R Z U T Y K A R T O G R A F I C Z N E

Rzut kartograficzny jest to metoda przedstawienia na plaszczyznie poludnikow i rownoleznikow trojwymiarowej bryly ziemskiej. Nazwa "rzut" utarla sie oddawna, chociaz wiekszosc stosowanych metod odtwarzania na plaszczyznie siatki geograficznej nie jest geometrycznie pojetym rzutowaniem. Slowo "odwzorowaniw" nie jest bardziej trafne; przyjmujemy oba terminy za rownoznaczne, ponieważ w piśmiennictwie i w podrecznikach spotykaja sie rowniw czesto i zawsze oznaczaja ten sam przedmiot.

Do przedstawienia siatki geograficznej na plaszczyznie trzeba obrac pewien zwiazek funkcyjny miedzy wspolrzednymi na plaszczyznie a wspolrzednymi na powierzchni krzywej, przyczem na plaszczyznie moga to byc wspolrzedne prostokatne X,Y lub biegunowe , a na powierzchni krzywej wspolrzedne geograficzne (szerokosc i dlugosc geograficzna) lub wspolrzedne lukowe s, u (dlugosc lukow poludnika i rownoleznika od poczatkowych linij ukladu).

Piszemy wiec ogolnie:

(1) ..... lub

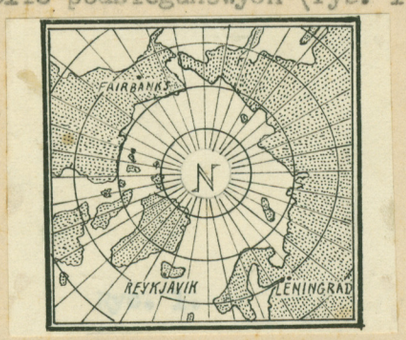
$$X = \varphi(\varphi,\lambda) = F(s,u)$$
$$Y = \psi(\varphi,\lambda) = F(s,u)$$
$$\alpha = \varphi(\varphi,\lambda) = F(s,u)$$
$$\rho = \psi(\varphi,\lambda) = F(s,u)$$

Rozpatrzmy kilka przykładów, które objaśnią sens tych związkow. Niech bedzie kula (globus) o promieniu R, na ktorej istnieje siec poludnikow i rownoleznikow. Na plaszczyzne, styczna w biegunie kuli, rozwi amy poludniki w ksztalt prostych bez zmiany ich dlugosci, rownolezniki zaś kreslimy w formie kol wspolsrodkowych, promieniem rownym lukowi poludnika liczonego od bieguna. Zwiazek funkcyjny miedzy wspolrzednymi biegunowymi na plaszczyznie a geograficznymi na kuli przyjmie ksztalt:

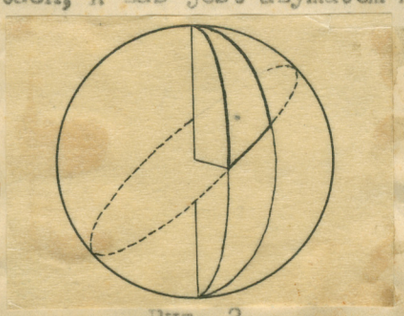
(2) .....

$$\alpha = \lambda$$
$$\rho = R(90^\circ - \varphi)$$

Mamy tu formuly na rzut biegunowy rownoodlegly, znany juz od 1510 roku i uzyteczny do przedstawienia okolic podbiegunowych (rys. 1).



Cecha tego rzutu jest wierne oddanie odleglosci od punktu centralnego (bieguna) do kazdego innego punktu na obszarze rzutu. Inne natomiast odleglosci, oraz powierzchnie i katy beda z n i e k s z t a l c o n e, tym wiecej, im dalej od punktu centralnego beda sie znajdowac. Z powodu zniekształcen rzut ten ma ograniczone zastosowanie, używa sie go jednak tam, gdzie chodzi o wierne zobrazowanie odleglosciod danego punktu, jak np. na mapach dla komunikacji lotniczej lub radiowej. Punkt centralny, czyli punkt przylozenia plaszczyzny mozna obrac gdziekolwiekbadz, biorac w miejsce bieguna z e n i t i podstawiajac zamiast wspolrzednych geograficznych wspolrzedne azymutalne D,A, gdzie D jest to odleglosc sferyczna od punktu centralnego O na kole wielkim, wyrazona w katach, A zas jest azymutem mierzonym z punktu centralnego.



Rys. 2.

Związek miedzy wspolrzednymi azymutalnymi a wspolrzednymi geograficznymi wyraza sie nastepujacymi formulami z trygonometrii sferycznej (rys.2):

(3) .....

$$\cos D = \sin\varphi_0 \cdot \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$\sin A = \cos\varphi \cdot \sin\lambda \cdot \operatorname{cosec} D$$

Rownanie pierwsze mozna sporowadzic do postaci rachunkowo dogodniejszej, kladac:

$\operatorname{cotang}\varphi_0 \cos\lambda = \operatorname{tang}\theta$; wówczas

(4).....

$$\cos D = \sin\varphi_0 \sec\theta \sin(\varphi+\theta)$$

$$\sin A = \cos\varphi \cdot \sin\lambda \operatorname{cosec} D$$

Wspolrzedne biegunowe α, ρ, na płaszczyznie mozna zastapic wspolrzednymi prostokatnymi X,Y, podstawiajac:

(5) .....

$$X = \rho \cdot \cos\alpha$$

$$Y = \rho \cdot \sin\alpha$$

Odwrotnie:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

(5a) .....

$$\alpha = \operatorname{arc\,tang} \frac{Y}{X}$$

i w ten sposob, dla kazdej pary wspolrzednych geograficznych φ, λ lub azymutalnych D,A, znajdujemy odpowiadajace w danym rzucie wspolrzedne prostokatne plaskie X,Y.

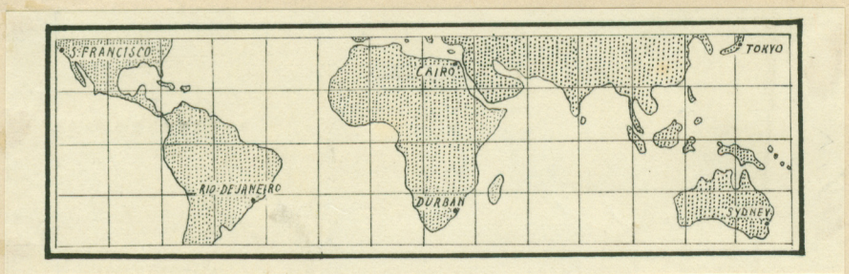
W a l e c i s t o ż e k maja powierzchnie rozwijalne na plaszczyznie bez zniekształcen. Jezeli owiniemy kule (globus) walcem, stycznym do rownika, wyprostujemy poludniki a rownolezniki narysujemy w odleglosciach wiernych od rownika, to formuły rzutowe beda miały postac:

(6) .....

$$X = R \cdot \varphi$$

$$Y = R \cdot \lambda$$

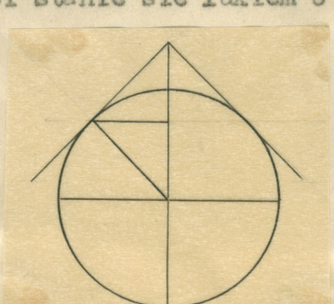
Jest to rzut walcowy rownoodlegly, nadajacy sie do przedstawienia pasow przyrownokowych. (Rys.3).



Rys. 3.

Opasujac globus walcem stycznym do poludnika i zakladajac wspolrzedne azymutalne D,A w miejsce geograficznych dostaniemy rzut walcowy rownoodlegly poprzeczny. Ten ostatni sposob przyjal Soldner dla wspolrzednych triangulacji Bawarii, rozpoczetej w 1805 roku, z tym ze zamiast kuli przyjal elipsoide w wymiarach Delambre'a. Walec mozna owinac dookola dowolnego kola wielkiego, uzyskujac najmniejsze zniekształcenia w poblizu tego kola; w praktyce, taki sposob zastosowano w austrjackiej triangulacji katastralnej obejmujacej Malopolske, z punktem we Lwowie, przez ktory przechodzilo kolo stycznosci, prostopadle do poludnika.

