\frac{da}{a} = +0.013355$ m na 1 km.

8. Metoda wyrównania i średnie błędy.

Dla spełnienia wszystkich warunków postawionych powyżej i uzyskania możliwie najlepszych wyników, został zastosowany sposób obserwacji pośredniczących z niewiadomymi, dla których zasadniczymi równaniami są t.zw. równania błędów:

$$v_1 = a_1x + b_1y + c_1z - l_1$$

$$v_2 = a_2x + b_2y + c_2z - l_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_n = a_nx + b_ny + c_nz - l_n$$

Zastosowując zasadę minimum sumy kwadratów:

$$\frac{\partial(vv)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial(vv)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial(vv)}{\partial z} = 0$$

otrzyma się równania normalne, zezwalające na obliczenie wartości x, y, z .

$$(aa)x + (ab)y + (ac)z - (al) = 0$$

$$(ab)x + (bb)y + (bc)z - (bl) = 0$$

$$(ac)x + (bc)y + (cc)z - (cl) = 0$$

gdzie $x = d\phi_1$, $y = ds$, $z = da_1$, wyrazy wolne $l_1, l_2 \dots l_n$ będą różnicami współrzędnych punktów wspólnych.

Dla punktu Golub jako punktu wyjścia, równania błędów będą w formie ogólnej:

$$d\phi_2 = \frac{M_1}{M_2} \cos \lambda d\phi_1 - \frac{\rho}{M_2} \cos a_2 s_{km} ds + \frac{m}{M_2} \sin a_2 da_1 + \frac{\rho}{M_2} \cos a_2 s_{km} \frac{da}{a}$$

$$d\phi_2 = a_1 d\phi_1 + b_1 s_{km} (0.013355 - ds) + c_1 da_1$$

$$d\lambda = \frac{M_1}{N_2} \cotg \phi_2 d\phi_1 - \frac{\rho}{N_2} \frac{\sin a_2}{\cos \phi_2} s_{km} ds - \frac{m}{N_2} \frac{\cos a_2}{\cos \phi_2} da_1 + \frac{\rho}{N_2} \frac{\sin a_2}{\cos \phi_2} s_{km} \frac{da}{a}$$

$$d\lambda = a_2 d\phi_1 + b_2 s_{km} (0.013355 - ds) - c_2 da_1$$

Po obliczeniu współczynników zostało ustawionych 12 równań błędów:

$$v_1 = +1.0000d\phi_1 - 0.6499ds + 0.0055da_1 - 2.6578$$

$$v_2 = -0.0120d\phi_1 - 1.8714ds - 0.0052da_1 + 0.0552$$

$$v_3 = +1.0000d\phi_1 + 0.2397ds + 0.0044da_1 - 2.6547$$

$$v_4 = -0.0097d\phi_1 - 1.5052ds + 0.0019da_1 + 0.0290$$

$$v_5 = +1.0000d\phi_1 + 0.8212ds + 0.0003da_1 - 2.6511$$

$$v_6 = -0.0007d\phi_1 - 0.1068ds + 0.0067da_1 - 0.0061$$

$$v_7 = +0.9999d\phi_1 + 0.9629ds - 0.0059da_1 - 2.6399$$

$$v_8 = +0.0132d\phi_1 + 2.0437ds + 0.0078da_1 - 0.0535$$

$$v_9 = +1.0000d\phi_1 + 0.3743ds - 0.0047da_1 - 2.6397$$

$$v_{10} = +0.0104d\phi_1 + 1.6050ds + 0.0030da_1 - 0.0410$$

$$v_{11} = +0.9998d\phi_1 + 0.4699ds - 0.0107da_1 - 2.6325$$

$$v_{12} = +0.0238d\phi_1 + 3.6829ds + 0.0038da_1 - 0.0843$$

Dla obliczenia niewiadomych x, y, z rozwiązano równania normalne, dla których współczynniki mają następujące wartości:

$$(aa) = +6.00048747 \quad (bb) = +28.53793679 \quad (cc) = +0.00038091$$

$$(ab) = +2.38636359 \quad (bc) = +0.02616506 \quad (cl) = +0.02792239$$

$$(ac) = -0.01083339 \quad (bl) = -6.48503388 \quad (ll) = +42.02238348$$

$$(al) = -15.87898788$$

$$x = d\phi_1 = +2''.647654$$

$$y = ds = +0.004283 \text{ m na 1 km}$$

$$z = da_1 = +1''.702829$$

Jednostkowy błąd średni:

$$m_0^2 = \frac{(vv)}{n-u} = \frac{0.000091}{12-3} = 0.0000101, \quad m_0 = \pm 0.0032$$

gdzie „ n “ jest ilością równań błędów, „ u “ jest ilością niewiadomych.

Suma $(vv) = 0.000091$ obliczona na podstawie równań błędów, a jako kontrolę uzyskano tę wartość z równania:

$$(vv) = (ll) - (al)x - (bl)y - (cl)z = 0.000090$$

co sprawdziło zupełnie dobrze obliczenie, przy użyciu wartości niewiadomych na 6 miejsc dziesiętnych.

Dla obliczenia średnich błędów niewiadomych ułożono i rozwiązano równania wag:

$$\begin{aligned}(aa)(aa) + (ab)(a\beta) + (ac)(a\gamma) &= 1 \\ (ab)(aa) + (bb)(a\beta) + (bc)(a\gamma) &= 0 \\ (ac)(aa) + (bc)(a\beta) + (cc)(a\gamma) &= 0 \\ (aa)(a\beta) + (ab)(\beta\beta) + (ac)(\beta\gamma) &= 0 \\ (ab)(a\beta) + (bb)(\beta\beta) + (bc)(\beta\gamma) &= 1 \\ (ac)(a\beta) + (bc)(\beta\beta) + (cc)(\beta\gamma) &= 0 \\ (aa)(a\gamma) + (ab)(\beta\gamma) + (ac)(\gamma\gamma) &= 0 \\ (ab)(a\gamma) + (bb)(\beta\gamma) + (bc)(\gamma\gamma) &= 0 \\ (ac)(a\gamma) + (bc)(\beta\gamma) + (cc)(\gamma\gamma) &= 1\end{aligned}$$

i otrzymano wartości współczynników:

$$\begin{aligned}(aa) &= +0.187762 & (a\beta) &= -0.021981 & (a\gamma) &= +6.850072 \\ (\beta\beta) &= +0.039970 & (\beta\gamma) &= -3.370716 & (\gamma\gamma) &= +3051.664683\end{aligned}$$