S t o ż e k mozna zbudowac tak, ze po nasadzeniu na kule bedzie on styczny do dowolnie obranego przekroju plaskiego tej kuli. W wypadkach skrajnych, kiedy przekroj jest jest kolem wielkim, stozek stanie sie walcem; kiedy przekroj maleje do punktu, stozek bedzie plaszczyzna. W przypadku normalnym dla kuli ziemskiej stozek jest styczny do rownoleznika biegnacego przez srodek rzutowanego obszaru i wtedy kat rozwarcia stozka β wyniknie z rownania: $\beta = 2\varphi_0$. Po rozwinieciu stozka na plaszczyzne rownoleznik stycznosci stanie sie lukiem o promieniu $\rho = MN = R \operatorname{cotang}\varphi_0$ (rys.4).



Rys. 4.

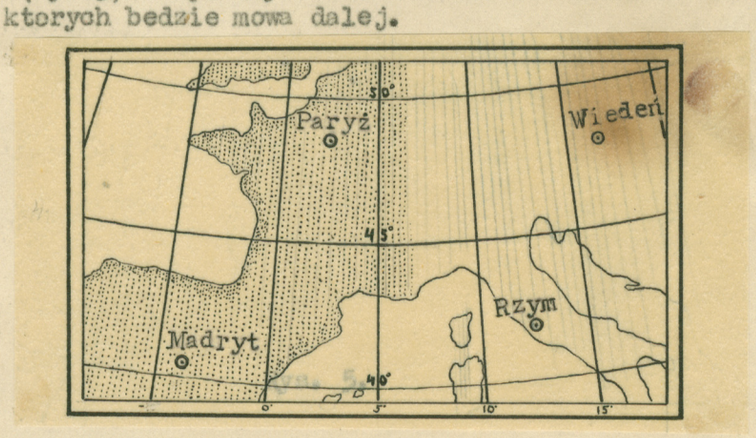
a ze MN tak sie ma do promienia rownoleznika stycznosci, jak $\sin\varphi_0$, wiec i wspolrzedna w ukladzie biegunowym, z poczatkiem w punkcie N bedzie:

(7) ..... $\alpha = \lambda \sin\varphi_0$

Druga wspolrzedna ukladu biegunowego, ρ, zależy od rodzaju obranego rzutu stozkowego. Zakladajac, ze poludniki zachowaja w rzycie swoja dlugosc, podobnie jak poprzednio mielismy w przypadku plaszczyzny i walca, otrzymamy dla rzutu stozkowego:

(7a) ..... $\rho = R\,\mathrm{cotang}\,\varphi_0 + R(\varphi_0 - \varphi)$

Rownania (7) i (7a) sa formulami dla rzutu stozkowego zwyklego, albo rownoodleglego Ptolomeusza, nadajacego sie do zobrazowania obszarow polozonych w poblizu jednego rownoleznika (Rys.5). W praktyce rzut ten ma niewielkie zastosowanie z powodu zniekształcen, o ktorych bedzie mowa dalej.



ZNIEKSZTALCENIA.

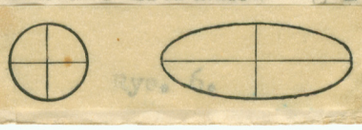
W przytoczonych wyzej wypadkach zobrazowania siatki geograficznej na plaszczyznie, walcu i stozku poludniki formowaly linie proste, bez zniekształcen dlugosciowych. Inaczej przedstawia sie sprawa z równoleznikami, ktore na obrazie plaskim raz sa liniami prostymi, gdzieindziej lukami kol, a co najwazniejsza posiadaja wymiary wydluzajace sie stopniowo w miare oddalania sie od punktu stycznosci plaszczyzny wzglednie kola stycznosci walca i stozka. Przed badaniem tego zjawiska ustalmy pojecia skali i zniekształcen.

S k a l a nazywamy stosunek wymiarow linii i powierzchni na obrazie do odpowiednich wymiarow na powierzchni ziemi. Rozrozniamy s k a l e g l o w n a, rozumiejac przez to stosunek, w jakim zmniejszamy bryle ziemska do rozmiarow globusu, na ktorym przeprowadzic mamy operacje rozplaszczenia, oraz s k a l e m i e j s c o w a czyli stosunek wymiarow w danym punkcie rozplaszczonego obrazu do wymiarow odpowiadajacych elementow na powierzchni ziemi. Skale glowna mozemy obrac dowolnie; przy obiorze zwykle kierujemy sie zachowaniem najprostszego stosunku, np. 2:1, 1:1, 1:2, 1:10 i t.p. ogolnie przyjetych jednostek miar malych, t.j. centymetra lub cala do jednostek miar duzych, t.j. kilometra lub mili. Stad mamy takie liczby, jak 1:50000, 1:100000, 1:63360, 1:126720 i t.d. Zaleznie od ilosci szczegolow, jaka zamierzamy umiescic na obrazie, obieramy jedna z tych liczb, jako skale glowna mapy.

Skala miejscowa w kazdym rzucie jest zmienna, wskutek niemozliwosci sztywnego rozwiniecia powierzchni kuli lub sferoidy na plaszczyznie. Roznice miedzy wymiarami elementow na obrazie a wymiarami odpowiadajacych elementow na oryginale nazywamy z n i e k s z t a l c e n i e m, przyczem rozrozniamy zniekształcenia l i n i o w e, p o w i e r z c h n i o w e i k a t o w e. Za oryginal, rzecz oczywista, rozumiemy powierzchnie ziemska zmniejszona do skali glownej.

Rozwazajac zniekształcenia w ktorymkolwiek punkcie obrazu wychodzimy z nastepujacych zalozen, sformulowanych przez Tissot'a:

1) uklad linij, przecinajacych sie pod katem prostym na jednej powierzchni regularnej mozna przeniesc na inna powierzchnie regularna, zachowujac proste katy w punktach przeciec sie tych linij; mowiac konkretnie, siatke geograficzna lub azymutalna na kuli mozna zobrazowac na ktorejkolwiek powierzchni rozwijalnej (plaszczyzna, walec, stozek) w ksztalcie linij przecinajacych sie rowniez pod katem prostym. Siatki, przecinajace sie pod prostym katem na jakiejkolwiek powierzchni regularnej nosza nazwe siatek o r t o g o n a l n y c h.
2) nieskonczenie male kolo na jednej powierzchni regularnej (oryginal) po rzutowaniu go na inna powierzchnie regularna (obraz) przedstawi sie ogolnie w ksztalcie nieskonczenie malej elipsy, przyczem za kierunki duzej i malej osi elipsy mozna przyjac kierunki siatki ortogonalnej. Elipsa taka (rys.6) nosi w kartografii nazwe w s k a z n i c y. Zas kierunki jej osi - nazwe kierunkow g l o w n y c h.



W przypadku rzutow normalnych, kiedy os ziemska pokrywa sie z osia walca lub stozka, albo kiedy plaszczyzna rzutu jest prostopadla do osi ziemskiej, wtedy kierunkami glownymi beda kierunki poludnikow i rownoleznikow. Dla rzutow skosnych i poprzecznych kierunki glowne wyznacza wielkie kola na kuli, przechodzace przez srodek rzutu (wertykaly), oraz przekroje kuli, prostopadle do linii zenit-nadir (almukantaraty). Dla uproszczenia, w dalszym ciagu rozpatrywac bedziemy normalne polozenia powierzchni rzutow.

Miare skali miejscowej w kierunkach glownych daje stosunek przyrostow długosci na obrazie do odpowiadajacych długosci na oryginale. W kierunku wiec poludnikow skala miejscowa wyniesie dx:dx', a w kierunku rownoleznikow dy:dy'. Skala miejscowa w dowolnym kierunku α, liczonym od poludnika wyniesie:

(8) ..... $$d_s = \sqrt{\frac{dx^2 \cdot dy^2}{dx^2 \sin^2\alpha + dy^2 \cos^2\alpha}}$$

Zniekształcenia, zgodnie z podana wyzej ich definicja, wynikna z roznic:
- dla kierunkow poludnikowych ..... n = (dx-dx'):dx' = (dx:dx')-1
- dla kierunkow rownoleznikowych .... m = (dy-dy'):dy' = (dy:dy')-1

Wielkosci n i m daja zniekształcenia liniowe w kierunkach glownych. Zniekształcenia powierzchniowe otrzymuje sie w prosty sposob, jako iloczyn zniekształcen liniowych w danym punkcie, wzietych dla kierunkow glownych. Wreszcie, miara zniekształcen katowych bedzie roznica $\beta-\beta'$, gdzie β jest katem utworzonym przez dany kierunek i poludnik, na obrazie, zaś β' -odpowiadajacym katem na oryginale. Z porownania przyrostow elementarnych na obrazie i na oryginale jest:

$$\frac{tang\,\beta}{tang\,\beta'} = \frac{dx}{dx'} \cdot \frac{dy}{dy'}$$, co po przeksztalceniu da: $$\frac{\sin(\beta-\beta')}{\sin(\beta+\beta')} = \frac{dx-dy}{dx+dy}$$