Wagi i średnie błędy niewiadomych:

$$\frac{1}{p_x} = (aa) \quad \frac{1}{p_y} = (\beta\beta) \quad \frac{1}{p_z} = (\gamma\gamma)$$

$$m_x = m_\phi = \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} = \pm 0''.0014$$

$$m_y = m_s = \frac{m_0}{\sqrt{p_y}} = \pm 0.0006 \text{ m na 1 km}$$

$$m_z = m_a = \frac{m_0}{\sqrt{p_z}} = \pm 0''.176$$

Dla kontroli współczynników wag, obliczono przy ich pomocy, poraz drugi niewiadome x, y, z , na podstawie równań:

$$\begin{aligned}x &= (aa)(al) + (a\beta)(bl) + (a\gamma)(cl) = +2.6477 \\ y &= (a\beta)(al) + (\beta\beta)(bl) + (\beta\gamma)(cl) = +0.0043 \\ z &= (a\gamma)(al) + (\beta\gamma)(bl) + (\gamma\gamma)(cl) = +1.7032\end{aligned}$$

Mając obliczone poprawki $d\phi_1, ds$ i da_1 dla punktu Golub, można przy pomocy równań błędów:

$$\begin{aligned}d\phi_2 &= a_1 d\phi_1 + b_{1skm}(0.013355 - ds) + c_1 da_1 \\ d\lambda &= a_2 d\phi_1 + b_{2skm}(0.013355 - ds) - c_2 da_1\end{aligned}$$

przeliczyć współrzędne geograficzne ze systemu Helmertturm na punkt wyjścia Borowa Góra, po uprzednim obliczeniu współczynników dla odpowiedniego punktu.

Ze względu na to, że przeliczeniu podlegać będzie parę tysięcy punktów, zasięg pracy byłby bardzo duży. Dla uniknięcia jej przeliczono schematycznie punkty siatki geograficznej co $10'$, tak co do długości, jak i szerokości.

Ponieważ różnice są prawie stałe, można przeprowadzić interpolację dla dowolnych wartości.

Ważniejszą sprawą od średnich błędów niewiadomych, jest uświadomienie sobie, z jaką dokładnością poszczególne punkty będą przeliczane, t.z. jaka będzie dokładność funkcji liniowej:

$$F = f_1x + f_2y + f_3z$$

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że kwadrat średniego błędu będzie sumą kwadratów błędów poszczególnych niewiadomych:

$$M_F^2 = (f_1m_x)^2 + (f_2m_y)^2 + (f_3m_z)^2$$

Nie byłoby to słuszne, ze względu na to, że x, y, z nie są niezależnymi spostrzeżeniami, jak i m_x, m_y, m_z nie są niezależnymi błędami średnimi, a są zależne od bezpośrednich spostrzeżeń $l_1, l_2, \dots, l_n$. Przy zastosowaniu tego wzoru nie uwzględniłoby się wpływu równoczesnego błędów $m_xm_y, m_xm_z, m_y m_z$, co spowodowałoby otrzymanie nieprawidłowego błędu.

Jeżeli weźmie się pod uwagę funkcję liniową: $F = f_1x + f_2y + f_3z$ to średni błąd takiej funkcji będzie:

$$M_F^2 = m_0^2(f_1^2(aa) + f_2^2(\beta\beta) + f_3^2(\gamma\gamma) + 2f_1f_2(a\beta) + 2f_1f_3(a\gamma) + 2f_2f_3(\beta\gamma)) = \frac{m_0^2}{P}$$

$$\text{gdzie} \quad f_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y} \quad f_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Na podstawie związku współczynników równań normalnych $(aa), (ab), (ac), \dots$ i współczynników równań wag $(aa), (a\beta), (a\gamma), \dots$ można wyrażenie na $\frac{1}{P}$ ująć w innej formie bardziej zwięzłej:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{(aa)} + \frac{(f_2 \cdot 1)^2}{(bb \cdot 1)} + \frac{(f_3 \cdot 2)^2}{(cc \cdot 2)}$$

$$(f_2 \cdot 1) = f_2 - \frac{(ab)}{(aa)} f_1$$

$$(f_3 \cdot 1) = f_3 - \frac{(ac)}{(aa)} f_1$$

$$(f_3 \cdot 2) = (f_3 \cdot 1) - \frac{(bc \cdot 1)}{(bb \cdot 1)} (f_2 \cdot 1)$$

Ponieważ dokładność przeliczonych współrzędnych zależna będzie od ich położenia, należy obliczyć ją w specjalnie obranych miejscach.

Średnie błędy przeliczonych współrzędnych.

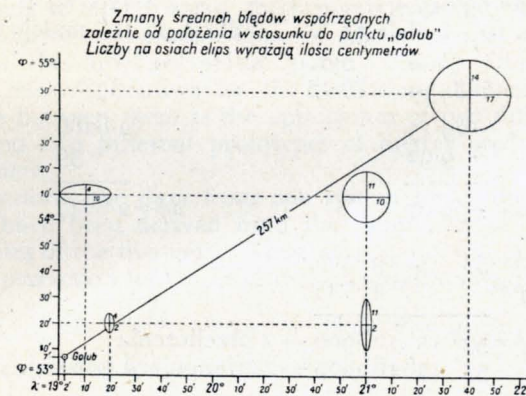
L.p.	Położenie punktu	Współczynniki funkcji				Odwrotność wagi $\frac{1}{P}$	Średnie błędy współrzędnych		Uwaga
		F_ϕ	$f_1 = a_1$	$f_2 = b_1$	$f_3 = c_1$		$\pm M_\phi$	$\pm M_\lambda$	
		F_λ	$f_1 = a_2$	$f_2 = b_2$	$f_3 = -c_2$				
1	$\phi = 53^\circ 20'$		+1.0000	-0.0069	-0.0031	0.18	" 0.0013	"	Średnie błędy szerokości i długości geograficznej, przeliczone dodatkowo na miarę liniową.
	$\lambda = 19^\circ 20'$		+0.0070	-0.0098	-0.0062	0.12		0.0011	
2	$\phi = 53^\circ 20'$		+0.9994	-0.0064	-0.0206	1.17	0.0034	0.11 m	
	$\lambda = 21^\circ 00'$		+0.0460	-0.0645	-0.0057	0.11		0.0010	
3	$\phi = 54^\circ 10'$		+0.9998	-0.0342	-0.0014	0.18	0.0013	0.04 m	
	$\lambda = 19^\circ 10'$		+0.0032	-0.0044	-0.0311	2.95		0.0055	
4	$\phi = 54^\circ 10'$		+0.9992	-0.0336	-0.0206	1.20	0.0035	0.11 m	
	$\lambda = 21^\circ 00'$		+0.0474	-0.0658	-0.0306	2.90		0.0054	
5	$\phi = 54^\circ 50'$		+0.9987	-0.0550	-0.0276	2.13	0.0046	0.14 m	
	$\lambda = 21^\circ 40'$		+0.0650	-0.0896	-0.0509	7.88		0.0089	