Najwieksze zniekształcenie katowe wypadnie wtedy, gdy $\sin(\beta+\beta')=90°$ i wyniesie:

(9) ..... $$\sin(\beta-\beta') = \frac{dx-dy}{dx+dy}$$

Dla zobrazowania miary zniekształcen kazdego rodzaju na skutek rozplaszczenia kuli, rozpatrzmy obrazy rownoleznikow w poznanych juz rownoodleglych rzutach: azymutalnym, walcowym i stozkowym. Poludniki w tych rzutach odwzorowaly sie, jak wiemy, bez zniekształcen. Na kuli, długosc rownoleznika o szerokosci φ wynosi $2\pi R\cos\varphi$; długość zas jego obrazu byla:
- w rzucie azymutalnym : $2\pi R\,(90°-\varphi)$
- w rzucie walcowym....: $2\pi R$
- w rzucie stozkowym ..: $2\pi R \sin\varphi_0\,(cotang\,\varphi_0 + \varphi_0 - \varphi)$

skad skala miejscowa dla danej szerokosci φ wyniesie (skala główna = 1):
- w rzucie azymutalnym : $dy:dy' = (90°-\varphi):\cos\varphi$
- w rzucie walcowym ...: $dy:dy' = 1:\cos\varphi$
- w rzucie stozkowym ....: $dy:dy' = [\sin\varphi_0\,(cotang\,\varphi_0 + \varphi_0 - \varphi)]:\cos\varphi$

Dobierajac odpowiednie φ dla odleglosci 500 km, 1000 km, 2000 km i 3000 km od punktu przylozenia plaszczyzny, walca i stozka, znajdziemy nastepujace zniekształcenia:

RODZAJ RZUTU	ZNIEKSZTALCENIA LINIOWE W ODLEGL.				
	500 km	1000 km	2000 km	3000 km	
Azymutalny rownoodl.	0.0011	0.0041	0.0166	0.0378	
Walcowy "	0.0031	0.0124	0.0512	0.1220	
Stozkowy "	0.0029	0.0113	0.0427	0.0935	na poludnie od $\varphi_0=45°$
" "	0.0033	0.0140	0.0703	0.2088	na polnoc od $\varphi_0=45°$

RODZAJ RZUTU	ZNIEKSZTALCENIA KATOWE W ODLEGL.				
	500 km	1000 km	2000 km	3000 km	
Azymutalny rownoodl.	1'53'	7'02"	28'16"	1°03'44"	
Walcowy "	4'13'	21'11"	1°25'49"	2°37'23"	
Stozkowy "	4'58'	19'19'	1°11'52"	2°33'35"	na poludnie od $\varphi_0=45°$
" "	5°40'	23'50'	1°56'45"	5°24'00"	na polnoc od φ_0 45°

Wracajac do rozwazan ogolniejszych nad rzytami kuli na powierzchnie rozwijalne ustalmy rownania na stosunki przyrostow długosci na obrazach i na oryginalach:

(10) .....

POWIERZCHNIA	Skala miejscowa w kier. poludnikow (dx:dx')	Skala miejscowa w kier. rownolezn. (dy:dy')
Plaszczyzna	$-\frac{d\rho}{R\cdot d\varphi}$	$\frac{\rho}{R\cdot\cos\varphi}$
Stozek, styczny w	$-\frac{d\rho}{R\cdot d\varphi}$	$\frac{\rho}{R\cdot\cos\varphi}\cdot\sin\varphi_0$
Walec, styczny wzdluz rownika	$\frac{dx}{R\cdot d\varphi}$	$\frac{1}{\cos\varphi}$

Rownania (10) odrazu daja klucz do znalezienia potrzebnych formul dla rzutow rownoodleglych, wiernopowierzchniowych i wiernokatnych (konforemnych) na kazdy typ rozwijalnej powierzchni w polozeniu normalnym. Kladac wspolrzedne azymutalne D,A zamiast geograficznych φ, λ, mozna wyprowadzic formuly (prawa rzutu) dla dowolnego polozenia powierzchni rzutu wzgledem kuli.

W polozeniu normalnym stycznej do kuli plaszczyzny rownanie $\alpha = \lambda$ zostaje niezmienne dla wszystkich rodzajow rzutow azymutalnych; podobnie bedzie w przypadku stozka, stycznego wzdluz rownoleznika φ_0, gdzie $\alpha = \lambda \cdot \sin\varphi_0$ i $\rho_0 = R \cdot \operatorname{ctg}\varphi_0$ wystapi stale, oraz w przypadku opasujacego rownik walca, gdzie $Y = R\lambda$ bedzie slusznym dla rzutu zarowno rownoodleglego, jak i wiernopowierzchniowego i wiernokatnego. Rozpatrzmy kolejno te trzy rodzaje rzutow.

RZUTY ROWNOODLEGLE.

Poznalismy juz prawa tych rzutow w drodze rozwazan geometrycznych. W praktyce te rzuty nie maja ~~ane~~ szerszego zastosowania, jakkolwiek elementarne pomiary na malych obszarach przenosi sie na plaszczyzne planu wedlug regul azymutalnego rzutu rownoodleglego, mianowicie, pomierzone azymuty A i odleglosci D rysuje sie na planie jako α i ρ.

Szukajac formul rzutowych analitycznie, zakladamy, ze poludniki zachowaja wiernie swoja dlugosc, czyli skala miejscowa w kierunku poludnikow zawsze pozostanie rowna jednosci. W takim razie wyrazy w srodkowej kolumnie tabelki (10) wypadnie przyrownac do jednosci, otrzymujac:

$d\rho = -R \cdot d\varphi$ dla plaszczyzny i stozka, oraz $dx = R \cdot d\varphi$ dla walca.

Calkujac stronami pierwsze rownanie mamy: $\int_{\rho}^{\rho_0} d\rho = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \cdot d\varphi$; $\rho - \rho_0 = R(\varphi_0 - \varphi)$; $\rho = \rho_0 + R(\varphi_0 - \varphi)$

Pamietamy, ze w rzutach stozkowych promien ρ_0 dla rownoleznika stycznosci φ_0 bedzie $\rho_0 = R \operatorname{ctg}\varphi_0$, zaś dla plaszczyzny stycznej w biegunie $\rho_0 = 0$, $\varphi_0 = 90^\circ$. Stad mamy dla rzutu na plaszczyzne:

(11) ..... $\rho = R(90^\circ - \varphi)$ jak w formule (2)

oraz w wypadku stozka stycznego w φ_0:

(12) ..... $\rho = R\operatorname{ctg}\varphi_0 + R(\varphi_0 - \varphi)$, jak w formule (7a)

W poszukiwaniu prawa dla rzutu walcowego rozumujemy podobnie:

(13) ..... $\frac{dx}{R\,d\varphi} = 1$; $\int_0^x dx = \int_0^{\varphi} R \cdot d\varphi$; $X = R \cdot \varphi$ jak w formule (6).

RZURY WIERNOPOWIERZCHNIOWE.

Rzuty tego typu spotyka sie w atlasach i w wydawnictwach statystycznych tam, gdzie chodzi o wierne zobrazowanie powierzchni ladow, wod, obszarow uprawnych i t.p. dla celow planimetrycznych.

Szukajac formul dla rzutow wiernopowierzchniowych, wrocmy do rys. 6, do elementarnego kola na oryginale i do wskaznicy, jako obrazu tego kola w rzucie. Jezeli powierzchnia kola i wskaznicy ma byc rowna, to powinno sie spelnic rownanie:

(14) ..... $dx \cdot dy = dx' \cdot dy' = \text{Const}$.

Podstawiajac zamiast dx, dy wyrazenia wziete z tabelki (10) otrzymamy:

$$-\frac{d\rho}{R \cdot d\varphi} = \frac{\rho}{R\cos\varphi} = 1 \quad \text{dla plaszczyzny}$$

$$-\frac{d\rho}{R\,d\varphi} = \frac{\rho \cdot \sin\varphi_0}{R \cdot \cos\varphi} = 1 \quad \text{dla stozka}$$

$$\frac{dx}{R\,d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = 1 \quad \text{dla walca.}$$

Calkujac drugie rownanie, mamy dla wiernopowierzchniowego rzutu stozkowego:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \rho \cdot d\rho = \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{R^2}{\sin\varphi_0} \cos\varphi \cdot d\varphi \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\rho^2 - \rho_0^2\right) = \frac{R^2}{\sin\varphi_0}\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right)$$

(15) ..... $$\rho = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{2R^2}{\sin\varphi_0} \cdot 2\sin\frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi_0 + \varphi}{2}}, \quad \text{gdzie } \rho_0^2 = R^2\operatorname{ctg}^2\varphi_0$$

W wypadku plaszczyzny, kiedy $\varphi_0 = 90^\circ$ i $\rho_0 = 0$ otrzymujemy dla rzutu wiernopowierzchniowego, po prostym przeksztalceniu formuly (15):

(16) ..... $$\rho = 2R \cdot \sin\frac{90^\circ - \varphi}{2}$$

Wreszcie, dla wiernopowierzchniowego rzutu walcowego bedzie:

(17) ..... $\int dx = \int R\cos\varphi \cdot d\varphi$; $X = R\sin\varphi$

RZUTY WIERNOKATNE.