Zestawienie to wskazuje, że błędy szerokości M_ϕ zwiększają się ze wzrostem długości, a błędy długości M_λ ze wzrostem szerokości, licząc od punktu Golub.

Dla $\Delta\phi = 1^\circ$ i $\Delta\lambda = 2^\circ$ błędy osiągną wielkość 1 dm. Dla punktu $\phi = 54^\circ 50'$, $\lambda = 21^\circ 40'$ t.j. dla odległości 257 km od punktu Golub, $M_\phi = \pm 0.14$ m, $M_\lambda = \pm 0.17$ m.

Jeżeli tabelkę powyższą ujmie się graficznie, to będzie można zorientować się łatwiej w zmianach błędów zależnie od położenia punktów.

Dla szerokości geograficznych użyte są linie pionowe, a dla długości linie poziome. Błędy M_ϕ przedstawiona są na pionowych, a M_λ na poziomych osiach elips.



rys.10

Na zachód od południka $\lambda = 19^\circ 02'$, obrazy zmian błędów będą odbiciem zwierciadlanym części wschodniej.

Przeprowadzone badanie dokładności wskazuje na dopuszczalność użycia przeliczonych współrzędnych do wszelkich zadań pomiarowych, o ile odległości od punktu wyjścia nie będą przekraczać dopuszczalnej granicy.

9. Przykład.

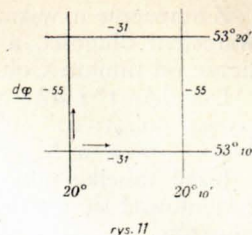
Dla zaznajomienia się ze sposobem przeliczenia, weźmy współrzędne punktu Prioma na 3 miejsca dziesiętne, gdyż wszystkie punkty II, III i IV rzędu podane są z tą dokładnością.

Zadanie polegać będzie na przeliczeniu współrzędnych geograficznych triangulacji niemieckiej na współrzędne w systemie polskim. Niemieckie współrzędne wymienione punktu są:

$$\phi = 53^\circ 15' 19''.525 \quad \lambda = 20^\circ 03' 13''.576$$

Z tablic dla $d\phi$ wziąć najbliższe wartości, mniejsze i większe od podanych współrzędnych.

$$\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ \\ \phi = 53^\circ 10' - 2.6286 \\ \quad \quad \quad -55 \\ 53^\circ 20' - 2.6231 \\ \lambda = 20^\circ 10' \\ \phi = 53^\circ 10' - 2.6255 \\ \quad \quad \quad -55 \\ 53^\circ 20' - 2.6200 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ \\ \phi = 53^\circ 10' - 2.6286 \\ \quad \quad \quad -55 \\ 53^\circ 20' - 2.6231 \\ \lambda = 20^\circ 10' \\ \phi = 53^\circ 10' - 2.6255 \\ \quad \quad \quad -55 \\ 53^\circ 20' - 2.6200 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} -31 \\ -31 \end{array}$$



Interpolację przeprowadzamy dla dziesiętnych minut:

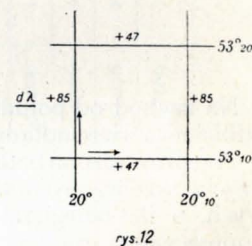
$$\begin{array}{l} 20'' = 0.3 \\ \phi = 53^\circ 15' 3 \\ \text{dla } \phi \text{ na } 10' \text{ maleje } 55 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 1' \quad \quad \quad \text{,, } 5.5 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 5.3 \quad \quad \quad \text{,, } 29.15 \\ \quad \quad \quad -29.15 \\ \quad \quad \quad -9.92 \\ \hline \text{Suma zmian} = -39.07 \end{array} \quad \begin{array}{l} 14'' = 0.2 \\ \lambda = 20^\circ 03' 2 \\ \text{dla } \lambda \text{ na } 10' \text{ maleje } 31 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 1' \quad \quad \quad \text{,, } 3.1 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 3.2 \quad \quad \quad \text{,, } 9.92 \\ \quad \quad \quad 2.6286 \\ \quad \quad \quad -39 \\ \hline d\phi = 2.6247 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phi = 53^\circ 15' 19'' \cdot 525 \\ d\phi = \quad \quad \quad -2'' \cdot 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \phi = 53^\circ 15' 16'' \cdot 900 - \text{z przeliczenia} \\ 53^\circ 15' 16'' \cdot 899 - \text{z triangulacji polskiej.} \end{array}$$

z tablic dla $d\lambda$.

$$\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ \\ \phi = 53^\circ 10' - 1.0868 \\ \quad \quad \quad +85 \\ 53^\circ 20' - 1.0953 \\ \lambda = 20^\circ 10' \\ \phi = 53^\circ 10' - 1.0915 \\ \quad \quad \quad +85 \\ 53^\circ 20' - 1.1000 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ \\ \phi = 53^\circ 10' - 1.0868 \\ \quad \quad \quad +85 \\ 53^\circ 20' - 1.0953 \\ \lambda = 20^\circ 10' \\ \phi = 53^\circ 10' - 1.0915 \\ \quad \quad \quad +85 \\ 53^\circ 20' - 1.1000 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} +47 \\ +47 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{dla } \phi \text{ na } 10' \text{ rośnie } 85 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 1' \quad \quad \quad \text{,, } 8.5 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 5.3 \quad \quad \quad \text{,, } 45.05 \\ \quad \quad \quad +45.05 \\ \quad \quad \quad +15.04 \\ \hline \text{Suma zmian} = +60.09 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dla } \lambda \text{ na } 10' \text{ rośnie } 47 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 1' \quad \quad \quad \text{,, } 4.7 \\ \quad \quad \quad \text{,, } 3.2 \quad \quad \quad \text{,, } 15.04 \\ \quad \quad \quad 1.0868 \\ \quad \quad \quad +60 \\ \hline d\lambda = 1.0928 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ 03' 13'' \cdot 576 \\ d\lambda = \quad \quad \quad -1'' \cdot 093 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda = 20^\circ 03' 12'' \cdot 483 - \text{z przeliczenia} \\ 20^\circ 03' 12'' \cdot 484 - \text{z triangulacji polskiej.} \end{array}$$

10. Summary.

The transfer of geodetic data from one system of geographical co-ordinates to another.