Kiedy pomiary w terenie stały sie zajeciem duzej ilosci ludzi i instytucji, dla celow daleko wybiegajacych poza potrzeby geodezji i kartografii, wowczas nasunela sie

konieczność używania współrzędnych prostokątnych kartezjuszowskich dla dokładnego umiejscowienia wielkiej ilości punktów terenowych. Czynności rachunkowe na współrzędnych prostokątnych są szybsze niż przy użyciu jakiegokolwiek innego systemu, np. współrzędnych geograficznych, są przy tym łatwiejsze do opanowania dla szerokiego ogółu i jako pomocy wymagają jedynie tablic funkcji kątowych i arytmometru.

Spisy, albo katalogi pomierzonych punktów terenowych mogą być ujęte w jednolity, ciągły układ prostokątny na dużych przestrzeniach, obejmujących całe państwa. Dokładność współrzędnych punktów katalogowych, wymagana w praktyce zawiera się normalnie w granicach od centymetra do metra; wyrównanie sieci triangulacyjnej I rzędu daje dokładność jeszcze wyższą, dochodzącą do 1 milimetra. Do osiągnięcia takiej dokładności koniecznem jest nietylko najgłębiej zbadać kształt powierzchni ziemi, doprowadzić technikę pomiarów do granic precyzji, ale także opracować system przekształcenia współrzędnych sferycznych na płaskie tak, by przy zachowaniu ciągłości układu prostokątnego nie obniżyć potrzebnej dokładności.

Trudność w tym zadaniu nasuwa niedający się zmienić fakt, że jakakolwiek figura geometryczna na na kulistej powierzchni ziemi po przeniesieniu na płaszczyznę musi ulec deformacji, czy to przez wydłużenie boków, czy przez wykrzywienie linij, oraz że suma kątów w dowolnym trójkącie sferycznym wyniesie zawsze więcej niż 180 , mianowicie $180 + \varepsilon$, gdzie jest nadwyżka sferyczna. Nadwyżkę sferyczną można obliczyć z równania:

(18) ..... $\varepsilon = \frac{S}{R^2} \cdot \rho$ gdzie S jest powierzchnią trójkąta sferycznego,

R = promieniowi ziemskiemu, a ρ radianem.

Wobec rozmiarów Ziemi (średni promień R = 6377 km) nadwyżka sferyczna w trójkątach o powierzchni mniejszej niż 200 km kwadratowych wyniesie mniej, niż dokładność istniejących instrumentów katomierczych, można więc tej wielkości trójkąty uważać za płaskie. Ze wzrostem powierzchni trójkątów nadwyżka sferyczna szybko powiększa się i już dla równobocznego trójkąta o boku 1 stopień (111 km) osiąga 27 sekund.

Widzimy więc, że w żadnym razie nie można odtworzyć na płaszczyźnie dużych figur sferycznych z zachowaniem wierności kątów. Można natomiast obmyślec taki rzut, gdzie w dowolnym punkcie na obszarze rzutu m a l e f i g u r y zachowają podobieństwo, kosztem zmienności skali. Rzuty takie przyjęto nazywać rzutami wiernokątnymi albo konforemnymi, mimo iż duże figury nie zachowają ani wierności kątów ani podobieństwa z oryginałem; wierność kątów w granicach przyjętej w praktyce dokładności (sekunda) zachowa się jedynie przy spełnieniu określonych warunków. Warunkami tymi są: ograniczenie zasięgu rzutowanego obszaru i ograniczenie mierzonych w terenie geometrycznych figur. Jeżeli granice te wypadnie przekroczyć, to staje się koniecznym wprowadzenie poprawek zarówno do odległości, jak i do kątów. W podstawowych pracach triangulacyjnych poprawki te, t.zw. r e d u k c j e kątów i odległości stosuje się jako rzecz normalna; w pomiarach topograficznych nie wychodzących poza obszar 200 km kw. w większości wypadków poprawki te pomija się bez szkody dla dokładności.

Wracając raz jeszcze do wskaźnicy (rys. 6) stwierdzamy, że podobieństwo małych figur w rzucie zachowa się przy warunku, że dx:dy = dx:dy, co oznacza, że wskaźnica jest kołem. Udając się z równaniem dx = dy = Const. do tabelki (10) znajdziemy kolejno prawa rzutów dla wszystkich trzech rodzajów rozwijalnej na płaszczyznę powierzchni.

W wypadku płaszczyzny mamy:

$$\frac{\rho}{R\cos\varphi} = -\frac{d\rho}{R\,d\varphi} \;;\; \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$ całkując drugie równanie będzie:

$$\rho = C \cdot \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$ przyczem stała C może być dowolna, ma bowiem

wpływ tylko na skalę. Dla płaszczyzny stycznej w biegunie C = 2R, i

(19) ..... $$\rho = 2R \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Jest to formuła dla rzutu s t e r e o g r a f i c z n e g o. Łatwo obliczyć, że skal miejscowa w obu kierunkach głównych będzie jednakowa i wyniesie: $\frac{1}{\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}$

Dla stożka, stycznego wzdłuż równoleżnika φ_0 będzie:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot d\rho = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi} \cdot d\varphi \;;\; \rho = C \operatorname{tang}^{\sin\varphi_0}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Kładąc $\varphi = 0^\circ$ otrzymamy, że $C = \rho_{\text{równikowe}} = \frac{R \operatorname{cotang} \varphi_0}{\operatorname{tang}^{\sin\varphi_0}\left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2}\right)}$ i ostatecznie:

(20) ..... $$\rho = R \operatorname{cotang} \varphi_0 \left[\frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ - \varphi/2\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ - \varphi_0/2\right)}\right]^{\sin\varphi_0}$$

Wreszcie, dla opasującego równik walca będzie:

$$\frac{dx}{R \cdot d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \;;\; \int dx = \int \frac{R}{\cos\varphi} \cdot d\varphi \;,\; \text{skąd}$$

(21) ..... $$x = R \operatorname{log\,nat} \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Równanie (21) daje formułę na rzut walcowy wiernokątny Merkatora, rzut niezmiernie użyteczny w nawigacji morskiej i powietrznej, gdzie jedynym niezawodnym drogo-

wskazem najczesciej pozostaje busola magnetyczna. W rzucie Merkatora, kazda linia przecinajaca poludniki pod tymsamym katem bedzie linia prosta. Linie te, zwana loksodroma, nawigatorzy wyznaczaja przez przylozenie na mapie linijki i wykreslenie prostej, laczacej zadane dwa punkty, poczem przenosnikiem odmierzaja kat miedzy poludnikiem a wykreslona loksodroma i przyjmuja go jako kurs nawigacyjny. Kurs (kat γ) mozna rowniez okreslic droga rachunku, mianowicie, dla dwoch punktow o wspolrzednych φ_1, λ_1 i φ_2, λ_2 bedzie:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\log \operatorname{tang}(45^\circ + \varphi_2/2) - \log \operatorname{tang}(45^\circ + \varphi_1/2)} \cdot \frac{M}{\rho}$$, gdzie M = modul log zw, a ρ = radian

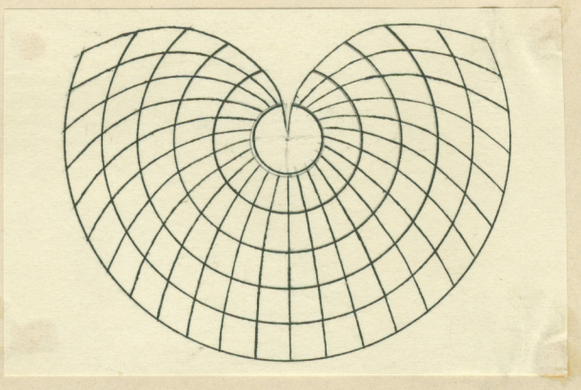
Loksodroma w ogolnym wypadku owija kule w ksztalcie spirali. W polozeniach skrajnych, kiedy kurs = 0 albo 180 loksodroma pokryje sie z poludnikiem; kiedy kurs = 90 albo 270 - loksodroma bedzie rownoleznikiem. Loksodroma nie jest najkrotsza droga miedzy dwoma punktami: droga taka bedzie ortodroma, czyli linia, lezaca na luku kola wielkiego. Dazac do skrocenia drogi przy jednoczesnym poslugiwaniu sie busola, nawigatorzy wyznaczaja przebieg ortodromy miedzy dwoma punktami, obieraja na niej punkty posrednie i zegluja na kolejnych kursach miedzy punktami posrednimi.