In the north-western part of Poland a triangulation had been laid down comprising some thousands of points, ranging from the I to the IV order (Westpreuss. Dreiecksnetz, 1899-1903), a great part of which is situated on the Polish territory.

To connect and unite this triangulation, in respect of its value and accuracy, with the whole system of the new Polish triangulation (Borowa Góra being its first astronomical point), a first order net Warszawa-Toruń was laid down in the year 1933. This new net comprised seven points of the old first order triangulation. The angles being observed anew, these points received new values of geographical co-ordinates. One of those points, Golub, was chosen as the auxiliary initial point. Bessel's ellipsoid is the common reference surface for the two triangulations. The only difference between them is the application of two different initial points, and two different prototypes of metres used at the base measurement.

To transform the data from one system to another, two basic formulæ have been derived from the differences of geographical co-ordinates of the two nets. They are:

1) the correction for (to be added to) geographical latitude

$$d\phi_2 = a_1 d\phi_1 + b_1 s_{km} (0.013355 - ds) + c_1 da_1$$

2) the correction for geographical longitude

$$d\lambda = a_2 d\phi_1 + b_2 s_{km} (0.013355 - ds) - c_2 da_1$$

where $d\phi_1 = +2'' \cdot 6477$ is the correction of initial point Golub,
 $ds = +0.004283$ m is the correction for 1 km of length,
 $+0.013355$ m is the difference between the Prussian prototype of metre and the international metre for the distance of 1 km,
 $da_1 = +1'' \cdot 7028$ is the correction for direction from initial point Golub.

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ are the coefficients for any point which is to be transferred.

$d\phi_2$ i $d\lambda$ are the resulting, final corrections.

The formulæ may be applied only to the triangulations of a corresponding degree of accuracy.

The mean errors of co-ordinates depend on how the point is situated in relation to the initial point Golub, and they increase with the distance; but their quantity does not surpass 0.1 m for the difference of latitude $\Delta\phi = 1^\circ$ and the difference of longitude $\Delta\lambda = 2^\circ$, which means that the recalculated co-ordinates are applicable to all kinds of surveying works.

To transfer some thousands of points by means of the said two formulæ would be an immense and troublesome work to perform. To facilitate the recalculation, special tabulæ have been reckoned

for each 10' difference in latitude and longitude. By using those tables any reckoner, even not a specialist in the subject, can recalculate a point in the space of some minutes.

11. Literatura.

- Bowie — *Method of Triangulation Adjustment*. Special Publ. No. 159. Washington, 1930.
- Clark, D. — *Plane and Geodetic Surveying*. London, 1937.
- Close, Ch., and Winterbotham, H. St. J. L. — *Text Book of Topographical and Geographical Surveying*. London, 1925.
- Survey Computations. Stationery Office, London, 1932. To be used in conjunction with the *Text Book of Topographical Surveying* (Close and Winterbotham).
- Förster-Schütz. — *Systematische Fehler in Geod. Netzen*. Veröff d. Preuss. Geod. Inst., 1929.
- Hodgson, C. V. — *Manual of First Order Triangulation*. Special Publ. No. 120. Washington, 1926.
- Jordan-Eggert — *Handbuch der Vermessungskunde*. Dritter Band. Stuttgart, 1923.
- Krassowsky, Th. N. — *Über die Methode zur Berechnung der Triangulation erster Ordnung in der U.S.S.R.* Verhandlung der 5 Tagung der Balt. Geod. Kommission. Helsinki, 1935.
- Perrier, G. — *Propositions pour les Bases et Triangulation du I ord.* Paris Bul. Geod., 1928.
- Perrier, G. — *Le progrès de la Géodésie, de la Topographie et de la Cartographie au cours du dernier demi-siècle*. Génie Civil, Nov. 1930.
- Service Géographiques de l'Armée — *Formules et tables pour la transformation des coordonnées des points de l'ancienne triangulation de la France dans la nouvelle triangulation*. Paris, Mai 1922.
- Tardi, P. — *Traité de Géodésie*. Paris, 1934.
- Warchałowski, E. — *Rachunek wyrównania według metody najmniejszych kwadratów*. Warszawa, 1923.
- Weigel, K. — *Rachunek wyrównawczy wedle metody najmniejszych kwadratów*. Lwów, 1923.

Tablice poprawek $d\phi$ i $d\lambda$

Poprawki d ϕ w sekundach ze znakiem ujemnym.

$\lambda \backslash \phi$		16° 30'	Δ	16° 40'	Δ	16° 50'	Δ	17° 00'	Δ	17° 10'
55° 00'										
50	Δ									2.6234
40	Δ	2.6401	28	2.6373	28	2.6345	28	2.6317	28	2.6289
30	Δ	2.6456	28	2.6428	28	2.6400	28	2.6372	28	2.6344
20	Δ	2.6511	28	2.6483	27	2.6456	28	2.6428	28	2.6400
10	Δ	2.6566	28	2.6538	27	2.6511	28	2.6483	28	2.6455
54 00	Δ	2.6621	27	2.6594	28	2.6566	28	2.6538	28	2.6510
50	Δ	2.6676	27	2.6649	28	2.6621	28	2.6593	28	2.6565
40	Δ	2.6732	28	2.6704	28	2.6676	28	2.6648	28	2.6620
30	Δ	2.6787	28	2.6759	28	2.6731	28	2.6703	28	2.6675
20	Δ	2.6842	28	2.6814	27	2.6787	28	2.6759	28	2.6731
10	Δ	2.6897	28	2.6869	27	2.6842	28	2.6814	28	2.6786
53 00	Δ	2.6952	27	2.6925	28	2.6897	28	2.6869	28	2.6841
50	Δ	2.7007	27	2.6980	28	2.6952	28	2.6924	28	2.6896

$\lambda \backslash \phi$		17° 10'	Δ	17° 20'	Δ	17° 30'	Δ	17° 40'	Δ	17° 50'
55° 00'										
50	Δ	2.6234	28	2.6206	28	2.6178	29	2.6149	29	2.6120
40	Δ	2.6289	28	2.6261	28	2.6233	29	2.6204	28	2.6176
30	Δ	2.6344	28	2.6316	28	2.6288	29	2.6259	28	2.6231
20	Δ	2.6400	29	2.6371	28	2.6343	28	2.6315	29	2.6286
10	Δ	2.6455	28	2.6427	29	2.6398	28	2.6370	29	2.6341
54 00	Δ	2.6510	28	2.6482	29	2.6453	28	2.6425	29	2.6396
50	Δ	2.6565	28	2.6537	28	2.6509	29	2.6480	29	2.6451
40	Δ	2.6620	28	2.6592	28	2.6564	29	2.6535	28	2.6507
30	Δ	2.6675	28	2.6647	28	2.6619	29	2.6590	28	2.6562
20	Δ	2.6731	29	2.6702	28	2.6674	28	2.6646	29	2.6617
10	Δ	2.6786	28	2.6758	29	2.6729	28	2.6701	29	2.6672
53 00	Δ	2.6841	28	2.6813	29	2.6784	28	2.6756	29	2.6727
50	Δ	2.6896	28	2.6868	28	2.6840	29	2.6811	29	2.6782

Poprawki $d\phi$ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		17° 50'	Δ	18° 00'	Δ	18° 10'	Δ	18° 20'	Δ	18° 30'
55° 00'	Δ									
50	Δ	2-6120	28	2-6092	29	2-6063	29	2-6034	30	2-6004
		56		55		55		55		55
40	Δ	2-6176	29	2-6147	29	2-6118	29	2-6089	30	2-6059
		55		55		55		55		56
30	Δ	2-6231	29	2-6202	29	2-6173	29	2-6144	29	2-6115
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-6286	29	2-6257	29	2-6228	29	2-6199	29	2-6170
		55		55		55		55		55
10	Δ	2-6341	29	2-6312	29	2-6283	29	2-6254	29	2-6225
		55		55		55		55		55
54 00	Δ	2-6396	29	2-6367	29	2-6338	29	2-6309	29	2-6280
		55		56		56		55		55
50	Δ	2-6451	28	2-6423	29	2-6394	30	2-6364	29	2-6335
		56		55		55		56		56
40	Δ	2-6507	29	2-6478	29	2-6449	29	2-6420	29	2-6391
		55		55		55		55		55
30	Δ	2-6562	29	2-6533	29	2-6504	29	2-6475	29	2-6446
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-6617	29	2-6588	29	2-6559	29	2-6530	29	2-6501
		55		55		55		55		55
10	Δ	2-6672	29	2-6643	29	2-6614	29	2-6585	29	2-6556
		55		55		55		55		55
53 00	Δ	2-6727	29	2-6698	29	2-6669	29	2-6640	29	2-6611
		55		56		56		56		55
50	Δ	2-6782	28	2-6754	29	2-6725	29	2-6696	30	2-6666

λ ϕ		18° 30'	Δ	18° 40'	Δ	18° 50'	Δ	19° 00'	Δ	19° 10'
55° 00'	Δ									
50	Δ	2-6004	29	2-5975	30	2-5945	29	2-5916	30	2-5886
		55		55		56		55		55
40	Δ	2-6059	29	2-6030	29	2-6001	30	2-5971	30	2-5941
		56		55		55		55		55
30	Δ	2-6115	30	2-6085	29	2-6056	30	2-6026	30	2-5996
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-6170	30	2-6140	29	2-6111	30	2-6081	30	2-6051
		55		56		55		55		55
10	Δ	2-6225	29	2-6196	30	2-6166	30	2-6136	30	2-6106
		55		55		55		55		56
54 00	Δ	2-6280	29	2-6251	30	2-6221	30	2-6191	29	2-6162
		55		55		55		56		55
50	Δ	2-6335	29	2-6306	30	2-6276	29	2-6247	30	2-6217
		56		55		55		55		55
40	Δ	2-6391	30	2-6361	30	2-6331	29	2-6302	30	2-6272
		55		55		56		55		55
30	Δ	2-6446	30	2-6416	29	2-6387	30	2-6357	30	2-6327
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-6501	30	2-6471	29	2-6442	30	2-6412	30	2-6382
		55		55		55		55		55
10	Δ	2-6556	30	2-6526	29	2-6497	30	2-6467	30	2-6437
		55		56		55		56		56
53 00	Δ	2-6611	29	2-6582	30	2-6552	29	2-6523	30	2-6493
		55		55		55		55		
50	Δ	2-6666	29	2-6637	30	2-6607	29	2-6578		

Poprawki $d\phi$ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		19° 10'	Δ	19° 20'	Δ	19° 30'	Δ	19° 40'	Δ	19° 50'
55° 00'	Δ									2-5710
50	Δ	2-5886	30	2-5856	30	2-5826	31	2-5795	30	55
		55		55		55		56		2-5765
40	Δ	2-5941	30	2-5911	30	2-5881	30	2-5851	31	55
		55		55		55		55		2-5820
30	Δ	2-5996	30	2-5966	30	2-5936	30	2-5906	31	55
		55		55		55		55		2-5875
20	Δ	2-6051	30	2-6021	30	2-5991	30	2-5961	31	55
		55		55		55		55		2-5930
10	Δ	2-6106	30	2-6076	30	2-6046	30	2-6016	30	56
		56		56		56		55		2-5986
54 00	Δ	2-6162	30	2-6132	30	2-6102	31	2-6071	30	55
		55		55		55		55		2-6041
50	Δ	2-6217	30	2-6187	30	2-6157	31	2-6126	30	55
		55		55		55		56		2-6096
40	Δ	2-6272	30	2-6242	30	2-6212	30	2-6182	31	55
		55		55		55		55		2-6151
30	Δ	2-6327	30	2-6297	30	2-6267	30	2-6237	31	55
		55		55		55		55		2-6206
20	Δ	2-6382	30	2-6352	30	2-6322	30	2-6292	30	56
		55		55		55		55		2-6262
10	Δ	2-6437	30	2-6407	30	2-6377	30	2-6347	30	55
		56		56		55		55		2-6317
53 00	Δ	2-6493	30	2-6463	31	2-6432	30	2-6402	30	55
										2-6372