RZUTY KONWENCJONALNE.

Bezwzgledna wartosc zniekształcen w jakimkolwiek rzucie ograniczonego obszaru mozna zredukowac przez konwencjonalna zmiane skali glownej, przez zastosowanie siecznych powierzchni rozwijalnych, wreszcie przez rozbicie calosci rzutowanego obszaru na mniejsze czesci. Ponadto istnieje szereg rzutow umownych, niepodpadajacych pod wyzej rozpatrzone przypadki klasyczne, ktore konstruuje sie sposobem czysto geometrycznym. Z posrod tych szczegolnych rzutow dwa znalazly szerokie zastosowanie w kartografii praktycznej:

1) Rzut wielosciennny, polegajacy na prostopadlym rzutowaniu trapezow sferycznych na plaszczyzne sieczna w skrzyzowaniach siatki geograficznej, wyznaczajacej trapez. Sposob ten stosowano do konstrukcji map topograficznych w wielu panstwach w pierwszych dziesiatkach lat biezacego stulecia. Zaleta rzutu wielosciennego jest prostota konstrukcji i minimalne zniekształcenia w ramach jednego arkusza mapy. Wada jest niemozliwosc zestawienia wiecej niz dwoch arkuszy w sposob ciagly.

2) Rzut Bonne'a, w ktorym zbudowano wielkie dziela kartograficzne Francji, Polski, Rosji, i innych panstw europejskich w pierwszej polowie ubieglego wieku. Konstrukcja rzutu Bonne'a polega na tym, ze najpierw wykresla sie ze wspolnego srodka kola, promieniami rownymi odcinkom lukow poludnikow (jak w rzucie stozkowym rownoodleglym), a nastepnie, na wykreslonych kolach odklada sie wierne dlugosci rownoleznikow, poczynajac od poludnika centralnego (rys.7).



Rys. 7. Polkula w rzucie Bonne'a.

Rzut Bonne'a wprawdzie odtwarza powierzchnie wiernie, lecz wypacza w znacznej mierze ksztalty, oraz nie zachowuje wlasnosci siatek ortogonalnych. Istnieje wiele innych rzutow, w ktorych siatka geograficzna nie przecina sie pod katem prostym, jak naprzyklad rzut sinusoidalny Sanson'a, eliptyczny Mollweide'go, stozkowy Albersa. Rzuty te mozna spotkac w atlasach, w konstrukcji map w malych skalach.

Dla map topograficznych w duzej skali przeważnie brano rzut wielosciennny, lub Bonne'a, zanim nie przekonano sie o koniecznosci wprowadzenia rzutow wiernokatnych. W glowniejszych panstwach europejskich stan kartografii pod wzgledem rodzaju rzutow przedstawial sie nastepujaco:

Belgia	1:20000	Bonne'a	Hiszpania	1:50000	wielosciennny
W.Brytania	1:63360	Cassini	Niemcy	1:25000	wielosciennny
Czechoslowacja	1:75000	wielosciennny	Polska	1:25000	wielosciennny
Dania	1:20000	Bonne'a	Rosja	1:126000	wielosciennny
Jugoslawia	1:100000	wielosciennny	Szwajcaria	1:25000	Bonne'a
Francja	1:80000	Bonne'a	Wlochy	1:25000	wielosciennny

Wspolrzedne Cassini-Soldner, wynikajace z poprzecznego rownoodleglego rzutu walcowego.

RZUTY ELIPSOIDY NA POWIERZCHNIE ROZWIJALNE.

W rozwazanych dotychczas rzutach kartograficznych traktowalismy powierzchnie ziemska jako kule. Jest to pierwsze przyblizenie do rzeczywistego ksztaltu ziemi, wystarczajace tam, gdzie nie jest wymagana wysoka dokladnosc pomiarow. Nastepnym przyblizeniem bedzie e l i p s o i d a, czyli bryla utworzona z obrotu elipsy dookola osi mniejszej (rys. 8).



Rys. 8.

Liczne pomiary dlugosci poludnikow i rownoleznikow, dokonane przez Delambre'a, Clarke'a, Walbeck'a, Bessel'a, Hayford'a i innych, w zestawieniu z astronomicznie wyznaczonymi szerokosciami i dlugosciami wskazuja, ze splaszczenie bryly ziemskiej (a - b):a wynosi od 1:324 (Delambre) do 1:294 (Clarke), wymiary zas promienia rownika (polos a elipsoidy) waha sie u roznych autorow w granicach 1,5 kilometra.

Kazdy z obliczonych wymiarow ziemi moze byc sluszny dla pewnej czesci jej powierzchni, lecz bledny dla innej, ziemia bowiem nie tworzy na swojej powierzchni krzywizn dokladnie takich, jak krzywizny kol i elips. Powierzchnia oceanow na srednim poziomie, rozciagnieta popod ladami dalaby najblizszy prawdy ksztalt g e o i d y, czyli powierzchni, wyznaczonej przez styczne, prostopadle do fizycznego pionu w kazdym punkcie tej powierzchni.

Elipsoida jest znacznie wiecej zblizona do do ksztaltu geoidy, niz kula, lecz mimo to kierunki normalnych nb najtrafniej obranej elipsoidzie nie pokrywaja sie scisle z kierunkami pionu w naturze, i te wlasnie odchylki w kierunkach pionu sa glownym zrodlem rozbieznosci w datach geograficznych dla poszczegolnych punktow. W obiorze elipsoidy nie zawsze momentem decydujacym jest stopien jej przyblizenia do rzeczywistych ksztaltow ziemi na opracowywanym odcinku; najczesciej na wybor ma takze wplyw czynnik ekonomiczny. Jezeli np. w danym kraju istnieje pokazny dorobek kartograficzny, oparty na jednej elipsoidzie, sa opracowane dla tej powierzchni pomoce i tabele, to zawsze kontynuuje sie prace na tej niedoskonalej elipsoidzie - o ile bledy z tego powodu sa nieznaczne.

W kartografii idzie sie jeszcze dalej: zamiast elipsoidy bierze sie w pewnych wypadkach poprostu kule jako powierzchnie ziemska, mimo, iz splaszczenie 1:300 jest zupelnie dobrze uchwytne w kazdej skali. W pobliżu rownika, luk 1 stopnia poludnika wynosi 110564 m, a luk stopniowy rownoleznika 111307 m. Jezeli dla tych okolic przyjmiemy zamiast elipsoidy kule o srednim promieniu krzywizny, to dlugosc luku 1 stopnia wypadnie 110938 m; z tego widzimy, ze i na malych przestrzeniach wplyw splaszczenia jest znaczny. W zwyklym szkolnym globusie o srednicy 30 cm os obrotu powinna byc mniejsza od sredniey rownika o 1 mm. Pospolita mapa polkuli w poprzecznym azymutalnym rzucie rownoodleglym, w skali 1:60 miljonow bedzie przedstawiac uchwytna graficznie elipse. Jednakowoz dla map polkuli, dla globusow, dla map szkolnych, map przegladowych bierze sie jako oryginal kule.

Powodem tego sa zniekształcenia rzutowe, ktore w malych skalach, na powierzchni zwyklego formatu arkusza papieru znacznie przekraczaja blad, jaki moze powstac przez zaniedbanie splaszczenia. Rzut stereograficzny zniekształca obraz w stopniu 1:300 na odleglosci 740 km od punktu przylozenia plaszczyzny do kuli, rzuty stozkowe i walcowe jeszcze blizej, bo juz na odlegloscach okolo 500 km (patrz tabelka na str. 4). Jezeli wiec sporzadzamy arkusz mapy obejmujacej teren o sredniey ponad 700 km, to zniekształcenia rzutowe, ktorych normalnie nikt na papierze nie mierzy, beda na skrajach arkusza w przyblizeniu rowne deformacji z powodu pominiecia splaszczenia ziemi. Teren o sredniey 700 km na normalnego wymiaru arkuszu papieru (70x70 cm) wypadnie ujac w skali 1:2 000 000; stad wniosek, dla konstrukcji map w tej skali i mniejszych ziemie mozna uwazac za kule. Mapa w skalach wiekszych, np. 1:1 000 000 należy juz opierac na wymiarach elipsoidy.