λ ϕ		19° 50'	Δ	20° 00'	Δ	20° 10'	Δ	20° 20'	Δ	20° 30'
55° 00'	Δ									
50	Δ	2-5710	31	2-5679	30	2-5649	31	2-5618	31	2-5587
		55		55		55		55		55
40	Δ	2-5765	31	2-5734	30	2-5704	31	2-5673	31	2-5642
		55		56		55		55		55
30	Δ	2-5820	30	2-5790	31	2-5759	31	2-5728	31	2-5697
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-5875	30	2-5845	31	2-5814	31	2-5783	31	2-5752
		55		55		55		55		55
10	Δ	2-5930	30	2-5900	31	2-5869	31	2-5838	31	2-5807
		56		55		55		55		55
54 00	Δ	2-5986	31	2-5955	31	2-5924	31	2-5893	31	2-5862
		55		55		56		56		56
50	Δ	2-6041	31	2-6010	30	2-5980	31	2-5949	31	2-5918
		55		55		55		55		55
40	Δ	2-6096	31	2-6065	30	2-6035	31	2-6004	31	2-5973
		55		56		55		55		55
30	Δ	2-6151	30	2-6121	31	2-6090	31	2-6059	31	2-6028
		55		55		55		55		55
20	Δ	2-6206	30	2-6176	31	2-6145	31	2-6114	31	2-6083
		56		55		55		55		55
10	Δ	2-6262	31	2-6231	31	2-6200	31	2-6169	31	2-6138
		55		55		55		55		55
53 00	Δ	2-6317	31	2-6286	31	2-6255	31	2-6224	31	2-6193
		55		55						
		2-6372	31	2-6341						

Poprawki $d\phi$ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		20° 30'	Δ	20° 40'	Δ	20° 50'	Δ	21° 00'	Δ	21° 10'
55° 00'		2-5587	31	2-5556	32	2-5524	31	2-5493	32	2-5461
	Δ	55		55		55		55		55
50		2-5642	31	2-5611	32	2-5579	31	2-5548	32	2-5516
	Δ	55		55		56		55		56
40		2-5697	31	2-5666	31	2-5635	32	2-5603	31	2-5572
	Δ	55		55		55		55		55
30		2-5752	31	2-5721	31	2-5690	32	2-5658	31	2-5627
	Δ	55		55		55		55		55
20		2-5807	31	2-5776	31	2-5745	32	2-5713	31	2-5682
	Δ	55		55		55		56		55
10		2-5862	31	2-5831	31	2-5800	31	2-5769	32	2-5737
	Δ	56		55		55		55		55
54 00		2-5918	32	2-5886	31	2-5855	31	2-5824	32	2-5792
	Δ	55		56		55		55		55
50		2-5973	31	2-5942	32	2-5910	31	2-5879	32	2-5847
	Δ	55		55		56		55		55
40		2-6028	31	2-5997	31	2-5966	32	2-5934	32	2-5902
	Δ	55		55		55		55		56
30		2-6083	31	2-6052	31	2-6021	32	2-5989	31	2-5958
	Δ	55		55		55		55		55
20		2-6138	31	2-6107	31	2-6076	32	2-6044	31	2-6013
	Δ	55		55		55		55		55
10		2-6193	31	2-6162	31	2-6131	32	2-6099	31	2-6068

λ ϕ		21° 10'	Δ	21° 20'	Δ	21° 30'	Δ	21° 40'
55° 00'		2-5461	31	2-5430	32	2-5398	32	2-5366
	Δ	55		55		55		55
50		2-5516	31	2-5485	32	2-5453	32	2-5421
	Δ	56		55		55		55
40		2-5572	32	2-5540	32	2-5508	32	2-5476
	Δ	55		55		55		55
30		2-5627	32	2-5595	32	2-5563	32	2-5531
	Δ	55		55		55		55
20		2-5682	32	2-5650	32	2-5618	32	2-5586
	Δ	55		55		55		55
10		2-5737	32	2-5705	32	2-5673	32	2-5641
	Δ	55		55		55		55
54 00		2-5792	32	2-5760	32	2-5728	32	2-5696
	Δ	55		56		56		56
50		2-5847	31	2-5816	32	2-5784	32	2-5752
	Δ	55		55		55		55
40		2-5902	31	2-5871	32	2-5839	32	2-5807
	Δ	56		55		55		55
30		2-5958	32	2-5926	32	2-5894	32	2-5862
	Δ	55		55		55		55
20		2-6013	32	2-5981	32	2-5949	32	2-5917
	Δ	55		55		55		55
10		2-6068	32	2-6036	32	2-6004	32	2-5972

Poprawki $d\lambda$ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		16° 30'	Δ	16° 40'	Δ	16° 50'	Δ	17° 00'	Δ	17° 10'
55° 00'										
	Δ									
50										1-0856
	Δ									84
40		1-0558	54	1-0612	53	1-0665	54	1-0719	53	1-0772
	Δ	82		82		82		83		84
30		1-0476	54	1-0530	53	1-0583	53	1-0636	52	1-0688
	Δ	81		82		82		83		82
20		1-0395	53	1-0448	53	1-0501	52	1-0553	53	1-0606
	Δ	80		81		81		81		82
10		1-0315	52	1-0367	53	1-0420	52	1-0472	52	1-0524
	Δ	80		80		81		81		82
54 00		1-0235	52	1-0287	52	1-0339	52	1-0391	51	1-0442
	Δ	79		79		80		81		81
50		1-0156	52	1-0208	51	1-0259	51	1-0310	51	1-0361
	Δ	78		79		79		79		80
40		1-0078	51	1-0129	51	1-0180	51	1-0231	50	1-0281
	Δ	78		78		79		79		79
30		1-0000	51	1-0051	50	1-0101	51	1-0152	50	1-0202
	Δ	77		78		78		79		79
20		0-9923	50	0-9973	50	1-0023	50	1-0073	50	1-0123
	Δ	76		77		77		77		78
10		0-9847	49	0-9896	50	0-9946	50	0-9996	49	1-0045
	Δ	76		76		77		77		78
53 00		0-9771	49	0-9820	49	0-9869	50	0-9919	48	0-9967
	Δ	75		76		76		77		77
50		0-9696	48	0-9744	49	0-9793	49	0-9842	48	0-9890

λ ϕ		17° 10'	Δ	17° 20'	Δ	17° 30'	Δ	17° 40'	Δ	17° 50'
55° 00'										
	Δ									
50		1-0856	53	1-0909	54	1-0963	53	1-1016	54	1-1070
	Δ	84		84		85		85		86
40		1-0772	53	1-0825	53	1-0878	53	1-0931	53	1-0984
	Δ	84		84		84		85		85
30		1-0688	53	1-0741	53	1-0794	52	1-0846	53	1-0899
	Δ	82		83		84		84		85
20		1-0606	52	1-0658	52	1-0710	52	1-0762	52	1-0814
	Δ	82		83		83		83		84
10		1-0524	51	1-0575	52	1-0627	52	1-0679	51	1-0730
	Δ	82		81		82		83		83
54 00		1-0442	52	1-0494	51	1-0545	51	1-0596	51	1-0647
	Δ	81		82		82		82		82
50		1-0361	51	1-0412	51	1-0463	51	1-0514	51	1-0565
	Δ	80		80		81		81		82
40		1-0281	51	1-0332	50	1-0382	51	1-0433	50	1-0483
	Δ	79		80		80		81		81
30		1-0202	50	1-0252	50	1-0302	50	1-0352	50	1-0402
	Δ	79		79		80		80		81
20		1-0123	50	1-0173	49	1-0222	50	1-0272	49	1-0321
	Δ	78		79		79		79		80
10		1-0045	49	1-0094	49	1-0143	50	1-0193	48	1-0241
	Δ	78		78		78		79		79
53 00		0-9967	49	1-0016	49	1-0065	49	1-0114	48	1-0162
	Δ	77		77		78		79		78
50		0-9890	49	0-9939	48	0-9987	48	1-0035	49	1-0084

Poprawki dλ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		17° 50'	Δ	18° 00'	Δ	18° 10'	Δ	18° 20'	Δ	18° 30'
55° 00'	Δ									
50	Δ	1-1070 86	53	1-1123 87	53	1-1176 87	53	1-1229 88	52	1-1281 87
40	Δ	1-0984 85	52	1-1036 85	53	1-1089 86	52	1-1141 86	53	1-1194 87
30	Δ	1-0899 85	52	1-0951 85	52	1-1003 85	52	1-1055 86	52	1-1107 86
20	Δ	1-0814 84	52	1-0866 84	52	1-0918 85	51	1-0969 85	52	1-1021 86
10	Δ	1-0730 83	52	1-0782 84	51	1-0833 84	51	1-0884 84	51	1-0935 85
54 00	Δ	1-0647 82	51	1-0698 83	51	1-0749 83	51	1-0800 84	50	1-0850 84
50	Δ	1-0565 82	50	1-0615 82	51	1-0666 83	50	1-0716 83	50	1-0766 83
40	Δ	1-0483 81	50	1-0533 81	50	1-0583 82	50	1-0633 83	50	1-0683 83
30	Δ	1-0402 81	50	1-0452 81	49	1-0501 81	49	1-0550 81	50	1-0600 82
20	Δ	1-0321 80	50	1-0371 81	49	1-0420 81	49	1-0469 81	49	1-0518 82
10	Δ	1-0241 79	49	1-0290 79	49	1-0339 80	49	1-0388 81	48	1-0436 81
53 00	Δ	1-0162 78	49	1-0211 79	48	1-0259 80	48	1-0307 80	48	1-0355 80
50	Δ	1-0084 78	48	1-0132 79	48	1-0180 80	47	1-0227 80	48	1-0275 81

λ ϕ		18° 30'	Δ	18° 40'	Δ	18° 50'	Δ	19° 00'	Δ	19° 10'
55° 00'	Δ									
50	Δ	1-1281 87	53	1-1334 88	53	1-1387 89	52	1-1439 89	52	1-1491 90
40	Δ	1-1194 87	52	1-1246 87	52	1-1298 88	52	1-1350 88	52	1-1402 89
30	Δ	1-1107 86	52	1-1159 87	51	1-1210 87	52	1-1262 88	51	1-1313 88
20	Δ	1-1021 86	51	1-1072 86	51	1-1123 86	51	1-1174 86	51	1-1225 87
10	Δ	1-0935 85	51	1-0986 85	51	1-1037 86	51	1-1088 87	50	1-1138 87
54 00	Δ	1-0850 84	51	1-0901 85	50	1-0951 85	50	1-1001 85	50	1-1051 85
50	Δ	1-0766 83	50	1-0816 84	50	1-0866 85	50	1-0916 85	50	1-0966 85
40	Δ	1-0683 83	49	1-0732 83	50	1-0782 84	49	1-0831 84	50	1-0881 85
30	Δ	1-0600 82	49	1-0649 82	49	1-0698 83	49	1-0747 83	49	1-0796 84
20	Δ	1-0518 82	49	1-0567 82	48	1-0615 83	49	1-0664 83	48	1-0712 83
10	Δ	1-0436 81	49	1-0485 82	48	1-0533 82	48	1-0581 82	48	1-0629 82
53 00	Δ	1-0355 80	48	1-0403 80	48	1-0451 81	48	1-0499 82	48	1-0547 83
50	Δ	1-0275 80	48	1-0323 81	47	1-0370 81	47	1-0417 82		