Wymiary elipsoidy, przyjete przez kraje anglosaskie, jak rowniez przez Francje i Belgie w dawniejszych ich pracach wynosza:

(22) .....
os wieksza a=20 926348 stop (6 378249 m)
os mniejsza b=20 855233 stop (6 356515 m)
splaszczenie (a-b):a = 1:294,26

Jest to elipsoida Clarke'a z r. 1858. W Niemczech, w krajach poludniowej i srodkowej Europy, oraz w Rosji sowieckiej stosuje sie elipsoide Bessel'a w wymiarach po-

danych w roku 1878 przez pruski "Trig.Abteilung der Landesaufnahme":

(23) ..... a = 6 377397 m
b = 6 356079 m
(a-b):a = 1:299,15

W nowszych podstawowych pracach pomiarowych na calym swiecie rozpowszechnia sie elipsoida Hayforda z roku 1909, t.zw. miedzynarodowa, w wymiarach:

(24) ..... a = 6 378388 m
b = 6 356912 m
(a-b):a = 1:297

Zasady rzutow kartograficznych elipsoidy na plaszczyzny rozwijalne sa te same, co i w przypadku kuli, z tym ze zamiast jednej wielkosci promienia kuli wypadnie miec do czynienia z nastepujacymi promieniami krzywizn (rys.8):

1) Promien krzywizny poludnika, na rys. PD ..... $M = \frac{a^2 b^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$

albo $M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$ gdzie mimosrod $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$

2) Promien krzywizny poprzeczne, na rys. PP'' .... $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$

3) Promien krzywizny przekroju o azymucie α, na rys BB'' .... $R = \frac{N}{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}(\cos^2\varphi\cos^2\alpha}$

4) Sredni promien krzywizny ..... $\sqrt{M\cdot N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}$

5) Dlugosc luku poludnika, na rys. BC ..... $S = a(1-e^2)\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$

6) Promien rownoleznika na szer. φ ..... $r = N\cdot\cos\varphi$

7) Dlugosc luku rownoleznika ..... $u = 2\pi N\cos\varphi$

Widzimy, ze niejednorodne krzywizny eliptyczne wnosza sporo komplikacji do badan zniekształcen rzutowych i do sformowania praw rzutow. Naogol zagadnienia te rozwiazuje sie przez rozwiniecie funkcji w szeregi potegowe, ograniczone do tylu wyrazow, ile potrzeba do zachowania zalozonej dokladnosci. Wyraz $(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}$ wchodzacy do rownan na promienie krzywizn po rozwinieciu w szereg i uporządkowaniu wyrazow wedlug wielokrotnosci φ przyjmie nastepujacy kształt (e wzieto dla elipsoidy Bessel'a):

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2} = A_0 + A_2\cos 2\varphi + A_4\cos 4\varphi + A_6\cos 6\varphi + \ldots\ldots$$

gdzie $A_0, A_2, A_4, \ldots$ sa to wspolczynniki stale, zalezne od mimosrodu e:

$A_0 = 1{,}00503731$ $\quad A_6 = -2{,}0633\ 10$
$A_2 = -5{,}047849\ 10$ $\quad A_8 = 3{,}885\ 10$
$A_4 = 1{,}05637\ 10$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$

Wyraz $1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2\varphi = 14553{,}9708 + 14541{,}7844\cos 2 - 12{,}1728\cos 4 + 0{,}0135\cos 6$

Dlugosci lukow poludnika i rownoleznikow, oraz potrzebne promienie krzywizn mozna obliczyc, posługując sie powyzszymi formulami, ale najczesciej bedzie to trud niepotrzebny, gdyz istnieja gotowe tablice, zawierajace te wartosci dla argumentow o stalym, niewielkim odstepie, np. tablice Jordana dla elipsoidy Bessel'a. Dla dowolnej wielkosci argumentu posługujemy sie interpolacja wedlug formuly Newton'a:

(25)..... $x = x_0 + n\Delta x + n\Delta^2 x + n\Delta^3 x + \ldots\ldots\ldots$, gdzie n, n, n sa to wspolczynniki interpolacyjne, a Δx, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 x$ - kolejne roznice : $\Delta x = F - F$, $\Delta^2 x = \Delta x - \Delta x$, $\Delta^3 x = \Delta^2 x - \Delta^2 x$ i t.d. Wspolczynniki stale n, n, n, sa:

(26) .....

$+n_1$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$-n$ =	0,045	0,080	0,105	0,120	0,125	0,120	0,105	0,080	0,045
$+n$ =	0,028	0,048	0,060	0,064	0,062	0,056	0,045	0,032	0,016

Majac dlugosci lukow na elopsoidzie, potrafimy sporzadzic wiele rzutow elipsoidy na powierzchnie rozwijalne wedlug juz poznanych zasad. Naprzyklad, formula dla rzutu Merkatora, zmieniona dla elipsoidy bedzie:

(27) ..... $X = a\cdot\log\text{nat}\,\tan(45^\circ + \varphi/2) - a\cdot e^2\sin\varphi) - \frac{ae^2\sin^3\varphi}{3} + \ldots$

zas w rzucie wielosciennym i Bonne'a podstawiamy poprostu wartosci lukow eliptycznych zamiast kolowych.

Niekiedy stosuje sie metode rzutow podwojnych: najpierw elipsoidy na kule, potem kuli na powierzchnie rozwijalne, w zgory zalozonym rodzaju rzutu. Podwojne rzutowanie rozwinal L.Krüger okolo 1912 r. dla wiernokatnych rzutow elipsoidy na powierzchnie rozwijalne. Stosowane we wspolczesnej kartografii podstawowej rzuty wiernokatne, jak quasi-stereograficzny UIG, stozkowy Lamberta, walcowy poprzeczny Gauss-Krugera, mozna rozumiec jako rzuty podwojne, z tym, ze elipsoide rzutuje sie na kule rowniez wiernokatnie.

W wiernokatnym rzucie elipsoidy na kule wychodzimy z zalozenia, ze przyrosty

dlugosci w obu kierunkach glownych maja byc rowne tejsamej wartosci stalej, mianowicie:

(28) ..... $\frac{R \cdot d\varphi}{M \cdot d\varphi} = \frac{R \cos\varphi d\lambda}{N \cos\varphi \, dl} = m$

gdzie φ, l jest szerokoscia i dlugoscia geograficzna na kuli o promieniu R, odpowiednio do φ, λ na elipsoidzie o promieniach krzywizn glownych M i N.

Zakladajac, za stosunek przyrostow dlugosci $d\lambda : dl = k$ bedzie:

$$\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{M \cos\varphi}{N \cos\varphi} \cdot k$$

Po przeksztalceniach i calkowaniu piszemy ostateczna formule na rzut wiernokatny elipsoidy na kule:

(29) ..... $$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{C} \operatorname{tang}^k\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{k \cdot e}{2}}$$

Stala calkowania C mozna wyznaczyc przez zalozenie okreslonych warunkow dla rzutu, np. ze k = 1, czyli ze dlugosci geograficzne na elipsoidzie i na kuli maja byc rowne i ze rownoleznik, albo poludnik srodka rzutu zachowa rzeczywista swoja dlugosc na kuli.

Rzut podwojny jest jednym z kilku sposobow do uzyskania w koncowym wyniku formul na zwiazki miedzy wspolrzednymi plaskimi X,Y a geograficznymi Rzut stereograficzny elipsoidy na plaszczyzne, stosowany przed wojna w kartografii Polski byl obliczany dla argumentow lukowych s,u poludnika i rownoleznika; podobny rzut dla Francji oblicz yl Roussilhe dla argumentow katowych , ale Krüger dawniej jeszcze opracowal podwojny rzut stereograficzny, ktory w koncu daje te same wyniki co sposob polski czy francuski. Podobnie jest z rzutem walcowym poprzecznym (Merkatora) elipsoidy. Dawniej Gauss opracow wal system wspolrzednych sferoidalnych konforemnych, potem zamiast tego systemu wprowadzono sposob podwojnego rzutowania, przyjety wkoncu przez Niemcow jako "Doppelprojektion der Preussischen Landesaufnahme".