Poprawki dλ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		19° 10'	Δ	19° 20'	Δ	19° 30'	Δ	19° 40'	Δ	19° 50'
55° 00'	Δ									1-1791 92
50	Δ	1-1491 89	52	1-1543 89	52	1-1595 90	52	1-1647 90	52	1-1699 91
40	Δ	1-1402 89	52	1-1454 90	51	1-1505 89	52	1-1557 90	51	1-1608 90
30	Δ	1-1313 88	51	1-1364 88	52	1-1416 89	51	1-1467 89	51	1-1518 90
20	Δ	1-1225 87	51	1-1276 87	51	1-1327 88	51	1-1378 89	50	1-1428 89
10	Δ	1-1138 87	51	1-1189 88	50	1-1239 88	50	1-1289 88	50	1-1339 88
54 00	Δ	1-1051 85	50	1-1101 86	50	1-1151 86	50	1-1201 87	50	1-1251 88
50	Δ	1-0966 85	49	1-1015 85	50	1-1065 86	49	1-1114 86	49	1-1163 87
40	Δ	1-0881 85	49	1-0930 85	49	1-0979 86	49	1-1028 86	48	1-1076 86
30	Δ	1-0796 84	49	1-0845 84	48	1-0893 84	49	1-0942 85	48	1-0990 85
20	Δ	1-0712 83	49	1-0761 84	48	1-0809 84	48	1-0857 85	48	1-0905 85
10	Δ	1-0629 82	48	1-0677 83	48	1-0725 84	47	1-0772 83	48	1-0820 84
53 00	Δ	1-0547 82	47	1-0594 83	47	1-0641 84	48	1-0689 85	47	1-0736 85

λ ϕ		19° 50'	Δ	20° 00'	Δ	20° 10'	Δ	20° 20'	Δ	20° 30'
55° 00'	Δ	1-1791 92	52	1-1843 92	52	1-1895 93	52	1-1947 93	52	1-1999 94
50	Δ	1-1699 91	52	1-1751 92	51	1-1802 92	52	1-1854 93	51	1-1905 93
40	Δ	1-1608 90	51	1-1659 91	51	1-1710 91	51	1-1761 91	51	1-1812 92
30	Δ	1-1518 90	50	1-1568 90	51	1-1619 90	51	1-1670 91	50	1-1720 91
20	Δ	1-1428 89	50	1-1478 89	51	1-1529 90	50	1-1579 90	50	1-1629 91
10	Δ	1-1339 88	50	1-1389 89	50	1-1439 89	50	1-1489 90	49	1-1538 90
54 00	Δ	1-1251 88	49	1-1300 88	50	1-1350 89	49	1-1399 89	49	1-1448 89
50	Δ	1-1163 87	49	1-1212 87	49	1-1261 87	49	1-1310 88	49	1-1359 88
40	Δ	1-1076 86	49	1-1125 86	49	1-1174 87	48	1-1222 87	49	1-1271 88
30	Δ	1-0990 85	49	1-1039 86	48	1-1087 87	48	1-1135 87	48	1-1183 87
20	Δ	1-0905 85	48	1-0953 85	47	1-1000 85	48	1-1048 86	48	1-1096 87
10	Δ	1-0820 84	48	1-0868 85	47	1-0915 85	47	1-0962 86	47	1-1009 86
53 00	Δ	1-0736 84	47	1-0783 85						

Poprawki $\Delta\lambda$ w sekundach ze znakiem ujemnym.

λ ϕ		20° 30'	Δ	20° 40'	Δ	20° 50'	Δ	21° 00'	Δ	21° 10'
55° 00'	Δ	1-1999 94	51	1-2050 94	52	1-2102 95	51	1-2153 95	51	1-2204 95
50	Δ	1-1905 93	51	1-1956 93	51	1-2007 94	51	1-2058 94	51	1-2109 95
40	Δ	1-1812 92	51	1-1863 93	50	1-1913 93	51	1-1964 93	50	1-2014 93
30	Δ	1-1720 91	50	1-1770 91	50	1-1820 92	51	1-1871 93	50	1-1921 94
20	Δ	1-1629 91	50	1-1679 91	49	1-1728 91	50	1-1778 92	49	1-1827 92
10	Δ	1-1538 90	50	1-1588 91	49	1-1637 91	49	1-1686 91	49	1-1735 91
54 00	Δ	1-1448 89	49	1-1497 89	49	1-1546 90	49	1-1595 91	49	1-1644 91
50	Δ	1-1359 88	49	1-1408 89	48	1-1456 89	48	1-1504 89	49	1-1553 90
40	Δ	1-1271 88	48	1-1319 88	48	1-1367 89	48	1-1415 89	48	1-1463 90
30	Δ	1-1183 87	48	1-1231 88	47	1-1278 88	48	1-1326 89	47	1-1373 89
20	Δ	1-1096 87	47	1-1143 87	47	1-1190 87	47	1-1237 87	47	1-1284 87
10	Δ	1-1009	47	1-1056	47	1-1103	47	1-1150	47	1-1197

λ ϕ		21° 10'	Δ	21° 20'	Δ	21° 30'	Δ	21° 40'
55° 00'	Δ	1-2204 95	51	1-2255 95	51	1-2306 96	51	1-2357 97
50	Δ	1-2109 95	51	1-2160 96	50	1-2210 96	50	1-2260 96
40	Δ	1-2014 93	50	1-2064 94	50	1-2114 94	50	1-2164 95
30	Δ	1-1921 94	49	1-1970 93	50	1-2020 94	49	1-2069 94
20	Δ	1-1827 92	50	1-1877 93	49	1-1926 93	49	1-1975 93
10	Δ	1-1735 91	49	1-1784 92	49	1-1833 93	49	1-1882 93
54 00	Δ	1-1644 91	48	1-1692 91	48	1-1740 91	49	1-1789 92
50	Δ	1-1553 90	48	1-1601 91	48	1-1649 91	48	1-1697 92
40	Δ	1-1463 90	47	1-1510 90	48	1-1558 90	47	1-1605 90
30	Δ	1-1373 89	47	1-1420 89	48	1-1468 90	47	1-1515 90
20	Δ	1-1284 87	47	1-1331 88	47	1-1378 89	47	1-1425 89
10	Δ	1-1197	46	1-1243	46	1-1289	47	1-1336

Zamiana sekund na dziesiętne minuty.

Sekundy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0-00	0-02	0-03	0-05	0-07	0-08	0-10	0-12	0-13	0-15
10	0-17	0-18	0-20	0-22	0-23	0-25	0-27	0-28	0-30	0-32
20	0-33	0-35	0-37	0-38	0-40	0-42	0-43	0-45	0-47	0-48
30	0-50	0-52	0-53	0-55	0-57	0-58	0-60	0-62	0-63	0-65
40	0-67	0-68	0-70	0-71	0-73	0-75	0-77	0-78	0-80	0-82
50	0-83	0-85	0-87	0-88	0-90	0-92	0-93	0-95	0-97	0-98

SIEĆ TRIANGULACYJNA I. RZ. POLSKI

PODZIAŁKA 1:4 000 000