Prace rachunkowe w jakimkolwiek systemie rzutowania elipsoidy na plaszczyzne sa zmudne i dlugotrwale; ale raz wykonane, ujete w forme tablic, stanowia ogromne ulatwienie we wszelkich dalszych pracach pomiarowych i kartograficznych. Tablice stosowanych wiernokatnych rzutow kartograficznych zostaly wydane przez instytucje kartograficzne prawie kazdego panstwa do powszechnego uzytku zainteresowanych.

Dla rzutu stereograficznego, dostosowanego do warunkow geograficznych Polski, Wojskowy Instytut Geograficzny wydal "Odwzorowanie quasi-stereograficzne W.I.G.". We Francji sekcja geodezyjna Miedzynarodowej Unii Geodezyjnej i Geofizycznej opublikowala ten sam rzut dla warunkow francuskich, wedlug projektu M. Roussilha. Jednakowoz w oficjalnej kartografii francuskiej ten rzut nie przyjal sie, pomimo niezaprzeczalnych jego zalet, jak mniejsze niz w innych rzutach zniekształcenia, co umozliwia rozciagniecie jednolitego ukladu wspolrzednych prostokatnych na obszar o promieniu do 600 kilometrow. Glownym powodem odrzucenia stereograficznego rzutu bylo to, ze obszary w ktorych byla zainteresowana kartografia francuska znacznie przekraczaly obszar kola o promieniu 600 km, tymczasem gdy w rzucie Lamberta mozna objac waskim pasem cala kule ziemska. Nadto, rzut Lamberta wszedl juz w uzycie do konstrukcji wojskowych map francuskich od czasu ubieglej wojny.

Dla wiernokatnego rzutu stozkowego Lamberta istnieja tablice, wydane przez Service Geographique d'Armee, przez brytyjski G.S.G.S. i przez amerykanski Office of the Chief Engineers (Lambert Conical Ortomorphic Projection Tables).

Rzut Gauss-Krügera ma opracowanie niemieckie (Tafeln zum Deutschen Heeresgitter, I Teil), oraz rosyjskie tablice Numerowa z r. 1933.

Tablice stosowanych rzutow wiernokatnych zawieraja:

- -formuly rzutowe
- -stale wspolczynniki rozwiniecia funkcji w szeregi potegowe
- -wspolrzedne prostokatne X,Y dla danych w ustalonych odstepach
- -dane o zbieznosci poludnikowej, czyli o katach pod jakimi linie pionowe ukladu prostokatnego przecinaja poludniki na plaszczyznie rzutu
- -w niektorych wydawnictwach dodane sa dlugosci lukow poludnikow i rownoleznikow dla przyjetej elipsoidy.

Informacje o zbieznosci sa o tyle potrzebne, ze w terenie moze zajsc potrzeba wyznaczenia kierunkow osi ukladu prostokatnego. Droga do tego zwykle jest pomiar astronomiczny kierunku poludnika ziemskiego, z obserwacji gwiazd lub slonca. Majac kierunek poludnika w terenie i zbieznosc odrazu wiadomo, jak w terenie biegna osie ukladu.

Najprosciej przedstawia sie sprawa zbieznosci w rzucie stozkowym, gdyz tam wszystkie poludniki sa liniami prostymi. Zbieznosc w tym rzucie mamy z rownania:

(30) ..... $$Zb = \Delta\lambda \cdot \sin\varphi_0$$

W skosnym rzucie stereograficznym poludniki sa krzywymi i stad w kazdym punkcie obszaru rzutu, z wyjatkiem poludnika centralnego, zbieznosc bedzie inna. Rownanie na zbieznosc poludnikowa w stereograficznym rzucie obszaru Polski ($\varphi_0 = 52^\circ$) ma kształt:

(31) ..... $$\operatorname{tang} Zb = \frac{\sin\Delta\lambda \sin\frac{52^\circ + \varphi}{2}}{\cos^2 l}$$, gdzie $\operatorname{tang} l = 0{,}64$.

Zbieznosc poludnikowa w rzucie Gauss-Krügera, gdzie poludniki sa takze liniami krzywymi, otrzymuje sie nastepujaco:

(32) ..... $$\log Zb = \log l \sin\varphi + \frac{M}{3\rho^2} \cdot l^2 \cos^2\varphi$$

gdzie $l = \frac{y}{N\cos\varphi} - \frac{y^3}{6N^3\cos\varphi}\left(1 + 2\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi\right) + \cdots$, M = modul log zw., ρ = radian

Tablice rzutow maja za zadanie uproscic i przyspieszyc obliczanie wspolrzednych plaskich dla danych punktow trygonometrycznych o znanych oraz dopomoc w matematycznej konstrukcji map topograficznych. To ostatnie zagadnienie polega na wyznaczeniu przebiegu siatki geograficznej na plaszczyznie mapy, albo odwrotnie, na wkresleniu siatki prostokatnej na tle istniejacej siatki geograficznej, dalej na dokladnym umiejscowieniu na mapie pomierzonych trygonometrycznie punktow i wreszcie na podaniu zbieznosci poludnikowych dla kazdego punktu mapy.

Kompletne opracowanie rzutu powinno zawierac tablice i wykresy do redukcji kierunkow i odleglosci na skutek zniekształcen, uwzglednianych w pomiarach triangulacyjnych na duzych obszarach. W Polsce, tablice takie dla rzutu stereograficznego W.I.G. byly opublikowane w 1939 roku w osobnej instrukcji.

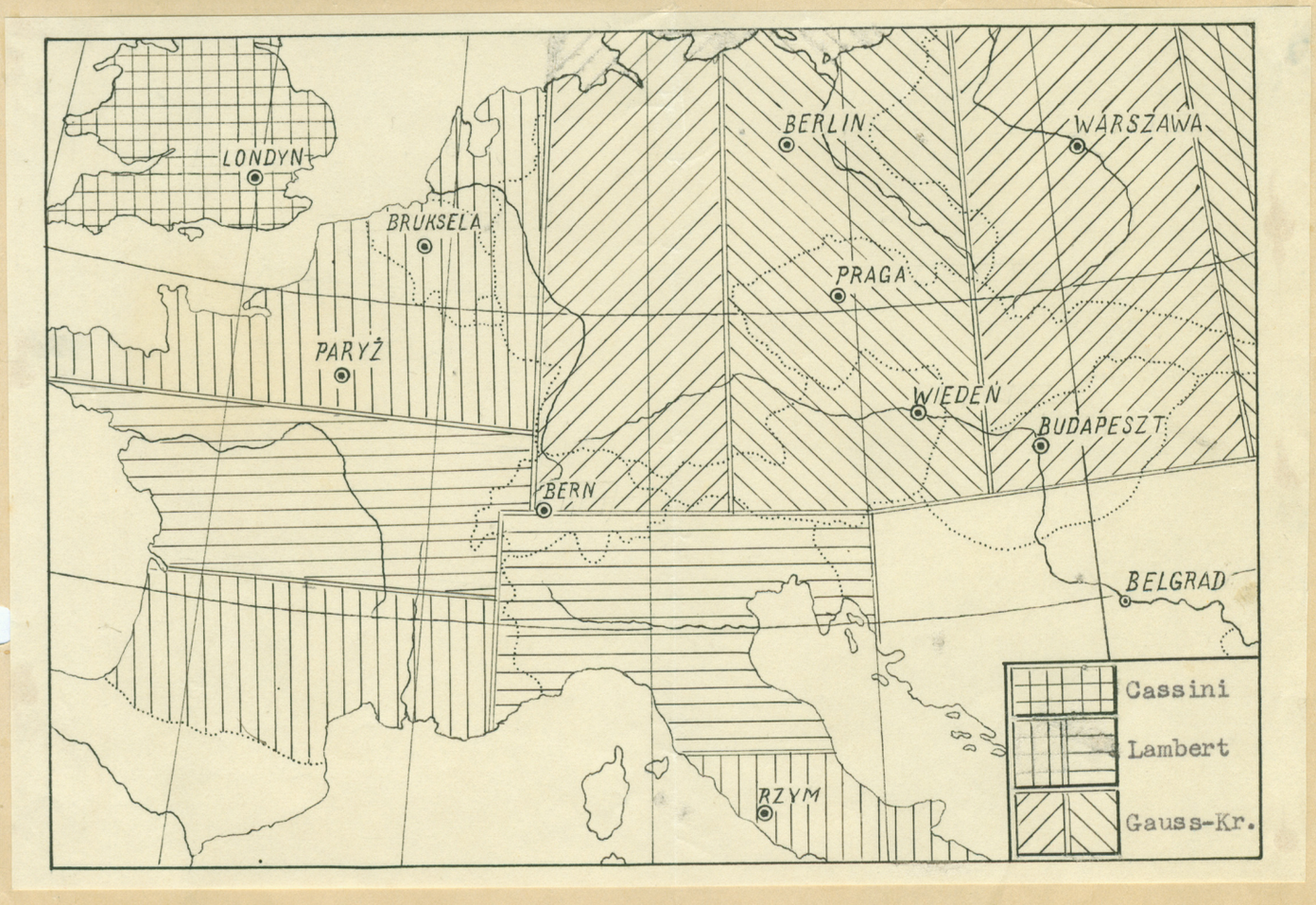
KONSTRUKCJA MAP TOPOGRAFICZNYCH W WOJNIE 1939 - 45.

Wszystkie cywilizowane kraje swiata, a w tym takze panstwa europejskie zostaly juz skartowane w stopniu dostatecznie dokladnym dla badan rzeźby terenu, hydrografii, stanu zalesienia, rodzaju i rozmieszczenia osiedli a przedewszystkiem kołowej sieci komunikacyjnej. Jednakze mapy te, m a p y t o p o g r a f i c z n e opracowywane byly w roznych okresach i roznymi metodami i nie sa ani w jednakowych skalach i formatach, ani w tychsamych rzutach, co w rezultacie stworzylo skomplikowana mozaike nawet na stosunkowo niewielkich przestrzeniach.

Znaczna czesc map europejskich zostala opatrzona w okresie 1920-1940 r. w siatki prostokatne, lecz te siatki nalezały do rozmaitych rzutow i na stykach układow tworzyly uskoki i załamania, ktore musiano pozostawic nierozwiazane z braku niezbednych pomiarow uzupełniających a w niektorych wypadkach z braku teoretycznych opracowan na przejscie z jednego układu na inny.

Z rozpoczeciem działan wojennych w 1939 roku, ktore z czasem miały ogarnac ogromne obszary, potrzeba było te sprawy uporządkowac, aby poruszające sie w terenie wojska otrzymały możliwie jednolite mapy, konieczne tak ze względów szkoleniowych jak i ułatwień w zrozumieniu terenow walki. Chodziło o przerobienie istniejącego materiału kartograficznego na jednakowe skale i na jednego typu rzut kartograficzny.

Prace te po stronie narodow Sprzymierzonych pierwsza rozpoczela Francja. W Service Geographique d'Armee na początku 1940 roku zamierzano rozciągnąć równoleżnikowe pasy stożkowego rzutu Lamberta poprzez cała Europę.



Rys. 9. Aljanckie uklady prostokatne dla Europy.

Po upadku obrony Francji, prace nad zestawieniem i unifikacja map dla przypuszczalnych terenow operacji wojennych przejela sekcja geograficzna brytyjskiego sztabu generalnego, oraz w jakis czas potem kartograficzna sluzba armii Stanow Zjednoczonych.

Rownoczesnie z zebraniem i skatalogowaniem dostepnych materialow geodezyjnych i mapowych, Brytyjczycy w porozumieniu z Amerykanami opracowali nastepujace zasady rzutowe dla pomiarow i kartografii:

1. Mapa taktyczna do powszechnego uzytku wojsk ladowych ma byc w skali 1:50 000, mapa operacyjna lotniczo-ladowa (Air/Army) w skali 1:250 000, zas mapa szczegolowa, dla terenow gdzie przewiduje sie doniosle lub dlugotrwale dzialania - w skali 1:25 000.

2. Wszystkie wydane mapy nalezy opatrzyc w siatki km, opisane wedlug jednolitego systemu. Do oznaczania wspolrzednych przyjac klucz jednoliczbowy, zlozony z parzystej grupy cyfr. Pierwsza polowa grupy oznacza wspolrzedna pozioma (Easting, Wschodnia), druga zas pionowa (Northing, Polnocna). Obie polowy rozpoczynaja sie od dziesiatkow km. Dwuznaczne znakowanie przez X,Y odrzucono, co rowniez zrobili u siebie Niemcy, wprowadzajac terminy Hochwert i Rechtwert. Kwadraty siatki 100x100 km oznaczac duzymi literami alfabetu, a kwadraty 500x500 km - malymi, co w krotszy sposob zastepuje podawanie setek i tysiecy km we wspolrzednych.

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
L	M	N	O	P	L	M	N	O	P
Q	R	S	T	U	Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
L	M	N	O	P	L	M	N	O	P
Q	R	S	T	U	Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z	V	W	X	Y	Z

3. Wprowadzic jeden rzut wiernokatny, opracowac w tym rzucie mapy i katalogi punktow trygonometrycznych. Pospiech i przymus oszczedzania pracy sklonil Brytyjczykow do pozostawienia obszaru Niemiec w pierwotnych ukladach Gaussa, tymbardziej, ze na wschodzie Rosjanie przyjeli ten sam rzut, pokrywajacy sie w ukladach pasowych 6-cio stopniowych z wojennymi ukladami niemieckimi (Heeresgitter). Dla pozostalych obszarow Europy przyjeto opracowany przez Francuzow wiernokatny rzut stozkowy Lamberta. Na wlasnych wyspach stary system wspolrzednych zostawiono bez zmian. Ostatecznie, na terenach operacyjnych Europy powstaly nastepujace uklady:

-Rzut Lamberta: francuskie uklady (zony) Nord de Guerre, Lambert I, II i III, wloski polnocny i poludniowy i dwa naddunajskie.

-Rzut Gauss-Krügera w 6-cio stopniowych pasach niemieckich z poludnikami 9, 15, 21 w srodku kazdego pasa i dalszych rosyjskich, zbudowanych analogicznie.

Linie kilometrowe siatek we wszystkich ukladach ponumerowano tak, by w zadnym wypadku nie dostac wspolrzednych ujemnych.

4. Siatki km drukuje sie na mapach w kolorach raz na zawsze ustalonych, dobranych tak, by na granicach ukladow kolory sasiadujacych siatek zawsze byly rozne.

5. Dane o deklinacji magnetycznej i o zbieznosci poludnikow w rzucie umieszcza sie na kazdym arkuszu mapy, w kazdej skali.

Zasieg poprzeczny ukladow pasowych jest ograniczony dopuszczalnym zniekształceniem 1:1000, co w rzucie Lamberta (zniekształcenie dlugosciowe X=2R) i tak samo w rzucie Gauss-Krügera (zniekształcenie Y=2R) pozwala na rozbudowe pasow na szerokosc 550 km.

Istniejace w Europie inne rzuty zostaly pominiete, a wsrod nich i polski rzut quasi-stereograficzny WIG. Wydajac mapy wojenne obszaru Polski metoda przedruku z polskich materialow, obie walczace strony umieszczaly siatki podwojne: Gauss-Krügera i oryginalna polska, ale w opracowaniach wykreslanych nanowo pierwotnej siatki juz nie ma.

Wklad pracy, jaki przypadl w czasie wojny na pomiary i sporzadzenie map przerastal wszystko, co dotychczas w tej dziedzinie dokonano, jesli policzyc rozporządzalny czas. Ilosc wydrukowanych arkuszy map doszla do setek milionow, do prac pomiarowych, kreslarskich i drukarskich wciagnieto dziesiatki tysiecy wykwalifikowanych specjalistow, wyszkolono i wyposazono liczne polowe jednostki pomiarowe, zmobilizowano prywatne zaklady graficzne i zorganizowano wspolprace z lotnictwem do fotografowania terenu, wspolprace z zakladami i stowarzyszeniami geograficznymi.

Ale rezultaty calego tego wysilku w koncowym momencie działan wojennych dalekie byly od doskonalosci. Rozmiary pracy przekraczaly nawet tak potezne srodki, jakimi dysponowali Alianci: wystarczy uswiadomic sobie, ze na kompilacje, wykreslenie, rewizje i druk jednego arkusza mapy 1:50 000 srednio potrzeba 250 prac/dni, a takich arkuszy, na pokrycie czesci Europy od morz do poludnika 24 bez polwyspow Skandynawskiego i Pirenejskiego wypada przeszlo 3 tysiace. To tez nieraz zadawalniano sie pospiesznym przedrukiem starych map, z nowa siatka kilometrowa.

Nastepnym powaznym utrudnieniem byla niejednolitosc istniejacych podstawowych sieci triangulacyjnych, powstala z powodu niejednakowych elipsoid odniesienia, roznego zorientowania sieci w terenie, nierownych wzorcow do pomiarow dlugosci i roznego stopnia dokladnosci pomiarow.

Doprowadzenie kartografii do jednolitosci wymaga lat pomiarow, studjow i rachunkow, mozliwych wtedy, gdy powroci pokoj i entuzjazm do tworczej pracy.